

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Українець Олег Захарович

УДК 517.96:519.865|:519.67

Дисертація
Математичне моделювання природничих процесів та
економічних систем під дією збурень

113 – Прикладна математика

11 – Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

 О. З. Українець

Науковий керівник: Бігун Ярослав Йосипович, доктор фізико-математичних
наук, професор

Чернівці – 2026

АНОТАЦІЯ

Українець О. З. Математичне моделювання природничих процесів та економічних систем під дією збурень. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 – "Прикладна математика". – Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, 2026.

Дисертаційна робота присвячена побудові і дослідженню математичних моделей під дією багаточастотних збурень із запізненнями аргументу, які задаються на відрізку $[0, L]$ лінійно перетвореними аргументами $\lambda_\nu \tau$, $\lambda_\nu < 1$ і $\theta_\nu \tau$, $\theta_\nu < 1$; математичному моделюванню імунної відповіді організму людини при інфекційних захворюваннях і моделі епідемії із врахуванням втрати імунітету під впливом екологічного фактору $E(t)$. Під фактором $E(t)$ розуміємо зважену суму різного роду забруднень як довкілля, так і соціально-психологічного характеру, які негативно впливають на перебіг інфекційного захворювання і сприяють поширенню епідемії. Досліджено також модель рівноважної економіки Ерроу–Дебре – класичну мікроекономічну модель загальної рівноваги, в якій споживачі й виробники взаємодіють на конкурентних ринках, а рівновага описується через існування цінового вектора, що забезпечує узгодженість попиту і пропозиції для всіх товарів. У дисертації запропоновані модифікації моделі Ерроу–Дебре з урахуванням цілочисельності товарних запасів та із врахування впливу оптових цін, що ґрунтується на апараті впорядкованих векторних просторів, векторних ґраток та різних узагальнень цінових функціоналів.

У роботі на підставі відомих математичних моделей запропоновані нові моделі, співавтором яких є автор дисертації. Кожна із запропонованих моделей описує певні процеси у природничих науках й економіці. Побудовані у розділах 2 і 3 математичні моделі є новими й актуальними для розв'язання прикладних задач в медичній практиці при дослідженні інфекційних захворювань, в епідеміології при аналізі і прогнозі епідемій,

в біології, екології, економіці та в інших галузях, які знаходяться під дією багаточастотних збурень або під впливом екологічного фактору. Узагальнення моделі Ерроу-Дебре, яке залежить від впливу системи цін і розподілу товарів, може знайти своє застосування у сучасній ринковій економіці.

Основними методами дослідження у роботі є аналітична та якісна теорії диференціальних рівнянь, комп'ютерне моделювання, методи функціонального аналізу. У розділі 2 застосований метод усереднення за фазовими змінними на кубі періодів цих змінних та принцип стискаючих відображень для доведення існування і єдиності розв'язку. У розділі 2 і 3 для дослідження стійкості застосовано критерії стійкості за першим наближенням, а для доведення існування розв'язку побудованих моделей – метод мажорантних рівнянь, комп'ютерне моделювання здійснювалось у системі Mathematica. У розділі 4 використані методи функціонального аналізу та топології, властивості ортогонально адитивних функціоналів.

Дисертаційна робота складається зі змісту, списку умовних позначень, вступу, чотирьох розділів, загальних висновків, списку посилань і додатків.

У першому розділі роботи зроблено огляд літератури за темою дисертації, викладено допоміжні поняття і твердження. Наведено опис моделей в імунології, звернуто увагу на базову модель імунної відповіді Г.І. Марчука, праць У. Фориш і М. Боднара щодо модифікації базової моделі на випадок сезонних впливів. Зроблено огляд моделей епідемічних процесів, зокрема класичної SIR-моделі, яка є наслідком моделі Кермака і МакКендрика, моделі К. Кука із врахуванням втрати імунітету. Така тематика розвивалася в багатьох напрямках, але не відомо, щоб в цих моделях був включений екологічний фактор. Крім того, наведено огляд праць, присвячених розвитку досліджень моделі Ерроу-Дебре, існування рівноважного стану та його властивостей з урахуванням різних модифікацій умов та факторів моделі.

Розділ 2 присвячений дослідженню методом усереднення за фазовими

змінними впливу багаточастотних збурень із запізненням аргументу на динаміку процесу, який описується системою диференціальних рівнянь із лінійно перетвореними аргументами. Такі моделі широко використовуються в екології й відображені в монографіях Я. Куанга, К. Гопалсамі, Х. Сміта, Дж. Хейла, А. Мишкіса і В. Колмановського та багатьох інших авторів. Але в цих моделях не розглядалися багаточастотні збурення. Під багаточастотними збуреннями розуміємо складний коливний процес із багатьох гармонік, в процесі еволюції якого може виникнути резонанс частот. Методика досліджень, запропонована А.М. Самойленком, розвинута для звичайних диференціальних рівнянь в працях Р.І. Петришина. Багаточастотні системи рівнянь із запізненням аргументу методом усереднення досліджувались в працях Я.Й. Бігуна. У даній дисертаційній роботі метод усереднення застосований для збурень, асимптотика яких може бути і дробовою, отримано ефективну оцінку методу усереднення, яка явно залежить від показників асимптотики збурень і кількості фазових змінних та запізнень у них. На моделі хижак-жертва проілюстровано динаміку розв'язку моделі у залежності від величини збурення.

У розділі 3 дисертації побудовано і досліджено модель імунної відповіді та епідемії, в яких враховано вплив екологічного фактору на перебіг процесів. Доведено існування і єдиність розв'язку, встановлено умови його невід'ємності, що важливо для адекватності моделей. Знайдено стаціонарні розв'язки та умови їх існування і дано їх медичну інтерпретацію. В моделі імунної відповіді встановлено коефіцієнтні умови локальної асимптотичної стійкості стаціонарного розв'язку, який відповідає стану здорового організму. Знайдено оцінку величини інфікування, при якій не відбувається розвитку інфекційного захворювання. В моделі епідемії із впливом екологічного фактору отримано базове репродуктивне число, на підставі якого сформульовано твердження про відсутність епідемії. Проведено комп'ютерне моделювання побудованих моделей для ілюстрації впливу екологічного фактору на перебіг інфекційного захворювання і

поширення епідемії, яке може призвести до якісної зміни динаміки процесу.

Розділ 4 присвячений модифікаціям моделі рівноважної економіки Ерроу-Дебре з урахуванням дискретної природи товарних запасів та існування оптових цін. Запропоновано підхід, у якому роль цінових векторів відіграють зарядові функціонали на впорядкованій векторній ґратці товарних векторів, що дає змогу адекватно описувати ринки з довільною ґратковою структурою набору товарів. Побудовано загальну конструкцію комплементарного простору, на якому визначаються заряди, що формують порядково повну векторну ґратку й можуть інтерпретуватися як узагальнені цінові вектори. Для запропонованих модифікацій моделі доведено існування економічної рівноваги та досліджено її основні властивості. Отримані результати розширюють апарат теорії рівноваги для ринків з дискретними ресурсами та впливом оптових ціноутворень і можуть бути використані для подальшого математичного моделювання сучасних ринкових систем.

Теоретичне та практичне значення отриманих результатів.

Математичні дослідження у дисертаційній роботі мають як теоретичний характер, так і можуть бути застосовані при дослідженні нелінійних математичних моделей під дією багаточастотних збурень або екологічних впливів, задач ринкової економіки, мають практичне значення у різних прикладних задачах. Результати моделювання імунної відповіді можуть бути застосовані у медичній практиці для дослідження та прогнозування перебігу інфекційних захворювань і в епідеміології для аналізу й прогнозування епідемії за наявності впливу екологічного фактору. Нові модифікації моделі Ерроу-Дебре, які враховують цілочисельність товарних запасів і оптові ціни, можуть знайти своє застосування у моделюванні сучасної ринкової економіки під впливом різних факторів зовнішнього і внутрішнього впливу. Застосування комп'ютерного моделювання ілюструє отримані теоретичні результати і сприяє їх практичному застосуванню. Одержані результати відкривають шлях для узагальнення математичних моделей в природничих областях та економіці.

Ключові слова: математична модель, стаціонарний розв'язок, дискретна модель, біфуркація, динамічна система, стійкість, запізнення, диференціальне рівняння, популяція, комп'ютерне моделювання, імунна відповідь, векторна ґратка, латеральний порядок, ортогонально адитивний оператор, властивість перетинів.

ABSTRACT

Ukrainets O. Mathematical Modeling of Natural Processes and Economic Systems under the Influence of Perturbations. – Qualified scientific work on the rights of the manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Philosophy (PhD) in specialty 113 – "Applied Mathematics". — Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, 2026.

The dissertation is devoted to the construction and study of mathematical models under multifrequency perturbations with delayed arguments, where the delays are defined on the interval $[0, L]$ by linearly transformed arguments $\lambda_\nu \tau$, $\lambda_\nu < 1$, and $\theta_\nu \tau$, $\theta_\nu < 1$; to the mathematical modelling of the human immune response in infectious diseases and to an epidemic model that accounts for loss of immunity under the influence of an environmental factor $E(t)$. By the factor $E(t)$ we mean a weighted sum of various kinds of pollution, both of the physical environment and of a socio-psychological nature, which adversely affect the course of infectious disease and favour the spread of the epidemic. The work also examines the Arrow–Debreu general equilibrium model—the classical microeconomic model of general equilibrium in which consumers and producers interact on competitive markets, and equilibrium is characterised by the existence of a price vector that equates demand and supply for all goods. The dissertation proposes modifications of the Arrow–Debreu model that incorporate integer commodity stocks and the influence of wholesale prices, using the theory of ordered vector spaces, vector lattices, and various generalizations of price functionals.

In this work, on the basis of known mathematical models, new models are proposed of which the author of the dissertation is a co-author. Each of

the proposed models describes certain processes in the natural sciences and in economics. The mathematical models constructed in Chapters 2 and 3 are new and relevant for solving applied problems in medical practice in the study of infectious diseases, in epidemiology for the analysis and forecasting of epidemics, and in biology, ecology, economics and other fields that are subject to multifrequency perturbations or to the influence of an environmental factor. The generalization of the Arrow–Debreu model that depends on the influence of the price system and the distribution of goods may find application in the modern market economy.

The main research methods used in the work are the analytic and qualitative theory of differential equations, computer simulation, and methods of functional analysis. In Chapter 2, the method of averaging over phase variables on the cube of periods of these variables and the contraction mapping principle are applied to prove the existence and uniqueness of solutions. In Chapters 2 and 3, first-approximation (linearization) stability criteria are used to study stability, and the method of majorant equations is used to prove the existence of solutions of the constructed models; computer simulation was carried out in Mathematica. In Chapter 4, methods of functional analysis and topology are used, along with the properties of orthogonally additive functionals.

The dissertation consists of a table of contents, a list of notation, an introduction, four chapters, general conclusions, a list of references, and appendices.

The first chapter provides a review of the literature on the topic of the dissertation and presents auxiliary concepts and results. A description of models in immunology is given, with attention to the basic model of immune response due to G.I. Marchuk and to the works of W. Foryś and M. Bodnar on the modification of this basic model for the case of seasonal effects. A review of models of epidemic processes is given, in particular the classical SIR model, which is a consequence of the Kermack–McKendrick model, and the model of K. Cooke that accounts for loss of immunity. This line of research has been developed in many directions, but it is not known that an environmental factor has been incorporated in such models.

In addition, the study includes a review of works devoted to the development of research on the Arrow–Debreu model, the existence of an equilibrium state, and its properties under various modifications of the conditions and factors of the model.

Chapter 2 is devoted to the study, by the method of averaging over phase variables, of the effect of multifrequency perturbations with delayed argument on the dynamics of a process described by a system of differential equations with linearly transformed arguments. Such models are widely used in ecology and are presented in the monographs of Y. Kuang, K. Gopalsamy, H. Smith, J. Hale, A. Myshkis and V. Kolmanovskii, and many other authors; however, multifrequency perturbations were not considered in these models. By multifrequency perturbations we mean a complex oscillatory process comprising many harmonics, in whose evolution frequency resonance may occur. The research methodology proposed by A.M. Samoilenko was developed for ordinary differential equations in the works of R.I. Petryshyn. Multifrequency systems of equations with delayed argument were studied by the averaging method in the works of Y.Y. Bihun. In the present dissertation, the averaging method is applied to perturbations whose asymptotics may be fractional as well; an effective estimate for the averaging method is obtained that depends explicitly on the exponents of the asymptotics of the perturbations and on the number of phase variables and delays in them. The dynamics of the solution is illustrated on a predator–prey model as a function of the magnitude of the perturbation.

Chapter 3 of the dissertation constructs and studies a model of immune response and an epidemic model in which the influence of an environmental factor on the course of the processes is taken into account. Existence and uniqueness of a solution are proved, and conditions for its nonnegativity are established, which is important for the adequacy of the models. Stationary solutions are found together with conditions for their existence, and their medical interpretation is given. In the immune-response model, coefficient conditions for local asymptotic stability of the stationary solution corresponding to the state of a healthy organism are

established. An estimate is obtained for the level of infection below which the infectious disease does not develop. In the epidemic model with environmental influence, the basic reproduction number is derived, and on this basis a result on the absence of an epidemic is formulated. Computer simulation of the constructed models is carried out to illustrate the effect of the environmental factor on the course of the infectious disease and the spread of the epidemic, which may lead to a qualitative change in the dynamics of the process.

Chapter 4 is devoted to modifications of the Arrow–Debreu equilibrium model that take into account the discrete nature of commodity stocks and the presence of wholesale prices. An approach is proposed in which the role of price vectors is played by charge functionals on the ordered vector lattice of commodity vectors, which makes it possible to describe markets with an arbitrary lattice structure of the commodity set in an adequate way. A general construction of a conjugate space is given, on which charges are defined that form an order complete vector lattice and can be interpreted as generalized price vectors. For the proposed modifications of the model, the existence of an economic equilibrium is proved and its main properties are studied. The results extend the framework of equilibrium theory to markets with discrete resources and with the influence of wholesale price formation, and can be used for further mathematical modelling of modern market systems.

Theoretical and practical significance of the results. The mathematical research in the dissertation is both theoretical in character and applicable to the study of nonlinear mathematical models under multifrequency perturbations or environmental influences, and to problems of market economy; it has practical significance in various applied settings. The results of the immune-response modelling can be used in medical practice for the study and forecasting of the course of infectious diseases, and in epidemiology for the analysis and forecasting of epidemics when an environmental factor is present. The new modifications of the Arrow–Debreu model that allow for integer commodity stocks and wholesale prices may find application in the modelling of the modern market

economy under the influence of various external and internal factors. The use of computer simulation illustrates the theoretical results obtained and supports their practical application. The results open the way for further generalization of mathematical models in the natural sciences and in economics.

Key words: mathematical model, stationary solution, discrete model, bifurcation, dynamical system, stability, time delay, differential equation, population, computer modeling, immune response, Riesz space, lateral order, orthogonally additive operator, intersection property.

Список публікацій за темою дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

Наукові праці у виданнях, включених до переліку наукових фахових видань України:

1. Бігун Я.Й., Українець О.З., Скутар І.Д. Усереднення в математичних моделях під дією багаточастотних збурень із запізненням. Міжнародний науково-технічний журнал «Проблеми керування та інформатики». 2024. Т. 69, № 1. С. 34–42. (*Внесок авторів: Я.Й. Бігуну належить постановка задачі та обговорення результатів; О.З. Українцю належить формулювання і доведення тверджень; І. Д. Скутару належить участь у формулюванні прикладу*).

2. Попов М.М., Українець О.З. Цілочисленні товарні вектори у моделі економіки Ерроу-Дебре. Буковинський математичний журнал. 2024. Т. 12, № 2. С. 182-189. (*Внесок авторів: М.М. Попову належить формулювання Твердження 1 і Твердження 2; О.З. Українцю належить формулювання і доведення Теорема 1*).

3. Українець О.З. Неперервні скалярні заряди на ℓ_0 із застосуванням до моделі економіки Ерроу-Дебре. Буковинський математичний журнал. 2025. Т. 13, № 1. С. 66–82.

4. Бігун Я. Й., Українець О. З. Математичне моделювання поширення епідемії із врахування екологічного фактору. Науковий вісник

Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика». 2025. Т. 47, № 2. С. 126–135. (*Внесок авторів: Я.Й. Бігуну належить постановка задачі і визначення схеми досліджень; О.З. Українцю належить обґрунтування, доведення теорем та комп'ютерне моделювання*).

5. Бігун Я. Й., Українець О. З. Математична модель впливу забруднення зовнішнього середовища на імунну відповідь організму людини. Буковинський математичний журнал. 2025. Т. 13, № 2. С. 114-124. (*Внесок авторів: Я.Й. Бігуну належить постановка задачі і обговорення результатів досліджень; О.З. Українцю належить формулювання та доведення теорем, комп'ютерне моделювання*).

Наукові праці у періодичних наукових виданнях, проіндексованих у наукометричній базі даних Scopus:

6. Fotiy O., Popov M., Ukrainets O. A characterization of F-spaces containing an isomorph of ℓ_0 . Carpathian Mathematical Publications. 2025. Vol. 17, no 1. P. 146. (*Внесок авторів: О.Г. Фотій належить твердження 1 і 2, а також приклад 1; М.М. Попову належить формулювання і доведення Теорему 1; О.З. Українцю належить участь у доведенні Теорему 1, формулювання прикладу 2, прикладу 3 та їх доведення*). (*Scopus, Q1 – <https://www.scimagojr.com/journalssearch.php?q=21100925710&ti p=sid&clean=0>*)

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Українець О. З. Усереднення в математичних моделях під дією багаточастотних збурень із запізненням. Міжнародна науково-практична конференція : тези доповідей, м. Софія, 31 січ. – 2 лют. 2024 р. / International Scientific Unity. М. Софія, 2024. С. 263–266.

2. Bihun Y., Ukrainets O. Mathematical modelling of immune response to infectious diseases with ecological factor. International Conference IMCS-60 : proceedings, Chisinau, Republic of Moldova, October 10–13, 2024 / Vladimir Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science, Moldova State University. Chisinau, 2024. P. 151–154. (*Внесок авторів: Я.Й. Бігуну*

належить постановка задачі і обговорення результатів досліджень, наслідок 2.1; О.З. Українцю належить формулювання та доведення теорем 1 та 2)

3. Bihun Y., Ukrainets O. Mathematical modeling of the body's immune response to infectious disease with external factors. Modeling, Control and Information Technologies : proceedings of the VII International Scientific and Practical Conference, Rivne, Ukraine, November 7–9, 2024 / National University of Water and Environmental Engineering. Rivne, 2024. P. 223–224. *(Внесок авторів: Я.Й. Бігуну належить обговорення результатів досліджень та наслідок; О.З. Українцю належить формулювання та доведення теорем, числове моделювання результатів)*

4. Bihun Y., Ukrainets O. Modelling of immune response with ecological factor. Applications of Mathematics in Biology and Medicine : XXX National Conference (International Edition), Wikno, Poland, September 16–20, 2025 / University of Warmia and Mazury; Institute of Applied Mathematics and Mechanics, University of Warsaw. Wikno, 2025. P. 7–8. *(Внесок авторів: Я.Й. Бігуну належить участь у постановці задачі; О.З. Українцю належить побудова та дослідження математичної моделі)*

5. Бігун Я., Українець О. Математичне моделювання впливу забруднення довкілля на епідемічний процес. Modeling, Control and Information Technologies : proceedings of the International Scientific and Practical Conference, Rivne, Ukraine, 6-8 November / National University of Water and Environmental Engineering. Rivne, 2025. № 8. С. 278–279. *(Внесок авторів: Я.Й. Бігуну належить обговорення результатів досліджень; О.З. Українцю належить формулювання та доведення теореми, комп'ютерне моделювання)*

6. Bihun Y., Ukrainets O., Patratii M. Asymptotic stability of solutions to an immune-response model under the influence of an environmental factor. Ukraine Mathematics Conference At the End of the Year 2025 : proceedings, Kyiv, December 18–19, 2025 / Taras Shevchenko National University of Kyiv. Kyiv,

2025. Р. 90. (*Внесок авторів: Я.Й. Бігуну та М.В. Патратій належать обговорення практичного застосування результатів досліджень; О.З. Українцю – побудова і дослідження математичної моделі*)

Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертації:

1. Popov M., Ukrainets O. A maximal Riesz-Kantorovich theorem with applications to markets with an arbitrary commodity set. *Matematychni Studii*. 2024. Vol 62, No 2. Р. 199-210. (*Внесок авторів: М.М. Попову належить формулювання і доведення Теорем 1, 2; О.З. Українцю належить формулювання прикладів і участь у доведенні Теорему 3*).

2. Bihun Y., Ukrainets O. Mathematical modelling of the immune response to infectious diseases with the influence of environmental factors. *Acta et Commentationes, Exact and Natural Sciences*. 2024. Vol. 18, No. 2. Р. 7-17. (*Внесок авторів: постановку задачі та обговорення результатів досліджень здійснив Я.Й. Бігун; О.З. Українець виконав формулювання і доведення теорем, а також комп'ютерне моделювання*).

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	17
ВСТУП	18
РОЗДІЛ 1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ПОПЕРЕДНІ	
 ВІДОМОСТІ	25
1.1 Моделювання впливу екологічного фактору	25
1.2 Метод усереднення у математичних моделях під дією	28
багаточастотних збурень із запізненням аргументу ...	
1.3 Математичне моделювання епідемій	33
1.4 Математичне моделювання імунної відповіді	35
організму людини при інфекційних захворюваннях...	
1.5 Модель економіки Ерроу-Дебре	37
1.6 Висновки до розділу 1	43
РОЗДІЛ 2 УСЕРЕДНЕННЯ У МАТЕМАТИЧНИХ	44
 МОДЕЛЯХ ПІД ДІЄЮ	
 БАГАТОЧАСТОТНИХ ЗБУРЕНЬ ІЗ	
 ЗАПІЗНЕННЯМ АРГУМЕНТУ	
2.1 Постановка задачі	44
2.2 Обґрунтування методу усереднення	46
2.3 Умови вздовж розв'язку усередненої системи	50
2.4 Приклад	53
2.5 Висновки до розділу 2	58
РОЗДІЛ 3 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ	60
 В ІМУНОЛОГІЇ ТА ЕПІДЕМІОЛОГІЇ	
 ІЗ ВРАХУВАННЯМ ЕКОЛОГІЧНОГО	
 ВПЛИВУ	
3.1 Модель імунної відповіді організму людини на вірусну	60
інфекцію з урахуванням екологічного впливу	

3.1.1	Екологічний фактор	60
3.1.2	Математична модель імунної відповіді	62
3.1.3	Невід'ємність розв'язку моделі	64
3.1.4	Існування і єдиність розв'язку	65
3.1.5	Стаціонарні розв'язки та їх стійкість	66
3.1.6	Асимптотична стійкість стану здорового організму	68
3.1.7	Числове моделювання	71
3.2	Математична модель поширення епідемії в популяції	75
3.2.1	Математична модель.....	75
3.2.2	Невід'ємність розв'язку моделі	77
3.2.3	Існування і єдиність розв'язку	78
3.2.4	Стани рівноваги моделі	79
3.2.5	Стійкість стаціонарних розв'язків і уникнення епідемії	80
3.2.6	Комп'ютерне моделювання	82
3.3	Висновки до розділу 3	84
 РОЗДІЛ 4. ДЕЯКІ МОДИФІКАЦІЇ УМОВ КЛАСИЧНОЇ МОДЕЛІ РІВНОВАЖНОЇ ЕКОНОМІКИ ЕРРОУ-ДЕБРЕ		
		86
4.1	Постановка задачі модифікації моделі Ерроу-Дебре ..	86
4.2	Модель економіки Ерроу-Дебре з цілочисельними товарними векторами	94
4.2.1	Випадок цілочисельних товарних векторів	94
4.2.2	Коротке доведення версії теореми Ерроу-Дебре для випадку цілочисельних товарних векторів	95
4.3	Версія моделі економіки Ерроу-Дебре з довільними товарними векторами	99
4.3.1	Комплементарні простори	101
4.3.2	Латеральний порядок на векторних ґратках	101

4.3.3	Основні поняття та позначення	101
4.3.4	Важливі приклади	104
4.3.5	Вибрані властивості комплементарних просторів ...	106
4.3.6	Заряди на комплементарних просторах	106
4.3.7	Модель типу Ерроу-Дебре з комплементарним простором товарних векторів	110
4.4	Існування максимальних товарних векторів бюджетних множин у порядковому інтервалі $[0, f_0]$, де $f_0 \in L_0$	115
4.4.1	Приклади ненульових скалярних неперервних зарядів на комплементарному просторі L_0	115
4.4.2	Оператори ϵ -штрихування	118
4.4.3	Розв'язання задачі 2	120
4.4.4	Застосування до моделі економіки Ерроу-Дебре	126
4.5	Висновки до розділу 4	132
ВИСНОВКИ		134
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ		136
ДОДАТКИ		148

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$	множина натуральних чисел;
$\mathbb{Z}$	множина цілих чисел;
$\mathbb{R}$	множина дійсних чисел;
$\mathbb{R}_+$	множина $[0, +\infty)$;
$\mathbb{C}$	множина комплексних чисел;
$\emptyset$	порожня множина;
$Re(z)$	дійсна частина комплексного числа z ;
$Im(z)$	уявна частина комплексного числа z ;
i	уявна одиниця ($i^2 = -1$);
$\ \cdot\ $	норма в $\mathbb{R}^n$ або відповідна норма у просторі матриць;
$\ l\ _{\Theta}$	$\theta_1\ k_1\ + \dots + \theta_q\ k_q\ $, $\theta_\nu \in \mathbb{R}_+$, $l_\nu \in \mathbb{R}^m$;
I_n	квадратна одинична n -вимірна матриця;
$C[a, b]$	простір неперервних функцій на $[a, b]$, $\ f\ = \max_{t \in [a, b]} f(t) $;
$C_{x,y}^p(G, \sigma)$	простір функцій, які мають неперервні похідні до p -го порядку включно за змінними x, y , та обмежені в G разом із похідними сталою $\sigma > 0$;
L_p	векторна ґратка класів еквівалентності вимірних функцій на відрізку $[0, 1]$, інтегровних зі степенем $p \geq 1$;
$\preceq$	знак нестрогого часткового порядку;
$\sqsubseteq$	знак латерального порядку на векторній ґратці;
$(G, \preceq)$	комплементарний простір;
L_0	векторна ґратка всіх класів еквівалентності вимірних функцій на відрізку $[0, 1]$;
$x_\lambda(\tau)$	$x(\lambda\tau)$, $0 < \tau \leq 1$;
$x_\Lambda(\tau)$	$(x_{\lambda_1}(\tau), \dots, x_{\lambda_n}(\tau))$;
(x, y)	$x_1y_1 + \dots + x_ny_n$;

ВСТУП

Актуальність теми. Математичне моделювання стало неодмінною складовою пізнання, прогнозування й управління процесами і об'єктами. Крім традиційних областей, таких як механіка, економіка, біологія, екологія, математичні моделі все ширше застосовуються в медицині, генетиці, військовій галузі, науці про нейрони та в інших областях.

Успішно розвивається моделювання в екології для дослідження взаємодії популяцій, динаміки і стійкості екологічних систем, охорони природи. Цій тематиці присвячені численні монографії, починаючи з А. Лотки і В. Вольтерри, пізніше Я. Куанга, К. Гопалсамі, К. Кука, праць українських математиків І.М. Ляшенка, Д.Я. Хусаїнова, А.В. Шатирка, В.Г. Маценка та інших математиків. Однак внаслідок кліматичних змін спричиняються зміни екосистем, що зумовлює введення доповнень до вже відомих моделей. Одним із факторів таких змін, підсилених діяльністю людей, є забруднення довкілля, стресові ситуації в суспільстві, різноманітні коливні процеси, які негативно впливають на динаміку популяцій й епідемій, імунну відповідь людини на інфекційні захворювання, економічні ринки. Такий фактор враховано у дисертації в моделях імунної відповіді та епідемій.

Однією з основних моделей імунної відповіді людини при інфекційних захворюваннях є модель, запропонована Г.І. Марчуком. Розвиток цієї моделі відображено в працях У. Фориш, М. Боднара, А.Я. Бомби, С.В. Барановського, В.П. Марценюка та інших, але в існуючі моделі не враховано вплив фактору забруднення, що ослаблює відповідь імунної системи людини. Моделі адаптовані для різних інфекційних захворювань, зокрема, пневмонії, туберкульозу, гепатиту В і С.

Пандемія коронавірусної хвороби COVID-19 стимулювала розвиток нових досліджень у математичній епідеміології. До монографій з моделювання епідемії авторів М. Марчевої, Ф. Брауера, О. Аріно, З. Ма і Ц. Лі додалися численні дослідження вказаної пандемії, зокрема, в працях В. Ванга, У. Ху та багатьох інших, українських науковців І.

Несторука, І. Черевка. Із медичної практики і, як зазначено в монографії Р.М. Андерсона та Р.М. Мея, на динаміку епідемії впливає екологічний фактор, який врахований в моделі епідемії у дисертаційній роботі.

Для адекватності математичних моделей важливо врахувати фактор запізнення. У моделі імунної відповіді – це час формування каскаду плазмоклітин, в моделях епідемії – це час втрати імунітету й інкубаційний період, як в моделі малярії К. Кука. Фактор запізнення у моделях біології, екології та інших науках запроваджено у працях Я. Куанга, Х. Сміта, О. Аріно, Т. Ернеукса, Е. Мюррея, М. Лакшманана та інших.

Ще одним фактором впливу на еволюцію динамічних систем є багаточастотні збурення, які можуть вплинути на динаміку процесу на досить великих часових інтервалах. Дослідженню багаточастотних систем методом усереднення присвячені праці А.М. Самойленка, Р.І. Петришина, для систем диференціальних рівнянь із запізненням із багатоточковими та інтегральними умовами – праці Я.Й. Бігуна, І.В. Краснокутської, І.М. Данилюка, І.Д. Скутаря.

Моделювання економічних систем і процесів є однією із найбільш активних сфер застосування математичних моделей та аналізу. Модель економіки Ерроу-Дебре вважається фундаментальною моделлю у мікроекономічній теорії, яка визначає умови, за яких одночасно встановлюється загальна рівновага цін і обсягів виробництва та споживання.

Адаптації та модифікації умов моделі Ерроу-Дебре присвячено численні сучасні праці, зокрема у роботі С. Фраттіні проаналізовано взаємозв'язок процентної ставки, прибутку та заощаджень у моделі, у роботі Х. Янга і С. Лі враховано фактор виробництва, авторів А. Тода і К. Уолш систематизували новітні досягнення щодо унікальності та множинності конкурентної (general) рівноваги у моделях та ін.

У дисертаційній роботі розглянуто деякі модифікації даної моделі, зокрема, з умовою цілочисельної кількості товарів та з використанням зарядів (ортогонально адитивних функціоналів) для урахування впливу оптових цін

у ринкових процесах. Використовується поняття комплементарного простору, яке дозволяє розглядати ринки різних товарів як загальніший об'єкт.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертація виконана на кафедрі прикладної математики та інформаційних технологій Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича згідно з науково-дослідною темою «Математичне моделювання і числово-аналітичні методи дослідження динамічних та інформаційних процесів», номер державної реєстрації 0121U100117.

Мета і завдання дослідження. Метою дисертації є побудова і дослідження нових математичних моделей нелінійних процесів із врахуванням впливу екологічних факторів, багаточастотних збурень та дослідження нових умов у моделях економічної рівноваги ринку.

Завданнями дослідження була побудова та обґрунтування нових нелінійних математичних моделей із врахуванням багаточастотних збурень із запізненням, впливом екологічних факторів в процесах імунної відповіді при інфекційних захворюваннях та процесу епідемії із втратою імунітету, оцінка величини початкового інфікування для запобігання інфекційного захворювання, проведення комп'ютерного моделювання побудованих моделей в імунології й епідеміології, обґрунтування і дослідження модифікації моделі економіки Ерроу-Дебре з урахуванням цілочисельного розподілу товарів та впливом оптових цін, аналіз існування і властивостей рівноваги ринку із запропонованими змінами.

Об'єкт дослідження: системи звичайних диференціальних рівнянь із запізненням аргументу, які є математичними моделями нелінійних процесів в природничих областях (екології, біології, імунології, епідеміології та ін.); модель економіки Ерроу-Дебре.

Предмет дослідження: побудова математичних моделей та умови існування і єдиності їх розв'язків, обґрунтування методу усереднення у моделях під дією багаточастотних збурень, знаходження та встановлення умов існування і стійкості стаціонарних розв'язків, інтерпретація отриманих

результатів, комп'ютерне моделювання моделей; умови існування та властивості ринкової рівноваги в модифікованій моделі економіки Ерроу-Дебре з цілочисельним розподілом товарів та з використанням ортогонально адитивних функціоналів на комплементарних просторах.

Методи дослідження: методи дослідження стійкості за першим наближенням, метод кроків для диференціальних рівнянь із запізненням, метод усереднення за фазовими змінними, метод мажорантних рівнянь, комп'ютерне моделювання в системі Mathematica, методи функціонального аналізу та топології.

Наукова новизна отриманих результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, такі:

1. Методом усереднення за фазовими змінними досліджується вплив багаточастотних збурень в нелінійній моделі із запізненням, заданим лінійно перетвореними аргументами, отримано умови існування і єдиності розв'язку та оцінку похибки методу усереднення, яка явно залежить від малого параметра і кількості фазових змінних та запізнень у них.

2. Вперше побудована математична модель імунної відповіді організму людини при інфекційних захворюваннях із впливом екологічних факторів, знайдено стаціонарні розв'язки та умови їх існування, вказано достатні умови стійкості розв'язку, який відповідає стану здорового організму.

3. Модифіковано SIR-модель епідемії на випадок впливу екологічного фактору, отримано базове репродуктивне число й достатні умови відсутності спалаху епідемії.

4. У моделі імунної відповіді із впливом екологічного фактору знайдено оцінку (імунологічний бар'єр) для величини інфікування у початковий момент часу. Якщо доза інфікування не перевищує імунологічний бар'єр, то розвиток інфекційного захворювання не відбудеться і величина антигена з часом прямує до нуля.

5. Запропоновано і досліджено модифіковану модель економіки Ерроу-Дебре з умовою цілочисельної кількості товарів та обґрунтовано

існування рівноважного вектору цін у ній.

6. Побудовано модель економіки Ерроу-Дебре з використанням зарядів (ортогонально адитивних функціоналів) для аналізу впливу оптових цін на ринок у задачах мікроекономічної теорії.

Теоретичне та практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота містить математичні дослідження, які мають теоретичний характер, а також вказані можливі застосування одержаних результатів у природничих галузях. Результати можуть бути використані при дослідженні нелінійних математичних моделей під дією збурень різної природи, а також для аналізу у математичній економіці. Результати роботи можуть знайти застосування для опису впливу екологічних факторів у процесі лікування інфекційних захворювань, в епідеміології для опису епідемії, у фінансовому секторі для пошуку рівноваги ринку у мікроекономічній теорії за допомогою модифікованих моделей Ерроу-Дебре. Запроваджений в роботі підхід із врахування екологічного фактору відкриває можливість узагальнення математичних моделей в екології, медицині, охороні здоров'я та інших природничих областях.

Особистий внесок здобувача. Загальний план і основний напрямок наукових досліджень дисертаційної роботи сформовано спільно з науковим керівником – професором Я.Й. Бігуном. Із робіт, написаних у співавторстві, до дисертації увійшли та на захист виносяться лише ті результати, які отримані автором самостійно.

Безпосередньо автором здійснено:

- аналіз вітчизняних і зарубіжних наукових публікацій з проблем математичного моделювання, функціонального аналізу та математичного аналізу;
- формулювання та математичні доведення основних тверджень і теорем, що становлять наукову новизну досліджень;
- розробку та теоретичне обґрунтування математичних моделей з багаточастотними збуреннями та запізненням;

- побудову та аналіз математичних моделей поширення епідемічних процесів і імунної відповіді організму з урахуванням екологічних факторів;
- дослідження властивостей просторів ℓ_0 та F -просторів, побудову неперервних скалярних зарядів і аналіз ізоморфних вкладень;
- встановлення умов існування та властивостей рівноваг у моделях економіки загальної рівноваги типу Ерроу–Дебре;
- виконання комп'ютерного моделювання та чисельних експериментів для ілюстрації та підтвердження теоретичних результатів.

Наукові роботи опубліковані у співавторстві з науковим керівником Бігуном Я. Й., науковцями Поповим М. М., Скутаром І. Д. та Фотієм О. Г.

Співавторами наукових праць є науковці, спільно з якими проводилися дослідження. У наукових працях, опублікованих у співавторстві, автору належить основний теоретичний та творчий доробок, зокрема формулювання та доведення ключових теорем, побудова прикладів, математичне обґрунтування моделей і комп'ютерна реалізація чисельних досліджень.

Постановка мети та завдань досліджень, а також обговорення отриманих результатів здійснювалися спільно зі співавторами.

Результати спільних наукових робіт використовувалися у публікаціях та дослідженнях співавторів.

Автор доповідав результати досліджень на міжнародних українських і зарубіжних наукових конференціях, на наукових семінарах кафедри прикладної математики та інформаційних технологій та кафедри математичного аналізу Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

Апробація результатів дисертації. Результати досліджень доповідались та обговорювались на конференціях:

1. VIII Міжнародна науково-практична конференція "Scientific research as a mechanism of effective human development" (31 січня – 2 лютого 2024 р., Софія, Болгарія);

2. Міжнародна конференція IMCS-60 (10–13 жовтня 2024 р., Кишинів, Молдова);
3. VII Міжнародна науково-практична конференція «Моделювання, керування та інформаційні технології» (7–9 листопада 2024 р., Рівне, Україна);
4. XXX Національна конференція (міжнародне видання) "Applications of mathematics in biology and medicine" (16–20 вересня 2025 р., Вікно, Польща);
5. Міжнародна науково-практична конференція «Моделювання, керування та інформаційні технології» (6–8 листопада 2025 р., Рівне, Україна);
6. Українська математична конференція "At the end of the year 2025" (18–19 грудня 2025 р., Київ, Україна).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані у 6.5 публікаціях (Додаток А): із них 4.5 опубліковані у фахових виданнях, що входять до переліку наукових видань України категорії Б, та 2 публікаціях, опублікованих у фаховому виданні, яке належить до міжнародної наукометричної бази Scopus. Додатково результати дисертації відображені у 2 працях, які додатково відображають наукові результати дисертації, 6 тезах та матеріалах конференцій (Додаток А (2)).

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі змісту, вступу, чотирьох розділів, списку використаних джерел, що містить 115 найменувань. Робота містить 33 рисунки. Повний обсяг роботи складає 166 сторінок.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Моделювання впливу екологічного фактору

Різноманітні процеси в екології, медицині, епідеміології та інших галузях знаходяться під впливом зовнішніх факторів різної природи і величини. Такими можуть бути екологічні фактори, фактори соціального характеру, викликані певними стресовими ситуаціями внаслідок катастрофічних явищ чи військових дій. У медичній практиці спостерігається вплив екологічних факторів на перебіг різного роду захворювань, зокрема при імунній відповіді організму людини на інфекційні захворювання та появу і поширення епідемій [1], [2], [3].

Вплив екологічних факторів пов'язаний із забрудненням різної природи і може складатись з багатьох чинників $E_\nu(t)$, $\nu = \overline{1, l}$, які змінюються з часом $t \geq t_0 = 0$. Функції $E_\nu(t)$ можуть характеризувати забруднення повітря, якості води, радіаційного фону, забруднення харчових продуктів, також віднесемо до негативного впливу стресові ситуації серед населення у зв'язку із соціальними, психологічними та економічними факторами.

У розділі 2 розглядається інтегральний показник екологічного впливу у вигляді:

$$E(t) = \alpha_1 E_1(t) + \alpha_2 E_2(t) + \dots + \alpha_l E_l(t), \quad (1.1)$$

де $\alpha_\nu \geq 0$ – вагові коефіцієнти впливу кожного чинника, $\alpha_1 + \dots + \alpha_l = 1$, $0 \leq E_\nu(t) \leq 1$, $\nu = \overline{1, l}$.

Існують певні нормативні показники для $E_\nu(t)$, зокрема забруднення повітря, якості води, радіаційного фону тощо [4, 5, 6]. Усереднений нормативний показник позначимо через $K > 0$, $0 < K < 1$.

У залежності від динаміки екологічного впливу функція $E(t)$ може бути розв'язком одного з класичних рівнянь, які зустрічаються в еколого-біологічних моделях [7], зокрема логістичного рівняння, якщо

еволюція $E(t)$ монотонна:

$$\frac{dE}{dt} = r \left(1 - \frac{E(t)}{K} \right) E(t), \quad t > 0, \quad (1.2)$$

де $r > 0$ – коефіцієнт лінійного росту. Можна застосувати узагальнення логістичного рівняння [8]:

$$\frac{dE}{dt} = r \left(1 - \left(\frac{E(t)}{K} \right)^\kappa \right) E(t), \quad t > 0, \quad (1.3)$$

яке використовувалось при моделюванні Covid-19.

Розв'язок рівняння (1.3) із початковою умовою $E(0) = E_0$ має вигляд:

$$E(t) = K \left(\frac{E_0}{E_0^\kappa + (K^\kappa - E_0^\kappa)e^{-r\kappa t}} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \rightarrow K, \quad t \rightarrow \infty,$$

й асимптотично наближається до стаціонарного розв'язку $E = K$, тобто розв'язок $E = K$ глобально асимптотично стійкий для $E_0 > 0$.

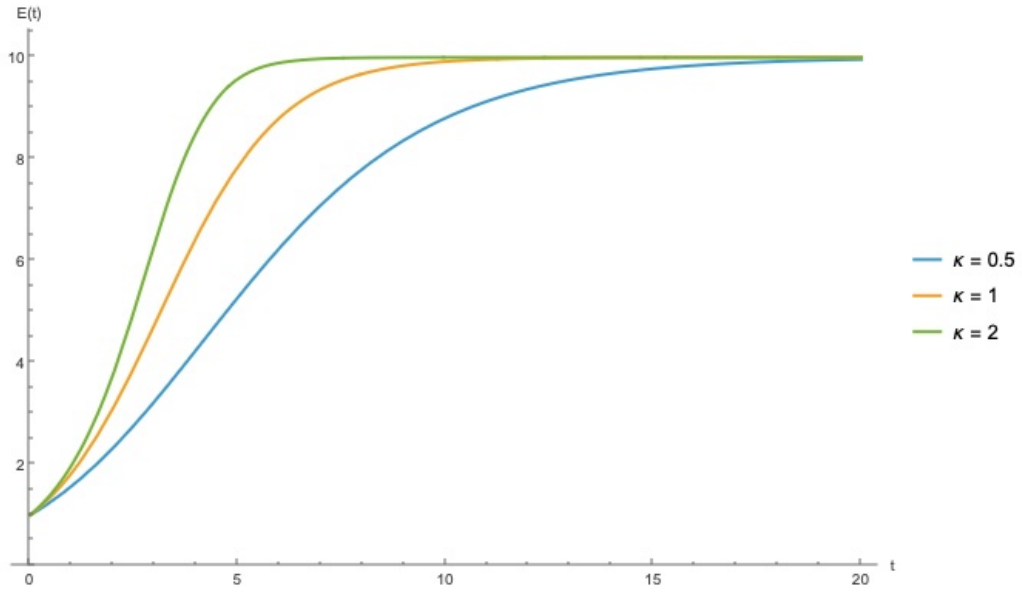


Рис. 1.1 Динаміка розв'язків фактору $E(t)$ узагальненого рівняння Гатчінсона при різних значеннях параметра κ .

Найчастіше відновлення довкілля має коливний характер, а такою властивістю звичайні диференціальні рівняння не володіють. Також потрібно враховувати той факт, що відновлення стану довкілля відбувається не миттєво, а через деякий час $\Delta > 0$. Тому є зміст описати зміну функції

$E(t)$ за допомогою рівняння Гатчінсона [9]:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= r \left(1 - \frac{E(t - \Delta)}{K} \right) E(t), \quad t > 0, \\ E(t) &= E_0(t), \quad t \in [-\Delta, 0].\end{aligned}\tag{1.4}$$

Поведінка розв'язку рівняння (1.4) принципово відрізняється від поведінки розв'язку логістичного рівняння. Наведемо потрібні нам надалі властивості розв'язку рівняння [9, 10, 11]:

1. Розв'язок $E = K$ рівняння (1.4) локально асимптотично стійкий для

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = r\Delta.$$

Точніше [11, теорема 2.1]. Якщо $E_0(t) \geq 0$ для $t \in [-\Delta, 0]$, $E_0(0) > 0$ і $E(t)$ – розв'язок задачі (1.4), то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = K.$$

Властивість проілюстрована на рисунку 1.2 (а).

2. При $\alpha > \frac{\pi}{2}$ рівняння (1.2) має нетривіальний періодичний розв'язок (див рис. 1.2 (б)).
3. Якщо $E(0) > 0$, то при $t > 0$ розв'язок рівняння $E(t) > 0$ і обмежений, та як показано в [10, лема 11.4.2], для довільного $a \geq 2$

$$E(t) < \max(E(a), e^\alpha - 1), \quad a < t < \infty.$$

4. Якщо $E(0) \geq 0$ і $\alpha > 1$, то множина нулів функції $E(t) - K$ не є обмеженою.

Вплив забруднення навколишнього середовища при передачі інфекції непрямым шляхом в епідемічній моделі SVEIR (Сприйнятливий – Вакцинований – Хворий в інкубаційному періоді – Інфікований – Одужав) досліджувався в працях [12, 13] і моделювався за допомогою обмеженої функції насичення типу Холлінга.

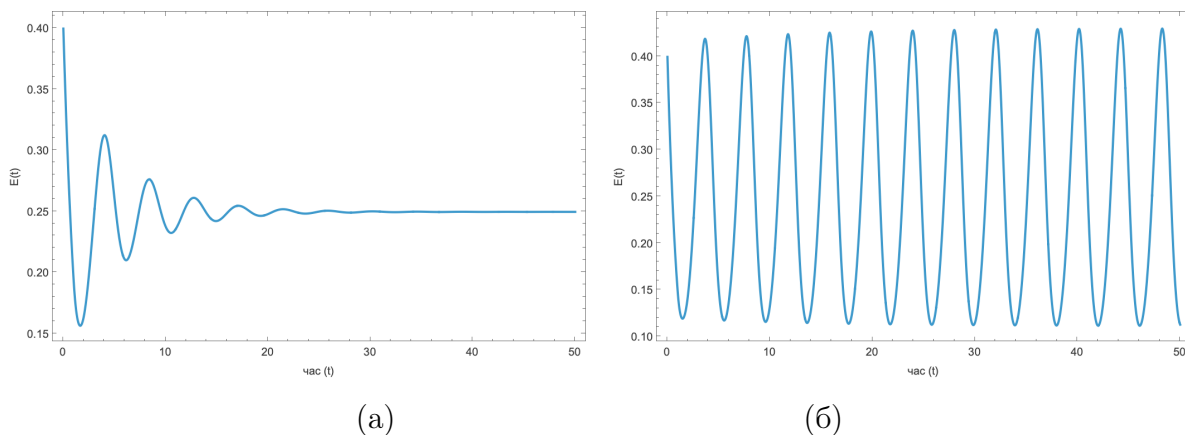


Рис. 1.2 Динаміка розв'язку рівняння $E(t)$ при наборі параметрів:
 (а) $K = 0.25, r = 1.25, \Delta = 1, E(0) = 0.4$; (б) $K = 0.5, r = 1.65, \Delta = 1, E(0) = 0.4$.

У праці [14], для математичного моделювання пандемії Covid-19 враховано соціальний фактор $C(t)$ у формі сприйняття громадськістю ризику щодо кількості важких та критичних випадків захворювання і смертей, у вигляді

$$\frac{dC}{dt} = \gamma I,$$

де $I(t)$ – кількість інфікованого населення.

У праці [15] на підставі SIR-моделі досліджується негативний вплив нових активних користувачів соціальних мереж проросійського соціально-політичного спрямування на громадську думку населення регіону щодо вступу України в НАТО і ЄС.

Отже, на підставі наведених міркувань та аналізу наукових праць можна дійти висновку, що вплив факторів як екологічної, так і соціальної природи доцільно враховувати під час побудови математичних моделей, що й реалізовано в дисертаційній роботі.

1.2. Метод усереднення у математичних моделях під дією багаточастотних збурень із запізненням аргументу

Новою задачею, розглянутою у дисертаційній роботі є дослідження впливу багаточастотних збурень у математичних моделях. Зокрема, це стосується моделювання екологічних процесів, моделі яких розглядаються, наприклад, в [9, 11, 16, 17, 18], у моделях з віковою структурою [19].

Для адекватності математичних моделей, побудованих і досліджених

у розділах 2 і 3, важливим є врахування фактору запізнення. Ефект запізнення продемонстрований на рівнянні (1.4). У моделях екології необхідно враховувати залежність від передісторії розвитку популяції, віку особин, часу відтворення ресурсу чи стану екологічної рівноваги. У технічних задачах – це інформаційне запізнення, у моделях імунної відповіді – час формування каскаду плазмоклітин тощо.

Фактором зовнішнього впливу на динамічні процеси можуть бути багаточастотні коливні процеси на досить великих часових інтервалах. У нелінійній механіці задачі із збуреннями розглядаються на відрізках часу $[0, L/\varepsilon]$ або $\mathbb{R}_+$, де малий параметр $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $L = \text{const} > 0$ [20, 21]. Зручно перейти до повільного часу $\tau = \varepsilon t$, тоді $\tau \in [0, L]$.

Коливні процеси без запізнення описуються багаточастотними системами диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= X(\tau, a, \varphi), \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{\omega(\tau, a)}{\varepsilon} + Y(\tau, a, \varphi). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Тут вектор амплітудних змінних $a \in D$, D – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, вектор фазових змінних $\varphi \in \mathbb{R}^m$, вектор-функції X і Y – періодичні, квазіперіодичні або майже періодичні за змінними φ , $v = \overline{1, m}$, ω – вектор частот.

Характерною особливістю багаточастотних систем є поява в процесі еволюції резонансів частот, умова яких в точці τ :

$$(k, \omega(\tau, a(\tau))) := k_1 \omega_1(\tau, a(\tau)) + \dots + k_m \omega_m(\tau, a(\tau)) \simeq 0, \quad k \in \mathbb{Z}^m, \quad k \neq 0. \quad (1.6)$$

Оскільки система рівнянь (1.5) складна як для дослідження, так і для побудови наближеного розв'язку, то застосовується процедура усереднення за швидкими змінними на кубі періодів, щоб отримати значно простішу систему рівнянь вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{d\tau} &= X_0(\tau, \bar{a}), \\ \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} &= \frac{\omega(\tau, \bar{a})}{\varepsilon} + Y_0(\tau, \bar{a}), \end{aligned} \quad (1.7)$$

де

$$X_0(\tau, a) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} X(\tau, a, \varphi_1, \dots, \varphi_m) d\varphi_1 \dots d\varphi_m,$$

аналогічний вигляд має вектор-функція $Y_0(\tau, a)$.

У системі рівнянь (1.6) компонента $\bar{a} = \bar{a}(\tau)$ знаходиться незалежно від фазової змінної $\bar{\varphi}$. Якщо розв'язок $\bar{a} = \bar{a}(\tau)$ знайдено, то знаходження зводиться до задачі інтегрування

$$\varphi(\tau, \varepsilon) = \varphi(0, \varepsilon) + \int_0^\tau \left(\frac{\omega(s, \bar{a}(s))}{\varepsilon} + Y_0(s, \bar{a}(s)) \right) ds.$$

Обґрунтування методу усереднення для системи рівнянь (1.5) із початковими багатоточковими і інтегральними умовами отримано в працях А.М. Самойленка і Р.І. Петришина та їх учнів й підсумовано монографії [21].

Введемо позначення: $F = (X, Y)$, $W(\tau)$ – визначник Вронського за системою функцій $\omega_1(\tau), \dots, \omega_m(\tau)$.

Для обґрунтування методу усереднення сформулюємо наслідок із теореми 2.1 монографії А.М. Самойленка та Р.І. Петришина [21].

Принциповою умовою цих результатів є умова на вектор частот, щоб запобігти застряганню системи в малому околі резонансів. Наведемо один із результатів для повільнозмінного вектора частот $\omega = \omega(\tau)$.

Теорема 1.1. *Нехай:*

1. Вектор частот $\omega \in C^{m-1}([0, L])$ і $W(\tau) \neq 0$ при $\tau \in [0, L]$.
2. $F(\tau, a, \varphi) \in C_{\varphi}^{l_1}(\bar{D}, \sigma)$, $\frac{\partial}{\partial \tau} F(\tau, a, \varphi) \in C_{\varphi}^{l_2}(\bar{D}, \sigma)$, $\frac{\partial}{\partial a} F(\tau, a, \varphi) \in C_{\varphi}^{l_3}(\bar{D}, \sigma)$,
 $\min(l_1, l_2, l_3) \geq m$.
3. Для всіх $\tau \in [0, L]$ і $y \in D_1 \subset D$ крива $\bar{a} = \bar{a}(\tau, y)$ лежить у D із деяким ρ -околом.

Тоді при досить малому $\varepsilon_0 > 0$ для кожних $\tau \in [0, L]$, $y \in D_1$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ виконується оцінка:

$$\|a(\tau; y, \varphi, \varepsilon) - \bar{a}(\tau; y)\| + \|\varphi(\tau; y, \varphi, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau; y, \varphi, \varepsilon)\| \leq c_1 \varepsilon^{1/m},$$

де стала $c_1 > 0$ і не залежить від ε .

Дослідженню багаточастотних систем диференціальних рівнянь із запізненням аргументу присвячена дисертація Я.Й. Бігуна [22], у якій розглянуті багаточастотні системи зі сталим і змінним запізненням, зокрема лінійним запізненням, яке на відріжку $[0, L]$ задається лінійно перетвореним аргументом $\lambda\tau$, $0 < \tau < 1$.

У розділі 2 застосовується отриманий в [23] результат для багаточастотної системи із лінійно перетвореними аргументами вигляду:

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\tau} &= X(\tau, a_\Lambda, \varphi_\theta), \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{\omega(\tau, a)}{\varepsilon} + Y(\tau, a_\Lambda, \varphi_\theta),\end{aligned}\tag{1.8}$$

де $a \in D \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $\tau \in [0, L]$, $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p \leq 1$, $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_q \leq 1$; $a_\Lambda = (a_{\lambda_1}, \dots, a_{\lambda_p})$, $a_{\lambda_\nu} = a(\lambda_\nu \tau)$, $\nu = \overline{1, p}$; $\varphi_\theta = (\varphi_{\theta_1}, \dots, \varphi_{\theta_q})$, $\varphi_{\theta_\nu}(\tau) = \varphi(\theta_\nu \tau)$.

Відповідна усереднена система за змінними φ_{θ_ν} на кубі періодів $[0, 2\pi]^{mq}$ має вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{a}}{d\tau} &= X_0(\tau, \bar{a}_\Lambda), \\ \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} &= \frac{\omega(\tau, \bar{a})}{\varepsilon} + Y_0(\tau, \bar{a}_\Lambda).\end{aligned}\tag{1.9}$$

Хоча система рівнянь (1.9) залишається системою із запізненням, але, як і для систем без запізнення, рівняння для $\bar{a}$ не залежить від фазових змінних $\bar{\varphi}$.

Наведемо теорему про обґрунтування методу усереднення на відріжку $[0, L]$ довільної довжини для системи рівнянь (1.8), коли початкові умови для розв'язків систем (1.8) і (1.9) збігаються:

$$a|_{\tau=0} = \bar{a}|_{\tau=0}, \quad \varphi|_{\tau=0} = \bar{\varphi}|_{\tau=0}.\tag{1.10}$$

Результат теореми використаний у розділі 2 дисертації при обґрунтуванні методу усереднення для математичних моделей із багаточастотними збуреннями і запізненням аргументу.

У праці [22] отримано нову умову резонансу частот в точці τ , яка

залежить від запізнень у фазових змінних і набуває вигляду

$$\sum_{\nu=1}^q \theta_{\nu} (k_{\nu}, \omega(\theta_{\nu}\tau)) = 0, \quad \sum_{\nu=1}^q \|k_{\nu}\| \neq 0.$$

Якщо $q = \theta_1 = 1$, то отримуємо класичну умову резонансу $(k, \omega(\tau)) = 0$.

Теорема 1.2. *Нехай [21]:*

1. Вектор-функція $F(\tau, \bar{a}_{\Lambda}, \varphi_{\theta}) \in C_{\tau, a_{\lambda\nu}}(\bar{D}, \sigma)$, $\nu = \overline{1, p}$.
2. Вектор частот $\omega \in C^{qm-1}[0, L]$ і визначник Вронського порядку mq за системою функцій $(\omega(\theta_1\tau), \omega(\theta_2\tau), \dots, \omega(\theta_q\tau))$

$$W(\tau) \neq 0, \quad \tau \in [0, L];$$

3. В області $G := [0, L] \times D^p$ для коефіцієнтів Фур'є вектор-функції $F(\tau, a_{\Lambda}, \varphi_{\theta})$ справджується оцінка:

$$\begin{aligned} & \sum_{k \neq 0} \left(\sup_G \|F_k(\tau, a)\| + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\|k\|_{\Theta}} \left(\sup_G \left\| \frac{\partial F_k}{\partial \tau} \right\| + \sum_{\nu=1}^p \theta_{\nu} \sup_G \left\| \frac{\partial F_k}{\partial a_{\lambda\nu}} \right\| \right) \right) \leq \sigma_1, \end{aligned}$$

$$\|k\|_{\Theta} = \theta_1 \|k_1\| + \dots + \theta_q \|k_q\|.$$

4. Існує єдиний розв'язок $\bar{a} = \bar{a}(\tau; y)$ рівняння першого з рівнянь (1.9), $y \in D_1 \subset D$, який лежить в D разом із деяким ρ -околом.

Тоді знайдеться $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0]$ і $c_2 > 0$ такі, що для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ існує єдиний розв'язок системи рівнянь (1.9) з початковими умовами (1.10) і для всіх $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_1]$ і $\bar{y} \in D_1, \psi \in \mathbb{R}^m$ виконується оцінка

$$\|a(\tau; \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon) - \bar{a}(\tau; \bar{y})\| + \|\varphi(\tau; \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau; \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon)\| \leq c_2 \varepsilon^{1/mq}.$$

Метод усереднення розвинутий для різних класів багаточастотних систем. Для систем рівнянь (1.9) з імпульсною дією в працях Т.М. Сопронюк [24] та ін., І.М. Данилюка [25] – з асимптотично великим запізненням на $[0, L\varepsilon^{-1}]$, Я. Р. Петришина – для систем з інтегральними умовами [26], Я.Й.

Бігуна, І.В. Краснокутської, Р.І. Петришина – для систем із запізненням й інтегральними умовами фредгольмового і нетерового типу [27], Я.Й. Бігуна та І.Д. Скутара [28] – для систем із лінійно перетвореними аргументами і локально-інтегральними умовами.

Для обґрунтування методу усереднення у розділі 2 буде використовуватися інтегральна нерівність із праці [28]:

Лема 1.1. *Нехай $c > 0$, $t_0 \geq 0$, $J = [t_0, T]$, $K_i \in C(J)$, $k_i(t) \geq 0$, неспадні функції $\alpha_i \in C^1(J)$, $t_0 \leq \alpha_i(t) \leq t$, $i = \overline{1, q}$, i*

$$u(t) \leq c + \sum_{i=1}^q \int_{\alpha_i(t_0)}^{\alpha_i(t)} k_i(s) u(s) ds, t \in J. \quad (1.11)$$

Тоді для $t \in J$ виконується нерівність

$$u(t) \leq c \cdot \exp \left[\sum_{i=1}^q \int_{\alpha_i(t_0)}^{\alpha_i(t)} k_i(s) ds \right] t.$$

1.3. Математичне моделювання епідемій

Математичному моделюванню поширення епідемії за допомогою диференціальних рівнянь із звичайними і частинними похідними присвячена значна кількість досліджень, зокрема монографії [29, 30, 31, 32]. Першим, хто застосував диференціальне числення для математичного моделювання розвитку інфекційних захворювань був Даніель Бернуллі, який у 1760 р. розглянув модель поширення віспи [33]. Але систематичне моделювання процесів епідемії розпочалось з класичної моделі Кермака і Маккендрика [34]. У цій праці розглядалось рівняння:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{S(t)}{N} \int_0^\infty A(\tau) \frac{dS(t-\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (1.12)$$

де $A(\tau)$ – середня інфективність особи, інфікованої τ одиниць часу раніше по відношенню до здорової особини. Якщо $A(\tau) = \beta N \exp^{-\gamma\tau}$, то ввівши позначення

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^t A(t-\tau) \frac{dS(\tau)}{d\tau} d\tau,$$

і диференціюючи одержану рівність із врахуванням (1.12), одержимо систему рівнянь (1.13):

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta S(t)I(t), \\ \frac{dI}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t), \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I(t).\end{aligned}\tag{1.13}$$

Невід'ємність розв'язку $I(t)$ при $t > 0$ одержується із другого рівняння системи (1.13), оскільки

$$I(t) = I_0 \exp \left(\int_0^t (\beta S(z) - \gamma) dz \right) \geq 0.$$

Аналогічно, $S(t)$ і $R(t)$ набувають невід'ємних значень при $t > 0$, якщо $S(0) \geq 0$ і $R(0) \geq 0$.

Тому $S'(t) \leq 0$, і при $t > 0$ $S(t) \leq S(0)$. Крім того, при $t > 0$

$$I(t) \leq I_{max} = N - \sigma + \sigma \ln \frac{\sigma}{S_0}.$$

Із обмеженості розв'язку системи (1.13) на довільному інтервалі $(0, t)$, випливає існування диференційовного розв'язку для $t > 0$.

Моделі з урахуванням втрати імунітету, інкубаційного періоду та інших чинників, пов'язаних з передісторією процесу поширення епідемії, процесами у медицині та військовій справі [35, 36] описуються рівняннями із запізненням аргументу або диференціально-функціональними рівняннями [9, 18, 37, 38, 39].

Диференціальні рівняння із запізненням аргументу для моделювання епідемії малярії застосовано в праці К.Кука [40]. Математична модель із втратою імунітету за час τ_1 та врахуванням інкубаційного періоду τ_2 набуває вигляду:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta S(t)I(t - \tau_1) + \alpha I(t - \tau_2), \\ \frac{dI}{dt} &= \beta S(t)I(t - \tau_1) - \gamma I(t), \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I(t) - \alpha I(t - \tau_2).\end{aligned}$$

Розв'язок такої моделі, як проілюстровано в [39, с. 315], може мати періодичні розв'язки.

SIR - моделі із запізненням аргументів досліджувались у багатьох працях [41, 42, 43, 44]. Аналіз та дослідження *SIR* моделі було зроблено у нещодавніх роботах І.М. Черевка та співавторів [45], зокрема за допомогою алгоритмів машинного навчання [46].

Моделі епідемій типу *SEIR*, *SEIRS* вивчалися в працях [47, 48, 49, 50] та в багатьох інших.

1.4. Математичне моделювання імунної відповіді організму людини при інфекційних захворюваннях

Математичне моделювання імунних процесів викликало інтерес як для розуміння самого процесу імунної відповіді, так і для прогнозування розвитку інфекційних захворювань. Однією із перших була математична модель Г.І. Белла [51], яка ґрунтувалася на моделі Вольтерри-Лотки. У 1997 р. у монографії Г.І. Марчука [52] опублікована базова математична модель імунної відповіді при інфекційних захворювань вигляду:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= (\beta - \gamma F)V, \\ \frac{dC}{dt} &= \alpha \xi(m) V_{\tau} F_{\tau} - \mu_c(C - C^*), \\ \frac{dF}{dt} &= \rho C - \eta \gamma FV - \mu_f F, \\ \frac{dm}{dt} &= \sigma V - \mu_m m,\end{aligned}\tag{1.14}$$

де $V(t)$ — концентрація антигену; $C(t)$ — концентрація плазматичних клітин; $F(t)$ — концентрація антитіл; C^* — концентрація плазматичних клітин у здоровому організмі до інфікування; $m(t)$ — відносна характеристика ураження органу-мішені; β — коефіцієнт швидкості росту популяції антигену; γ — коефіцієнт взаємодії антигену та антитіл; μ_f — коефіцієнт, обернено пропорційний часу існування антитіл; μ_m — коефіцієнт, обернено пропорційний часу відновлення органу; μ_c — коефіцієнт зменшення кількості плазматичних клітин унаслідок старіння; σ — коефіцієнт

швидкості ураження органу-мішені; ρ — швидкість утворення антитіл однією плазматичною клітиною; η - кількість антитіл, необхідна для нейтралізації однієї одиниці антигену. Передбачається, що формування каскаду плазмоклітин відбувається протягом часу τ .

У монографії наведено також математичні моделі для конкретних інфекційних захворювань, зокрема вірусних та бактеріальних інфекцій дихальних шляхів, вірусного гепатиту В і С, туберкульозу. Такі моделі містять більше 10 диференціальних рівнянь із запізненнями аргументу і досить складні як для дослідження, так і комп'ютерного моделювання.

Математична модель (1.14) узагальнювалася у різних напрямках. У праці М. Боднара і У. Фориш [53, 54] досліджена модель імунної системи, в якій коефіцієнт реактивності $\alpha = \alpha(t)$ і коефіцієнт швидкості утворення антитіл $\rho = \rho(t)$ залежать від часу, наприклад, змінюється періодично відповідно до сезонів року.

У праці У. Фориш [55] запропонована модель динаміки імунної відповіді Г.Марчука для моделювання росту пухлини, у праці [56] на підставі базової моделі досліджено імунну відповідь на ріст гліальної пухлини, яка є найбільш поширеним типом первинної пухлини головного мозку.

У праці [57] У. Фориш розглянула модель Г.І. Марчука у випадку сильної відповіді імунної системи та досліджено глобальну поведінку розв'язків, а в [58] біфуркації Хопфа народження циклів у цій же моделі. Дослідження стійкості розв'язків у моделі протипухлинного імунітету проведені в праці В.П. Марценюка [59].

У праці М. Скворцової [60] модифіковано функціонал Ляпунова - Красовського й отримано для моделі (1.14) оцінки розв'язків, що характеризують швидкість стабілізації при $t \rightarrow \infty$, та вказано оцінки для початкових умов, для яких розв'язки збігаються до стаціонарного розв'язку.

Дослідження розподіленого керування [61]

$$u(t) = -b \int_0^t (F(s) - F^* - \varepsilon) e^{-k(t-s)} ds$$

додано в рівняння для F у моделі (1.14)

$$\frac{dF}{dt} = \rho C(t) - \eta\gamma V(t)F(t) - \mu_f F(t) + u(t),$$

де F^* – концентрація антитіл при відсутності інфекційних захворювань.

Цикл праць С. Барановського, А. Бомби [62], [63], [64] та інших присвячений побудові математичних моделей імунної відповіді при інфекційних захворюваннях з урахування дифузійних просторових збурень, застосувань фармакологічних засобів, впливів імунологічної та фармакологічної терапії. Математична модель побудована у вигляді:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} &= (\beta - \gamma F)V + \varepsilon D_V \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial C}{\partial t} &= \alpha \xi(m)V(t - \tau)F(t - \tau) - \mu_c(C - C^*) + \varepsilon D_C \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \rho C - (\mu_f + \eta\gamma V)F - \mu_f F + \varepsilon D_F \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial m}{\partial t} &= \sigma V - \mu_m m + \varepsilon^2 D_m \frac{\partial^2 m}{\partial x^2},\end{aligned}$$

за умов

$$\begin{aligned}C(x, t_0) &= C^0(x), \quad m(x, t_0) = m^0(x), \\ V(x, \tilde{t}) &= V^0(x, \tilde{t}), F(x, \tilde{t}) = F^0(x, \tilde{t}), t_0 - \tau \leq \tilde{t} \leq t_0.\end{aligned}$$

Звернута увага на температурну реакцію організму під впливом адсорбентів на динаміку антигенів. Ряд інших питань відображено в докторській дисертації С.В. Барановського [65].

1.5. Модель економіки Ерроу-Дебре

Класична модель Ерроу-Дебре рівноважної економіки була побудована в середині минулого століття в роботі [66], а у 1989 р. вийшла чудова монографія [67], в якій викладено теоретичні основи цієї моделі. Незважаючи на поважний вік, дана модель залишається актуальним предметом багатьох сучасних досліджень.

Модель економіки Ерроу-Дебре (або модель загальної рівноваги Arrow-Debreu) вивчає, за яких умов у ринковій економіці існує конкурентна

рівновага – тобто така система цін і розподіл товарів, за яких кожен агент максимізує власні переваги, а всі ринки “очищаються” (попит дорівнює пропозиції). У моделі формалізовано поведінку споживачів, виробників, їхні початкові наділи, переваги, технології та простір товарів; далі за допомогою методів аналізу та топології доводиться існування рівноваги. Також ця модель досліджує властивості рівноваги: її оптимальність (за Парето), можливу множинність, стійкість та чутливість до зміни параметрів. Завдяки математичній строгості модель Ерроу-Дебре є фундаментом сучасної мікроекономічної теорії і основою багатьох узагальнень – від економік з нескінченно-вимірними просторами товарів до моделей невизначеності й міжчасового вибору.

Сучасні роботи в даному напрямку стосуються здебільшого отримання результатів існування рівноважного стану при заміні класичних умов на послаблені аналоги, що дозволяє застосовувати нові результати до некласичних станів моделі.

Так, в роботі [68] 2022 р. Подчек і Яннеліс доводять теорему про існування загального рівноважного (Walrasian) стану, навіть якщо множини споживчих наборів не є компактними, а лише замкнені та обмежені знизу. Крім того, вони відмовляються від типових для класичних теорем припущень про транзитивність, впорядкованість або неперервність переваг – допускаються невлінійні, взаємозалежні, іноді нелінійні або цінозалежні переваги, а також не обов’язково інтер’єр початкового ендовенту. Таким чином, їхнє твердження значно розширює гнучкість моделі загальної рівноваги, роблячи її придатною для ширшого класу економік з “неприємними” перевагами.

У наступній своїй роботі 2024 р. ці ж автори наводять доведення існування рівноваги для економіки з нескінченно-вимірним простором товарів, знову припускаючи, що переваги агентів можуть бути дискретними, невлінійними, взаємозалежними та залежними від цін. Це узагальнення об’єднує і поширює класичні результати (наприклад, для інтегральних або

банахових просторів товарів) і охоплює раніше відомі теореми. Таким чином, вони показують, що навіть у надзвичайно загальних умовах (нескінченно багато товарів, “погані” властивості переваг) може існувати конкурентна рівновага.

У статті [69] 2020 р. Фратіні аналізує, як у моделі Ерроу–Дебре взаємопов’язані поняття процентної ставки, прибутку та заощаджень у стані загальної рівноваги. Показано, що в стандартній версії моделі, де всі доходи витрачаються, позитивна процентна ставка і ненульовий прибуток несумісні з повною рівновагою, якщо не вводити механізм накопичення чи міжчасових трансакцій. Стаття підкреслює концептуальну відмінність між рівновагою Ерроу–Дебре та кейнсіанськими підходами, у яких процент і заощадження мають іншу економічну інтерпретацію.

В роботі 2023 р. [70] Гарг і Вегх запропонували алгоритм, який знаходить рівновагу на ринку обміну (exchange market) з лінійними утилітами¹ за “сильно поліноміальний” час (тобто залежність від розміру ринку, а не числових даних). Метод базується на модифікації попередніх алгоритмів, із системою “виявлених ребер” (revealed edges), тобто пар “агент-товар”, які мають найбільшу “bang-per-buck” і обмін яких має місце в будь-якому рівноважному розв’язку. Кожного разу, коли знаходиться нове ребро, запускається підпроцедура, яка або перевіряє чи існує рівновага з поточним набором ребер, або шукає приблизне рішення, що мінімізує невідповідність попиту і пропозиції; ця підзадача зводиться до лінійного програмування (LP), яке потім апроксимується в формі з двома змінними на нерівність, що дає можливість зберегти сильно-поліноміальну складність. Це – важлива робота з алгоритмічної теорії рівноваги, оскільки вона дає практичний (комп’ютерний) спосіб знаходження ціни та розподілу у ринках, які формально відповідають моделям на базі моделі Ерроу-Дебре з лінійними утилітами.

Стаття Андерсона, Дуанму, Хана і Уяніка 2022 р. [71] містить чотири

¹лінійний утиліт – це функція корисності агентів у моделях загальної рівноваги (зокрема, в моделі Ерроу–Дебре), яка має лінійну залежність від товарних векторів

теореми про існування Walras-рівноваги (з “free disposal”) в економіках з довільною (можливо нескінченною) множиною агентів та компактними множинами споживчих наборів. Також досліджено, що відбувається, якщо ослабити припущення про компактність множин і наведено приклади та контрприклад: зокрема, показано, що в деяких випадках, навіть якщо формально виконуються багато стандартних умов, рівновага може не існувати. Таким чином, робота поглиблює розуміння, які саме математичні умови необхідні для існування рівноваги у “великих” (маса-агентних або континуальних) економіках, і яким чином “free disposal” (вільна утилізація надлишків) впливає на теорію моделей Ерроу-Дебре.

У статті [72] 2020 р. Янг і Лі доведено існування конкурентної рівноваги (general equilibrium) в економіці з виробництвом, нескінченно-вимірним простором товарів та перевагами, які залежать від цін. Для цього автори використовують технічні інструменти: зокрема, насичений вимірний простір агентів (saturated measure space), властивості сепарабельного банахового простору, а також результати на кшталт теореми Ляпунова та точної версії леми Фату для нескінченновимірних просторів. Це важливий крок у тому, щоб показати, що навіть у дуже загальних економічних моделях, де є виробництво, нескінченна кількість товарів та складні переваги, можна гарантувати існування конкурентної рівноваги.

Ще одна сучасна характерна робота у даній тематиці – це стаття Лайта [73] 2023 р., в якій автор розробляє строгий математичний апарат для моделювання загальної рівноваги в економіці з гетерогенними агентами, неповними ринками та великою кількістю товарів. Показано, що за певних умов на переваги та структуру ринків існує рівновага з цінами та індивідуальними планами споживання, які є сумісними з бюджетними обмеженнями агентів і рівновагою портфеля з безризиковою облігацією. Також робота дає умови існування рівноваги у випадку, коли ринки фінансових активів не забезпечують повного хеджування ризиків, що є важливою рисою сучасних макроекономічних моделей (хеджування

ризиків – це фінансова стратегія управління ризиками, що полягає у взятті протилежної позиції за допомогою похідних фінансових інструментів (ф'ючерси, опціони) для мінімізації можливих збитків від несприятливих цінових коливань активів, валютних курсів чи інших ринкових факторів, по суті, страхуючи свій основний актив чи угоду. Це дозволяє “заморозити” ціну або курс, захищаючи прибуток або уникнення збитків у майбутньому, коли настає термін розрахунку).

Стаття Хуанга та Ребентроста [74] 2024 р. пропонує перший квантовий алгоритм для обчислення ринкової рівноваги, який має сублінійну (у відношенні числа покупців та товарів) часову складність, що дає поліноміальне прискорення у порівнянні з класичними алгоритмами. Алгоритм заснований на новому підході: автори модифікують класичну ”пропорційно-відповідну” (proportional response) динаміку, створюючи так звану «Faulty Proportional Response (FPR)» — з похибками, але з гарантією збіжності, і потім використовують квантові процедури для оцінки норм і скалярних добутоків, що дає пришвидшення. Автори також провели чисельні симуляції на системі з 16384 покупців і 16384 товарів і показали, що їхній алгоритм реально дає значне прискорення порівняно з класичними методами — отже підхід має потенціал для великих сучасних ринків (інтернет-аукціони, розподіл ресурсів онлайн тощо).

Детальніше про сучасний стан досліджень питань, пов'язаних з конкурентною рівновагою в економічних моделях написано в статті Тоди і Уолша [75] у 2024 р. Це оглядова стаття, у якій систематизовано новітні досягнення щодо унікальності та множинності конкурентної (general) рівноваги у моделях, пов'язаних із загальною рівновагою, включно з випадками, коли існує багато рівноважних розв'язків. Автори аналізують, які сучасні умови на переваги, технології, ринки чи структуру економіки забезпечують єдине рішення рівноваги, а також в яких сценаріях можливі множинні рішення, з погляду теорії, математики та економіки. Ця робота корисна для розуміння того, наскільки стабільним чи однозначним є

розв'язок у моделі рівноваги і які параметри чи допущення впливають на те, чи рівновага «унікальна».

На наш погляд, класична модель економіки Ерроу-Дебре має певний простір для розширення і покращення.

По-перше, модель Ерроу-Дебре розглядає лише дійсно-значні кількості товарів, оскільки спирається на методи неперервного математичного аналізу. В реальній економіці вочевидь актуальним є розгляд цілочисельних кількостей товарів. Наскільки нам відомо, такому розгляду не приділено достатньо уваги в літературі. Зокрема, основна теорема Ерроу-Дебре про існування рівноважної ціни в економіці обміну скрізь розглядається для дійсно-значних кількостей товарів. В даній роботі ми розглядаємо модель Ерроу-Дебре із цілочисленною кількістю товарів і отримуємо нову версію теореми Ерроу-Дебре.

По-друге, ціни в моделі Ерроу-Дебре є лінійними функціоналами від товарних векторів. У реальній економіці ціни залежать від кількості товарів. Таким чином, “оптові” ціни не є лінійними функціоналами, проте є адитивними функціями відносно тих доданків, які належать до різних груп товарів. Є також приклади економік, де ціна на більших кількостях товарів може, навпаки, зростати, а не спадати, як при звичайній оптовій торгівлі (такі явища мають назву “негативний ефект масштабу” або “цінова дискримінація за кількістю”, див. [66] для детальнішого знайомства. Тому ми розглядаємо заряди (тобто, ортогонально адитивні функціонали) в ролі цінових векторів замість лінійних функціоналів. Наша наступна модифікація полягає в тому, що ми розглядаємо загальніший об’єкт, ніж векторна ґратка, а саме комплементарний простір, який може бути, як векторною ґраткою, так і булевим кільцем, а також іншими об’єктами. Оскільки диз’юнктне об’єднання комплементарних просторів є комплементарним простором (аналогічне твердження не має місця для векторних ґраток), то це дозволяє розглядати об’єднання ринків у один великий ринок у випадку, коли товари з різних ринків є непорівнянними за цінами чи ще якимись важливими

характеристиками.

Висновки до розділу 1

У першому розділі дисертаційної роботи наведено короткий огляд робіт, присвячених дослідженню впливу зовнішніх факторів на математичні моделі природничих і фінансових процесів.

Наведено відомості з моделювання епідемії, звернута увага на математичні моделі із запізненням аргументу, зроблено огляд праць з моделювання імунної відповіді людини при інфекційних захворюваннях, які ґрунтуються на базовій моделі Г.І. Марчука.

Проведено опис моделі рівноважної економіки Ерроу-Дебре, властивості рівноваги: оптимальність (за Парето), можливу множинність, стійкість та чутливість до зміни параметрів, як зовнішніх впливів. Наведено відомості про існування рівноважного стану при заміні класичних умов на послаблені аналоги, зокрема твердження про існування Walras-рівноваги та сучасний стан дослідження питань, пов'язаних з конкурентною рівновагою в економічних моделях. Зазначено, що класична модель економіки Ерроу-Дебре має певні недоліки або можливості для розширення. У роботі запропонована побудова моделі Ерроу-Дебре із цілочисельною кількістю товарів, що дало змогу отримати нову версію цієї теореми.

РОЗДІЛ 2

УСЕРЕДНЕННЯ У МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЯХ ПІД ДІЄЮ БАГАТОЧАСТОТНИХ ЗБУРЕНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ АРГУМЕНТУ

У даному розділі досліджується вплив багаточастотних збурень в математичних моделях природничих процесів. Обґрунтовано метод усереднення для таких моделей. Отримано оцінку методу усереднення, яка явно залежить від малого параметра. Розглянуто застосування одержаних результатів при моделюванні взаємодії популяції.

Результати розділу 2 опубліковані в наукових статтях автора і співавторів [76, 77], доповідались на конференціях та семінарах (Додаток А(2)).

2.1. Постановка задачі

Розглядається математична модель, яка описується системою диференціальних рівнянь із запізненням аргументу, вигляду

$$\frac{du}{d\tau} = U(\tau, u_{\Delta}), \quad (2.1)$$

де повільний час $\tau = \varepsilon t \in [0, L]$, $0 < \varepsilon$ – малий параметр, $u \in D_1 \subset \mathbb{R}^l$, $u_{\Delta} := (u_{\Delta_1}, u_{\Delta_2}, \dots, u_{\Delta_r})$, $u_{\Delta_{\nu}}(\tau) = u(\Delta_{\nu} \tau)$, $0 < \Delta_1 < \Delta_2 < \dots < \Delta_r \leq 1$.

Якщо $r = \Delta_1 = 1$, то одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь. Запізнення у системі (2.1) змінне і лінійне, оскільки

$$\Delta_{\nu} \tau = \tau - (1 - \Delta_{\nu}) \tau,$$

і $(1 - \Delta_{\nu}) \tau > 0$ при $\tau > 0$.

Зауважимо, що диференціальне рівняння із сталим запізненням $\sigma > 0$

$$\frac{du}{dt} = f(t, u(t), u(t - \sigma)), t > 0,$$

заміною $\tau = \ln(s)$, $s > 1$, $y(s) = u(\ln(s))$, зводиться до диференціального

рівняння із лінійно перетвореним аргументом. Справді,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{ds} &= \frac{1}{s} \frac{du}{d\tau} = \frac{1}{s} f(\ln(s), u(\ln(s)), u(\theta s)) = \\ &= \frac{1}{s} f(\ln(s), y(s), y(\theta s)), \quad \theta = e^{-\sigma} < 1.\end{aligned}$$

На процес, який описується системою рівнянь (2.1) можуть впливати багаточастотні збурення із запізненням в амплітудних і фазових змінних. Такі збурення виникають внаслідок сезонних явищ, екологічних, технологічних чи інших впливів. У цьому випадку система рівнянь (2.1) набуває вигляду

$$\frac{du}{d\tau} = U(\tau, u_\Delta) + \varepsilon^\beta V(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta). \quad (2.2)$$

Тут $\beta > 0$, a – вектор амплітудних, а φ – вектор фазових змінних, які є розв’язком системи диференціальних рівнянь із лінійно перетвореними аргументами

$$\frac{da}{d\tau} = X(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \quad (2.3)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \quad (2.4)$$

де $a \in D_2 \subset \mathbb{R}^n$; $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$, $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_p \leq 1$, $0 < \theta_1 < \dots < \theta_q \leq 1$; $a_\Lambda := (a_{\lambda_1}, \dots, a_{\lambda_p})$, $\varphi := (\varphi_{\theta_1}, \dots, \varphi_{\theta_q})$, $a_{\lambda_v}(\tau) = a(\lambda_v \tau)$, $\varphi_{\theta_v}(\tau) = \varphi(\theta_v \tau)$. Вектор-функції V , X і Y 2π -періодичні за компонентами векторів φ_{θ_v} , $v = \overline{1, q}$.

Оскільки система рівнянь (2.2)–(2.4) досить складна як для аналітичного дослідження, так і для числового розв’язування, то для спрощення системи застосовується процедура усереднення за швидкими змінними [20, 21, 78, 79, 80].

Відповідна системі (2.2)–(2.4), усереднена за швидкими змінними φ_{θ_v} , система на кубі періодів набуває вигляду:

$$\frac{d\bar{u}}{d\tau} = U(\tau, \bar{u}_\Delta) + \varepsilon^\beta V_0(\tau, \bar{a}_\Lambda), \quad (2.5)$$

$$\frac{d\bar{a}}{d\tau} = X_0(\tau, \bar{a}_\Lambda), \quad (2.6)$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y_0(\tau, \bar{a}_\Lambda). \quad (2.7)$$

Якщо позначити $F := (V, X, Y)$, то

$$F_0(\tau, a_\Lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{mq}} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} F(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta) d\varphi_\Theta.$$

Обґрунтування методу усереднення значно ускладнюється внаслідок резонансу частот. У системі (2.3), (2.4) при її еволюції, як показано в [23], умова резонансу в точці τ залежить від запізнень у швидких змінних і набуває вигляду

$$\gamma_k(r) := \sum_{v=1}^q \theta_v(k_v, \omega(\theta_v \tau)) = 0,$$

де $k_v \in \mathbb{Z}^m$, $k = (k_1, \dots, k_q) \neq 0$.

Якщо $q = \theta = 1$, то одержимо класичну умову резонансу [20, 21] вигляду

$$(k, \omega(\tau)) = 0, k \neq 0,$$

яка відповідає системі рівнянь (2.1).

Задача полягає в обґрунтуванні методу усереднення для системи рівнянь (2.1), тобто доведення існування єдиного розв'язку системи, за умови існування розв'язку усередненої системи, й отримання оцінки похибки методу усереднення, яка явно залежить від малого параметра ε .

2.2 Обґрунтування методу усереднення.

Метод усереднення для системи диференціальних рівнянь без запізнення обґрунтовано в працях А.М. Самойленка і Р.І. Петришина [21], М. Додсона [81] та ін. Для багаточастотних систем із запізненням дослідження представлено в працях Я.Й. Бігуна [23, 82], Р.І. Петришина і Я.Й. Бігуна [83], Я.Й. Бігуна і І.Д. Скутара [28, 84].

Зокрема, для досить малого $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0]$ доведено існування єдиного диференціального розв'язку системи рівнянь (2.3)–(2.4) і встановлено оцінку

$$\|a(\tau, \varepsilon) - \bar{a}(\tau)\| + \|\varphi(\tau, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau, \varepsilon)\| \leq c_1 \varepsilon^\alpha, \alpha = (mq)^{-1}, \quad (2.8)$$

для всіх $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_1]$, якщо початкові умови точної і усередненої систем збігаються.

Для обґрунтування методу усереднення накладемо умови на праві частини систем рівнянь (2.2)–(2.4) і (2.5)–(2.7). Введемо позначення: $G := [0, L] \times D_2^{p_n} \times \mathbb{R}^{q_n}$, $G_1 := [0, L] \times D^p$, $\|k\|_\Theta = \theta_1 \|k_1\| + \dots + \theta_q \|k_q\|$.

Нехай виконуються умови:

1. Вектор-функція $F \in C_{\tau, a_v}^1(G, \sigma_1)$, сталою $\sigma_1 > 0$ обмежена функція F та її похідні за змінними τ і a_v , $v = \overline{1, p}$.
2. Вектор-функція частот $\omega \in C_{[0; L]}^{qm-1}$.
3. За системою функцій $\{\omega(\theta_1 \tau), \dots, \omega(\theta_q \tau)\}$ визначник Вронського

$$V(\tau) \neq 0, \quad \tau \in [0, L].$$

4. Для коефіцієнтів Фур'є вектор-функції F справджується оцінка

$$\sum_{k \neq 0} \left(\sup_{G_1} \|F_k(\tau, a_\Lambda)\| + \frac{1}{\|k\|_\Theta} \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial F_k(\tau, a_\Lambda)}{\partial \tau} \right\| + \sum_{\nu=1}^q \theta_\nu \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial F_k(\tau, a_\Lambda)}{\partial a_{\lambda_\nu}} \right\| \right) \leq \sigma_2.$$

5. Існує єдиний розв'язок усередненої системи рівнянь (2.5) – (2.7) із початковими умовами

$$\bar{U}|_{\tau=0} = \bar{V} \in D_{1,0} \subset D_1, \quad \bar{a}|_{\tau=0} = \bar{y} \in D_{2,0} \subset D_2,$$

який лежить у відповідних областях із деяким ρ -околом.

Теорема 2.1. [22] *Нехай виконуються умови 1-5, відповідні системам (2.2), (2.3) і (2.5), (2.6). Тоді знайдеться досить мале $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0]$ для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ таке, що існує єдиний розв'язок рівнянь (2.2), (2.3) і виконується оцінка (2.8).*

Доведемо наступне твердження.

Теорема 2.2. *Нехай виконуються умови 1-5 для системи рівнянь (2.2) – (2.4), (2.5) – (2.7). Тоді знайдеться $\varepsilon_2 \in (0, \varepsilon_1]$ таке, що існує єдиний*

розв'язок системи рівнянь (2.2) – (2.4) і для всіх $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_2]$ справджується оцінка

$$\|u(\tau, \varepsilon) - \bar{u}(\tau, \varepsilon)\| \leq c_1 e^{c_2 \tau} \varepsilon^{\alpha+\beta} \leq c_3 \varepsilon^{\alpha+\beta}, \alpha = (mq)^{-1}, \quad (2.9)$$

де $c_1, c_2 > 0$ і не залежить від ε , $c_3 = c_1 e^{c_2 L}$, $u|_{\tau=0} = \bar{u}|_{\tau=0}$.

Доведення. Із рівняння (2.2) і (2.5) одержимо

$$\begin{aligned} u(\tau, \varepsilon) - \bar{u}(\tau, \varepsilon) &= \int_0^\tau (U(s, u_\Delta(s, \varepsilon)) - U(s, \bar{u}_\Delta(s, \varepsilon))) ds + \\ &+ \varepsilon^\beta \int_0^\tau (V_0(s, a_\Delta(s, \varepsilon)) - V_0(s, \bar{a}_\Delta(s))) ds + \\ &+ \sum_{k \neq 0} \int_0^\tau V_k(s, \bar{a}_\Delta(s)) \exp(i \sum_{\nu=1}^q (k_\nu, \varphi(\theta_\nu s, \varepsilon))) ds = \\ &= B_1 + \varepsilon^\beta (B_1 + B_2), \quad i^2 = -1. \end{aligned}$$

Оцінімо норму кожного з доданків $B_\nu, \nu = \overline{1, 3}$. На підставі умови 1 маємо:

$$\begin{aligned} \|B_1\| &\leq \sigma_1 \sum_{\nu=1}^r \int_0^\tau \|u_{\Delta_\nu}(s, \varepsilon) - \bar{u}_{\Delta_\nu}(s, \varepsilon)\| ds = \\ &\sigma_1 \sum_{\nu=1}^r \Delta_\nu^{-1} \int_0^{\Delta_\nu \tau} \|u(s, \varepsilon) - \bar{u}(s, \varepsilon)\| ds. \end{aligned}$$

На підставі цієї ж умови одержимо на $(0, \tau_1)$ оцінку для B_2 вигляду:

$$\begin{aligned} \|B_2\| &\leq \sigma_1 \sum_{\nu=1}^p \lambda_\nu^{-1} \int_0^{\lambda_\nu \tau} \|a(s, \varepsilon) - \bar{a}(s)\| ds \leq \\ &c_1 c_2^{-1} \sigma_1 \left(\sum_{\nu=1}^p \lambda_\nu^{-1} (e^{c_2 \lambda_\nu \tau} - 1) \right) \varepsilon^\alpha \leq c_4 \varepsilon^\alpha, \end{aligned}$$

де $c_4 = c_1 c_2^{-1} \sigma_1 \sum_{\nu=1}^p \lambda_\nu^{-1} (e^{c_2 \lambda_\nu L} - 1)$.

Для оцінки B_3 застосовуємо оцінку осциляційного інтеграла [23]:

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\tau f_k(s) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_0^s \gamma_k(z) dz\right) ds \right\| &\leq \sigma_3 \left(\sup_{s \in [0, L]} \|f_k(s)\| + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\|k\|_\Theta} \sup_{s \in [0, L]} \left\| \frac{df_k(s)}{ds} \right\| \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

де $f_k \in C^1[0, L]$, $\sigma_3 > 0$ і не залежить від k і ε .

Із виразу для B_3 і рівняння (2.4) одержимо:

$$f_k(s, \varepsilon) = V_k(s, a_\Lambda(s, \varepsilon)) \exp\left(i \sum_{\nu=1}^q (k_\nu, \bar{\psi})\right) * \\ \exp\left(i \int_0^{\theta_\nu s} Y(z, a_\Lambda(z, \varepsilon), \varphi_\Theta(s, \varepsilon)) dz\right).$$

Із зображення f_k випливають оцінки:

$$\begin{aligned} \|f_k(s, \varepsilon)\| &\leq \sup_{G_1} \|V_k(s, a_\Lambda(z, \varepsilon))\|, \\ \left\| \frac{df_k(s)}{ds} \right\| &\leq \sup_{G_1} \left\| \frac{dV_k(s, a_\Lambda)}{ds} \right\| + \\ &\sup_{G_1} \|V_k(s, a_\Lambda)\| \left(\sum_{\nu=1}^q \theta_\nu \|k_\nu\| \right) \sup_G \|V_k(s, a_\Lambda, \varphi_\Theta)\| + \\ &+ \sum_{\nu=1}^p \lambda_\nu \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial V_k}{\partial a_{\lambda_\nu}} \right\| \leq \\ &\sup_{G_1} \left\| \frac{dV_k(s, a_\Lambda)}{ds} \right\| + \sum_{\nu=1}^p \lambda_\nu \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial V_k(\tau, a_\Lambda)}{\partial a_{\lambda_\nu}} \right\| + \\ &\sigma_1 \sup_{G_1} \|\partial V_k(\tau, a_\Lambda)\| \sum_{\nu=1}^q \theta_\nu \|k_\nu\|. \end{aligned}$$

На підставі оцінки осциляційного інтеграла (2.9), яка правильна при виконанні умови $f_k \in C_1[0, L]$ для кожного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і умови 3, одержимо

$$\begin{aligned} \|B_3\| &\leq c_5 \varepsilon^\alpha \sum_{k \neq 0} \left(\sup_{G_1} \|\partial V_k(\tau, a_\Lambda)\| + \frac{1}{\|k\|_\Theta} \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial V_k(\tau, a_\Lambda)}{\partial \tau} \right\| \right) \\ &+ \sum_{\nu=1}^p \lambda_\nu \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial V_k(\tau, a_\Lambda)}{\partial a_{\lambda_\nu}} \right\| + \sigma_1 \sum_{\nu=1}^q \theta_\nu \|k_\nu\| \sup_{G_1} \|\partial V_k(\tau, a_\Lambda)\| \leq \\ &\leq c_5 \varepsilon^\alpha \sum_{k \neq 0} (1 + \sigma_1) \sup_{G_1} \|\partial V_k(\tau, a_\Lambda)\| + \frac{1}{\|k\|_\Theta} \left(\sup_{G_1} \left\| \frac{\partial V_k(\tau, a_\Lambda)}{\partial \tau} \right\| \right) \\ &+ \sum_{\nu=1}^p \lambda_\nu \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial V_k}{\partial a_{\lambda_\nu}} \right\| \leq c_5 (1 + \sigma_1) \sigma_2 \varepsilon^\alpha = \sigma_6 \varepsilon^\alpha. \end{aligned}$$

Враховуючи оцінки для B_1, B_2 і B_3 , одержимо

$$\|u(\tau, \varepsilon) - \bar{u}(\tau, \varepsilon)\| \leq \sigma_2 \sum_{\nu=1}^r \Delta_\nu^{-1} \int_0^\tau \|u(s, \varepsilon) - \bar{u}(s, \varepsilon)\| ds \quad (2.11)$$

$$+ (c_4 + c_6) \varepsilon^{\alpha+\beta}, 0 \leq \tau \leq \tau_1 \leq L.$$

Застосувавши інтегральну нерівність із леми 1.1, одержимо

$$\|u(\tau, \varepsilon) - \bar{u}(\tau, \varepsilon)\| \leq (c_4 + c_6) e^{\sigma_2 r \tau} \leq (c_4 + c_6) e^{\sigma_2 r L}, 0 \leq \tau \leq \tau_1 \leq L.$$

Виберемо $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ так, щоб

$$(c_4 + c_6) \varepsilon^{\alpha+\beta} e^{\sigma_2 r L} \leq \frac{\rho}{2}.$$

Нерівність виконується, якщо

$$\varepsilon \leq \left(\rho (2(c_4 + c_6) e^{\sigma_2 r L})^{-1} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} = \varepsilon_2.$$

Тоді існує єдиний розв'язок $u(\tau, \varepsilon)$ лежить у ρ -околі розв'язку усередненого рівняння (2.5) і для всіх $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_3]$, $\varepsilon_3 = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ і виконується оцінка (2.9). $\square$

2.3 Умови вздовж розв'язку усередненої системи

При доведенні теореми 2.2 суттєво використана умова 4 на коефіцієнти Фур'є вектор-функцій V , X і Y . Виконання цієї умови вимагалось в області $G := [0, L] \times D^p$, що досить складно для перевірки. Розглянемо випадок, коли виконання цієї умови досить вимагати уздовж розв'язку усередненої задачі (2.5)–(2.7), але за однієї додаткової умови.

Теорема 2.3. *Нехай:*

1. Виконуються умови 1-3 і 5.
2. Для коефіцієнтів Фур'є вектор функції F справджується оцінка

$$\sum_{k \neq 0} \left(\max_{[0, L]} \|F_k(\tau, \bar{a}_\lambda(\tau))\| + \frac{1}{\|k\|_\Theta} \max_{[0, L]} \left\| \frac{\partial F_k(\tau, \bar{a}_\lambda(\tau))}{\partial \tau} \right\| + \right. \\ \left. + \sum_{\nu=1}^q \theta_\nu \max_{[0, L]} \left\| \frac{\partial F_k(\tau, \bar{a}_\lambda(\tau))}{\partial \bar{a}_\lambda} \right\| \right) \leq \sigma_2.$$

3. Справджується оцінка:

$$\sum_{k \neq 0} \|k\| \max_{[0, L]} \|V_k(\tau, \bar{a}_\lambda(\tau))\| \leq \sigma_3.$$

Тоді знайдеться $\varepsilon \in (0, \varepsilon_4]$ таке, що існує єдиний розв'язок системи рівнянь (2.2) – (2.4) і для всіх $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_4]$ справджується оцінка

$$\|u(\tau, \varepsilon) - \bar{u}(\tau, \varepsilon)\| \leq c_9 \varepsilon^\alpha,$$

де $c_9 > 0$ і не залежить від ε , $c_3 = c_1 e^{c_2 \tau}, u|_{\tau=0} = \bar{u}|_{\tau=0}$.

Доведення. Як і при доведенні теореми 2.2, на інтервалі $(0, \tau_1)$ із системи рівнянь (2.2), (2.5) маємо:

$$\begin{aligned} u(\tau, \varepsilon) - \bar{u}(\tau, \varepsilon) = & \int_0^\tau (U(s, u_\Delta(s, \varepsilon)) - U(s, \bar{u}_\Delta(s, \varepsilon))) ds + \\ & + \varepsilon^\beta \int_0^\tau (V(s, a_\Lambda(s, \varepsilon), \varphi_\Theta(s, \varepsilon)) - V(s, \bar{a}_\Lambda(s, \varepsilon), \varphi_\Theta(s, \varepsilon))) ds + \\ & + \varepsilon^\beta \int_0^\tau (V(s, \bar{a}_\Lambda(s, \varepsilon), \varphi_\Theta(s, \varepsilon)) - V(s, \bar{a}(s, \varepsilon), \bar{\varphi}_\Theta(s, \varepsilon))) ds + \\ & + \varepsilon^\beta \sum_{k \neq 0} \int_0^\tau V_k(s, \bar{a}(s, \varepsilon)) \exp \left(i \sum_{\nu=1}^q (k_\nu, \bar{\varphi}(\theta_\nu s, \varepsilon)) \right) ds = \\ & B_1 + \varepsilon^\beta (B_3 + B_4 + B_5). \end{aligned}$$

На підставі умови 1, як і в теоремі 2.2, для B_1 отримаємо оцінки (2.10) і

$$\|B_2\| \leq c_4 \varepsilon^\alpha.$$

Для оцінки норми B_3 , врахувавши нерівність (2.10) й умову 3 теореми

2.3, одержимо:

$$\begin{aligned}
\|B_3\| &= \left\| \sum_{k \neq 0} \int_0^\tau V_k(s, \bar{a}_\Lambda(s)) \left(\exp \left(i \sum_{\nu=1}^q (k_\nu, \bar{\varphi}(\theta_\nu s, \varepsilon)) \right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \exp \left(i \sum_{\nu=1}^q (k_\nu, \bar{\varphi}(\theta_\nu s, \varepsilon)) \right) \right) ds \right\| \leq \\
&\sum_{k \neq 0} \int_0^\tau \max_{[0, L]} \|V_k(s, \bar{a}_\Lambda(s))\| * \sum_{\nu=1}^q \|k_\nu\| \|\varphi(\theta_\nu s, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\theta_\nu s, \varepsilon)\| ds \leq \\
&\sum_{k \neq 0} \max_{[0, L]} \|V_k(s, \bar{a}_\Lambda(s))\| * \sum_{\nu=1}^q \|k_\nu\| \varepsilon^\alpha \int_0^\tau c_1 e^{c_2 \theta_\nu s} ds.
\end{aligned}$$

Оскільки,

$$\int_0^\tau e^{c_2 \theta_\nu s} ds \leq c_2^{-1} (e^{c_2 L} - 1),$$

то в підсумку одержимо

$$\|B_3\| \leq c_1 c_2^{-1} \sigma_3 (e^{c_2 L} - 1) \varepsilon^\alpha = c_7 \varepsilon^\alpha,$$

де $c_7 = c_1 c_2^{-1} \sigma_3 (e^{c_2 L} - 1)$.

Норма B_4 оцінюється, як і в попередній теоремі, з заміною умови 4 теореми 2.2 на умову 3 теореми 2.3. Отже,

$$\|B_4\| \leq c_8 \varepsilon^\alpha, c_8 = c_5(1 + \sigma_1) \sigma_3.$$

Отже, маємо інтегральну нерівність

$$\begin{aligned}
\|u(\tau, \varepsilon) - \bar{u}(\tau, \varepsilon)\| &\leq \sigma_1 \sum_{\nu=1}^r \int_0^\tau \|u_{\Delta_\nu}(s, \varepsilon) - \bar{u}_{\Delta_\nu}(s, \varepsilon)\| ds + \\
&+ \varepsilon^{\alpha+\beta} (c_4 + c_7 + c_8), \quad 0 \leq \tau \leq \tau_1,
\end{aligned}$$

розв'язком якої, на підставі леми 1.1, є оцінка

$$\|u(\tau, \varepsilon) - \bar{u}(\tau, \varepsilon)\| \leq \varepsilon^{\alpha+\beta} (c_4 + c_7 + c_8) e^{r\tau}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau_1. \quad (2.12)$$

Нехай $c_9 = (c_4 + c_7 + c_8)$. Якщо

$$\varepsilon \leq \left(\rho (2c_9 \exp(rL))^{-1} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} = \varepsilon_4,$$

то розв'язок системи рівнянь (2.2)–(2.4) із початковими умовами при $\tau = 0$, які збігаються із початковими умовами для усередненої задачі, існує, єдиний і оцінка (2.11) виконується для всіх $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_4]$. $\square$

Зауваження 2.1. Якщо вектор-функції V, X, Y – тригонометричні поліноми

$$F := (V, X, Y) = \sum_{\|k\| \leq N} F_k(\tau, a_\Lambda) \exp \left(i \sum_{\nu=1}^q (k_\nu, \varphi_{\theta_\nu}) \right),$$

то в умовах теореми 2.2 немає потреби в умові 4, а в теоремі 2.3 – умовах 4 і 5. Справді, відмінність доведення теореми 2.2 полягає в оцінці норми B_3 .

У випадку тригонометричного полінома V маємо:

$$\begin{aligned} \|B_3\| &\leq c_5 \varepsilon^\alpha \sum_{0 < \|k\| \leq N} \sup_{G_1} \|V_k(\tau, a_\Lambda)\| + \frac{1}{\|k\|_\Theta} \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial V_k}{\partial \tau} \right\| + \\ &+ \sum_{\nu=1}^p \lambda_k \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial V_K(\tau, a_\Lambda(\tau))}{\partial a_\Lambda} \right\| + \\ &+ \sigma_1 \sum_{\nu=1}^q \theta_\nu \|k_\nu\| \left(\sup_{G_1} \|V_k(\tau, a_\Lambda)\| \right) = c_5 \sum_{0 < \|k\| \leq N} \left(1 + \frac{\sigma_1}{\|k\|_\Theta} \sum_{\nu=1}^q \theta_\nu \|k_\nu\| \right) + \\ &+ \frac{1}{\|k\|_\Theta} \left(\sup_{G_1} \left\| \frac{\partial V_k(\tau, a_\Lambda(\tau))}{\partial \tau} \right\| + \sum_{\nu=1}^p \lambda_k \sup_{G_1} \left\| \frac{\partial V_k}{\partial a_\Lambda} \right\| \right) \varepsilon^\alpha = c_{10}(N) \varepsilon^\alpha. \end{aligned}$$

При доведенні теореми 2.3 оцінка норми B_4 набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \|B_4\| &\leq \varepsilon^\alpha \sum_{0 < \|k\| \leq N} \max_{[0, L]} \|V_k(\tau, \bar{a}_\lambda(\tau))\| * \sum_{\nu=1}^q \|k_\nu\| (c_1 c_2^{-1} \theta_\nu^{-1} (e^{c_2 \theta_\nu \tau} - 1)) \leq \\ &\leq \left(c_1 c_2 (e^{C_2 L} - 1) \sum_{0 < \|k\| \leq N} \|k\|_\Theta \max_{[0, L]} \|V_k(\tau, \bar{a}_\lambda(\tau))\| \right) \varepsilon^\alpha = c_{11}(N) \varepsilon^\alpha. \end{aligned}$$

2.4 Приклад

На взаємодію популяцій можуть впливати зовнішні фактори, які мають коливний характер, і описуються багаточастотними системами

диференціальних рівнянь із запізненням аргументу. Розглянемо взаємодію двох популяцій типу «хижак-жертва», яка ґрунтується на моделі Вольтерри-Лотки [19]. Нехай величина популяції жертви $u(t)$, хижака $v(t)$, $t \geq 0$. Математична модель під дією одночастотних збурень набуває вигляду:

$$\frac{du}{d\tau} = (\beta_1 - \gamma_1 v) u - \mu a + b_1 \cos(k\varphi + l\varphi_\theta), \quad u(0) = \bar{u} > 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = (-\beta_2 + \gamma_2 u) v, \quad v(0) = \bar{v} > 0,$$

$$\frac{da}{d\tau} = (\kappa - a) a + b_2 \cos(k\varphi + l\varphi_\theta), \quad a(0) = \bar{y}, \quad (2.14)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1 + 2\tau}{\varepsilon}, \quad \varphi(0) = 0$$

де $\tau \in [0, 1]$, $\mu = \sqrt{\varepsilon}$, $\kappa, \beta_\nu, \gamma_\nu$ – додатні коефіцієнти, $b_1 * b_2 \neq 0$, $0 < \theta < 1$, $k + l\theta = 0$.

У системі (2.13) – (2.14) досягається резонанс при $\tau = 0$, оскільки

$$\omega(\tau) = 1 + 2\tau, \quad \gamma(\tau) = k\omega(\tau) + \theta l\omega(\theta\tau) = 2(k + l\theta^2)\tau \text{ і } \gamma(0) = 0.$$

Усереднена за швидкими змінними система рівнянь має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{d\tau} &= (\beta_1 - \gamma_1 \bar{v}) \bar{u} - \mu a, \quad \bar{u}(0) = \bar{u}, \\ \frac{d\bar{v}}{d\tau} &= (-\beta_2 + \gamma_2 \bar{u}) \bar{v}, \quad \bar{v}(0) = \bar{v}; \\ \frac{d\bar{a}}{d\tau} &= (\kappa - \bar{a}) \bar{a}, \quad \bar{a}(0) = \bar{y}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1 + 2\tau}{\varepsilon}, \quad \varphi(0) = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Із рівнянь для $u(\tau)$ і $\bar{u}(\tau)$ маємо:

$$\begin{aligned} u(\tau) - \bar{u}(\tau) &= \beta_1 \int_0^\tau (u(s, \varepsilon) - \bar{u}(s)) ds - \\ &\quad \gamma_1 \int_0^\tau ((u(s, \varepsilon) v(s, \varepsilon) - \bar{u}(s) \bar{v}(s, \varepsilon))) ds + \\ &\quad + \mu \int_0^\tau (\bar{u}(s) - u(s, \varepsilon)) ds + b_1 \int_0^\tau \cos \frac{(k + l\theta^2)s^2}{\varepsilon} ds. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Таким же чином одержимо:

$$\begin{aligned} v(\tau, \varepsilon) - \bar{v}(\tau, \varepsilon) &= -\beta_2 \int_0^\tau (v(s, \varepsilon) - \bar{v}(s, \varepsilon)) ds + \\ &\quad \gamma_2 \int_0^\tau (u(s, \varepsilon) v(s, \varepsilon) - \bar{u}(s) \bar{v}(s, \varepsilon)) ds. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Із (2.16) та (2.17) випливає рівність:

$$\begin{aligned} w(\tau, \varepsilon) &:= \gamma_2(u(\tau, \varepsilon) - \bar{u}(\tau)) + \gamma_1(v(\tau, \varepsilon) - \bar{v}(\tau, \varepsilon)) = \\ &= (b_1 + \mu) \gamma_2 \int_0^\tau (u(s, \varepsilon) - \bar{u}(s)) ds + \gamma_2 \int_0^\tau \cos \frac{(k + l \theta^2)s^2}{\varepsilon} ds. \end{aligned}$$

Нехай $\kappa = \max(b_1 + \mu, \beta_2)$. Тоді

$$|w(\tau, \varepsilon)| \leq \kappa \int_0^\tau w(s, \varepsilon) ds + \gamma_2 \max_{[0,1]} \left| \int_0^\tau \cos \frac{(k + l \theta^2)s^2}{\varepsilon} ds \right| = d_1 + d_2. \quad (2.18)$$

Інтеграл у d_2 оцінено на підставі оцінки інтеграла Френеля [85].

Виконаємо заміну

$$s = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\kappa_1}, \quad \kappa_1 = \sqrt{k + l \theta^2}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \cos \frac{\kappa_1}{\varepsilon} s^2 ds &= \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\kappa_1} \int_0^{\frac{\tau\sqrt{\varepsilon}}{\kappa_1}} \cos z^2 dz = \\ &= \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\kappa_1} + \frac{\varepsilon}{\kappa_1^2 \sqrt{2\pi}} \sin \frac{\varepsilon}{\kappa_1} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\kappa_1} + o(\sqrt{\varepsilon}). \end{aligned}$$

Згідно з лемою Гронуолла [85] із інтегральної нерівності (2.18) одержимо:

$$w(\tau, \varepsilon) \leq \frac{\gamma_2 \sqrt{\varepsilon}}{2\kappa_1} e^\kappa + o(\sqrt{\varepsilon}) \approx \kappa_2 \sqrt{\varepsilon}, \quad \kappa_2 = \gamma_2 e^\kappa / (2\kappa_1).$$

Зауважимо, що у одночастотному випадку без запізнення аргументу похибка методу усереднення має порядок ε [79].

Якщо $\mu = 0$, то система рівнянь для $\bar{u}$ і $\bar{v}$ є системою Вольтерри-Лотки

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dt} &= (\beta_1 - \gamma_1 \bar{v}) \bar{u}, \\ \frac{d\bar{v}}{dt} &= (-\beta_2 + \gamma_2 \bar{u}) \bar{v}. \end{aligned}$$

Стан рівноваги $(\beta_2/\gamma_2, \beta_1/\gamma_1)$ – центр, відповідна траєкторія – цикл (рис. 2.1).

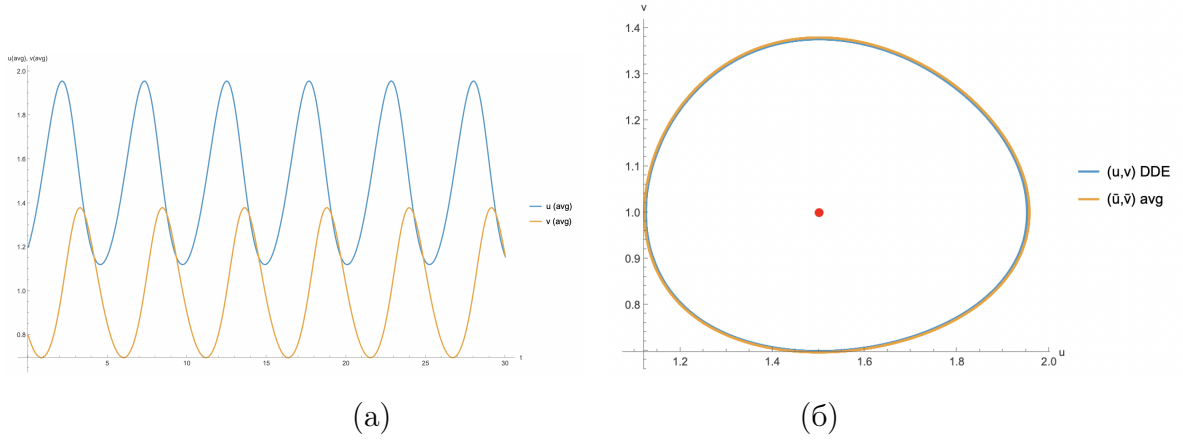


Рис. 2.1 (а) Динаміка факторів $\bar{u}, \bar{v}$. (б) Фазовий портрет для (u, v) та $(\bar{u}, \bar{v})$.
 Параметри: $\beta_1 = \gamma_1 = 1, \beta_2 = 1.5, \gamma_2 = 1, \mu = 0, b_1 = b_2 = 0.01, \theta = 0.5, \kappa = 1,$
 $u(0) = 1.2, v(0) = 0.8, a(0) = 0.6.$

Для $\mu \neq 0$ стан рівноваги знаходиться із системи рівнянь

$$\begin{aligned} (\beta_1 - \gamma_1 \bar{v})u - \mu \bar{a} &= 0, \\ (-\beta_2 + \gamma_2 \bar{u})\bar{v} &= 0, \\ (\kappa - \bar{a})\bar{a} &= 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Розв'язок $\bar{a} = 0$ – нестійкий. Розглянемо випадок $\bar{a} = \kappa$ – глобально асимптотично стійкого розв'язку логістичного рівняння. Для $\bar{a} = \kappa$ із системи (2.19) знаходимо стан рівноваги:

$$\bar{u}_1 = \frac{\mu \kappa}{\beta_1}, \quad \bar{v}_1 = 0, \quad (2.20)$$

і ще один стан рівноваги

$$\bar{u}_2 = \frac{\beta_2}{\gamma_2}, \quad \bar{v}_2 = \frac{\beta_1 \beta_2 - \mu \kappa \gamma_2}{\gamma_1 \beta_2}, \quad (2.21)$$

який має біологічний зміст при виконанні умови

$$\mu < \frac{\beta_1 \beta_2}{\kappa \gamma_2}. \quad (2.22)$$

або для малого параметра $\varepsilon = \mu^2$ такої умови:

$$0 < \varepsilon < \left(\frac{\beta_1 \beta_2}{\kappa \gamma_2} \right)^2.$$

Характеристичне рівняння лінеаризованої системи рівнянь (2.15)

набуває вигляду:

$$\begin{vmatrix} \beta_1 - \gamma_1 \bar{v} - \lambda - \gamma_1 \bar{u} & -\gamma_1 \bar{u} & -\mu \\ \gamma_2 \bar{v} & -\beta_2 + \gamma_2 \bar{u} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \kappa - 2\bar{a} - \lambda \end{vmatrix},$$

або, після обчислення визначника,

$$(\kappa - 2\bar{a} - \lambda) (\lambda^2 - \lambda(\beta_1 - \beta_2 - \gamma_1 \bar{v} + \gamma_2 \bar{u}) + (\beta_1 - \gamma_1 \bar{v})(-\beta_2 + \gamma_2 \bar{u}) + \gamma_1 \gamma_2 \bar{u} \bar{v}) = 0.$$

Власне значення $\lambda_1 = \kappa - 2\bar{a} = -\kappa < 0$.

Для стану рівноваги (2.20) маємо:

$$\lambda^2 - \lambda(\beta_1 - \beta_2 + \frac{\mu\kappa\gamma_2}{\beta_1}) + \mu\kappa\gamma_2 - \beta_1\beta_2 = 0.$$

Оскільки для власних значень λ_2 і λ_3 , які є коренями характеристичного рівняння, виконується нерівність

$$\lambda_2 \lambda_3 = -(\beta_1 \beta_2 - \mu\kappa\gamma_2) < 0$$

то при виконанні умови (2.22) стан рівноваги (2.20) нестійкий.

Для стану рівноваги (2.21) характеристичне рівняння набуває вигляду:

$$\lambda^2 - \frac{\mu\kappa\gamma_2}{\beta_2} \lambda + \beta_1 \beta_2 - \mu\kappa\gamma_2 = 0. \quad (2.23)$$

Оскільки $\lambda_2 + \lambda_3 = \frac{\sqrt{\varepsilon}\kappa\gamma_2}{\beta_2} > 0$, то для $\mu = \sqrt{\varepsilon}$ стан рівноваги нестійкий (рис. 2.2).

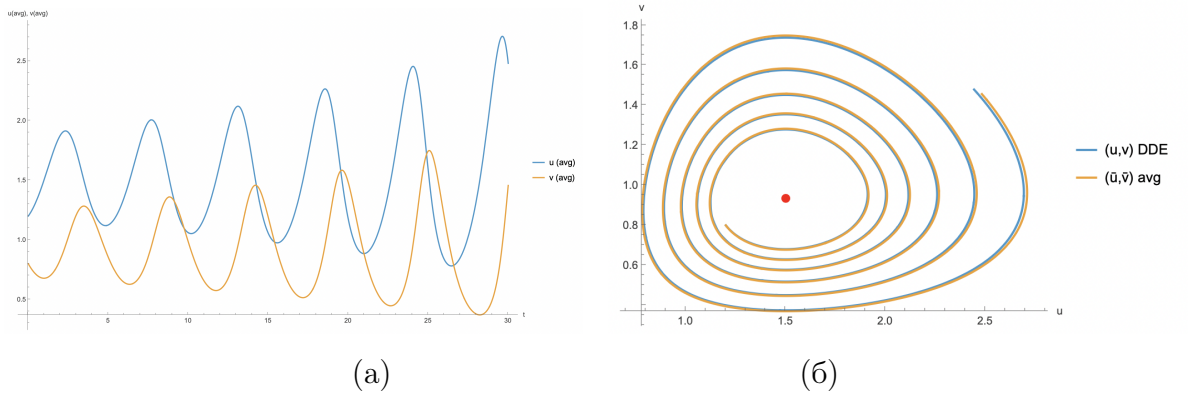


Рис. 2.2 (а) Динаміка факторів $\bar{u}$, $\bar{v}$. (б) Фазовий портрет для (u, v) та $(\bar{u}, \bar{v})$.

Параметри: $\beta_1 = \gamma_1 = 1, \beta_2 = 1.5, \gamma_2 = 1, \mu = 0.1, b_1 = b_2 = 0.01, \theta = 0.5, \kappa = 1,$

$$u(0) = 1.2, v(0) = 0.8, a(0) = 0.6.$$

Якщо $\mu = -\sqrt{\varepsilon}$, то

$$\lambda_2 + \lambda_3 = \frac{\mu\kappa\gamma_2}{\beta_2} < 0, \quad \lambda_2\lambda_3 = \beta_1\beta_2 + \sqrt{\varepsilon}\kappa\gamma_2 > 0.$$

Отже, стан рівноваги (2.21) асимптотично стійкий.

Якщо

$$\sqrt{\varepsilon}\kappa\gamma_2 < 2(1 + \sqrt{1 + \beta_1\beta_2^2}),$$

то дискримінант рівняння (2.23) $D < 0$ і стан рівноваги є стійким фокусом (рис. 2.3), інакше при виконанні протилежної нерівності – стійким вузлом (рис. 2.4).

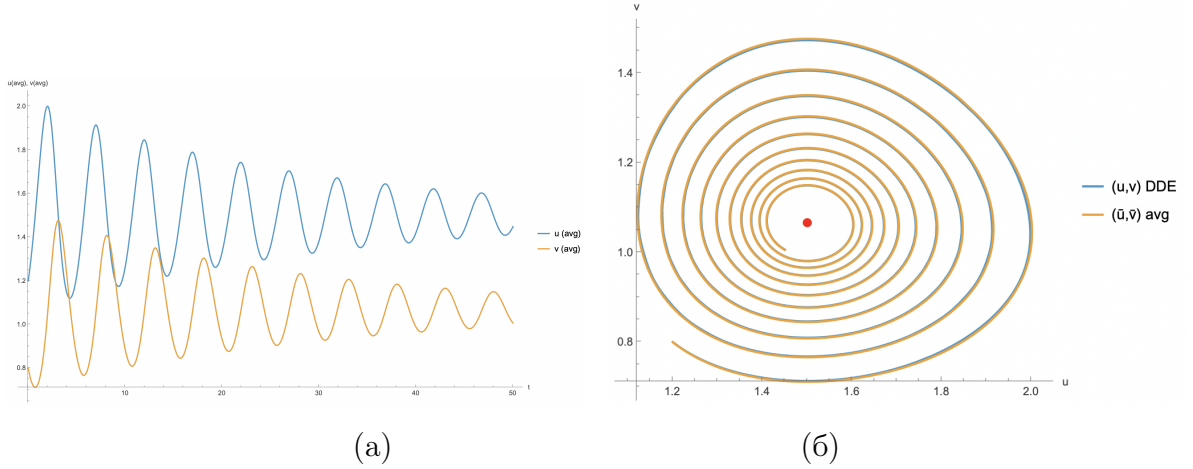


Рис. 2.3 (а) Динаміка факторів $\bar{u}, \bar{v}$. (б) Фазовий портрет для (u, v) та $(\bar{u}, \bar{v})$.
Параметри: $\beta_1 = \gamma_1 = 1, \beta_2 = 1.5, \gamma_2 = 1, \mu = -0.1, b_1 = b_2 = 0.01, \theta = 0.5, \kappa = 1,$
 $u(0) = 1.2, v(0) = 0.8, a(0) = 0.6$.

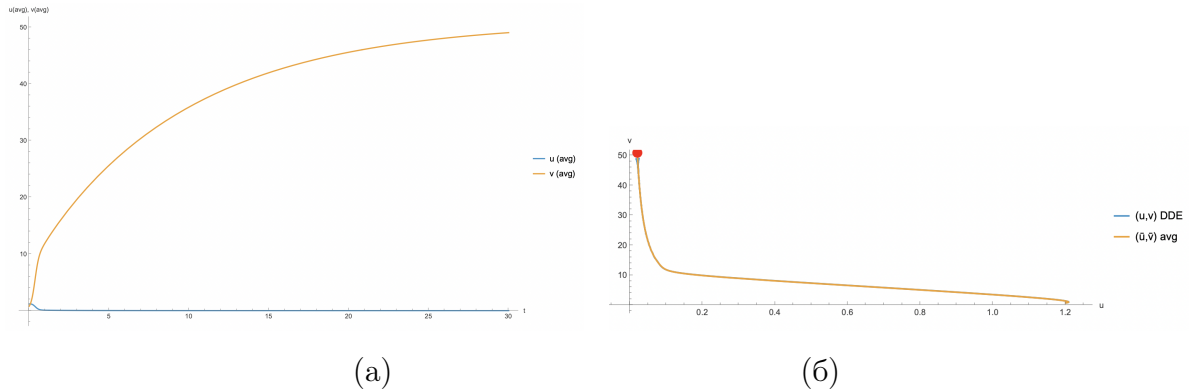


Рис. 2.4 (а) Динаміка факторів $\bar{u}, \bar{v}$. (б) Фазовий портрет для (u, v) та $(\bar{u}, \bar{v})$.
Параметри: $\beta_1 = \gamma_1 = 1, \beta_2 = 0.1, \gamma_2 = 5, \mu = -0.1, b_1 = b_2 = 0.01, \theta = 0.5, \kappa = 10,$
 $u(0) = 1.2, v(0) = 0.8, a(0) = 0.6$.

Отже, вплив збурення, навіть в одночастотному випадку з запізненням аргументу, призводить до біфуркацій стану рівноваги у моделі типу Вольтерри-Лотки.

Висновки до розділу 2

Розділ 2 присвячений обґрунтуванню методу усереднення за фазовими змінними для математичної моделі, в якій враховано передісторію процесу, і знаходиться під дією багаточастотних збурень із запізненням аргументів. Одержано такі основні результати:

- запропоновано математичну модель процесу із запізненнями аргументу під дією багаточастотних збурень із лінійно перетвореними аргументами;
- обґрунтовано метод усереднення для запропонованої моделі на скінченному часовому інтервалі;
- одержано оцінку похибки методу усереднення, яка явно залежить від малого параметра $\varepsilon > 0$ і асимптотики багаточастотних збурень ε^β ;
- обґрунтовано метод усереднення з умовами вздовж розв'язку усередненої системи рівнянь;
- проілюстровано вплив багаточастотних збурень із запізненням на прикладі моделі типу Вольтерри-Лотки.

РОЗДІЛ 3

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ІМУНОЛОГІЇ ТА ЕПІДЕМІОЛОГІЇ ІЗ ВРАХУВАННЯМ ЕКОЛОГІЧНОГО ВПЛИВУ

У розділі 3 будуються і досліджуються дві математичні моделі із врахуванням впливу екологічних факторів, якими можуть бути забруднення повітря, води, ґрунту, зміна клімату, якість харчових продуктів, а також фактори соціального характеру, стресові ситуації, пов'язані з надзвичайними подіями (війна, стихійні лиха тощо). Такий вплив в моделях описується об'єднаним показником $E(t)$, який враховує сукупність екологічних та соціальних факторів. Досліджено модель імунної відповіді організму людини на вірусну інфекцію і модель поширення епідемії в популяції, в якій враховано також втрату імунітету після одужання.

Результати розділу 3 опубліковані в наукових статтях автора та співавторів [86, 87, 93, 88, 89, 90, 91, 92], доповідались на конференціях та семінарах (Додаток А(2)).

3.1 Модель імунної відповіді організму людини на вірусну інфекцію з урахуванням екологічного впливу

3.1.1 Екологічний фактор

Припустимо, що величина забруднення $E(t)$ оцінюється у відносних одиницях, $0 \leq E(t) \leq 1$, змінюється з часом і є сумою компонент $E_v(t)$: $E(t) = a_1 E_1(t) + \dots + a_m E_m(t)$, де вагові коефіцієнти $a_v \geq 0$, $a_1 + \dots + a_m = 1$. Функція $E(t)$ за відсутності значних збурень має коливний характер і стабілізується з часом відносно деякого значення K , $0 < K < 1$, яке відповідає нормативному рівню забруднення довкілля, або має нерегулярний коливний чи періодичний характер [4, 5, 6].

Тому вважатимемо, що функція $E(t)$ є розв'язком узагальненого

рівняння Гатчінсона:

$$\frac{dE(t)}{dt} = r \left(1 - \left(\frac{E(t - \Delta)}{K} \right)^n \right) E(t), t > 0. \quad (3.1)$$

Тут $0 < r$ – коефіцієнт лінійного росту, Δ – усереднений час відновлення екологічної рівноваги відносно $E = K$. Параметр $n \in N$ дозволяє адекватніше моделювати динаміку забруднення. Графіки розв’язків для різних n наведені на рис. 3.1:

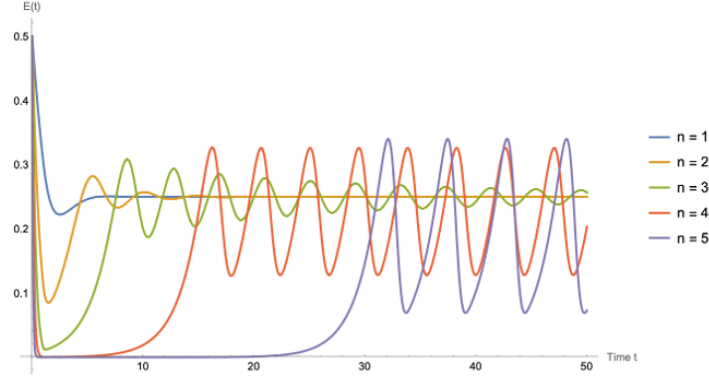


Рис. 3.1 Динаміка розв’язків фактору E узагальненого рівняння Гатчінсона при різних значеннях параметра n .

Початкова умова для розв’язку рівняння (3.1) набуває вигляду:

$$E(t) = E_0(t), \quad 0 \leq E_0(t) \leq 1, \quad t \in [-\Delta, 0]. \quad (3.2)$$

Розв’язок задачі (3.1), (3.2) невід’ємний, що випливає з інтегрального рівняння

$$E(t) = E_0(0) \exp \left(r \int_0^t \left(1 - \left(\frac{E(s - \Delta)}{K} \right)^n \right) ds \right)$$

та умови $E(0) \geq 0$.

Існування і обмеженість розв’язку досліджено в роботах [10, 11].

Розглянемо питання стійкості стаціонарних розв’язків $E_1 = 0$ і $E_2 = K$ рівняння (3.1). Розв’язок $E_1 = 0$ нестійкий при $r > 0$, що випливає із нестійкості розв’язку $E = 0$ лінійного рівняння

$$\frac{dE(t)}{dt} = rE(t).$$

Запровадимо в (3.1) стандартну заміну [9]

$$E(t) = K(1 + x(t)), t = \Delta \cdot s.$$

Для функції $x(s)$ одержимо рівняння

$$\frac{dx(s)}{ds} = -rn\Delta x(s-1) - F(x(s), x(s-1)),$$

де $F(u, v)$ – нелінійна функція аргументів u і v , $F(0, 0) = 0$. Для відповідного лінійного рівняння

$$\frac{dx(s)}{ds} = -rn\Delta x(s-1),$$

необхідною і достатньою умовою асимптотичної стійкості розв’язку $x = 0$, відповідного до $E_2 = K$, є виконання умови [93]:

$$0 < rn\Delta < \pi/2. \quad (3.3)$$

При переході через точку біфуркації $r\Delta = \pi/2n$ виникає періодичний розв’язок на підставі теореми Хопфа для рівнянь з запізненням [10], що проілюстровано на рис 1.2(а) та рис 1.2(б).

На підставі теореми про стійкість за першим наближенням [94] виконання умови (3.3) достатньо для локальної асимптотичної стійкості розв’язку $x = 0$, отже і $E_2 = K$.

3.1.2 Математична модель імунної відповіді

У монографії Г.І. Марчука [52] запропоновано математичну модель імунної відповіді організму людини на вірусну інфекцію, яка описується системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{dV}{dt} = (\beta - \gamma F)V, \quad (3.4)$$

$$\frac{dC}{dt} = \alpha\xi(m)V_\tau F_\tau - \mu_c(C - C^*), \quad (3.5)$$

$$\frac{dF}{dt} = \rho C - \eta\gamma FV - \mu_f F, \quad (3.6)$$

$$\frac{dm}{dt} = \sigma V - \mu_m m, \quad (3.7)$$

де змінні представляють основні фактори інфекційного процесу. Імунна відповідь включає вироблення специфічних об’єктів (антитіл $F(t)$), які генеруються каскадом плазматичних клітин $C(t)$. Антитіла здатні

нейтралізувати або знищувати чужорідні матеріали (антигени), кількість або концентрація яких $V(t)$ змінюється з часом $t \geq t_0 = 0$. Модель також включає відносну міру $m(t)$ ураження органу-мішені, спричиненого антигенами, узагальнена міра якого набуває вигляду:

$$\xi(m) = \begin{cases} 1, 0 \leq m \leq m^*; \\ \frac{m-1}{m^*-1}, m^* < m \leq 1. \end{cases}$$

Якщо $m \in [0, m^*]$, то ураження органу не впливає на функціонування імунної системи. Фактор запізнення $\tau > 0$ відіграє важливу роль для моделювання імунної відповіді, оскільки задає час від моменту інфікування до активної імунної відповіді організму, $V_\tau(t) = V(t - \tau)$, $F_\tau(t) = F(t - \tau)$.

У дисертаційній роботі побудовано і досліджено модель імунної відповіді організму людини на вірусну інфекцію, яка враховує вплив екологічних факторів, що описується функцією $E(t)$, яка є розв'язком рівняння (3.1). У моделі імунної відповіді (3.4) - (3.7) врахуємо негативний вплив фактору забруднення $E(t)$ на утворення каскаду плазмоклітин, що спричиняє зменшення швидкості його формування. Швидкість ураження органу-мішені $m(t)$ при цьому зростає. Припустимо, що вплив фактора забруднення є лінійним з невід'ємними коефіцієнтами відповідно ε_c і ε_m . Також врахуємо, що нейтралізація антигенів $V(t)$ антитілами $F(t)$ може адекватніше описуватись у вигляді добутку $V(t)F^k(t)$, де $k \in \mathbb{N}$. Значення $k > 1$ відображає інтенсивнішу імунну відповідь порівняно з $k = 1$. У підсумку одержимо систему рівнянь, що описує модель імунної відповіді організму людини на вірусну інфекцію з урахуванням екологічного впливу, вигляду:

$$\frac{dV}{dt} = (\beta - \gamma F^k(t))V(t), \quad (3.8)$$

$$\frac{dC}{dt} = \alpha \xi(m(t))V(t - \tau)F(t - \tau) - \mu_c(C(t) - C^*) - \varepsilon_c E(t), \quad (3.9)$$

$$\frac{dF}{dt} = \rho C(t) - \mu_f F(t) - \eta \gamma V(t)F^k(t), \quad (3.10)$$

$$\frac{dm}{dt} = \sigma V(t) - \mu_m m(t) + \varepsilon_m E(t), \quad (3.11)$$

де параметри набувають невід'ємних значень. Початкові умови мають вигляд:

$$\begin{aligned} V(t) = 0, t \in [-\tau, 0), V_0 = V(0) \geq 0; F(t) = F_0(t) \geq 0, F_0 \in C[-\tau, 0]; \\ C(0) = C_0 \geq 0; m(0) = m_0 \in [0, 1). \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.1.3 Невід'ємність розв'язку моделі

Для адекватності моделі важливо, щоб при $t > 0$ розв'язок системи (3.8)-(3.11) з невід'ємними початковими умовами набував невід'ємних значень. Обґрунтування невід'ємності розв'язку доведено в наступній теоремі.

Теорема 3.1. *Нехай коефіцієнти системи рівнянь (3.1), (3.8)-(3.11) і початкові значення розв'язку при $t = 0$ невід'ємні, при $t > 0$ існує неперервний розв'язок системи з початковими умовами (3.12) і виконуються оцінки:*

$$C_0 \geq C^*, \varepsilon_c < \mu_c C^*. \quad (3.13)$$

Тоді розв'язок початкової задачі (3.8)-(3.12) невід'ємний при $t > 0$.

Доведення. Невід'ємність розв'язку $V(t)$ при $t > 0$, випливає із його зображення у вигляді

$$V(t) = V_0 \exp \left(\int_0^t (\beta - \gamma F^k(s)) ds \right) \geq 0,$$

яке одержується з рівняння (3.8). За умови $V_0 > 0$ розв'язок $V(t) > 0$ при $t > 0$.

Невід'ємність розв'язку задачі (3.1), (3.2) обґрунтовано в п.3.1.1.

Оскільки $V(t) \geq 0$ і $E(t) \geq 0$, коли $t > 0$, то розв'язок рівняння (3.11)

$$m(t) = m_0 e^{-\mu_m t} + \int_0^t e^{-\mu_m(t-s)} (\sigma V(s) + \varepsilon_m E(s)) ds \geq 0, \quad t > 0. \quad (3.14)$$

На відрізку $[0, \tau]$, враховуючи оцінки (3.13), маємо:

$$C(t) = C^* + (C_0 - C^*) e^{-\mu_c t} - \varepsilon_c \int_0^t e^{-\mu_m(t-s)} E(s) ds \geq C^* - \frac{\varepsilon_c}{\mu_c} > 0.$$

Якщо $F(0) > 0$, то $F(t) > 0$ на деякому інтервалі $(0, t_1)$. Нехай $t_1 \leq \tau$, $F(t_1) = 0$, тоді $dF(t_1)/dt \leq 0$, але в точці $t = t_1$ маємо

$$\frac{dF(t_1)}{dt} = \rho C(t_1) - \eta \gamma F^k(t_1) V(t_1) - \mu_c F(t_1) = \rho C(t_1) > 0,$$

що суперечить припущенню. Отже, $F(t) > 0$ при $t \in [0, \tau]$.

Оскільки $\xi(m) \geq 0$, то для $t \in (\tau, 2\tau]$:

$$\begin{aligned} \frac{dC(t)}{dt} = & \alpha \xi(m(t)) V(t - \tau) F(t - \tau) - \mu_c C^* - \varepsilon_c E(t) \geq \\ & \mu_c (C(t) - C^*) - \varepsilon_c E(t). \end{aligned}$$

Якщо $C(t_2) = 0$, $\tau < t_2 < 2\tau$, то

$$\frac{dC(t_2)}{dt} \geq \mu_c C^* - \varepsilon_c C > 0,$$

що суперечить припущенню, оскільки $dC(t_2)/dt \leq 0$. Аналогічно доводиться, що $F(t) > 0$ при $t \in [2\tau, 3\tau]$ і відповідно $V(t) > 0$, і далі на відрізках $[\nu\tau, (\nu + 1)\tau]$, $\nu \geq 3$.

Отже, розв'язок моделі невід'ємний для $t > 0$ при зроблених припущеннях. $\square$

3.1.4 Існування і єдиність розв'язку

Розглянемо питання існування і єдиності розв'язку задачі (3.8)-(3.11).

Теорема 3.2. *Нехай коефіцієнти системи рівнянь (3.8)–(3.11) і початкові умови невід'ємні, виконуються умови (3.13). Тоді при $t > 0$ існує єдиний розв'язок задачі (3.8)–(3.12), диференційований при $t > \tau$.*

Доведення. Неперервний розв'язок задачі (3.1), (3.2) існує і єдиний при $t > 0$ [9], [11]. На інтервалі $(0, \tau)$ розв'язок лінійного рівняння

$$\frac{dC(t)}{d\tau} = -\mu_c (C(t) - C^*) - \varepsilon_c E(t) \quad (3.15)$$

існує і єдиний. На деякому інтервалі $(0, t)$ існування розв'язку із початковими умовами $V(0) > 0$, $F(0) > 0$ на підставі теореми 3.1 одержимо

$$\frac{dV}{dt} \leq \beta V, \quad \frac{dF}{dt} \leq \rho C.$$

Розв'язок отриманої лінійної системи із початковими умовами $V(0)$ і $F(0)$ існує при $t > 0$ і набуває додатних значень, коли $V(0) > 0$ і $F(0) > 0$. Отже, розв'язок рівнянь (3.8) і (3.9) можна продовжити на інтервал $(0, \tau)$ на підставі теореми Уїтнера [94, с. 42-43]. Існування і єдиність розв'язку $m(t)$ випливає із зображення (3.14). На наступному кроці $(\tau, 2\tau)$, повторивши аналогічні міркування, встановлюється існування єдиного розв'язку із невід'ємними початковими значеннями $V(t)$ і $F(t)$ при $t \in [0, \tau]$, $C(0) > 0$ і $m(0) > 0$. Методом кроків [9] отримується існування розв'язку для $t > 0$.

Оскільки початкова функція для розв'язку $V(t)$ розривна при $t = 0$, то розв'язок задачі (3.8)–(3.11) неперервний для $t \in [0, \tau]$ і диференційований при $t > \tau$ внаслідок гладкості правих частин системи для заданих початкових умов. Єдиність розв'язку випливає із гладкості правих частин системи рівнянь. Розв'язок задачі (3.1) - (3.2) для неперервної функції $E_0(t)$ при $t \in [-\Delta, 0]$ і $E_0(0) = E(0)$ диференційовний при $t > 0$ і згладжується для $t > \Delta$, $t > 2\Delta$ і т.д. [9]. $\square$

3.1.5 Стаціонарні розв'язки та їх стійкість

Стаціонарний розв'язок $E = K$ рівняння (3.1) асимптотично стійкий при виконанні умови (3.3). Для системи рівнянь (3.8)–(3.11), стаціонарний розв'язок моделі імунної відповіді (3.8)–(3.11) може існувати, якщо міра ураження органу-мішені не перевищує $m^* > 0$, $0 < m^* < 1$, тобто коли $\xi(m) = 1$. Стаціонарні розв'язки знаходяться із нелінійної системи рівнянь:

$$\begin{aligned}(\beta - \gamma F^k)V &= 0, \\ \alpha VF - \mu_c(C - C^*) - \varepsilon_c K &= 0, \\ \rho C - \mu_f F - \eta \gamma VF^k &= 0, \\ \sigma V - \mu_m m + \varepsilon_m E &= 0.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Стаціонарний розв'язок, що відповідає стану здорового організму з незначним ураженням органу-мішені m , що не перевищує m^* , набуває

вигляду:

$$V_1 = 0, C_1 = C^* - \frac{\varepsilon_c K}{\mu_c}, F_1 = \frac{\rho C_1}{\mu_f}, m_1 = \frac{\varepsilon_m K}{\mu_m}. \quad (3.17)$$

Відзначимо, що в математичній моделі (3.4)-(3.7) відповідний розв'язку (3.17) стаціонарний розв'язок такий:

$$\bar{V}_1 = \bar{m}_1 = 0, \quad \bar{C}_1 = C^*, \quad \bar{F}_1 = \rho C^* / \mu_f.$$

Отже, вплив фактору $E(t)$ призводить до певного ураження органу-мішені $m_1 > \bar{m}_1 = 0$ і зменшення концентрації плазмоклітин $C_1 < \bar{C}_1$.

Стаціонарний розв'язок (3.17) існує, якщо невід'ємний, тобто при виконанні умов:

$$\varepsilon_c \leq \frac{\mu_c C^*}{K}, \quad \varepsilon_m \leq \frac{\mu_m m^*}{K}. \quad (3.18)$$

Ще один розв'язок може існувати, якщо $V \neq 0$. У цьому випадку:

$$F_2 = \sqrt[k]{\frac{\beta}{\gamma}}, m_2 = \frac{\sigma_2 V_2 + \varepsilon_m K}{\mu_m}, \quad (3.19)$$

а значення C_2 і V_2 є розв'язками системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \mu_c C - \alpha F_2 V = \mu_c C^* - \varepsilon_c K, \\ \rho C - \eta \gamma F_2^k V = \mu_f F_2. \end{cases}$$

Звідси одержимо:

$$C_2 = \frac{\alpha \mu_c + \eta \gamma (\varepsilon_c K - \mu_c C^*) F_2^{k-1}}{\alpha \rho - \eta \gamma \mu_c F_2^{k-1}}, \quad (3.20a)$$

$$V_2 = \frac{\rho (\varepsilon_c K - \mu_c C^*) + \mu_c \mu_f F_2}{\alpha \rho F_2 - \eta \gamma \mu_c F_2^k}. \quad (3.20b)$$

Стаціонарний розв'язок (3.19), (3.20) відповідає стану хронічного захворювання при допустимому рівні забруднення $E = K$. Отриманий розв'язок (3.20) має зміст, якщо $V_2 > 0$, оскільки із (3.20a) випливає, що :

$$\rho C_2 = \mu_f F_2 + \mu \gamma V_2 F_2^k > 0.$$

Додатність V_2 забезпечується виконанням системи нерівностей:

$$\rho (\mu_c C^* - \varepsilon_c K) < \mu_c \mu_f F_2, \quad (3.21)$$

$$\alpha\rho > \eta\gamma\mu_c F_2^{k-1},$$

або системи нерівностей із протилежними знаками:

$$\begin{aligned}\rho(\mu_c C^* - \varepsilon_c K) &> \mu_c \mu_f F_2, \\ \alpha\rho &< \eta\gamma\mu_c F_2^{k-1},\end{aligned}\tag{3.22}$$

Умови (3.21) відповідають стану сильної імунної відповіді організму людини, умови (3.22) - стану імунодефіциту [52].

Ще однією умовою існування стаціонарного розв'язку (3.20) є умова незначного ураження органу-мішені, яке не перевищує m^* . Із другої рівності (3.19) одержується оцінка:

$$\sigma_2 V_2 + \varepsilon_m K \leq \mu_m m^*,$$

або оцінки для ε_m :

$$\varepsilon_m \leq (\mu_m m^* - \sigma_2 V_2) / K.\tag{3.23}$$

3.1.6 Асимптотична стійкість стану здорового організму

У системі рівнянь (3.4)–(3.7) виконаємо заміну змінних:

$$V = \bar{V}, C = \bar{C} + C_1, F = \bar{F} + F_1, m = \bar{m} + m_1, E = \bar{E} + K.$$

Система диференціальних рівнянь для нових змінних набуває вигляду:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{V}}{dt} &= \beta\bar{V} - \gamma\bar{V}F_1^k - \gamma\bar{V}g(\bar{F}), \\ \frac{d\bar{C}}{dt} &= \alpha\xi(m)\bar{V}_\tau F_\tau - \mu_c \bar{C} - \varepsilon_c \bar{F} + \alpha\xi(m)\bar{V}_\tau \bar{F}_\tau, \\ \frac{d\bar{F}}{dt} &= \rho\bar{C} - \mu_f \bar{F} - \eta\gamma\bar{V}F_1^k - \eta\gamma\bar{V}g(\bar{F}), \\ \frac{d\bar{m}}{dt} &= \sigma\bar{V} - \mu_m \bar{m} + \varepsilon_m \bar{E},\end{aligned}$$

$$\text{де } g(\bar{F}) = \bar{F}^k - k\bar{F}^{k-1}F_1 + \dots + k\bar{F}F_1^{k-1}.$$

Одержана система має тривіальний стаціонарний розв'язок $\bar{V} = \bar{C} = \bar{F} = \bar{m} = \bar{E} = 0$, який відповідає розв'язку (3.17).

Відповідна лінійна система диференціальних рівнянь має вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{V}}{dt} &= \beta\bar{V} - \gamma\bar{V}F_1^k, \\ \frac{d\bar{C}}{dt} &= \alpha\bar{V}_\tau F_\tau - \mu_c\bar{C} - \varepsilon_c\bar{F}, \\ \frac{d\bar{F}}{dt} &= \rho\bar{C} - \mu_f\bar{F} - \eta\gamma\bar{v}F_1^k \\ \frac{d\bar{m}}{dt} &= \sigma\bar{V} - \mu_m\bar{m} + \varepsilon_m\bar{E},\end{aligned}$$

Характеристичне рівняння для лінійної системи, коли $\xi(\bar{m}) = 1$, одержимо, обчисливши визначник:

$$\begin{vmatrix} \beta - \gamma F_1^k - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \alpha F_1 e^{-\lambda\tau} & -\mu_c - \lambda & 0 & 0 \\ -\eta\gamma F_1^k & \rho & -\mu_f - \lambda & 0 \\ \sigma & 0 & 0 & -\mu_m - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Оскільки визначник має трикутну форму, то характеристичне рівняння набуває вигляду:

$$(\beta - \gamma F_1^k - \lambda)(\mu_c + \lambda)(\mu_f + \lambda)(\mu_m + \lambda) = 0.$$

Корені характеристичного рівняння

$$\lambda_1 = \beta - \gamma F_1^k, \lambda_2 = -\mu_c < 0, \lambda_3 = -\mu_f < 0, \lambda_4 = -\mu_m < 0.$$

Якщо виконується умова

$$\beta - \gamma F_1^k < 0, \quad (3.24)$$

то власні значення матриці лінійної системи від'ємні.

Отже, при виконанні умови (3.3) й умов (3.23), (3.24) стаціонарний розв'язок $E_1 = K$ і розв'язок ((3.17)) локально асимптотично стійкі.

Наслідок 2.1. Враховуючи значення стаціонарного розв'язку (3.17), запишемо умову (3.24) у вигляді

$$\beta < \gamma \frac{\rho^k}{\mu_f^k} (C^* - \frac{\varepsilon_c K}{\mu_c})^k.$$

Звідси випливає, що при невеликій швидкості розмноження антигена β або достатній концентрації імунокомпетентних плазмоклітин C^* , що відбувається, зокрема, при вакцинації, розвитку захворювання не відбудеться.

Як і в праці [52], для запропонованої моделі (3.8)-(3.11) знайдемо верхню оцінку V^* – імунологічний бар'єр для початкового значення інфікування V_0 . Якщо $V_0 > 0$ і $V_0 < V^*$, то інфекційне захворювання матиме субклінічну форму і розвитку інфекційного захворювання не відбудеться.

Теорема 3.3. *Нехай виконуються умови (3.23), (3.24) й оцінки*

$$\varepsilon_c \leq \frac{\mu_c C^*}{K}, \quad \varepsilon_m \leq \frac{\mu_m m^*}{K}, \quad 2 \exp(-\mu_c \tau) < 1. \quad (3.25)$$

Тоді для початкового значення V_0 , такого, що $0 < V_0 < V^*$, де

$$V^* = \frac{1}{\eta\beta} \left(\rho C^* - \mu_f \sqrt[k]{\frac{\beta}{\gamma}} \right) + \frac{\varepsilon_c \rho}{\eta\beta\mu_c} (2e^{-\mu_c \tau} - 1), \quad (3.26)$$

розвитку інфекційного захворювання у гострій чи хронічній формі не відбувається і величина популяції антигена асимптотично зменшується, тобто

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0.$$

Доведення. Із умови (3.24) випливає, що розв'язок $V(t)$ монотонно спадає на деякому інтервалі $(0, t_1)$. У точці $t = t_1$ функція $V(t)$ досягає мінімуму і тоді $\beta - \gamma F^k(t_1) = 0$. Розглянемо спочатку випадок, коли $t_1 < \tau$. Існує інтервал (t_1, t_2) , $t_2 \leq \tau$, на якому функція $V(t)$ зростає, тому $F^k(t) < \beta/\gamma$.

Оскільки $0 < E(t) \leq 1$, то згідно з доведенням теореми 3.1, і враховуючи оцінку (3.25), одержимо, що на цьому інтервалі:

$$C(t) \geq \frac{\varepsilon_c}{\mu_c} e^{-\mu_c \tau} + \frac{\varepsilon_c}{\mu_c} (e^{-\mu_c t} - 1) \geq \frac{\varepsilon_c}{\mu_c} (2e^{-\mu_c \tau} - 1) > 0. \quad (3.27)$$

Із рівняння (3.9) і оцінок (3.27) випливає:

$$\frac{dF(t_1)}{dt} = \rho C(t_1) - \eta\gamma V(t_1) F^k(t_1) - \mu_f F(t_1) \geq \quad (3.28)$$

$$\rho(C_0 + \frac{\varepsilon_c}{\mu_c}(2e^{-\mu_c\tau} - 1)) - \eta\gamma V_0 \frac{\beta}{\gamma} - \mu_c \sqrt[k]{\frac{\beta}{\gamma}}.$$

Оскільки $C_0 \geq C^*$, то враховуючи значення $V^* > V_0$ із (3.26), одержимо

$$\frac{dF(t_1)}{dt} \geq \frac{\rho\varepsilon_c}{\beta\eta\mu_c}(2e^{-\mu_c\tau} - 1) + \frac{\rho C^*}{\eta\beta} - \frac{\mu_c}{\eta\beta} \sqrt[k]{\frac{\beta}{\gamma}} = V^* - V_0 > 0.$$

Отримана оцінка суперечить припущенню, що функція $V(t)$ досягає мінімуму в точці t_1 , тому функція $V(t)$ спадає на інтервалі $(0, \tau)$.

Нехай тепер $\tau < t_1 < t_2 \leq 2\tau$. Тоді для $t \in (t_1, t_2]$ одержимо

$$\begin{aligned} \frac{dC(t)}{dt} &\geq \alpha V(t - \tau)F(t - \tau) - \mu_c(C(t) - C^*) - \varepsilon_c E(t) \geq \\ &\geq \mu_c(C(t) - C^*) - \varepsilon_c E(t), \end{aligned}$$

оскільки функції $V(t)$ і $F(t)$ набувають додатних значень. Отже, на інтервалі (t_1, t_2) виконується оцінка вигляду (3.27), тому $F(t_2) > 0$, що підтверджує спадання функції $V(t)$ на інтервалі $(\tau, 2\tau)$. Аналогічні оцінки отримуються також і на інтервалах $(k\tau, (k+1)\tau)$, $k = 2, 3, \dots$, що підтверджує висновок щодо імунологічного бар'єру V^* , непроходження якого не приводить до гострої чи хронічної форми інфекційного захворювання. $\square$

3.1.7. Числове моделювання

За допомогою набору інструментів для аналітичного й чисельного розв'язання систем диференціальних рівнянь у програмному пакеті Wolfram Mathematica (див. Додаток Б) проілюструємо поведінку розв'язків моделі імунної відповіді (3.8)–(3.11) за наявності і відсутності впливу екологічного фактору $E(t)$.

Якщо фактор $E(t)$ не впливає на перебіг інфекційного захворювання ($\varepsilon_c = \varepsilon_m = 0$), то в моделі (3.4)–(3.7) спостерігається гостра форма захворювання з досягненням пікових значень концентрації антигена V_{max}^1 і плазмоклітин C_{max}^1 (рис.3.2, а-б), причому $C(t) \rightarrow C^*$ із ростом t і перевищує C^* .

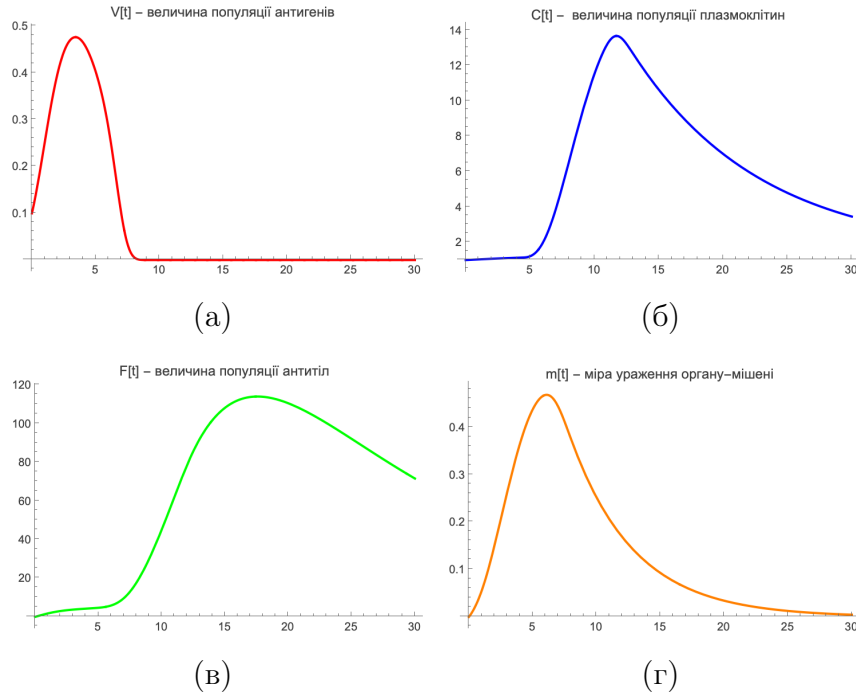


Рис. 3.2. Динаміка факторів моделі імунної відповіді. Параметри:

$$\beta = 1.2, \gamma = 0.3, \alpha = 1.7, \mu_c = 0.1, \rho = 2.0, C^* = 1.4, \mu_f = 0.15, \eta = 2.0, \sigma = 0.35, \mu_m = 0.2, \tau = 4.5, m^* = 0.15, \varepsilon_c = \varepsilon_m = 0. \text{ Початкові умови: } V_0 = 0.1, C_0 = 1.0, F_0 = 0.0001, m_0 = 0.$$

Якщо у рівнянні (3.1) параметри набувають значень: $r = 0.5, K = 0.2, n = 2, k = \Delta = 1$, а початкова умова $E_0(t) = 0.15, t \in [-\Delta, 0]$, то стаціонарний розв'язок задачі $E(t) = K$ асимптотично стійкий (рис. 3.3 (а)), оскільки $rn\Delta = 1 < \pi/2$.

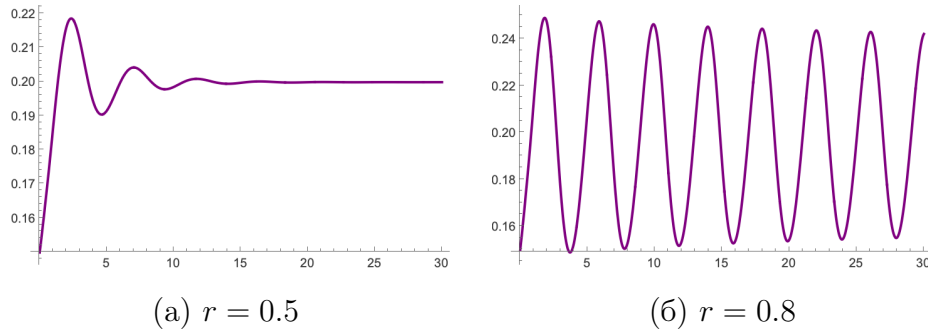


Рис. 3.3. Динаміка фактору забруднення зовнішнього середовища $E(t)$.

$$\text{Параметри: } K = 0.2, n = 2, k = \Delta = 1.$$

Розглянемо модель (3.8)-(3.11) із впливом фактору $E(t)$ на динаміку імунної відповіді ($\varepsilon_c \varepsilon_m \neq 0$). У цьому випадку $V_{max}^2 > V_{max}^1$, значення $C(t)$ і $F(t)$ наближаються до стаціонарних значень C_1 і F_1 при $t \rightarrow \infty$, які менше значень без впливу фактору забруднення зовнішнього середовища (рис.3.4

(а,б)). При цьому залишається незначне ураження $m(t) < m^*$ органу-мішені (рис. 3.4 (г)).

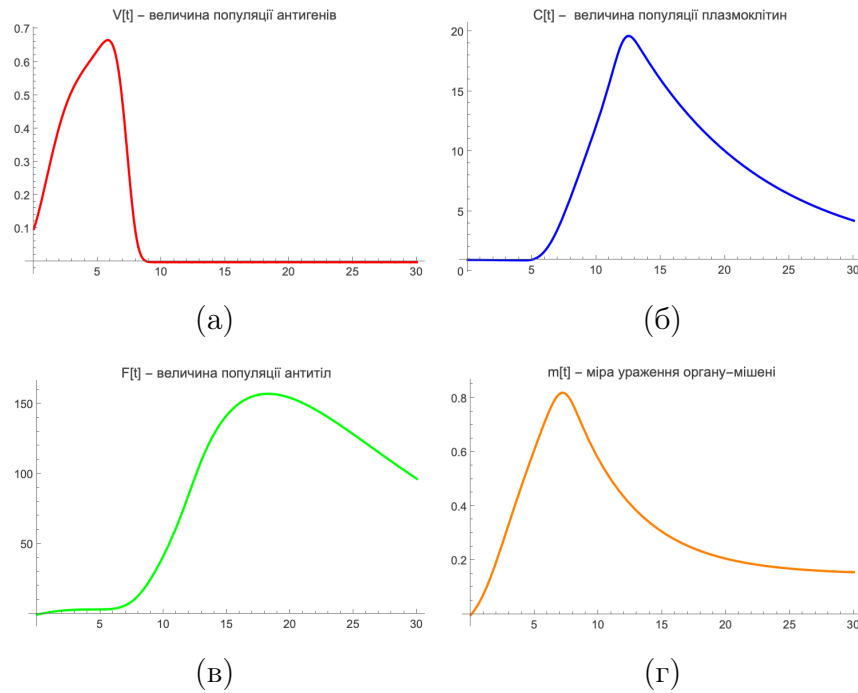


Рис. 3.4. Динаміка факторів моделі імунної відповіді із впливом фактору забруднення зовнішнього середовища. Параметри: $\varepsilon_c = 0.25, \varepsilon_m = 0.15$.

Якщо стан рівноваги $E = K$ порушується, наприклад, при $r = 1.3$, то спостерігається осциляційна поведінка розв'язків (3.8)–(3.11). При цьому $m(t) \rightarrow m_2 > 0$ при $t \rightarrow \infty$, тобто ураження органу-мішені повністю не зникає. Також, максимальні значення концентрації антигена V_{max}^3 і плазмоклітин C_{max}^3 перевищують відповідні значення, які набуваються без впливу фактору забруднення зовнішнього середовища (рис. 3.5 (а,б)).

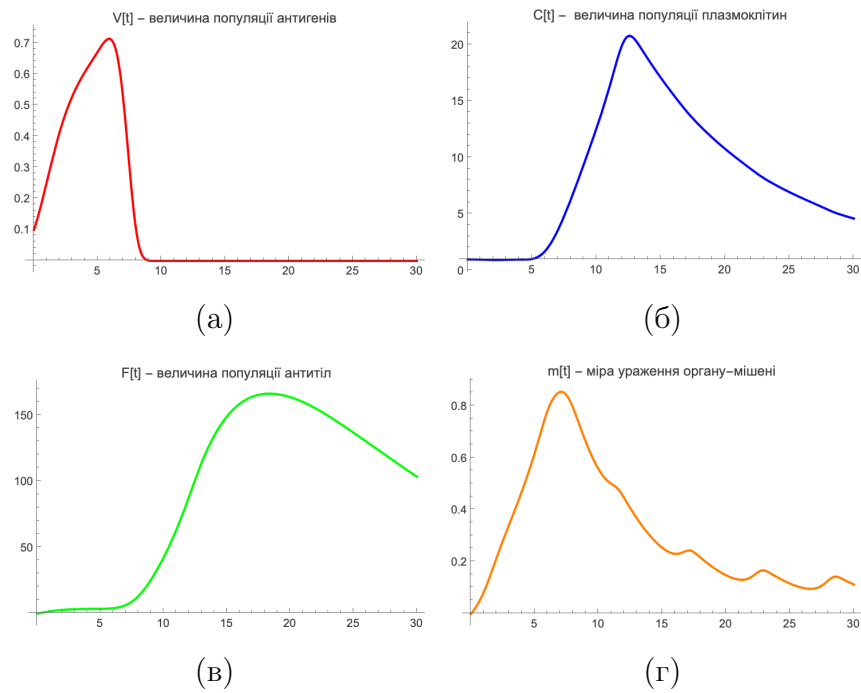


Рис. 3.5. Динаміка факторів моделі імунної відповіді із впливом фактору забруднення зовнішнього середовища. Параметри: $r = 1.3$.

Отже, за результатами розглянутих прикладів можна прослідкувати вплив екологічного фактору на перебіг інфекційного захворювання, пов'язаного із забрудненням зовнішнього середовища. Спостерігається ріст максимального значення антигена, осциляційна поведінка міри ураження органу-мішені, запізнення в досягненні максимальних значень формування каскаду плазмоклітин і популяції антитіл.

3.2 Математична модель поширення епідемії в популяції

3.2.1 Математична модель

Побудуємо і дослідимо математичну модель поширення епідемії із врахуванням екологічного фактору $E(t)$, який є розв'язком у загального рівняння Гатчінсона (3.1) і який негативно впливає на перебіг епідемії. Математична модель ґрунтується на базовій SIR -моделі [34]

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= -\beta S(t)I(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t).\end{aligned}\tag{3.29}$$

із врахуванням додаткових факторів (рис. 3.6).

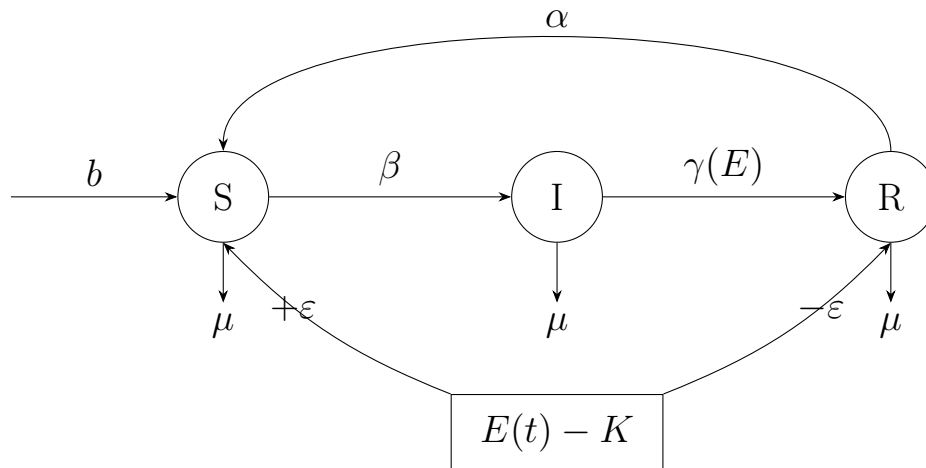


Рис. 3.6. Схема моделі поширення епідемії в популяції із врахуванням екологічного фактору $E(t)$.

У рівнянні для $S(t)$ врахуємо такі фактори:

1. Імунітет до перенесеної хвороби втрачається через час $\tau > 0$ з коефіцієнтом $\alpha > 0$ і спричиняє швидкість зростання кількості схильних до захворювання осіб $S(t)$.
2. Перевищення значення фактору забруднення довкілля $E(t)$ понад допустимий нормативний рівень K також підвищує ріст кількості схильних осіб $S(t)$.

3. Народжуваність з коефіцієнтом $b > 0$ і летальні наслідки в кожній із груп населення S , I , R з коефіцієнтом $\mu > 0$ відповідно.

У підсумку отримаємо перше рівняння моделі:

$$\frac{dS(t)}{dt} = b - \beta S(t)I(t) + \alpha I(t - \tau) + \varepsilon(E(t) - K) - \mu S(t), \quad (3.30)$$

У системі рівнянь (3.29) коефіцієнт γ обернено пропорційний середньому часу перебігу захворювання T , тому перевищення показника $E(t)$ за середнє значення K може збільшити час T , що спостерігається в медичній практиці [3], [2]. Тому припустимо, що коефіцієнт γ залежить від відхилення $E(t) - K$ і набуває вигляду:

$$\gamma(E) = \frac{\gamma_0}{1 + \gamma_1(E(t) - K)}, \quad (3.31)$$

де γ_0 і γ_1 – додатні коефіцієнти.

Якщо $\gamma_1 = 0$ і не враховувати летальні наслідки, то одержимо друге рівняння системи (3.29).

Такі міркування приводять до рівняння для динаміки інфікованих осіб:

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma(E(t))I(t) - \mu I(t), \quad (3.32)$$

Як наслідок (3.30) і (3.32) отримаємо рівняння для $R(t)$:

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma E(t)I(t) - \alpha I(t - \tau) - \varepsilon(E(t) - K) - \mu R(t). \quad (3.33)$$

Задамо для $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ початкові умови:

$$\begin{aligned} S(0) = S_0 \geq 0, \quad I(t) = 0, \quad -\tau \leq t < 0, \\ I(0) = I_0 \geq 0; \quad R(0) = R_0 \geq 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Надалі побудовану модель будемо досліджувати для безрозмірних величин, вважаючи, що $N(0) = 1$, а $S(t)$, $I(t)$ і $R(t)$ – відповідні долі населення і виконується рівність

$$S(t) + I(t) + R(t) = N(t).$$

Із рівнянь (3.30), (3.32), (3.33) випливає

$$\frac{dN}{dt} = b - \mu N, \quad N(0) = 1,$$

і зміна кількості населення з плином часу після інтегрування набуває вигляду

$$N(t) = \left(1 - \frac{b}{\mu}\right) e^{-\mu t} + \frac{b}{\mu}. \quad (3.35)$$

3.2.2 Невід'ємність розв'язку моделі

Розглянемо питання про невід'ємність розв'язку задачі (3.30), (3.32), (3.33) із невід'ємними початковими умовами, що важливо для адекватності моделі.

Теорема 3.4. *Нехай виконуються умови:*

1. Для $t > 0$ існує єдиний неперервний розв'язок системи рівнянь (3.30), (3.32), (3.33) із початковими умовами $S(0) > 0, I(0) > 0, R(t) \geq 0$.
2. Справджуються оцінки

$$b - \varepsilon\sigma > 0, \quad \sigma = \max |E(t) - K| \text{ при } t \geq 0.$$

3. Для коефіцієнтів функції $\gamma(E)$ виконується умова $\alpha(1 + \gamma_1\sigma) < \gamma_0$.

Тоді при $t > 0$ розв'язок $S(t), I(t), R(t)$ набуває невід'ємних значень.

Доведення. Із рівняння (3.32) після інтегрування одержимо

$$I(t) = I(0) \exp \left(\int_0^t \beta S(x) - \gamma(E(x)) dx \right).$$

Звідси випливає, що $I(t) \geq 0$ при $t > 0$. Якщо $I(0) > 0$, то $I(t) > 0$ при $t > 0$. У разі відсутності інфікованих осіб при $t = 0$ маємо $I(t) \equiv 0$ для $t > 0$.

Нехай $0 < S(0) \leq N(0) = 1$ і $t_1 \in (0, \tau)$ – перша точка, у якій $S(t_1) = 0$. Тоді $S'(t_1) \leq 0$. При виконанні умови 2 теореми отримуємо:

$$\frac{dS(t_1)}{dt} = b + \varepsilon(E(t_1) - K) \geq b - \varepsilon\sigma > 0,$$

що суперечить припущенню.

Якщо $t_1 \geq \tau$, то враховуючи, що $I(t_1 - \tau) \geq 0$ і умову 2 теореми 3.4, аналогічно одержимо суперечність із припущенням $S'(t_1) \leq 0$.

Нехай $t_2 > 0$ – перша точка, в якій $R(t_2) = 0$, при цьому $R'(t_2) \leq 0$. Якщо $I(0) > 0$ і $t_2 > 0$ – перша точка, в якій $R(t_2) = 0$, отже $R'(t_2) \leq 0$. Якщо $t_2 < \tau$, то $R'(t_2) > 0$ на підставі умови 2 теореми. Якщо $t_2 \geq \tau$ і виконується умова 3 теореми, то

$$\frac{dR(t_2)}{dt} \geq \left(\frac{\gamma_0}{1 + \gamma_1 \sigma} - \alpha \right) \min(I(t_2 - \tau), I(t_2)) > 0,$$

що також суперечить припущенню.

Отже, розв'язок задачі (3.30) – (3.33) із невід'ємними початковими умовами набуває невід'ємних значень при $t > 0$. $\square$

3.2.3 Існування і єдиність розв'язку

Для доведення існування і єдиності неперервного розв'язку системи рівнянь (3.30), (3.32), (3.33) із невід'ємними початковими умовами застосуємо теорему із монографії [95, с.308-309]. Розглянемо задачу:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= F(t, u(t - \tau_1), \dots, u(t - \tau_m)), t > 0, \\ u(t) &= u_0(t), \quad -\tau_m \leq t \leq 0, \end{aligned}$$

де $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m$, $u := (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$.

Теорема 3.5 [95]. *Нехай виконуються умови:*

1. Вектор-функція F визначена для $t > 0$ і $u \in \mathbb{D}$, неперервна для кожного u , локально Ліпшицева по u_0 .
2. Справджується оцінка:

$$\| F(t, u) \| \leq P(t) + N(t) \| u \|, \quad (t, u) \in [0, \infty) \times \mathbb{D}, \quad (3.36)$$

де P і Q – неперервні функції при $t \geq 0$ із значеннями в $\mathbb{R}_+$.

3. Початкова функція $u_0 \in C[-\tau_m, 0]$.

Тоді існує єдиний неперервний розв'язок задачі на довільному інтервалі $(0, t)$, $t > 0$.

Ґрунтуючись на теоремі 3.5, доведемо існування і єдиність розв'язку початкової задачі для системи (3.30), (3.32), (3.33).

Теорема 3.6. *Нехай:*

1. Початкові умови $S(0) > 0; I(t) \geq 0, -\tau \leq t \leq 0; R(0) \geq 0$.
2. Виконуються умови теореми 3.4.

Тоді існує єдиний неперервний розв'язок початкової задачі для системи (3.30), (3.32), (3.33) при $t > 0$, диференційовний при $t > \tau$.

Доведення. Обмежений невід'ємний розв'язок початкової задачі (3.30), (3.32), (3.33) існує при $t > 0$ [9, 10].

Як впливає із системи рівнянь (3.30), (3.32), (3.33) на довільному інтервалі $(0, t)$ існування розв'язку цієї задачі:

$$S(t) + I(t) + R(t) = N(t) \leq \frac{b}{\mu}. \quad (3.37)$$

Оскільки розв'язки $S(t), I(t), R(t)$ невід'ємні, то кожен із них обмежений значенням b/μ на $(0, t)$.

Позначимо через $F := (F_1, F_2, F_3)$ – праві частини системи (3.30), (3.32), (3.33). Тоді із (3.37) і умови (2) теореми (3.6) одержимо:

$$\begin{aligned} |F_1| &\leq b + \varepsilon\sigma + \beta b \frac{b}{\mu} + \alpha I_\tau + \mu S, \\ |F_2| &\leq \left(\frac{\beta b}{\mu} + \frac{\gamma_0}{1 - \gamma_1\sigma} + \mu \right) I, \\ |F_3| &\leq \varepsilon\sigma + b + \left(\frac{\gamma_0}{1 - \gamma_1\sigma} \right) I + \alpha I_\tau + \mu R. \end{aligned}$$

Застосувавши теорему 3.5 отримаємо висновок про існування неперервного розв'язку на довільному інтервалі $(0, t)$, отже на півосі $(0, \infty)$.

При $t > \tau$ для розв'язку $I(t)$ початкова функція неперервна на $[0, \tau]$, тому розв'язок диференційовний при $t > \tau$ [95].

□

3.2.4 Стани рівноваги моделі

Розглянемо питання про стаціонарні розв'язки моделі (3.30–3.33), які є розв'язками системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} b - \beta SI + \alpha I + \varepsilon(E - K) - \mu S = 0, \\ \beta SI - \frac{\gamma_0}{1 + \gamma_1(E - K)} I - \mu I = 0, \\ \frac{\gamma_0}{1 + \gamma_1(E - K)} I - \alpha I - \varepsilon(E - K) - \mu R = 0. \end{cases} \quad (3.38)$$

Один із розв'язків системи (3.38), коли $E_1 = K$, набуває вигляду:

$$I_1 = 0, \quad E_1 = K, \quad S_1 = b/\mu, \quad R_1 = 0, \quad (3.39)$$

і відображає стан відсутності інфікованих осіб, а отже, становище епідемії виникнути не може.

Якщо $I \neq 0$ і $E_2 = K$, то із системи рівнянь (3.38) одержується ще один розв'язок:

$$S_2 = \frac{\gamma_0 + \mu}{\beta}, \quad I_2 = \frac{\beta b - \mu(\gamma_0 + \mu)}{\beta(\gamma_0 + \mu - \alpha)}, \quad R_2 = \frac{(\gamma_0 - \alpha)I_2}{\mu}. \quad (3.40)$$

Розглянемо питання існування стаціонарного розв'язку (3.40). Нехай виконується оцінка:

$$\mu(\gamma_0 + \mu) < \beta b, \quad (3.41)$$

Оскільки $\alpha + \alpha\gamma_1\sigma < \gamma_0$ згідно з умовою 3 теореми 3.4, то $\gamma_0 + \mu > \alpha$ і $\beta b - \mu(\gamma_0 + \mu) > 0$, тому $I_2 > 0$. Значення $R_2 > 0$, тому що $\alpha < \gamma_0$ і $I_2 > 0$. Отже, при виконанні умови 3 теореми 3.4 й оцінки (3.41) стаціонарний розв'язок (3.40) існує і при цьому $S_2 < N(\infty) = b/\mu$.

3.2.5 Стійкість стаціонарних розв'язків і уникнення епідемії

Відповідна системі рівнянь (3.30), (3.32), (3.33) лінеаризована на

розв'язку (3.39) система набуває вигляду:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{E}}{dt} = -rn\bar{E}(t - \delta), \\ \frac{d\bar{S}}{dt} = \varepsilon\bar{E} - \mu\bar{S} - \frac{\beta b}{\mu}\bar{I} + \alpha\bar{I}(t - \tau), \\ \frac{d\bar{I}}{dt} = \left(\gamma_0 - \gamma_1 + \frac{\beta b}{\mu}\bar{I} - \gamma_0 \right) \bar{I}. \end{cases} \quad (3.42)$$

Розглянемо характеристичне рівняння для системи (3.42):

$$\begin{vmatrix} -rne^{-\Delta\lambda} - \lambda & 0 & 0 \\ \varepsilon & -\mu - \lambda & \frac{\beta b}{\mu} + \alpha e^{-\lambda\tau} \\ \gamma_0\gamma_1 & \beta I & \frac{\beta b}{\mu} - \gamma_0 - \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Обчисливши визначник одержимо:

$$(rne^{-\Delta\lambda} + \lambda)(\mu + \lambda) \left(\frac{\beta b}{\mu} - \gamma_0 - \mu - \alpha \right) = 0.$$

Корені рівняння:

$$rne^{-\Delta\lambda} + \lambda = 0$$

лежать у лівій півплощині, якщо виконується нерівність (3.3). Інші власні значення:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\mu < 0, \\ \lambda_2 &= \frac{\beta b}{\mu} - \gamma_0 - \mu < 0. \end{aligned}$$

Отримана оцінка для λ_2 еквівалентна умові:

$$R_0 = \frac{b\beta}{\mu(\gamma_0 + \mu)} < 1. \quad (3.43)$$

Сформулюємо доведене твердження наступною теоремою, використовуючи важливу характеристику математичного моделювання епідемій – базове репродуктивне число R_0 [29]-[32].

Теорема 3.7. *Нехай виконуються умова (3.3) і базове репродуктивне число $R_0 < 1$. Тоді стан рівноваги (3.39) є локально асимптотично стійким і епідемія не виникне.*

Характеристичне рівняння лінеаризованої системи для стану рівноваги (3.40), де $E_2 = K$, набуває вигляду:

$$(e^{-\Delta\lambda} + \lambda) (\lambda^2 + (\alpha + \mu)\lambda + a(\gamma_0 + \mu - \alpha a e^{-\lambda\tau})) = 0,$$

де

$$a = \beta I_2 = \frac{\beta b - \mu(\gamma_0 + \mu)}{\gamma_0 + \mu - \alpha}.$$

Розглянемо частинні випадки. Якщо $\tau = 0$, що означає миттєву втрату імунітету, тоді для λ_1 і λ_2 одержується характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + (\alpha + \mu)\lambda + a(\gamma_0 + \mu - \alpha a) = 0.$$

Оскільки $\alpha + \mu > 0$, $\alpha > 0$, то при виконанні умови 3 теореми 3.4 і оцінки для коефіцієнтів

$$\alpha\beta I_2 < \gamma_0 + \mu - \alpha$$

або

$$\alpha(\beta b - \mu(\gamma_0 + \mu)) < (\gamma_0 + \mu)(\gamma_0 + \mu - \alpha),$$

стан рівноваги (3.40) асимптотично стійкий.

Якщо імунітет після одужання не втрачається, тобто $\alpha = 0$ і виконується умова (3.41), то маємо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + \mu\lambda + a(\gamma + \mu) = 0,$$

корені якого $\lambda_1 < 0$ і $\lambda_2 < 0$.

Отже, при виконанні умови (3.3) для $n = 1$, умов теореми 3.4 і умови (3.41), розв'язок (3.40) локально асимптотично стійкий.

3.2.6 Комп'ютерне моделювання

Наведемо результати комп'ютерного моделювання динаміки епідемії зі зміною екологічного фактору $E(t)$ - розв'язком рівняння (3.1). Нехай запізнення $\Delta = \tau = 1$, $K = 0.25$, $n = 1$, початкові умови: $S(0) = 0.99$, $I(0) = 0.01$, $R(0) = 0$.

Якщо імунітет не втрачається ($\alpha = 0$) і відсутній вплив екологічного фактору на осіб, схильних до інфікування, динаміка процесу близька до динаміки SIR -моделі, $S(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ (рис 3.7 та рис. 3.8).

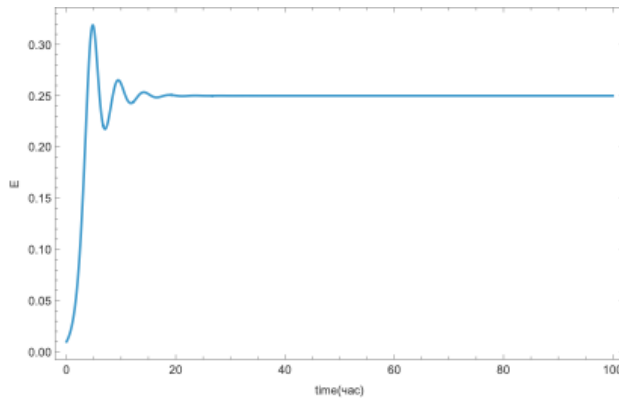


Рис. 3.7 Графік розв'язку $E(t)$, $r = 1$.

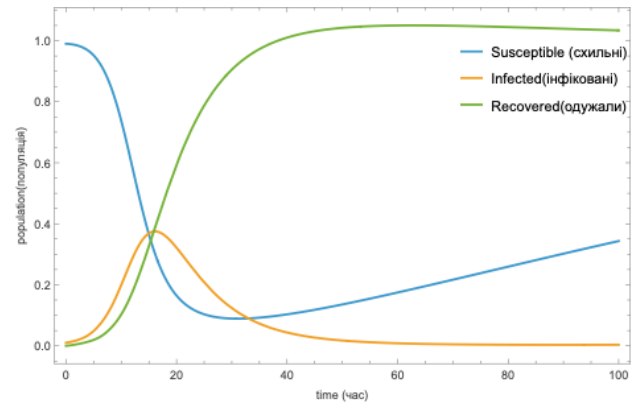


Рис. 3.8 Графіки розв'язків S, I, R .

Параметри: $\beta = 0.5, \gamma_0 = 0, \gamma_1 = 1, \varepsilon = 0, \alpha = 0, b = 0.005, \mu = 0.001$.

Якщо імунітет втрачається після одужання через час $\tau = 1$, то під впливом екологічного фактору з ростом коефіцієнта r спостерігається коливання факторів S, I та R . З часом є прямування значень факторів до стійких станів рівноваги (рис. 3.9), але при цьому залишається доля інфікованих осіб, яка зростає.

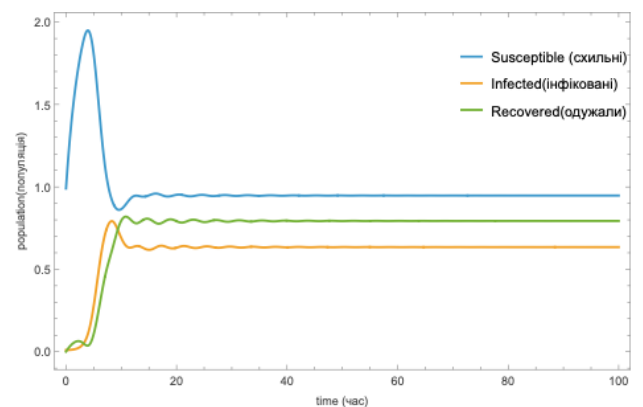
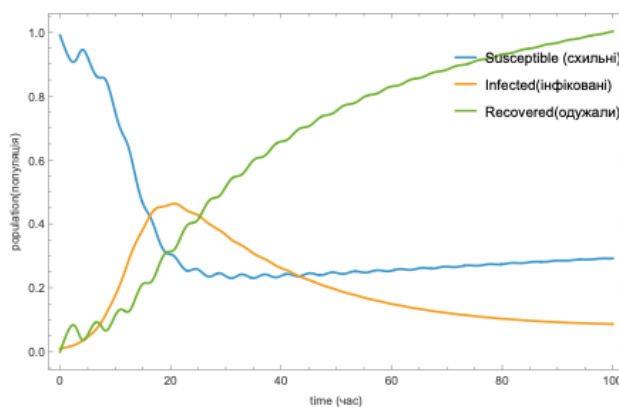


Рис. 3.9 Динаміка S, I, R із врахуванням фактору $E(t)$. Параметри:

$\beta = 0.5|0.95, \gamma_0 = 0.15|0.5, \gamma_1 = 1|0.7, \varepsilon = 0.06|0.2, \alpha = 0.1, b = 0.005, \mu = 0.001, r = 1.5$.

Якщо $r\Delta = 2 > \pi/2$, то стійкість стану рівноваги $E = K$ втрачається і розв'язок $E(t)$ має коливний характер (рис. 3.10). Такий вплив екологічного фактору веде до періодичної зміни розв'язку моделі (3.30), (3.32), (3.33).

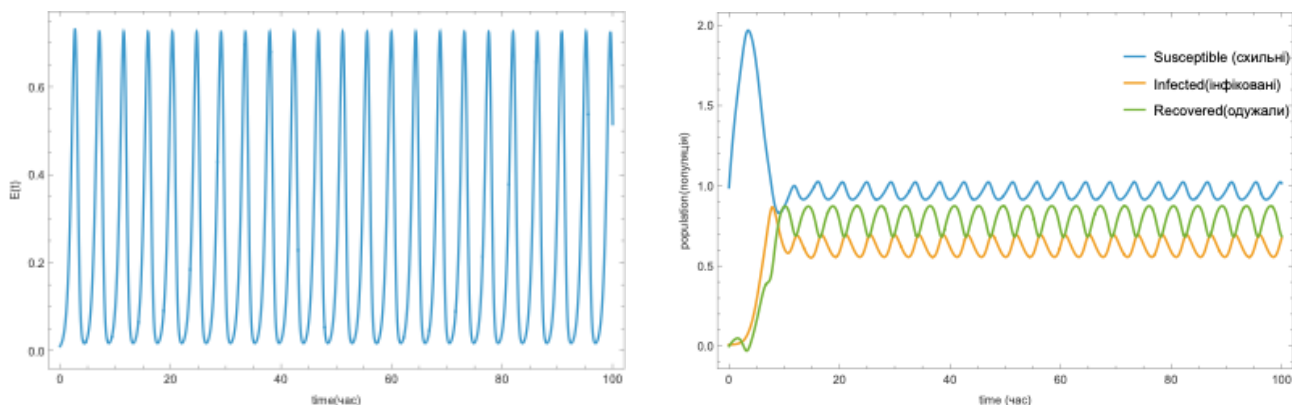


Рис. 3.10 Графіки розв'язків S, I, R із врахуванням коливної динаміки фактору $E(t)$.
 Параметри: $\beta = 0.95, \gamma_0 = 0.5, \gamma_1 = 0.7, \varepsilon = 0.2, \alpha = 0, b = 0.95, \mu = 0.4, r = 2$

Висновки до розділу 3

Розділ 3 присвячений побудові і дослідженню математичної моделі імунної відповіді організму при інфекційному захворюванні і моделі поширення епідемії із втратою імунітету, які знаходяться під впливом екологічного фактору, що є зваженою сумою показників забруднення довкілля.

Одержано такі основні результати:

- у моделі Г.І. Марчука імунної відповіді враховано вплив екологічного фактору на швидкість утворення каскаду плазмоклітин і ураження органу-мішені;
- доведено існування єдиного неперервного розв'язку математичної моделі та його невід'ємність при $t > 0$;
- знайдено стаціонарні розв'язки та умови їх існування і дано їх медичну інтерпретацію;
- досліджено стійкість стаціонарного розв'язку, який відповідає стану здорового організму;
- отримано оцінку величини інфікування у початковий момент часу, при виконанні якої не відбувається розвитку інфекційного захворювання;

- побудована математична модель поширення епідемії із впливом екологічного фактору на долю схильних до інфікування осіб та інфікованих осіб;
- вказані умови існування єдиного невід'ємного розв'язку математичної моделі;
- доведено локальну асимптотичну стійкість розв'язку відсутності епідемічного процесу.

РОЗДІЛ 4

Деякі модифікації умов класичної моделі рівноважної економіки Ерроу-Дебре

Розділ 4 присвячено результатам, що стосуються модифікацій моделі рівноважної економіки Ерроу-Дебре. Результати досліджень опубліковані в наукових статтях автора [112] і зі співавторами [98, 103, 110].

4.1 Постановка задачі модифікації моделі Ерроу-Дебре

Як було зазначено в огляді літератури, деякі умови класичної моделі Ерроу-Дебре потребують переосмислення. Зокрема, дробові значення товарних векторів не завжди є прийнятними для значної кількості видів товарів. Окрім того, оптові знижки, без яких важко уявити економіку, ніяк не описуються за допомогою лінійних функціоналів. Ми вперше пропонуємо в ролі ціни розглядати заряди (ортогонально адитивні функціонали) замість лінійних функціоналів, які добре адаптуються до оптових цін. Крім того, в ролі векторної ґратки товарних векторів ми розглядаємо F -простір L_0 всіх класів еквівалентності вимірних функцій, який містить як всі банахові, так і всі метричні лінійні простори класів еквівалентності вимірних функцій.

Зазначимо, що простір L_0 не можна було розглядати, як множину товарних векторів у випадку, коли цінами були лінійні функціонали, оскільки ціна має неперервно залежати від кількості товару, в той час як на просторі L_0 не існує ненульових лінійних неперервних функціоналів. Натомість на L_0 існують ненульові неперервні заряди, що є предметом окремого дослідження у підрозділі.

На початку розділу ми наводимо необхідні означення та короткий опис моделі Ерроу-Дебре.

У підрозділі 4.2 ми будуємо версію класичної моделі Ерроу-Дебре, в якій розглядаються лише цілочисельні кількості товарів, що є природним обмеженням для значної кількості практичних задач. Наприклад, в автомобільній промисловості рівноважний вектор цін $(x_1, \dots, x_n)$ з

координатами $x_i = m_i + \frac{1}{2}$, де m_i – натуральні числа, не дає чіткої стратегії для ціноутворення чи планування виробництва. Отже, обмеження на товарні вектори мати лише цілочисельні значення координат є природним і дозволяє по-новому осмислити задачу існування рівноважної ціни.

Основний результат даного підрозділу (теорема 4.7) стверджує, що кожна одно-агентна неокласична економіка обміну з цілочисельними цінами та строго монотонним і строго опуклим відношенням переваги має рівноважний вектор цін (сенси вальрасівської чи конкурентної рівноваги полягає в описі стану ринку, за якого ціни врівноважують попит і пропозицію). Доведення базується на геометричній версії теореми Гана-Банаха, але адаптоване лише для випадку одного агента. Залишається відкритим питання, чи можна дану ідею доведення застосувати до випадку довільної скінченної кількості агентів.

Підрозділи 4.3 та 4.4 тісно пов'язані між собою спільною ідеєю узагальнити апарат моделі Ерроу-Дебре, розглядаючи заряди (тобто, ортогонально адитивні функціонали) в ролі цінових векторів замість лінійних функціоналів і найширшу з усіх можливих векторних ґраток вимірних функцій – F -простір L_0 всіх класів еквівалентності вимірних функцій – в ролі простору товарних векторів. Зазначимо, що нескінченновимірні простори товарних векторів розглядалися раніше різними авторами (див., наприклад, [72], [96], [97]).

Перша частина ідеї – використовувати заряди в ролі цінових векторів замість лінійних функціоналів – легко адаптується до довільної векторної ґратки товарних векторів, а друга частина – розгляд L_0 в ролі простору товарних векторів – має сенс лише у сукупності з першою частиною, адже на просторі L_0 не існує ненульових лінійних неперервних функціоналів, проте існують ненульові неперервні заряди (існуванням таких зарядів присвячено частину підрозділу 4.4).

Підрозділ 4.3 присвячено, зокрема, опису найзагальнішої структури, на якій можна визначати заряди, що утворюють порадково повну векторну

ґратку і можуть розглядатися в ролі цінових векторів. Такою структурою є комплементарний простір, який було уведено і досліджено у нашій спільній роботі з М. М. Поповим [98].

Точніше, комплементарний простір – це частково впорядкована множина $(G, \preceq)$ з найменшим елементом 0 – така, що для довільного елемента $e \in G \setminus \{0\}$ порядковий інтервал $[0, e]$ є булевою алгеброю з нулем 0 і одиницею e відносно звуження порядку $\preceq$ на $[0, e]$ (це – просте еквівалентне означення, еквівалентність якого до вихідного означення є непростю вправою). Дане поняття узагальнює як векторні ґратки (кожна векторна ґратка E є комплементарним простором відносно латерального порядку $\sqsubseteq$ на E), так і булеві кільця. Більш того, диз’юнктне об’єднання комплементарних просторів є комплементарним простором відносно індукованого порядку. Якщо $(G, \preceq)$ – комплементарний простір, а F – векторна ґратка, то відображення $T: G \rightarrow F$ називається зарядом, якщо $T(x \cup y) = T(x) + T(y)$ для довільних $x, y \in G$ таких, що $x \cap y = 0$. Заряд $T: G \rightarrow F$ називається:

- *додатним* (позначаємо $T \geq 0$), якщо $T(x) \geq 0$ для довільного $x \in G$;
- *регулярним*, якщо $T = T_1 - T_2$ для деяких додатних зарядів T_1 та T_2 ;
- *C-обмеженим*, якщо образ $T([0, e])$ довільного порядкового інтервалу $[0, e]$ є порядково обмеженою множиною в F .

На множині всіх зарядів, що діють з комплементарного простору $(G, \preceq)$ у векторну ґратку F , яка очевидно є лінійним простором відносно стандартних операцій суми та добутку на дійсний скаляр, уводиться частковий порядок $\leq$ стандартним чином: $S \leq T$, якщо $T - S \geq 0$.

Одна з основних теорем даного підрозділу (теорема 4.15), яка узагальнює класичну теорему Рісса-Канторовича [99, Theorem 1.18] та теорему Плієва-Рамдане [108, Theorem 3.6], стверджує, що множина $\mathcal{A}_r(G, F)$ всіх регулярних зарядів, що діють з комплементарного простору $(G, \preceq)$ у порядково повну векторну ґратку F є порядково повною векторною ґраткою, а ґраткові операції на $\mathcal{A}_r(G, F)$ задаються за допомогою формул, подібних

до формул Абрамовича [99, Theorem 1.50]. Більш того, за цих умов заряд $T: G \rightarrow F$ є регулярним тоді і лише тоді, коли T є C -обмеженим (відповідні означення наводяться у підрозділі), тобто, $\mathcal{A}_r(G, F) = \mathcal{A}_b(G, F)$.

Перше питання з неочевидною відповіддю, яке виникає при розгляді модифікації моделі Ерроу-Дебре з комплементарним простором $(G, \leq_G)$ в ролі множини товарних векторів, таке: нехай $P \in \mathcal{A}_b(G, \mathbb{R})$ – задана додатна ціна та $\preceq$ – відношення переваги на G . Охарактеризувати множину всіх $\lambda > 0$, для яких бюджетна множина $\mathcal{B}_\lambda(P)$ має вектор попиту.

Сформулюємо основний результат підрозділу 4.2 – теорему 4.21.

Нехай $P \gg 0$ – ціна в $\mathcal{A}_b((\mathbb{R}^d)^+, \mathbb{R})$ з координатними функціями $(\varphi_k^{(P)})_{k=1}^d$ такими, що функція $\varphi_1^{(P)}$ є монотонною і неперервною. Тоді для кожного $\lambda > 0$ наступні умови еквівалентні:

- (1) *бюджетна множина $\mathcal{B}_\lambda(P)$ має вектор попиту;*
- (2) *$\lambda \in (0, \mu)$, де $\mu := \sup \varphi_1^{(P)}(\mathbb{R}^+) \in [0, +\infty]$ та $\varphi_1^{(P)}$ – перша координатна функція вектору P*

(всі відповідні означення наведені в Розділі 5).

У підрозділі 4.4 ми розглядаємо питання існування максимальних елементів бюджетних множин у випадку комплементарного простору $[0, f_0] = \{x \in L_0 : 0 \leq x \leq f_0\}$, де $f_0 \in L_0^+$ – довільний елемент додатного конуса векторної ґратки L_0 всіх класів еквівалентності вимірних функцій $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Перша трудність, з якою ми стикаємося при розв’язанні даної задачі, полягає у виборі коректних цін для побудови бюджетних множин, адже ціна $p: [0, f_0] \rightarrow [0, +\infty)$ повинна бути неперервним зарядом. Іншими словами, виникає проблема побудови ненульових неперервних зарядів на L_0 (як правило, неперервні заряди на просторах L_p при $1 \leq p \leq \infty$ будуються за допомогою інтеграла Лебега, який не є визначеним на L_0). Спочатку ми наводимо відносно нескладний приклад ненульового заряду $p: [0, f_0] \rightarrow [0, +\infty)$ (див. твердження 4.22), який є неперервним в певних точках, але не скрізь. Побудова неперервного скрізь ненульового заряду

потребує спеціальної техніки, яку було розроблено в роботі В. В. Михайлюка та М. М. Попова [101], за допомогою так званого оператора ε -штрихування.

В теоремі 4.24 ми наводимо клас прикладів додатних неперервних скалярних зарядів $p: [0, f_0] \rightarrow [0, +\infty)$, завдяки чому можна розглядати модель Ерроу-Дебре з цінами, які є зарядами на комплементарному просторі $[0, f_0]$. У теоремі 4.25 ми будуємо інший клас прикладів неперервних ненульових зарядів на L_0 , які базуються на іншому спеціальному нелінійному операторі – умовній порядковій проекції $\tilde{Q}_e$, уведений і досліджений в роботі [102]. У процесі доведення ми отримуємо нові властивості умовної порядкової проекції, які можуть мати окремий інтерес (див. лему 4.5 та лему 4.6).

Після розв’язання задачі про існування ненульових неперервних зарядів на L_0 ми доводимо аналог класичної теореми 1.2.3 з [67] про існування максимальних елементів бюджетних множин – теорему 4.27, яка стверджує наступне. Для довільного $\mathbf{f}_0 \in L_0$, $G = [0, f_0]$, довільного $\mathbf{e} \in L_1 \cap G$ та довільного початкового товарного запасу $\boldsymbol{\omega} \in G$ існує $\succeq_{\mathbf{e}}$ -максимальний елемент $\mathbf{x}^*$ бюджетної множини $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}_{\mathbf{e}})$, який має вигляд

$$\mathbf{x}^* = \gamma_0 \cdot \mathbf{1}_{[0,1]} \wedge \mathbf{f}_0, \quad \gamma_0 \in [0, +\infty).$$

Зазначимо, що в умовах теореми 4.27, $\succeq_{\mathbf{e}}$ -максимальний елемент бюджетної множини $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}_{\mathbf{e}})$ не завжди єдиний у випадку, коли $\mathbf{e} < \mathbf{f}_0$. Наприклад, в екстремальному випадку $\mathbf{q}_{\mathbf{e}}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{[0,1]} \mathbf{e} d\mu$ кожний вектор $\mathbf{x} \in [\mathbf{e}, \mathbf{f}_0]$ є $\succeq_{\mathbf{e}}$ -максимальним для $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}_{\mathbf{e}})$.

Нагадаємо загальноприйнятту термінологію та деякі основні деталі моделі Ерроу-Дебре, які ми запозичили з підручника Аліпрантіса і Буркіншава [99].

Бінарне відношення $\succeq$ на множині P називається відношенням переваги (див. [67, Definition 1.1.1]), якщо виконуються наступні умови для довільних $x, y, z \in P$:

1. $x \succeq x$ (рефлексивність);
2. $x \succeq y$ або $y \succeq x$ (лінійність);

3. якщо $x \succeq y$ та $y \succeq z$, то $x \succeq z$ (транзитивність).

Очевидно, що кожне відношення нестрогого лінійного порядку є відношенням переваги, але, наприклад, максимальне відношення P^2 , тобто, $(\forall x, y \in P) x \succeq y$ є відношенням переваги, яке не є відношенням порядку. З іншого боку, на фактор-множині по відношенню еквівалентності $x \sim y$ тоді і лише тоді, коли $x \succeq y$ та $y \succeq x$, відношення переваги індукує відношення порядку. Запис $x \not\succeq y$ означає заперечення $x \succeq y$. “Строга” версія відношення переваги визначається так: $x \succ y$ означає, що $x \succeq y$ та $y \not\succeq x$. Вживають також $y \preceq x$, як рівносильну версію запису $x \succeq y$ (аналогічне правило стосується відношень $\succ$ та $\not\succeq$). Відношення $x \not\succ y$ означає заперечення $x \succ y$.

Нехай $\succeq$ – відношення переваги на множині P . Елемент $q_0 \in Q$ підмножини $Q \subseteq P$ називається $\succeq$ -максимальним (чи просто максимальним, якщо зрозуміло, про яке відношення переваги йдеться), якщо не існує $x \in Q$ такого, що $x \succ q_0$.

Класична модель економіки Ерроу-Дебре [66], [67] базується на додатному конусі $\mathbb{R}_+^d$ d -вимірному простору Рісса $\mathbb{R}^d$, де $d \in \mathbb{N}$ – це кількість товарів даної економіки. Вектори $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}_+^d$ розглядаються як вибірки кількостей товарів і називаються товарними векторами, які можуть вироблятися, продаватися, обмінюватися та споживатися.

Для елементів $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$ та $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d)$ простору Рісса $\mathbb{R}^d$ вважається, що:

- $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$, якщо $u_i \leq v_i$ для кожного $i = 1, \dots, d$;
- $\mathbf{u} < \mathbf{v}$, якщо $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$ та $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$.

Відношення переваги $\succeq$ на $\mathbb{R}_+^d$ називається:

- монотонним, якщо для довільних $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^d$ з умови $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ випливає $\mathbf{x} \succeq \mathbf{z}$;
- строго монотонним, якщо для довільних $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^d$ з умови $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ випливає $\mathbf{x} \succ \mathbf{z}$.

Елементи дуального простору Рісса $(\mathbb{R}^d)'$ всіх лінійних на $\mathbb{R}^d$ функціоналів, який ототожнюється із самим $\mathbb{R}^d$, називаються цінами. Таким чином, кожна ціна $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{R}_+^d$, як функція на E^+ , визначає ціну довільного стану $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d$ за допомогою виразу $\mathbf{p}(\mathbf{x})$, який дорівнює $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^d p_k x_k$.

Кожна фіксована ціна $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^d$ та фіксований товарний вектор $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}_+^d$ (який називається початковим запасом) визначають бюджетну множину товарних векторів за допомогою рівності:

$$\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}) := \{x \in \mathbb{R}_+^d : \mathbf{p}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{p}(\boldsymbol{\omega})\}. \quad (4.1)$$

Геометрично, бюджетна множина – це багатовимірна піраміда, яка за умови $\mathbf{p} \gg 0$ є компактною² підмножиною $\mathbb{R}^d$, і яка цілком природно має $\succeq$ -максимальні елементи для широкого класу відношень переваги $\succeq$ на $\mathbb{R}_+^d$ (див. [67, Subsection 1.2]), а при певних умовах на відношення переваги максимальний елемент єдиний [67, Theorem 1.2.3] (на просторі Рісса $\mathbb{R}^d$ відношення $(x_1, \dots, x_d) \gg (y_1, \dots, y_d)$ означає, що $x_k > y_k$ для всіх $k = 1, \dots, d$). Оскільки умова $\mathbf{p} \gg 0$, яка рівносильна до умови $\mathbf{p} \in \text{Int } \mathbb{R}_+^d$, є, очевидно, необхідною для обмеженості бюджетної множини $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})$, $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}_+^d$, то максимальні елементи бюджетних множин розглядаються лише для цін $\mathbf{p}$ з внутрішності $\text{Int } \mathbb{R}_+^d$.

Нехай $\succeq$ – відношення переваги на $\mathbb{R}_+^d$ та $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}_+^d$ – початковий запас. Позначимо через $\mathcal{D}_{\boldsymbol{\omega}}^{\succeq}$ – множину всіх цін $\mathbf{p} \in \text{Int } \mathbb{R}_+^d$, для яких існує єдиний $\succeq$ -максимальний елемент у бюджетній множині $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})$, який називатимемо вектором попиту відношення переваги $\succeq$ при дії ціни $\mathbf{p}$ і позначатимемо через $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p})$. Відповідне відображення $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}: \mathcal{D}_{\boldsymbol{\omega}}^{\succeq} \rightarrow \mathbb{R}_+^d$ називається функцією попиту, що відповідає відношенню переваги $\succeq$.

Позначимо через $\mathcal{P}$ множину всіх відношень переваги на $\mathbb{R}_+^d$.

²Нагадаємо, що підмножина K нормованого простору X називається компактною, якщо кожна послідовність елементів K містить збіжну підпослідовність до деякого елемента K ; а у випадку $X = \mathbb{R}^d$ з будь-якою нормою підмножина $K \subset \mathbb{R}^d$ є компактною тоді і лише тоді, коли вона є замкненою і обмеженою.

Нехай A – множина (елементи якої називаються *агентами*). Довільне відображення $\mathcal{E}: A \rightarrow \mathbb{R}_+^d \times \mathcal{P}$ називається *економікою обміну*.

Значення економіки обміну записують в індексній формі: для кожного агента $k \in A$ значення $\mathcal{E}_k = (\omega_k, \succeq_k)$ характеризує початковий запас k -го агента ω_k та відношення переваги $\succeq_k$, яке він обрав. Далі уводиться поняття повного запасу економіки, яке дорівнює $\omega := \sum_{k \in A} \omega_k$. Для кожного $k \in A$ функція попиту $\mathbf{x}_{k, \omega_k}: \mathcal{D}_{\omega_k}^{\succeq_k} \rightarrow \mathbb{R}_+^d$ визначена на своїй області. Тому розглянемо спільну область визначення економіки обміну $\mathcal{E}$ рівністю $\mathcal{D}_{\mathcal{E}} := \bigcap_{k \in A} \mathcal{D}_{\omega_k}^{\succeq_k}$. Нарешті, функція надлишкового попиту $\zeta: \mathcal{D}_{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{R}^d$ уводиться за допомогою формули

$$\zeta(\mathbf{p}) := \sum_{k \in A} (\mathbf{x}_{k, \omega_k}(\mathbf{p}) - \omega_k) = \sum_{k \in A} \mathbf{x}_{k, \omega_k}(\mathbf{p}) - \omega. \quad (4.2)$$

Вектор цін $\mathbf{p} \in \mathcal{D}_{\mathcal{E}}$ називається *рівноважним*, якщо $\zeta(\mathbf{p}) = 0$.

Основне питання моделі економіки Ерроу-Дебре полягає у наступному.

Проблема 4.1. *За яких умов на економіку обміну існує рівноважний вектор цін?*

Для формулювання теореми Ерроу-Дебре, яка дає позитивну відповідь на проблему 4.1, бракує наступного означення.

Означення 4.2. *Неокласичною економікою обміну називається така економіка обміну $\mathcal{E}: A \rightarrow \mathbb{R}_+^d \times \mathcal{P}$, для якої виконуються наступні умови:*

1. *множина учасників A скінченна;*
2. *кожний учасник $i \in A$ має ненульовий початковий запас ω_i (тобто, $\omega_i > 0$);*
3. *повний початковий запас $\omega = \sum_{i \in A} \omega_i$ задовольняє умову: $\omega \gg 0$, тобто, вектор ω має всі строго додатні координати.*

Наступна класична теорема Ерроу-Дебре дає позитивну відповідь для неокласичної економіки обміну (див. [66], [67, Theorem 1.4.9]).

Теорема 4.3 (Теорема Ерроу-Дебре). *В кожній неокласичній економіці обміну існує рівноважна ціна, тобто, такий вектор $\mathbf{p} \gg 0$, для якого $\zeta(\mathbf{p}) = 0$.*

4.2 Модель економіки Ерроу-Дебре з цілочисельними товарними векторами

В даному розділі вивчається версія класичної моделі Ерроу-Дебре, в якій ми розглядаємо лише цілочисельні кількості товарів, що є природним обмеженням для практичних задач. Таке обмеження дозволяє по-новому осмислити задачу існування рівноважної ціни. Доведення цілочисельної версії теореми Ерроу-Дебре, з одного боку, виглядає простішим. Але, з іншого боку, доведення, яке базується на геометричній версії теореми Гана-Банаха, годиться лише для випадку одного агента. Залишається відкритим питання, чи можна дану ідею доведення застосувати до випадку довільної скінченної кількості агентів.

4.2.1 Випадок цілочисельних товарних векторів

У даному підрозділі ми розглядатимемо випадок, у якому кількість товарів не може бути дробовою, що є вельми природною вимогою для значної кількості прикладів побудови моделі економіки Ерроу-Дебре на практиці. На цей випадок нашу увагу звернув М. М. Попов, запропонувавши спробувати знайти коротке доведення теореми Ерроу-Дебре за допомогою геометричної форми теореми Гана-Банаха. Він також створив для цього випадку певну початкову базу у вигляді кількох тверджень, які ми використовуємо при доведенні нашого основного результату цього розділу (теореми 4.7). Нижче ми наводимо потрібні твердження, що належать М. М. Попову, без доведень, супроводжуючи посиланнями на роботу, в якій можна ознайомитися із відповідними доведеннями.

Отже, товарні вектори розглядатимуться у множині $\mathbb{N}_0^d$ замість $\mathbb{R}_+^d$, де $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тоді роль внутрішності $\text{Int } \mathbb{R}_+^d$ для $\mathbb{N}_0^d$ замість $\mathbb{R}_+^d$ відіграватиме

$\mathbb{N}^d$. Решта понять з попереднього підрозділу залишаються без змін. Зокрема, ціни, як і раніше, розглядаються з додатного конусу $p \in \mathbb{R}_+^d$.

Позначимо $\mathbf{e}_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}_0^d \subseteq \mathbb{R}_+^d$ при $i = 1, \dots, d$.

Твердження 4.4 (М. М. Попов, [103]). Для довільного ненульового початкового запасу $\omega \in \mathbb{N}_0^d$ і довільної ціни $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{R}_+^d$ наступні умови рівносильні:

(i) бюджетна множина $\mathcal{B}_\omega(\mathbf{p})$ скінченна;

(ii) $\mathbf{p} \gg 0$.

Твердження 4.5 (М. М. Попов, [103]). Нехай $\succeq$ – відношення переваги на $\mathbb{R}_+^d$ та $\omega \in \mathbb{N}_0^d$ – ненульовий початковий запас. Тоді для кожної ціни $\mathbf{p} \in \mathbb{N}^d$ існує $\succeq$ -максимальний елемент у бюджетній множині $\mathcal{B}_\omega(\mathbf{p})$. Якщо, крім того, відношення переваги $\succeq$ є лінійним порядком, то такий максимальний елемент єдиний, а отже, $\mathcal{D}_\omega^\succeq = \mathbb{N}^d$.

4.2.2 Коротке доведення версії теореми Ерроу-Дебре для випадку цілочисельних товарних векторів

Нагадаємо, що підмножина $K \subseteq \mathbb{R}^d$ називається опуклою, якщо для довільних $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in K$ та довільного скаляру $\lambda \in (0, 1)$ маємо $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in K$. Опукла оболонка $\text{conv } K$ довільної підмножини $K \subseteq \mathbb{R}^d$ визначається, як перетин всіх опуклих підмножин $\mathbb{R}^d$, що містять K . Опукла оболонка довільної підмножини є коректно визначеною. Безпосередньо легко довести, що $\text{conv } K$ є опуклою множиною.

Відношення переваги $\succeq$ на $\mathbb{R}_+^d$ називається опуклим, якщо для довільного $\mathbf{z} \in \mathbb{R}_+^d$ множина $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d : \mathbf{x} \succeq \mathbf{z}\}$ є опуклою в $\mathbb{R}^d$.

Дещо інакше дається означення строго опуклого відношення переваги (див. [67, Definition 1.1.5]). Відношення переваги $\succeq$ на $\mathbb{R}_+^d$ називається строго опуклим, якщо для довільних $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}_+^d$ з умов $\mathbf{x} \succeq \mathbf{z}$, $\mathbf{y} \succeq \mathbf{z}$ та $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ випливає, що для довільного $\lambda \in (0, 1)$ маємо $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \succ \mathbf{z}$.

Наведемо версію останнього означення, адаптовану до випадку цілочисельних товарних векторів.

Означення 4.6. Відношення переваги $\succeq$ на $\mathbb{N}_0^d$ називатимемо строго опуклим, якщо для довільних $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{N}_0^d$ з умов $\mathbf{x} \succeq \mathbf{z}$, $\mathbf{y} \succeq \mathbf{z}$ та $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ випливає, що для довільного $\lambda \in (0, 1)$ з умови $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in \mathbb{N}_0^d$ випливає, що $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \succ \mathbf{z}$.

Позначимо через $\mathcal{P}_0$ множину всіх строго монотонних і строго опуклих відношень переваги на $\mathbb{N}_0^d$.

Теорема 4.7. Кожна одно-агентна економіка обміну $\mathcal{E}: \{a\} \rightarrow \mathbb{N}_0^d \times \mathcal{P}_0$ з умовою $\mathcal{D}_{\mathcal{E}} = \mathbb{N}^d$ має рівноважний вектор цін $\mathbf{p}_0 \in \text{Int } \mathbb{R}_+^d$.

Доведення базується на геометричній формі теореми Гана-Банаха.

Лема 4.2 (Теорема Гана-Банаха, [104], с. 280). Нехай A, B – неперетинні опуклі підмножини дійсного нормованого простору X , причому A – відкрита множина. Тоді існує ненульовий лінійний неперервний функціонал $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ та дійсне число γ такі, що $f(x) < \gamma$ для довільного $x \in A$ та $f(y) \geq \gamma$ для довільного $y \in B$.

Доведення теореми 4.7. Позначимо $\mathcal{E}(a) = (\boldsymbol{\omega}, \succeq)$; $\boldsymbol{\omega} = (\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_d)$. Тоді сума (4.2) складається з одного доданку, а отже, означення рівноважного вектору $\mathbf{p}_0$ зводиться до рівності

$$\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}_0) = \boldsymbol{\omega}, \quad (4.3)$$

яку потрібно довести.

Визначимо множини $A := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^d : \mathbf{x} < \boldsymbol{\omega}\}$, $B_0 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{N}_0^d : \mathbf{x} \succeq \boldsymbol{\omega}\}$ та $B := \text{conv } B_0$. З опуклості відношення переваги $\succeq$ отримуємо:

$$B \cap \mathbb{N}_0^d = B_0. \quad (4.4)$$

Згідно з означеннями,

$$(\forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^d) \quad \mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}) \in B_0 \cap \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}), \quad (4.5)$$

а отже, поклавши $B_0^* := \{\mathbf{x} \in \mathbb{N}_0^d : \mathbf{x} \succ \boldsymbol{\omega}\}$, отримуємо, що умова (4.3) рівносильна до наступної:

$$B_0^* \cap \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{p}_0) = \emptyset. \quad (4.3')$$

Розглянемо $\mathbb{R}^d$, як нормований простір, наприклад з евклідовою нормою $\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + \dots + x_d^2$ для $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Відкритість та опуклість множини A доводяться стандартно, використовуючи лише означення. Виберемо, згідно з лемою 4.2, функціонал $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_d) \in \mathbb{R}^d$ та дійсне число γ так, щоб $\mathbf{q}(\mathbf{x}) < \gamma$ для довільного $\mathbf{x} \in A$ та $\mathbf{q}(\mathbf{y}) \geq \gamma$ для довільного $\mathbf{y} \in B$. Оскільки $\mathbf{0} \in A$, то $0 = \mathbf{q}(\mathbf{0}) < \gamma$. Отже, $\gamma > 0$.

Покладемо $\lambda_m := 1 - \frac{1}{m}$ та $\mathbf{x}_m := \lambda_m \boldsymbol{\omega}$ для $m = 1, 2, \dots$. Тоді $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{\omega} - \mathbf{x}_m\| = 0$ та $\mathbf{x}_m \in A$. З неперервності $\mathbf{q}$ та нерівності $\mathbf{q}(\mathbf{x}_m) < \gamma$ отримуємо $\mathbf{q}(\boldsymbol{\omega}) \leq \gamma$, а з умови $\boldsymbol{\omega} \in B$ – нерівність $\mathbf{q}(\boldsymbol{\omega}) \geq \gamma$. Отже,

$$\sum_{i=1}^d q_i \bar{\omega}_i = \mathbf{q}(\boldsymbol{\omega}) = \gamma. \quad (4.6)$$

Оскільки для кожного $i \in \{1, \dots, d\}$ маємо $\boldsymbol{\omega} - \bar{\omega}_i \mathbf{e}_i \in A$, то

$$\gamma - q_i \bar{\omega}_i = \mathbf{q}(\boldsymbol{\omega} - \bar{\omega}_i \mathbf{e}_i) < \gamma,$$

звідки дістаємо, що $q_i \bar{\omega}_i > 0$, а отже, $q_i > 0$. Таким чином,

$$\mathbf{q} \gg 0. \quad (4.7)$$

Позначимо через $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d)$ відповідний вектор попиту, який є коректно визначений, згідно з (4.7). З максимальності вектора попиту випливає, що $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}) \in B_0$, а отже, $\mathbf{q}(\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})) \geq \gamma$. З іншого боку, оскільки $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}) \in \mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})$, то з (4.6) дістаємо $\mathbf{q}(\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})) \leq \mathbf{q}(\boldsymbol{\omega}) = \gamma$. Таким чином,

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})) = \gamma. \quad (4.8)$$

Отже, вектор попиту $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})$ лежить на гіперплощині $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \gamma\}$. Будувати шуканий вектор ціни $\mathbf{p}_0$ з умовою (4.3) будемо за рахунок “малого” збурення вектора $\mathbf{q}$.

Якщо $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\omega}$, то $\mathbf{p}_0 := \mathbf{q}$ є шуканим вектором цін з умовою (4.3). Розглянемо випадок $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}) \neq \boldsymbol{\omega}$. Тоді з максимальності та єдиності максимального вектора $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q})$ випливає $\mathbf{x}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}) \succ \boldsymbol{\omega}$. Зі строгої монотонності відношення переваги випливає, що існує координата $i \in \{1, \dots, d\}$ така, що

$$\bar{x}_i > \bar{\omega}_i. \quad (4.9)$$

Вектор цін $\mathbf{p}_0$ шукатимемо у вигляді

$$\mathbf{p}_\varepsilon = (q_1, \dots, q_{i-1}, q_i + \varepsilon, q_{i+1}, \dots, q_d), \quad \varepsilon > 0. \quad (4.10)$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ маємо

$$\mathbf{p}_\varepsilon(\mathbf{x}_\omega(\mathbf{q})) \stackrel{(4.10)}{=} \mathbf{q}(\mathbf{x}_\omega(\mathbf{q})) + \varepsilon \bar{x}_i \stackrel{(4.8)}{=} \gamma + \varepsilon \bar{x}_i \stackrel{(4.9)}{>} \gamma + \varepsilon \bar{\omega}_i \stackrel{(4.6)}{=} \mathbf{q}(\omega) + \varepsilon \bar{\omega}_i \stackrel{(4.10)}{=} \mathbf{p}_\varepsilon(\omega),$$

тобто, $\mathbf{x}_\omega(\mathbf{q}) \notin \mathcal{B}_\omega(\mathbf{p}_\varepsilon)$, а отже, $\mathbf{x}_\omega(\mathbf{q})$ не може бути вектором попиту $\mathbf{x}_\omega(\mathbf{p}_\varepsilon)$ при дії ціни $\mathbf{p}_\varepsilon$. Аналогічно, для довільних $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in B_0$ та $\varepsilon > 0$ виконується імплікація

$$(x_i > \bar{\omega}_i) \Rightarrow (\mathbf{x} \notin \mathcal{B}_\omega(\mathbf{p}_\varepsilon)). \quad (4.11)$$

Доведемо включення

$$\bigcap_{\varepsilon \in (0,1]} (B_0^* \cap \mathcal{B}_\omega(\mathbf{p}_\varepsilon)) \subseteq B_0^* \cap \mathcal{B}_\omega(\mathbf{q}). \quad (4.12)$$

Дійсно, нехай $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d)$ – довільний елемент B_0^* . Якщо для довільного $\varepsilon \in (0, 1]$ виконується $\mathbf{y} \in \mathcal{B}_\omega(\mathbf{p}_\varepsilon)$, то

$$(\forall \varepsilon \in (0, 1]) \quad \mathbf{p}_\varepsilon(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^d q_j y_j + \varepsilon y_i \leq \sum_{j=1}^d q_j \bar{\omega}_j + \varepsilon \bar{\omega}_i,$$

звідки при $\varepsilon \downarrow 0$ дістаємо

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^d q_j y_j \leq \mathbf{q}(\omega),$$

а отже, (4.12) доведено. Оскільки всі множини, які фігурують в (4.12), є підмножинами скінченної множини $\mathcal{B}_\omega(\mathbf{p}_1)$, то всі ці множини теж скінченні. Тому з очевидного включення $\mathcal{B}_\omega(\mathbf{p}_{\varepsilon_1}) \supseteq \mathcal{B}_\omega(\mathbf{p}_{\varepsilon_2})$ при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ випливає, що серед множин лівої частини (4.12), які стоять в перетині, є найбільший (в розумінні включення) елемент. Отже, умова (4.12) може бути рівносильно переписана так:

$$(\exists \varepsilon_0 \in (0, 1]) \quad (B_0^* \cap \mathcal{B}_\omega(\mathbf{p}_{\varepsilon_0})) \subseteq B_0^* \cap \mathcal{B}_\omega(\mathbf{q}). \quad (4.12')$$

З (4.12') випливає, що коли за допомогою збурення q_i на ε_0 ми виключаємо з множини B_0^* елемент $\mathbf{x}_\omega(\mathbf{q}) \neq \omega$, який не потрапляє до множини бюджетних векторів збуреного вектора $\mathcal{B}_\omega(\mathbf{p}_{\varepsilon_0})$, ми не отримуємо нових бюджетних векторів, а отже, кількість елементів множини $B_0^* \cap \mathcal{B}_\omega(\mathbf{q})$ зменшується на 1. Залишається розглянути при цьому можливість при новому виключенні чергового елементу повторного отримання вже вилученого раніше. Якщо на якомусь етапі вилучення вектора $\mathbf{z}$ при збуренні певної координати q_s на довільне $\varepsilon \in (0, \varepsilon')$ у відповідній множині бюджетних векторів з'являється вже вилучений на попередніх етапах вектор $\mathbf{u}$, то в цьому випадку вектор $\mathbf{u}$ є лінійною комбінацією векторів ω та $\mathbf{z}$ (інакше вектори $\mathbf{u}$ і $\mathbf{z}$ можна було б відокремити прямою, що проходить через вектори ω , при певному збуренні ε). Оскільки на кожному етапі вилучення відповідні координати вектора $\mathbf{z}$ задовольняють умову (4.9), а з імплікації (4.11) випливає, що координати вектора $\mathbf{u}$ не можуть задовольняти аналогічну умову, то вектори $\mathbf{z}$ та $\mathbf{u}$ знаходяться по різні боки прямої від точки ω . Це означає, що існує $\lambda \in (0, 1)$ таке, що $\omega = \lambda \mathbf{z} + (1 - \lambda) \mathbf{u}$. Оскільки $\mathbf{z}, \mathbf{u} \in B_0$ та $\mathbf{z} \neq \mathbf{u}$, зі строгої опуклості відношення переваги $\succeq$ випливає, що $\omega = \lambda \mathbf{z} + (1 - \lambda) \mathbf{u} \succ \omega$, – суперечність. Отже, строга опуклість відношення $\succeq$ гарантує, що при поетапному збуренні вектора ціни $\mathbf{q}$ на кожному етапі будуть виключатися по одному вектору з $B_0^* \cap \mathcal{B}_\omega(\mathbf{q})$, причому не лише нових елементів не з'явиться, але й не повернуться вже вилучені вектори. За рахунок скінченності множини $\mathcal{B}_\omega(\mathbf{q})$ процес вилучення призведе до порожньої у залишку множини $B_0^* \cap \mathcal{B}_\omega(\mathbf{p}_0)$. Таким чином, теорему доведено. $\square$

4.3 Версія моделі економіки Ерроу-Дебре з довільними товарними векторами

Розглянемо модель економіки з нескінченною множиною товарів, які можуть вироблятися, продаватися, обмінюватися та споживатися. Слідуючи класичним підходам (див., наприклад, [67]), випуск та придбання продукції

мають додатний знак, а продаж та втрати через обмін мають від’ємний знак. У класичній моделі Ерроу-Дебре [66] множина всіх товарних наборів – це скінченно-вимірний векторний простір $E = \mathbb{R}^d$, де d – це кількість (видів) товарів. Правила обміну продукції задаються фіксованим вектором $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{R}^d$. Точніше, $\frac{p_i}{p_j}$ є кількістю товару j , який може бути обміняний на одиничну кількість товару i за цінами $\mathbf{p}$. Таким чином, *значення* товарного вектору $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ визначається, як скалярний добуток $(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^d p_k x_k$ чи, як значення певного лінійного функціоналу на $\mathbb{R}^d$. Отже, простір цін є дуальним лінійним простором $E' = \mathbb{R}^d$, який ми отожднюємо із самим E у скінченновимірному випадку. Ґраткова структура обох просторів – простору товарних векторів та простору цін – є дуже важливою, адже як товарні вектори, так і ціни мають бути порівнянними з іншими товарними векторами та цінами відповідно. Відношення переваги на множині визначається, як відношення лінійного порядку (точне означення див. у розділі). У багатьох природних випадках відношення переваги задається за допомогою *функції корисності* $u: X \rightarrow \mathbb{R}$ рівністю $x \preceq y$ тоді і лише тоді, коли $u(x) \leq u(y)$ [67, Theorem 1.1.4]. Існують також моделі, що розглядають нескінченні товарні множини, а отже, і нескінченновимірні простори товарних векторів, див., наприклад, [96], [97], [72].

У даному розділі ми пропонуємо певні зміни до моделі Ерроу-Дебре. Одна з таких модифікацій полягає в узагальненні функціоналів на скалярні заряди в ролі цін. Сенс такого узагальнення полягає в тому, що в реальній економіці ціни можуть дешевшати для більших кількостей товарів. Отже, “оптові” ціни не є лінійними функціоналами, проте інколи є зарядами (тобто, адитивними функціями для таких доданків, які належать до різних груп товарів). Інша перевага такого підходу: ми можемо розглядати додатний конус $G = (\mathbb{R}^n)^+$, як комплементарний простір з латеральним порядком у той час, коли дана множина не є векторною ґраткою.

4.3.1 Комплементарні простори

Поняття комплементарного простору, яке є одним з ключових у даному розділі, було уведено і досліджено у нашій спільній роботі з М. М. Поповим [98]. Нижче ми наведемо необхідні відомості про дане поняття.

Забігаючи вперед, зазначимо, що найважливіші приклади комплементарних просторів включають векторні ґратки з латеральним порядком та булеві кільця.

4.3.2 Латеральний порядок на векторних ґратках

Кожна векторна ґратка E природним чином наділена частковим порядком, який відрізняється від даного (вихідного) порядку $\leq$. Покладають $x \sqsubseteq y$, якщо елемент x є *фрагментом* елемента y , тобто, $x \perp y - x$. Множина всіх фрагментів даного елемента $e \in E$ позначається символом $\mathfrak{F}_e$. Очевидно, якщо $e = x + y$, то наступні три умови рівносильні: $x \sqsubseteq e$, $y \sqsubseteq e$ та $x \perp y$. Таким чином, якщо $e = \bigsqcup_{k=1}^m x_k$, то $(x_k)_{k=1}^m$ є диз'юнктними фрагментами елемента e . Згідно з [105, Proposition 3.4] (див. також [99, Theorem 3.15]), $\mathfrak{F}_e$ є булевою алгеброю відносно латерального порядку для кожного $e \in E \setminus \{0\}$. З детальною інформацією про латеральний порядок можна ознайомитися у статтях [105] та [106].

4.3.3 Основні поняття та позначення

Супремум (чи інфімум) двоелементної підмножини $\{x, y\}$ частково впорядкованої множини $(G, \preceq)$ в теорії ґраток позначається через $x \vee y$ (відповідно, через $x \wedge y$). Але у даному випадку таке позначення незручне, оскільки один з основних типів прикладів комплементарних просторів є векторна ґратка G з латеральним порядком $\sqsubseteq$, у той час, коли вирази $x \vee y$, $x \wedge y$ в G означають супремум та інфімум тієї ж самої двоелементної підмножини $\{x, y\}$ відносно заданого порядку $\leq$ на G . Таким чином, для супремумів та інфімумів у комплементарному просторі ми використовуємо такі ж самі позначення, як і у випадку латерального порядку на векторних

ґратках:

$$\bigcup A := \preceq - \sup A, \quad \bigcap A := \preceq - \inf A \quad \text{for } A \subseteq G;$$

$$x \mathbf{U} y := \preceq - \sup\{x, y\}, \quad x \mathbf{N} y := \preceq - \inf\{x, y\} \quad \text{for } x, y \in G.$$

Тут використовуються грубі символи задля відмінності від символів об'єднання та перетину множин.

Означення 4.8. Нехай $(G, \preceq)$ – частково впорядкована множина з найменшим елементом 0 та $x, y, z \in G$. Елементи y, z множини G називаються відокремленими (пишемо при цьому $y \dagger z$), якщо $y \mathbf{N} z = 0$. Якщо ж $y \dagger z$ та $x = y \mathbf{U} z$, то ми кажемо, що x є прямою сумою елементів y та z і пишемо $x = y \oplus z$.

Іншими словами, $x \dagger y$ означає, що для кожного $t \in E$ з умов $t \preceq x$ та $t \preceq y$ випливає $t = 0$.

У подальшому, щойно написано $x \oplus y$, ми розуміємо, що $x \dagger y$, а також, що супремум $x \oplus y$ існує.

Для довільної частково впорядкованої множини $(G, \preceq)$ з найменшим елементом 0 та довільного $g \in G$ ми покладаємо $\mathfrak{F}_g := \{x \in G : x \preceq g\}$.

Означення 4.9. Частково впорядкована множина $(G, \preceq)$ з найменшим елементом 0 називається комплементарним простором, якщо виконуються такі умови:

- (CS1) для довільних елементів $x, y \in G$ з умовою $y \preceq x$ існує елемент $z \in G$ такий, що $x = y \oplus z$;
- (CS2) для довільних елементів $x, y, u, v \in G$ з умовою $x \oplus y = u \oplus v$ існують елементи $a, b, c, d \in G$ такі, що $x = a \oplus b$, $y = c \oplus d$, $u = a \oplus c$ та $v = b \oplus d$.

Зауваження 4.1. Наступні приклади ілюструють важливість та, у певному сенсі, оптимальність аксіом (CS1) та (CS2).

- (1) З умови $(CS1)$ не випливає умова $(CS2)$. Наступна множина підмножин множини $\Omega = \{1, 2, 3\}$ задовольняє $(CS1)$ відносно включення $\subseteq$ в ролі $\preceq$, проте не задовольняє $(CS2)$:

$$G = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \Omega\}.$$

Дійсно, умова $y \subseteq x$ виконується лише для таких випадків:

- (а) $y = x$. Тоді $x = y \oplus \emptyset$;
- (б) $y = \emptyset$ та x – довільний. Тоді $x = \emptyset \oplus x$;
- (в) y – довільна двоелементна підмножина, $x = \Omega$. Тоді $x = y \oplus z$, де z – будь-яка інша двоелементна підмножина.

Отже, $(CS1)$ виконується. Покажемо, що $(CS2)$ не виконується. Маємо

$$\{1, 2\} \oplus \{1, 3\} = \Omega = \{1, 2\} \oplus \{2, 3\}, \quad (4.13)$$

проте жодна з двоелементних підмножин не подається у вигляді прямої суми двох непорожніх підмножин, а тому $(CS2)$ не виконується.

- (2) З умови $(CS2)$ не випливає умова $(CS1)$: кожна лінійно впорядкована множина, яка містить принаймні 3 елементи, задовольняє $(CS2)$ але не задовольняє $(CS1)$.
- (3) У прикладі частково впорядкованої множини з найменшим елементом, наведеному в п. (1), при виконанні аксіоми $(CS1)$ для певних елементів $y \preceq x$ існують різні елементи z_1, z_2 , які в прямій сумі з елементом y дають x , тобто, $x = y \oplus z_1 = y \oplus z_2$, що випливає з (4.13). Як показує наступне твердження, при виконанні аксіоми $(CS2)$ такого не буває.

Твердження 4.10. Нехай $(G, \preceq)$ – частково впорядкована множина з найменшим елементом 0, для якої виконується аксіома $(CS2)$. Нехай елементи $e, r, s, t \in G$ задовольняють умови $e = r \oplus s = r \oplus t$. Тоді $s = t$.

Доведення. Використовуючи (CS2) при $x = u = r$, $y = s$ та $v = t$, виберемо елементи $a, b, c, d \in G$ такі, що

$$r = x = a \oplus b = u = a \oplus c,$$

$$s = y = c \oplus d,$$

$$t = v = b \oplus d.$$

Тоді $b \preceq a \oplus b = a \oplus c = r$ та $b \preceq b \oplus d = t$. Отже, з умови $r \nmid t$ випливає, що $b = 0$.

Аналогічно, маємо $c \preceq a \oplus c = a \oplus b = r$ та $c \preceq c \oplus d = s$, а отже, $c = 0$. Таким чином, $s = c \oplus d = d = b \oplus d = t$. $\square$

Наслідок 2.2. *Частково впорядкована множина $(G, \preceq)$ з найменшим елементом 0 є комплементарним простором тоді і лише тоді, коли $(G, \preceq)$ задовольняє (CS2) та наступну підсилену версію аксіоми (CS1):*

(CS1') *для довільних елементів $x, y \in G$ з умовою $y \preceq x$ існує єдиний елемент $z \in G$ такий, що $x = y \oplus z$.*

Означення 4.11. *Нехай $(G, \preceq)$ – комплементарний простір, $x, y \in G$ та $y \preceq x$. Єдиний елемент z простору G такий, що $x = y \oplus z$, називається прямою різницею елементів x та y і позначається так: $x \ominus y$.*

Таким чином, якщо $(G, \preceq)$ – комплементарний простір, то

$$(\forall x, y \in G) \quad y \preceq x \Rightarrow x = y \oplus (x \ominus y). \quad (2.1)$$

Зазначимо, що якщо для кожного ненульового елемента e частково впорядкованої множини G з найменшим елементом 0 , порядковий інтервал $\mathfrak{F}_e$ є булевою алгеброю, то (CS1)-(CS2) виконуються, а отже, G є комплементарним простором. Виявляється, що обернене твердження також вірне (див. теорему 4.12 нижче).

4.3.4 Важливі приклади

Нижче ми наводимо важливі приклади комплементарних просторів.

Приклад 1. Кожне булеве кільце є комплементарним простором.

Приклад 2. Кожна підмножина G векторної ґратки E з властивостями

$$(1) (\forall x, y \in G) ((y \sqsubseteq x) \Rightarrow (x - y \in G));$$

$$(2) (\forall x, y \in G) (x \sqcap y \in G)$$

є комплементарним простором відносно латерального порядку $\sqsubseteq$ на E .

Доведення. (CS1) випливає з (1). Доведемо (CS2). Зафіксуємо довільні елементи $x, y, u, v \in G$ з умовами $e := x \oplus y = u \oplus v$ в G , а отже, $e \in G$. Згідно з [105, Proposition 3.4], вектори $a := x \sqcap u$, $b := x \sqcap v$, $c := y \sqcap u$ та $d := y \sqcap v$ коректно визначені в E , а згідно з (2), належать до G . Знову згідно з [105, Proposition 3.4], $x = a \sqcup b$, $y = c \sqcup d$, $u = a \sqcup c$ та $v = b \sqcup d$. Залишається зауважити, що вирази $f \sqcup g$ та $f \oplus g$ рівносильні у векторній ґратці. $\square$

Приклад 3. Нехай Ω, Y – непорожні множини та G – деяка множина функцій $f: X \rightarrow Y$, де $X \subseteq \Omega$. Визначимо частковий порядок $\preceq$ на G , поклавши $g \preceq f$ тоді і тільки тоді, коли функція g є звуженням функції f . Припустимо, що порожня функція $\emptyset: \emptyset \rightarrow Y$ належить до G , а також виконується наступна імплікація: якщо $f, g \in E$ з умовами $f: X \rightarrow Y$ та $g = f|_{X'}$ для деякої підмножини X' множини X , то $h = f|_{X \setminus X'} \in G$. Тоді $(G, \preceq)$ – комплементарний простір.

Наступна конструкція наводить масу нових прикладів комплементарних просторів. Неформально кажучи, диз'юнктне об'єднання комплементарних просторів із спільним нульовим елементом є комплементарним простором.

Приклад 4. Нехай $((G_i, \preceq_i))_{i \in I}$ – сім'я комплементарних просторів така, що $G_i \cap G_j = \{0\}$ для всіх різних індексів $i, j \in I$, де 0 – найменший елемент кожного з G_k , $k \in I$. Покладемо $G := \bigcup_{i \in I} G_i$ і визначимо частковий порядок на G , поклавши $x \preceq y$ тоді і лише тоді, коли існує $i \in I$ такий, що $x, y \in G_i$ та $x \preceq_i y$. Очевидно, $(G, \preceq)$ є комплементарним простором.

4.3.5 Вибрані властивості комплементарних просторів

Згідно з [107], булева алгебра – це дистрибутивна ґратка з доповненнями. Аксиома (CS2) вимагає менше, ніж дистрибутивна ґратка. Проте, у сукупності з (CS1), це дає все, що потребує булева алгебра, як то стверджує наступна теорема.

Теорема 4.12 (М. М. Попов, [98]). *Для частково впорядкованої множини $(G, \preceq)$ з найменшим елементом 0 наступні твердження еквівалентні:*

- (1) *G є комплементарним простором;*
- (2) *для кожного елемента $e \in G \setminus \{0\}$ підмножина $\mathfrak{F}_e$ є булевою алгеброю.*

4.3.6 Заряди на комплементарних просторах

Зазвичай, поняття заряду в математиці – це скінченно-адитивна міра на вимірному просторі або булевій алгебрі. Неформально кажучи, ідея адаптації поняття заряду до комплементарних просторів полягає в тому, щоб знайти найзагальнішу конструкцію відображень, які є адитивними на парах диз'юнктних векторів. Подібна конструкція відображень на векторних ґратках має назву "ортогонально адитивних операторів". Як і для випадку лінійних операторів на векторних ґратках, множина всіх ортогонально адитивних операторів з певними природними властивостями утворює векторну ґратку операторів. У даному підрозділі ми узагальнюємо ортогонально адитивні оператори, що діють між векторними ґратками, на, так звані, заряди на комплементарних просторах, а також доводимо аналог теореми Рісса-Канторовича про структуру векторної ґратки на множині всіх зарядів з природними властивостями.

Означення 4.13. *Нехай $(G, \preceq)$ – комплементарний простір та F – векторна ґратка. Функцію $T: G \rightarrow F$ назвемо векторним зарядом, якщо для довільних елементів x, y, z простору E з умовою $x = y \oplus z$ має місце рівність $Tx = Ty + Tz$. У частковому випадку $F = \mathbb{R}$ ми використовуємо термін скалярний заряд замість "векторного заряду".*

Оскільки $x = 0 \oplus x$ для кожного елемента $x \in G$, то кожний векторний заряд переводить нуль простору G в нуль векторної ґратки F .

Множина $\mathcal{A}(G, F)$ всіх векторних зарядів $T: G \rightarrow F$ природним чином наділена структурою впорядкованого векторного простору, індукованою відповідною структурою векторної ґратки F .

Означення 4.14. Нехай $(G, \preceq)$ – комплементарний простір та F – векторна ґратка. Векторний заряд $T \in \mathcal{A}(G, F)$ називається:

- додатним (пишемо $T \geq 0$), якщо $Tx \geq 0$ для всіх $x \in E$;
- регулярним, якщо T дорівнює різниці двох додатних векторних зарядів $T = T_1 - T_2$, $T_i \in \mathcal{A}(G, F)$, $i = 1, 2$. Множина всіх регулярних векторних зарядів $T \in \mathcal{A}(E, F)$ позначається через $\mathcal{A}_r(G, F)$;
- C -обмеженим, якщо для довільного елемента $g \in G$ образ $T(\mathfrak{F}_g)$ є порядково обмеженою множиною в F . Множина всіх C -обмежених векторних зарядів $T \in \mathcal{A}(G, F)$ позначається через $\mathcal{A}_b(G, F)$.

Якщо G – векторна ґратка з латеральним порядком, то $\mathcal{A}(G, F)$ збігається з множиною $\mathcal{OA}(G, F)$ всіх ортогонально адитивних операторів $T: G \rightarrow F$.

Очевидно, лінійний простір $\mathcal{A}(G, F)$ є впорядкованим векторним простором відносно порядку $S \leq T$ тоді і лише тоді, коли $T - S \geq 0$ для $S, T \in \mathcal{A}(G, F)$, а також множини $\mathcal{A}_r(G, F)$ та $\mathcal{A}_b(G, F)$ є лінійними підпросторами лінійного простору $\mathcal{A}(G, F)$.

Наступна теорема, яку отримано автором дисертації спільно з М. М. Поповим у роботі [98], є основним результатом даного підрозділу.

Теорема 4.15. Нехай $(G, \preceq)$ – комплементарний простір та F – порядково повна векторна ґратка. Тоді мають місце наступні твердження.

- (1) $\mathcal{A}_r(G, F) = \mathcal{A}_b(G, F)$.
- (2) $\mathcal{A}_b(G, F)$ є порядково повною векторною ґраткою, а ґраткові операції задаються за допомогою наступних формул для всіх $S, T \in \mathcal{A}_b(G, F)$ та $x \in G$:

- (a) $(S \vee T)x = \sup \{Sy + Tz : y, z \in G \text{ такі, що } x = y \oplus z\}.$
- (б) $(S \wedge T)x = \inf \{Sy + Tz : y, z \in G \text{ такі, що } x = y \oplus z\}.$
- (в) $(T^+)x = \sup T(\mathfrak{F}_x).$
- (г) $(T^-)x = -\inf T(\mathfrak{F}_x).$
- (д) $|T|x = \sup \{Ty - Tz : y, z \in G \text{ такі, що } x = y \oplus z\}.$
- (е) $|Tx| \leq |T|x.$

Доведення базується на наступній лемі, яка стверджує асоціативність операцій супремуму та інфімуму у комплементарному просторі.

Лема 4.3 (М. М. Попов, [98]). *Нехай $(G, \preceq)$ – комплементарний простір, $e \in E \setminus \{0\}$ та $x, y, z \in \mathfrak{F}_e$. Тоді*

$$(x \mathbf{U} y) \mathbf{U} z = x \mathbf{U} (y \mathbf{U} z);$$

$$(x \mathbf{N} y) \mathbf{N} z = x \mathbf{N} (y \mathbf{N} z);$$

якщо, більш того, $x \dagger y$, $y \dagger z$ та $z \dagger x$ то $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.

Доведення теореми 4.15. Насправді (1) є легким наслідком (2). Дійсно, включення $\mathcal{A}_r(G, F) \subseteq \mathcal{A}_b(G, F)$ є очевидним, а згідно з (с) та (д), кожний елемент $\mathcal{A}_b(G, F)$ є різницею двох додатних векторних зарядів.

Зафіксуємо довільні оператори $S, T \in \mathcal{A}_b(G, F)$ і доведемо існування супремуму $S \vee T$. Для кожного $x \in G$ покладемо

$$Rx := \sup \{Sy + Tz : y, z \in G \text{ такі, що } x = y \oplus z\} \quad (3.1)$$

(супремум існує, оскільки S та T є С-обмеженими і, принаймні, один розклад існує $x = 0 \oplus x$) і доведемо, що R є векторним зарядом.

Зафіксуємо довільні елементи $u, v, w \in G$, для яких виконується рівність $w = u \oplus v$. Потім зафіксуємо довільні елементи $v', v'' \in G$ з рівністю $v = v' \oplus v''$. Тепер для довільних елементів $u', u'' \in G$ з умовою $u = u' \oplus u''$, згідно з лемою 4.3,

$$w = (u' \oplus u'') \oplus (v' \oplus v'') = (u' \oplus v') \oplus (u'' \oplus v'').$$

Тому, згідно з (3.1), ми отримуємо

$$Su' + Tu'' + Sv' + Tv'' = S(u' \oplus v') + T(u'' \oplus v'') \leq Rw.$$

Оскільки для довільних елементів $u', u'' \in G$ з умовою $u = u' \oplus u''$ ми отримали $Su' + Tu'' \leq Rw - Sv' - Tv''$, то з (3.1) дістаємо $Ru \leq Rw - Sv' - Tv''$, тобто, $Sv' + Tv'' \leq Rw - Ru$. З довільності розкладу $v = v' \oplus v''$ отримуємо $Rv \leq Rw - Ru$, тобто,

$$Ru + Rv \leq Rw. \quad (3.2)$$

Тепер доведемо обернену нерівність. Нехай $x, y \in G$ – довільні елементи такі, що $w = x \oplus y$. Використовуючи рівність $w = u \oplus v$, виберемо, згідно з (CS2), елементи $a, b, c, d \in G$ так, щоби $x = a \oplus b$, $y = c \oplus d$, $u = a \oplus c$ та $v = b \oplus d$. Тоді

$$\begin{aligned} Sx + Ty &= S(a \oplus b) + T(c \oplus d) \\ &= Sa + Tc + Sb + Td \leq Ru + Rv. \end{aligned}$$

Через довільність $x, y \in G$ з умовою $w = x \oplus y$ ми отримуємо $Rw \leq Ru + Rv$. Беручи до уваги (3.2), ми дістаємо $Rw = Ru + Rv$, а отже, R є векторним зарядом.

Більш того, $R \in \mathcal{A}_b(G, F)$. Дійсно, зафіксуємо довільний $g \in G$. Тоді множина $S(\mathfrak{F}_g)$ є порядково обмеженою деяким елементом $f_S \in F$, а множина $T(\mathfrak{F}_g)$ порядково обмежена деяким елементом $f_T \in F$. Тоді для довільного елемента $x \in \mathfrak{F}_g$ та довільних елементів $y, z \in G$ з умовою $x = y \oplus z$ маємо $y, z \in \mathfrak{F}_g$, а отже, $Sy + Tz \leq f_S + f_T$, з чого випливає нерівність $Rx \leq f_S + f_T$ через довільність розкладу $x = y \oplus z$.

Тепер ми покажемо, що $R = S \vee T$ в $\mathcal{A}_b(G, F)$. Очевидно, R є верхньою межею множини $\{S, T\}$. Нехай $W \in \mathcal{A}_b(G, F)$ – довільна верхня межа множини $\{S, T\}$. Зафіксуємо довільний елемент $x \in G$. Тоді для довільних $y, z \in G$ з умовою $x = y \oplus z$ ми маємо

$$Sy + Tz \leq Wy + Wz = Wx.$$

Через довільність $y, z \in G$ ми отримуємо $Rx \leq Wx$. Отже, $R \leq W$ через довільність $x \in G$. Тому $R = S \vee T$. Таким чином, $\mathcal{A}_b(G, F)$ є векторною ґраткою та умова (а) виконується. Залишається довести пункти (b)-(f).

(b) Для довільного $x \in G$, згідно з [99, Theorem 1.3],

$$\begin{aligned}(S \wedge T)x &= -((-S) \vee (-T))x \\ &= -\sup\{-Sy - Tz : x = y \oplus z\} \\ &= \inf\{Sy + Tz : x = y \oplus z\}.\end{aligned}$$

Отже, (b) доведено.

(c) Для довільного $x \in G$ з використанням (а) ми отримуємо

$$\begin{aligned}(T^+)x &= (T \vee 0)x = \sup\{Ty : y, z \in G \text{ такі, що } x = y \oplus z\} \\ &= \sup\{Ty : y \preceq x\} = \sup T(\mathfrak{F}_x).\end{aligned}$$

(d) легко випливає з (c).

(e) доводиться з використанням (а) подібно до того, як ми доводили (c).

(f) випливає з (e). □

Зазначимо, що теорема 4.15 узагальнює класичну теорему Рісса-Канторовича [99, Theorem 1.18] та теорему Плієва-Рамдане [108, Theorem 3.6].

4.3.7 Модель типу Ерроу-Дебре з комплементарним простором товарних векторів

Нехай $(G, \leq_G)$ – комплементарний простір. Елементи G є *товарними векторами*, а елементи $\mathcal{A}_b(G, \mathbb{R})$ є *цінами*. Число $P(\mathbf{x})$ називається *значенням* товарного вектору $\mathbf{x}$ за ціною $P \in \mathcal{A}_b(G, \mathbb{R})$. Ціна $P \in \mathcal{A}_b^+(G, \mathbb{R})$ називається *додатною*. Ціна P називається *строго додатною* (пишемо $P \gg 0$), якщо $P(\mathbf{x}) > 0$ для всіх значень $\mathbf{x} \in G \setminus \{0\}$. Нарешті, комплементарний простір G з даною інтерпретацією ми називаємо *комплементарним товарним простором*, або коротко *СС-простором* (від англійських слів “complementary commodity space”).

Зафіксуємо довільний товарний вектор $\mathbf{g} \in G$ і довільну додатну ціну $P \in \mathcal{A}_b^+(G, F)$.

Означення 4.16. Бюджетна множина для P , що відповідає числу $\lambda > 0$, визначається наступним чином:

$$\mathcal{B}_\lambda(P) = \{\mathbf{x} \in G : P(\mathbf{x}) \leq \lambda\}.$$

Означення 4.17. Нехай дано відношенням переваги $\preceq$ на CC -просторі G та підмножина $A \subseteq G$. Товарний вектор $\mathbf{x}_0 \in A$ такий, що $\mathbf{x} \leq_G \mathbf{x}_0$ для всіх $\mathbf{x} \in A$, називається вектором попиту множини A .

Оскільки відношення переваги є лінійним порядком на G , то вектор попиту єдиний, якщо існує.

Розглянемо наступну (стандартну для дослідження моделей економіки Ерроу-Дебре) задачу.

Проблема 4.18. Нехай $(G, \leq_G)$ є CC -простором, $P \in \mathcal{A}_b^+(G, \mathbb{R})$ – задана додатна ціна та $\preceq$ – відношення переваги на G . Охарактеризувати множину всіх $\lambda > 0$, для яких бюджетна множина $\mathcal{B}_\lambda(P)$ має вектор попиту.

Нижче ми розв’язуємо цю задачу для CC -простору, який є додатним конусом векторної ґратки $\mathbb{R}^d$ з латеральним порядком та відношенням переваги, що дорівнює лексикографічному порядку на $\mathbb{R}^d$.

Нагадаємо, що лексикографічний порядок $\preceq_d$ на $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$ визначається наступним чином: $\preceq_1$ збігається з природним порядком на $\mathbb{R}$, а для довільних двох елементів $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ та $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d)$ покладаємо $\mathbf{x} \prec_d \mathbf{y}$ в тому і лише в тому випадку, коли або $x_1 < y_1$, або $x_1 = y_1$ та $(x_2, \dots, x_d) \prec_{d-1} (y_2, \dots, y_d)$. Далі, як звичайно, $\mathbf{x} \preceq_d \mathbf{y}$ означає, що або $\mathbf{x} \prec_d \mathbf{y}$, або $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Розглянемо додатний конус векторної ґратки $\mathbb{R}^d$, тобто, $G = (\mathbb{R}^d)^+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} \geq 0\}$, де через $\leq$ ми позначаємо звичайний ґратковий порядок на $\mathbb{R}^d$, де $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ означає, що $x_k \leq y_k$ для всіх $k = 1, \dots, d$. Тоді G є CC -простором по відношенню до латерального порядку $\mathbf{x} \sqsubseteq \mathbf{y}$ тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{x} \perp (\mathbf{y} - \mathbf{x})$, тобто, $|\mathbf{x}| \wedge |\mathbf{y} - \mathbf{x}| = 0$.

Нехай $P \in \mathcal{A}_b^+(G, \mathbb{R})$ – довільна додатна ціна та $(\mathbf{e}_k)_{k=1}^d$ – стандартний базис лінійного простору $\mathbb{R}^d$, тобто, $\mathbf{e}_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, 1, 0, \dots, 0)$. Зазначимо, що кожний товарний вектор $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in G$ можна подати у вигляді прямої суми $\mathbf{x} = (x_1 \cdot \mathbf{e}_1) \oplus \dots \oplus (x_d \cdot \mathbf{e}_d)$. Отже, значення товарного вектору $\mathbf{x}$ дорівнює $P(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^d P(x_k \cdot \mathbf{e}_k)$. Визначимо координатні функції $\varphi_k^{(P)}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ціни P за допомогою рівностей

$$\varphi_k^{(P)}(t) = P(t \cdot \mathbf{e}_k), \quad k = 1, \dots, d. \quad (4.14)$$

Фактично ми довели наступне елементарне твердження.

Твердження 4.19. *Значення довільного товарного вектору $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in (\mathbb{R}^d)^+$ по відношенню до ціни $P \in \mathcal{A}_b^+((\mathbb{R}^d)^+, \mathbb{R})$ дорівнює*

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^d \varphi_k^{(P)}(x_k),$$

де $(\varphi_k^{(P)})_{k=1}^d$ – координатні функції P .

Доведемо наступне твердження.

Твердження 4.20.

- (1) Ціна $P \in \mathcal{A}_b^+((\mathbb{R}^d)^+, \mathbb{R})$ є строго додатною тоді і лише тоді, коли всі координатні функції $\varphi_k^{(P)}$ of P є строго додатними, тобто для кожного $t > 0$ і кожного $k = 1, \dots, d$ має місце нерівність $\varphi_k^{(P)}(t) > 0$.
- (2) Функції $\varphi_k: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $k = 1, \dots, d$ є координатними функціями деякої ціни $P \in \mathcal{A}_b^+((\mathbb{R}^d)^+, \mathbb{R})$ тоді і тільки тоді, коли $\varphi_k(0) = 0$ для всіх k .

Доведення. (1) Згідно з означенням, P є строго додатною, якщо $P(\mathbf{x}) > 0$ для всіх $\mathbf{x} \in (\mathbb{R}^d)^+ \setminus \{0\}$, а отже, умова $(\forall k)(\forall t > 0) \varphi_k^{(P)}(t) > 0$ є достатньою для додатності P , згідно з твердженням 4.19. Тепер нехай P є строго додатною ціною. Тоді для кожного $t > 0$ і кожного $k = 1, \dots, d$ маємо $t \cdot \mathbf{e}_k \in (\mathbb{R}^d)^+ \setminus \{0\}$, а отже, $\varphi_k^{(P)}(t) = P(t \cdot \mathbf{e}_k) > 0$.

(2) Нехай функції $\varphi_k: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, d$ є координатними функціями деякої ціни $P \in \mathcal{A}_b^+((\mathbb{R}^d)^+, \mathbb{R})$. Згідно з твердженням 4.19,

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^d \varphi_k(x_k), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in (\mathbb{R}^d)^+. \quad (4.15)$$

З (4.14) отримуємо для кожного $k = 1, \dots, d$, враховуючи, що P є зарядом:

$$\varphi_k(0) = P(0 \cdot \mathbf{e}_k) = P(\mathbf{0}) = 0.$$

Нехай функції $\varphi_k: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, d$ задовольняють умову $\varphi_k(0) = 0$ для всіх k . Визначимо шукану ціну формулою (4.15). Доведемо, що P є зарядом. Розглянемо довільні два диз'юнктні вектори $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_d) \in G$, $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. Для елементів векторної ґратки $\mathbb{R}^d$ остання умова означає, що $A \cap B = \emptyset$, де

$$A = \{i \in \{1, \dots, d\} : x_i \neq 0\} \quad \text{та} \quad B = \{i \in \{1, \dots, d\} : y_i \neq 0\}.$$

Тому

$$P(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^d \varphi_k(x_k) = \sum_{k \in A} \varphi_k(x_k) + \sum_{k \in B} \varphi_k(y_k) = P(\mathbf{x}) + P(\mathbf{y}),$$

а отже, P є зарядом. □

Тепер ми готові сформулювати і довести основний результат даного підрозділу.

Теорема 4.21. *Нехай $P \gg 0$ – ціна в $\mathcal{A}_b((\mathbb{R}^d)^+, \mathbb{R})$ з координатними функціями $(\varphi_k^{(P)})_{k=1}^d$ такими, що $\varphi_1^{(P)}$ є монотонною і неперервною. Тоді для кожного $\lambda > 0$ наступні умови еквівалентні:*

- (1) *бюджетна множина $\mathcal{B}_\lambda(P)$ має вектор попиту;*
- (2) *$\lambda \in (0, \mu)$, де $\mu := \sup \varphi_1^{(P)}(\mathbb{R}^+) \in [0, +\infty]$ та $\varphi_1^{(P)}$ – перша координатна функція P .*

Більш того, вектор попиту $\mathcal{B}_\lambda(P)$ має вигляд $\mathbf{x}_0 = (t_0, 0, \dots, 0)$ у випадку існування.

Доведення. Оскільки $\varphi_1^{(P)}(0) = 0$, то припущення про монотонність $\varphi_1^{(P)}$ означає, що дана функція є (не строго) зростаючою.

(2) $\Rightarrow$ (1). Зафіксуємо довільно $\lambda \in (0, \mu)$. Згідно з неперервністю $\varphi_1^{(P)}$, множина $\{t > 0 : \varphi_1^{(P)}(t) = \lambda\}$ є непорожньою і компактною, а отже, містить найбільший елемент t_0 . Покажемо, що вектор $\mathbf{x}_0 = (t_0, 0, \dots, 0)$ є вектором попиту $\mathcal{B}_\lambda(P)$. Припустимо, навпаки, що існує вектор $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^+$ такий, що $\mathbf{x}_0 <_d \mathbf{x}$ та $P(\mathbf{x}) \leq \lambda$. Якщо $t_0 < x_1$, то $\lambda = \varphi_1^{(P)}(t_0) < \varphi_1^{(P)}(x_1) \leq P(\mathbf{x})$, згідно з вибором t_0 , – суперечність. Тепер нехай $t_0 = x_1$ та $(0, \dots, 0) <_{d-1} (x_2, \dots, x_d)$. Виберемо $k \in \{2, \dots, d\}$ так, що $x_k > 0$. Оскільки $P \gg 0$, то з останньої нерівності між векторами випливає, що $\varphi_k^{(P)}(x_k) > 0$. Тому $P(\mathbf{x}) \geq \varphi_1^{(P)}(x_1) + \varphi_k^{(P)}(x_k) > \varphi_1^{(P)}(x_1) = \varphi_1^{(P)}(t_0) = \lambda$, – і у цьому випадку суперечність. Отже, $\mathbf{x}_0$ є вектором попиту $\mathcal{B}_\lambda(P)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Припустимо, від супротивного, що $\lambda \geq \mu$ (зокрема, $\mu < \infty$). Нехай $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_d^0)$ – вектор попиту $\mathcal{B}_\lambda(P)$. Розглянемо випадки.

Випадок 1: $x_2^0 = \dots = x_d^0 = 0$. Тоді для $\mathbf{x}_1 := (x_1^0 + 1, 0, \dots, 0)$ отримуємо $P(\mathbf{x}_1) = \varphi_1^{(P)}(x_1^0 + 1) \leq \mu \leq \lambda$ та $\mathbf{x}_0 <_d \mathbf{x}_1$, що суперечить вибору $\mathbf{x}_0$.

Випадок 2: існує $k > 1$ таке, що $x_k > 0$. Покладемо $\varepsilon := \varphi_k^{(P)}(x_k)$. Оскільки $P \gg 0$, то $\varepsilon > 0$. Виберемо, згідно з неперервністю $\varphi_1^{(P)}$, число $\delta > 0$ таке, що для кожного $t \geq 0$, якщо $|t - x_1^0| < \delta$, то $|\varphi_1^{(P)}(t) - \varphi_1^{(P)}(x_1^0)| < \varepsilon$. Тепер покладемо $t_0 := x_1^0 + \delta/2$. Тоді

$$\varphi_1^{(P)}(x_1^0) \leq \varphi_1^{(P)}(t_0) < \varphi_1^{(P)}(x_1^0) + \varepsilon.$$

Отже, для $\mathbf{x}_1 := (t_0, x_2^0, \dots, x_{k-1}^0, 0, x_{k+1}^0, \dots, x_d^0)$ ми отримуємо

$$P(\mathbf{x}_1) - P(\mathbf{x}_0) = \varphi_1^{(P)}(t_0) - \varphi_1^{(P)}(x_1^0) - \varphi_k^{(P)}(x_k^0) < \varepsilon - \varphi_k^{(P)}(x_k^0) = 0.$$

Таким чином, $P(\mathbf{x}_1) \leq P(\mathbf{x}_0) \leq \lambda$. З іншого боку, з нерівності $x_1^0 < t_0$ дістаємо $\mathbf{x}_0 <_d \mathbf{x}_1$, що суперечить вибору $\mathbf{x}_0$.

Зрештою, доведення імплікації (2) $\Rightarrow$ (1) містить аргумент, який свідчить, що довільний вектор попиту $\mathcal{B}_\lambda(P)$ має вигляд $\mathbf{x}_0 = (t_0, 0, \dots, 0)$. $\square$

4.4 Існування максимальних товарних векторів бюджетних множин у порядкувому інтервалі $[0, f_0]$, де $f_0 \in L_0$

У даному підрозділі ми розглядаємо питання існування максимальних елементів бюджетних множин у випадку комплементарного простору $[0, f_0] = \{x \in L_0 : 0 \leq x \leq f_0\}$, де $f_0 \in L_0^+$ – довільний елемент додатного конуса векторної ґратки L_0 всіх класів еквівалентності вимірних функцій $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Попередня трудність, з якою ми стикаємося при розв’язанні даної задачі, полягає у виборі коректних цін для побудови бюджетних множин, адже ціна $p: [0, f_0] \rightarrow [0, +\infty)$ має бути неперервним зарядом. Іншими словами, виникає проблема побудови ненульових неперервних зарядів на L_0 (як правило, неперервні заряди на просторах L_p при $1 \leq p \leq \infty$ будуються за допомогою інтеграла Лебеґа, який не є визначеним на L_0). Після розв’язання такої задачі ми доводимо аналог теореми 1.2.3 з [67] (див. теорему нижче).

4.4.1 Приклади ненульових скалярних неперервних зарядів на комплементарному просторі L_0

Ненульовий елемент e векторної ґратки E називається *атомом*, якщо він не має нетривіальних розкладів на фрагменти, тобто, якщо для довільних $x, y \in E$ з умови $e = x \sqcup y$ випливає, що або $x = 0$, або $y = 0$. Векторна ґратка E називається безатомною, якщо E не містить атомів, і називається число атомною, якщо кожний ненульовий елемент $f \in E$ має фрагмент $e \sqsubseteq f$, який є атомом. Наприклад, векторні ґратки $L_p = L_p[0, 1]$ при $0 \leq p \leq \infty$ є безатомними, а векторні ґратки $\ell_p = L_p[0, 1]$ при $0 \leq p \leq \infty$ є чисто атомними.

Векторна ґратка L_0 всіх класів еквівалентності вимірних за Лебеґом функцій $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ з природним порядком $f \leq g$ тоді і лише тоді, коли $f(t) \leq g(t)$ для майже всіх $t \in [0, 1]$, $f, g \in L_0$ є у багатьох розуміннях ”найширшою” з усіх безатомних векторних ґраток зі зліченною властивістю супремумів, що є ґратковим аналогом сепарабельності (кажуть, що векторна ґратка E має зліченну властивість супремумів, якщо для

довільної підмножини $A \subset E$, що має супремум $a = \sup A$ існує не більш, ніж зліченна підмножина $A_1 \subseteq A$ з тим же самим супремумом $a = \sup A_1$). Водночас, L_0 є F-простором (тобто, повним метричним лінійним простором X з метрикою ρ , інваріантною відносно зсувів: $(\forall x, y, z \in X) \rho(x, y) = \rho(x + z, y + z)$) з метрикою

$$\rho(f, g) = \int_{[0,1]} \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} d\mu, \quad f, g \in L_0,$$

який має цікаві патологічні властивості. Наприклад, існує замкнений нескінченновимірний лінійний підпростір $X \subset L_0$, в якому кожний лінійний неперервний оператор $T: X \rightarrow X$ є кратним до тотожного оператора I_X на X (тобто, $T = \lambda I_X$ при деякому $\lambda \in \mathbb{R}$), [109, Theorem 3.6].

З іншого боку, "найширшою" з усіх чисто атомних векторних ґраток зі зліченною властивістю супремумів є векторна ґратка ℓ_0 всіх послідовностей $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ дійсних чисел $x_n \in \mathbb{R}$ з покоординатним порядком $x \leq y$ тоді і лише тоді, коли $x_n \leq y_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, де $x, y = (y_n)_{n=1}^\infty \in \ell_0$. Крім того, ℓ_0 є F-простором з метрикою

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \quad x, y \in \ell_0.$$

Основний результат спільної роботи автора дисертації з М. М. Поповим та О. Г. Фотій [110, Theorem 1] характеризує F-простори, які містять підпростір, ізоморфний до ℓ_0 (наприклад, таким є L_0 , в якому кожний найменший підпростір, що містить диз'юнктну систему ненульових функцій, ізоморфний до ℓ_0). Для обґрунтування істотності умов, які фігурують в цій теоремі, бракувало розв'язання наступної задачі, яку сформулював М. М. Попов.

Задача 1. Побудувати приклад ненульового неперервного в нулі скалярного заряду на L_0 .

Зазначимо, що поняття заряду на векторних ґратках збігається з поняттям ортогонально адитивних операторів. Трудність даного питання

полягає в тому, що очевидні приклади неперервних скалярних зарядів на просторах L_p при $1 \leq p \leq \infty$ використовують інтеграл Лебега від елементів L_p , а елементи L_0 здебільшого – не інтегровні функції.

Добре відомо (і не важко бачити), що збіжність послідовності $(x_n)_{n=1}^\infty$ у просторі L_0 до елемента x рівносильна збіжності $(x_n)_{n=1}^\infty$ до x за мірою, тобто:

$$(\forall \varepsilon > 0) \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{t \in [0, 1] : |x_n(t) - x(t)| \geq \varepsilon\} = 0, \quad (4.16)$$

де μ – міра Лебега.

Наступне твердження дає позитивний розв'язок задачі 1.

Твердження 4.22. *Існує ненульовий неперервний в нулі заряд $T: L_0 \rightarrow \mathbb{R}$.*

Перед доведенням нагадаємо, що носієм вимірної функції $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ називається вимірна множина $\text{supp } x = \{t \in [0, 1] : x(t) \neq 0\}$. Для елементів простору L_0 носій, очевидно, визначається з точністю до множини міри нуль.

Доведення. Позначимо через $\mathbf{1} = \mathbf{1}_{[0,1]}$ тотожну одиничну функцію та визначимо відображення $T: L_0 \rightarrow \mathbb{R}$ рівністю

$$Tx = \int_{[0,1]} (x \mathbf{\text{N}} \mathbf{1}) d\mu, \quad x \in L_0. \quad (4.17)$$

Нагадаємо, що $x \mathbf{\text{N}} \mathbf{1}$ – це латеральний інфімум двоелементної множини $\{x, \mathbf{1}\}$, або іншими словами – найбільший спільний фрагмент елементів x та $\mathbf{1}$. Будучи фрагментом одиничної функції, функція $x \mathbf{\text{N}} \mathbf{1}$ є обмеженою (оскільки з умови $u \sqsubseteq v$ випливає $|u| \leq |v|$, згідно з [105,]) та вимірною (адже вона є елементом L_0), а отже існує інтеграл Лебега від даної функції, а разом з цим відображення T є коректно визначеним.

Доведемо, що відображення T є неперервним в нулі. Нехай послідовність $(x_n)_{n=1}^\infty$ збігається у просторі L_0 до елемента $0 \in L_0$. Отже, $(x_n)_{n=1}^\infty$ збігається до нуля за мірою. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$ і виберемо номер $n_0 \in \mathbb{N}$ так, що для всіх номерів $n \geq n_0$ виконується умова

$$\mu(A_n) < \varepsilon, \quad \text{де } A_n = \left\{ t \in [0, 1] : |x_n(t)| \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

Зафіксуємо довільний номер $n \geq n_0$. Оскільки $\text{supp}(x_n \mathbf{n} \mathbf{1}) \subseteq A_n$, то

$$0 \leq T(x_n) = \mu(\text{supp}(x_n \mathbf{n} \mathbf{1})) \leq \mu(A_n) < \varepsilon.$$

Отже, відображення T є неперервним в нулі.

Покажемо, що T є зарядом. Нехай елементи $x, y, z \in L_0$ задовольняють $x = y \sqcup z$ та $T_{2,1}x \neq 0$. Згідно з [111, Theorem 1.6],

$$x \mathbf{n} \mathbf{1} = (y \mathbf{n} \mathbf{1}) + (z \mathbf{n} \mathbf{1}),$$

а отже, $Tx = Ty + Tz$. Таким чином, T є зарядом. $\square$

Зазначимо, що скалярний заряд T , який задається рівністю (4.17), не є неперервним в деяких інших точках. Покажемо, наприклад, що T не є неперервним в точці $\mathbf{1}$. Дійсно, послідовність $x_n = (1 + \frac{1}{n}) \cdot \mathbf{1}$, $n \in \mathbb{N}$ прямує до $\mathbf{1}$ в L_0 , проте $Tx_n = 0$ для всіх n та $T\mathbf{1} = 1$.

Отже, природно виникає наступна задача.

Задача 2. Чи існує ненульовий неперервний скалярний заряд на L_0 ?

Ми даємо позитивну відповідь на дане питання, будуючи два типи ненульових неперервних скалярних зарядів на L_0 , кожний з яких використовує спеціальні оператори (дані результати опубліковано в роботі [112]).

4.4.2 Оператори ε -штрихування.

Нехай E – векторна ґратка. Нагадаємо, що для довільного $e \in E$ множина всіх фрагментів елемента e позначається через $\mathfrak{F}_e$. Латеральний супремум (інфімум) двоелементної підмножини $\{x, y\} \subset E$ позначається через $x \mathbf{u} y$ (відповідно, $x \mathbf{n} y$). Для кожного $e \in E \setminus \{0\}$ множина $\mathfrak{F}_e$ є булевою алгеброю відносно латерального порядку з найменшим елементом 0 та найбільшим e [105, Proposition 3.4]. Отже, для довільних $x, y \in \mathfrak{F}_e$ існують $x \mathbf{u} y$ та $x \mathbf{n} y$, але не кожна двоелементна підмножина $\{x, y\} \subset E$ є латерально обмеженою зверху, тобто, $x, y \sqsubseteq e$ для деякого e (наприклад, $\{x, 2x\}$ при $x \neq 0$ не є латерально обмеженою зверху). Очевидно,

кожна підмножина латерально обмежена знизу нулем. Але не в кожній векторній ґратці латеральний інфімум $x \mathbf{\cap} y$ (який фактично є найбільшим спільним фрагментом елементів x та y) існує для довільної пари x, y [105, Example 3.11]. Кажуть, що векторна ґратка E має *властивість перетинів*, якщо двоелементна підмножина $\{x, y\} \subset E$ має латеральний інфімум $x \mathbf{\cap} y$. З головної проєктивної властивості довільної векторної ґратки E випливає властивість перетинів для E [105, Theorem 3.13].

Нехай E – векторна ґратка і X – дійсний лінійний простір. Відображення $T: E \rightarrow X$ називається *ортогонально адитивним оператором* (чи, коротко, *зарядом*, в термінології [98]), якщо для довільних диз’юнктних елементів $x, y \in E$, $x \perp y$, має місце рівність $T(x + y) = T(x) + T(y)$. Очевидно, кожний лінійний оператор є зарядом, а також кожний заряд T має властивість $T(0) = 0$. Якщо $E = \mathbb{R}$, то кожна функція $T: E \rightarrow X$ з властивістю $T(0) = 0$ є зарядом, оскільки умова $x \perp y$ для $x, y \in \mathbb{R}$ означає, що або $x = 0$, або $y = 0$. Якщо E має властивість перетинів, то для довільного $e \in E \setminus \{0\}$ відображення $Q_e: E \rightarrow E$, що визначається рівністю

$$Q_e(x) = x \mathbf{\cap} e, \quad x \in E, \quad (4.18)$$

є зарядом, який проєкує E на $\mathfrak{F}_e$ (тобто, $(\forall x \in E) Q_e(x) \in \mathfrak{F}_e$ та $(\forall x \in \mathfrak{F}_e) Q_e(x) = x$), див. [113, Theorem 4] для випадку, коли E має головну проєктивну властивість та [111, Proposition 2.6] у загальному випадку. Легко бачити, що оператор Q_e не є порядково неперервним в точці e (більш того, в довільній ненульовій точці множини $\mathfrak{F}_e$), адже послідовність $x_n = (1 + \frac{1}{n}) \cdot e$, $n \in \mathbb{N}$ порядково збігається до e , проте $Q_e(x_n) = 0$ для всіх n , у той час як $Q_e(e) = e \neq 0$.

Нехай E – векторна ґратка, $0 < e \in E$ та $0 < \varepsilon < 1$. Оператор ε -штрихування $Q_e^\varepsilon: E \rightarrow E$, побудований на векторі e , визначається рівністю

$$Q_e^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \left((x - (1 - \varepsilon)e)^+ \wedge ((1 + \varepsilon)e - x)^+ \right), \quad x \in E. \quad (4.19)$$

З іншого боку, згідно з лемою 3.1 з [101], цей же самий оператор дорівнює:

$$Q_e^\varepsilon(x) = \left(e - \frac{1}{\varepsilon}|x - e| \right)^+ = e - e \wedge \frac{1}{\varepsilon}|x - e|. \quad (4.20)$$

Основні властивості оператору ε -штрихування, частина з яких нам буде потрібною, сформульовані у наступній теоремі.

Теорема 4.23 (Теорема 3.2, [101]). *Нехай E – векторна ґратка, $0 < e \in E$ та $0 < \varepsilon < 1$. Тоді відображення Q_e^ε , що задане формулою (4.19), є додатним порядково неперервним ортогонально адитивним оператором, що зберігає диз’юнктивність, причому виконуються наступні властивості.*

- (i) $(\forall x \in E) \ 0 \leq Q_e^\varepsilon(x) = Q_e^\varepsilon(x^+) \leq x^+ \wedge e$.
- (ii) $(\forall x, y \in E) \ |Q_e^\varepsilon(x) - Q_e^\varepsilon(y)| \leq \frac{2}{\varepsilon} |x - y|$.
- (iii) $(\forall x \in \mathfrak{F}_e) \ Q_e^\varepsilon(x) = x$;
- (iv) Для довільного $x \in E$ такого, що або $x \leq (1 - \varepsilon)e$, або $x \geq (1 + \varepsilon)e$, виконується рівність $Q_e^\varepsilon(x) = Q_e(x) = 0$.
- (v) Для довільного $x \in E$, якщо $0 < \varepsilon' < \varepsilon'' < 1$, то $Q_e^{\varepsilon'}(x) \leq Q_e^{\varepsilon''}(x)$.
- (vi) Якщо $x - e$ – проєктивний елемент E , то $\bigwedge_{n=1}^{\infty} Q_e^{1/n}(x)$ та $x \mathbf{\cap} e$ існують і

$$\bigwedge_{n=1}^{\infty} Q_e^{1/n}(x) = e - P_{x-e}e = x \mathbf{\cap} e = Q_e(x) = x - P_{x-e}x. \quad (4.21)$$
- (vii) Нехай $e = e' \sqcup e''$. Тоді $Q_{e'}^\varepsilon(x) \sqcup Q_{e''}^\varepsilon(x) = Q_e^\varepsilon(x)$ для всіх $x \in E$. Якщо, більш того, e' та e'' – проєктивні елементи E , то $Q_{e'}^\varepsilon \sqcup Q_{e''}^\varepsilon = Q_e^\varepsilon$.

Властивості (v) та (vi) пояснюють назву оператору ε -штрихування (латерального інфімуму), адже з них, як наслідок, дістаємо таке твердження.

Наслідок 2.3. *Нехай E – векторна ґратка з головною проєктивною властивістю та $0 < e \in E$. Тоді для довільного $x \in E$ маємо $Q_e^\varepsilon(x) \downarrow Q_e(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Таким чином, порядково неперервні оператори ε -штрихування Q_e^ε поточною наближають порядково розривний оператор Q_e .

4.4.3 Розв'язання задачі 2.

Теореми 4.24 та 4.25 дають позитивну відповідь на задачу 2.

Теорема 4.24. Для довільних $e \in L_1^+$ та $\varepsilon > 0$ відображення $\mathbf{p}_e^\varepsilon: L_0 \rightarrow \mathbb{R}$, яке задається формулою для довільного $x \in L_0$

$$\mathbf{p}_e^\varepsilon(x) = \int_{[0,1]} Q_e^\varepsilon(x) d\mu, \quad x \in L_0, \quad (4.22)$$

де Q_e^ε – оператор ε -штрихування на L_0 , побудований на векторі e , є неперервним додатним зарядом.

Доведення. Зафіксуємо довільні $e \in L_1^+$ та $\varepsilon > 0$ і визначимо відображення $T: L_0 \rightarrow \mathbb{R}$, поклавши для кожного $x \in L_0$

$$Tx = \int_{[0,1]} Q_e^\varepsilon(x) d\mu, \quad x \in L_0. \quad (4.23)$$

Згідно з п. (і) теореми 4.23,

$$0 \leq Q_e^\varepsilon(x) \leq x^+ \wedge e \leq e, \quad (4.24)$$

звідки дістаємо, що підінтегральна функція в (4.23) є вимірною та обмеженою, а отже, відображення T є коректно визначеним формулою (4.23).

Оскільки відображення T є композицією $\text{Int} \circ Q_e^\varepsilon$ ортогонально адитивного оператора $Q_e^\varepsilon: L_0 \rightarrow L_\infty \subseteq L_0$ справа на лінійний оператор $\text{Int}: L_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ зліва, який довільному елементу $z \in L_\infty$ ставить у відповідність $\int_{[0,1]} z d\mu$, то T також є ортогонально адитивним оператором. Дійсно, для довільних $x, y \in L_0$ таких, що $x \perp y$, маємо

$$\begin{aligned} T(x + y) &= \int_{[0,1]} Q_e^\varepsilon(x + y) d\mu = \int_{[0,1]} (Q_e^\varepsilon(x) + Q_e^\varepsilon(y)) d\mu \\ &= \int_{[0,1]} Q_e^\varepsilon(x) d\mu + \int_{[0,1]} Q_e^\varepsilon(y) d\mu = T(x) + T(y). \end{aligned}$$

Доведемо неперервність відображення T . Нехай $x, x_n \in L_0$ для $n \in \mathbb{N}$ та $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ за метрикою L_0 , а отже, за мірою, тобто, має місце умова (4.16).

Доведемо таке твердження:

З кожної підпослідовності $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ послідовності $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ можна виділити рідшу підпослідовність $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ таку, що $\lim_{n \rightarrow \infty} Tz_n = Tx_0$. (4.25)

Цього буде достатньо для доведення неперервності, адже (4.25) фактично означає, що з кожної підпослідовності $(Ty_n)_{n=1}^{\infty}$ послідовності $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ можна виділити рідшу підпослідовність $(Tz_n)_{n=1}^{\infty}$ таку, що $\lim_{n \rightarrow \infty} Tz_n = Tx_0$. Для послідовності чисел це означає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = Tx_0$. Дійсно, якщо припустити, що це не так, то можна вибрати дійсне число $\delta > 0$ таке, що для довільного $m \in \mathbb{N}$ існує $n \geq m$ таке, що $|Tx_n - Tx_0| \geq \delta$. Таким чином, існує підпослідовність $(Ty_n)_{n=1}^{\infty}$ послідовності $(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ така, що $|Ty_n - Tx_0| \geq \delta$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Ясно, що з такої підпослідовності не можна виділити жодну рідшу підпослідовність $(Tz_n)_{n=1}^{\infty}$ таку, що $\lim_{n \rightarrow \infty} Tz_n = Tx_0$, що суперечить умові (4.25). Отже, з (4.25) випливає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = Tx_0$, і на цьому доведення неперервності T завершиться. Для доведення (4.25) зафіксуємо довільну підпослідовність $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ послідовності $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Як і сама послідовність, так і її підпослідовність $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ прямує за мірою до x_0 . Виберемо, згідно з [114, Теорема 4, с.40], рідшу підпослідовність $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ послідовності $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, яка прямує до x_0 майже скрізь на $[0, 1]$. Оскільки порядкова збіжність послідовностей на векторній ґратці L_0 рівносильна до збіжності майже скрізь [115], то послідовність $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ порядково збігається до x_0 . Згідно з теоремою 4.23, оператор Q_e^ε є порядково неперервним, а отже, послідовність $(Q_e^\varepsilon z_n)_{n=1}^{\infty}$ порядково збігається до $Q_e^\varepsilon x_0$ в L_0 . Знову, згідно з вищезгаданим критерієм, $(Q_e^\varepsilon z_n)_{n=1}^{\infty}$ збігається до $Q_e^\varepsilon x_0$ майже скрізь. Згідно з теоремою Лебеґа про обмежену збіжність [114, с. 104], враховуючи (4.24), $\lim_{n \rightarrow \infty} Tz_n = Tx_0$. Таким чином, (4.25) доведено. $\square$

Зауваження 4.2. Для всіх значень $e \in L_0^+ \setminus \{0\}$ та $\varepsilon > 0$ заряд $\mathbf{p}_e^\varepsilon$ не є монотонно неспадним, оскільки $e = \mathbf{p}_e^\varepsilon(e) > 0 = \mathbf{p}_e^\varepsilon((1 + \varepsilon)e)$, згідно

з пп. (3) і (4) теореми 4.23, в той час як $e < (1 + \varepsilon)e$. Наступний приклад неперервного заряду буде монотонно неспадним, як потрібно для застосувань до економіки.

Другий приклад базується на іншому нелінійному операторі. Нехай E – векторна ґратка, $e \in E^+$. Умовна порядкова проекція $\tilde{Q}_e: E \rightarrow E$ відносно вектору e в роботі [102] визначається так:

$$\tilde{Q}_e(x) = x^+ \wedge e - x^- \wedge e. \quad (4.26)$$

Серед властивостей умовної порядкової проекції, встановлених у [102], немає саме тих двох, які нам потрібні. Тому почнімо з допоміжних лем.

Лема 4.4. *Нехай E – векторна лґратка, $u, v, w \in E^+$ та $u \perp v$. Тоді виконуються такі рівності:*

$$(i) \quad u + v = u \vee v;$$

$$(ii) \quad (u + v) \wedge w = (u \wedge w) + (v \wedge w);$$

$$(iii) \quad (u + v)^+ = u^+ + v^+ \text{ та } (u + v)^- = u^- + v^-.$$

Доведення. Зазначимо, що для додатних u і v умова $u \perp v$ означає $u \wedge v = 0$.

(i) Згідно з [99, Theorem 1.3 (2)], $u + v = u \vee v + u \wedge v = u \vee v$, оскільки в нашому випадку $u \wedge v = 0$.

(ii) З умов $0 \leq (u \wedge w) \wedge (v \wedge w) \leq u \wedge v = 0$ випливає, що $(u \wedge w) \perp (v \wedge w)$. Тому, використовуючи дистрибутивність ґраткових операцій [99, Theorem 1.8], отримуємо

$$\begin{aligned} (u + v) \wedge w &\stackrel{(i)}{=} (u \vee v) \wedge w = \\ &= (u \wedge w) \vee (v \wedge w) \stackrel{(i)}{=} \\ &= (u \wedge w) + (v \wedge w). \end{aligned}$$

(iii) $(u + v)^+ \stackrel{(i)}{=} (u \vee v) \vee 0 = (u \vee 0) \vee (v \vee 0) = u^+ \vee v^+ \stackrel{(i)}{=} u^+ + v^+$. Друга рівність доводиться аналогічно. $\square$

Перші два пункти наступної лема – це добре відомі нерівності Біркгофа, див. теорему 1.9 (2), [99].

Лема 4.5. *Нехай E – векторна ґратка, $u, v, w \in E$. Тоді виконуються такі нерівності:*

$$(i) \quad |u \wedge w - v \wedge w| \leq |u - v|;$$

$$(ii) \quad |u \vee w - v \vee w| \leq |u - v|, \text{ а отже, } |u^+ - v^+| \leq |u - v| \text{ при } w = 0.$$

$$(iii) \quad \text{якщо, крім того, } u, v, w \geq 0, \text{ то } |u \wedge w - v \wedge w| \leq |u - v| \wedge 2w \text{ та } |\tilde{Q}_e(u) - \tilde{Q}_e(v)| \leq 2(|u - v| \wedge 2e) = 2\tilde{Q}_{2e}|u - v|.$$

Доведення. (iii) Оскільки $|u \wedge w - v \wedge w| \leq u \wedge w + v \wedge w \leq w + w = 2w$, то, враховуючи (iii), отримуємо $|u \wedge w - v \wedge w| \leq |u - v| \wedge 2w$. А отже,

$$\begin{aligned} |\tilde{Q}_e(u) - \tilde{Q}_e(v)| &= |u^+ \wedge e - u^- \wedge e - v^+ \wedge e + v^- \wedge e| \leq \\ &\leq |u^+ \wedge e - v^+ \wedge e| + |u^- \wedge e - v^- \wedge e| \leq \\ &\leq |u^+ - v^+| \wedge 2e + |u^- - v^-| \wedge 2e = \\ &= 2(|u - v| \wedge 2e) = 2\tilde{Q}_{2e}|u - v|. \end{aligned}$$

□

Лема 4.6. *Нехай послідовність $(x_n)_{n=1}^\infty$ елементів L_0 збігається до $x_0 \in L_0$ за метрикою. Тоді для довільного елементу $e \in L_1^+$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} |x_n - x_0| \wedge e \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} \tilde{Q}_e |x_n - x_0| \, d\mu = 0.$$

Доведення. Зафіксуємо довільне $\varepsilon > 0$. Згідно з абсолютною неперервністю інтеграла Лебеґа, виберемо $\delta > 0$ так, щоби для довільної вимірної підмножини $A \subseteq [0, 1]$ виконувалась імплікація

$$\mu(A) \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \int_A w \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.27)$$

Використовуючи, що послідовність $(x_n)_{n=1}^\infty$ збігається до x_0 за мірою, виберемо $n_0 \in \mathbb{N}$ так, щоби

$$(\forall n \geq n_0) \quad \mu(A_n) \leq \delta, \text{ де } A_n = \left\{ t \in [0, 1] : |x_n(t) - x_0(t)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}. \quad (4.28)$$

Тоді для кожного $n \geq n_0$ з врахуванням (4.27), (4.28) та нерівностей $|x_n - x_0| \wedge w \leq |x_n - x_0|$, $|x_n - x_0| \wedge w \leq w$ дістаємо

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} |x_n - x_0| \wedge w \, d\mu &= \int_{A_n} |x_n - x_0| \wedge w \, d\mu + \int_{[0,1] \setminus A_n} |x_n - x_0| \wedge w \, d\mu \leq \\ &\leq \int_{A_n} w \, d\mu + \int_{[0,1] \setminus A_n} \frac{\varepsilon}{2} \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Теорема 4.25. Нехай $0 < e \in L_0^+$. Тоді відображення $\mathbf{q}_e: L_0 \rightarrow \mathbb{R}$, що задане рівністю

$$\mathbf{q}_e(x) = \int_{[0,1]} \tilde{Q}_e(x) \, d\mu = \int_{[0,1]} (x^+ \wedge e - x^- \wedge e) \, d\mu, \quad (4.29)$$

є неперервним монотонно неспадним на L_0^+ зарядом.

Доведення. Доведемо диз'юнктну адитивність $\mathbf{q}_e$. Нехай $x, y \in L_0$ $x \perp y$. Тоді, враховуючи, що $x^+ \wedge y^+ \leq |x| \wedge |y| = 0$, а отже, $x^+ \perp y^+$ та аналогічно $x^- \perp y^-$, отримуємо

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_e(x + y) &= (x + y)^+ \wedge e - (x + y)^- \wedge e \stackrel{\text{Лема 4.4 (iii)}}{=} \\ &= (x^+ + y^+) \wedge e - (x^- + y^-) \wedge e \stackrel{\text{Лема 4.4 (ii)}}{=} \\ &= x^+ \wedge e + y^+ \wedge e - x^- \wedge e + y^- \wedge e = \mathbf{q}_e(x) + \mathbf{q}_e(y). \end{aligned}$$

Отже, $\mathbf{q}_e$ є зарядом. Доведемо неперервність $\mathbf{q}_e$. Нехай $(x_n)_{n=1}^\infty$ – довільна послідовність в L_0 , яка збігається до $x_0 \in L_0$ за метрикою. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$\begin{aligned} |\mathbf{q}_e(x_n) - \mathbf{q}_e(x_0)| &= \left| \int_{[0,1]} (x_n^+ \wedge e - x_n^- \wedge e - x_0^+ \wedge e + x_0^- \wedge e) \, d\mu \right| \leq \\ &\leq \int_{[0,1]} |(x_n^+ \wedge e - x_n^- \wedge e - x_0^+ \wedge e + x_0^- \wedge e)| \, d\mu \leq \\ &\leq \int_{[0,1]} |x_n^+ \wedge e - x_0^+ \wedge e| \, d\mu + \int_{[0,1]} |x_0^- \wedge e - x_n^- \wedge e| \, d\mu \stackrel{\text{Лема 4.5 (iii)}}{\leq} \\ &\leq \int_{[0,1]} |x_n^+ - x_0^+| \wedge 2e \, d\mu + \int_{[0,1]} |x_0^- - x_n^-| \wedge 2e \, d\mu \stackrel{\text{Лема 4.5 (ii)}}{\leq} \\ &\leq 2 \int_{[0,1]} |x_n - x_0| \wedge 2e \, d\mu \end{aligned}$$

З отриманих нерівностей та леми 4.6 дістаємо $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{q}_e(x_n) = \mathbf{q}_e(x_0)$. Таким чином, неперервність $\mathbf{q}_e$ доведено. Залишається показати, що $\mathbf{q}_e$ є неспадною на L_0^+ . Нехай $x, y \in L_0$ та $0 \leq x \leq y$. Тоді

$$\mathbf{q}_e(x) = \int_{[0,1]} x \wedge e \, d\mu \leq \int_{[0,1]} y \wedge e \, d\mu = \mathbf{q}_e(y),$$

що і треба було встановити. $\square$

4.4.4 Застосування до моделі економіки Ерроу-Дебре

Нагадаємо, що ціною на комплементарному просторі $(G, \sqsubseteq)$ називатимемо довільний додатний неспадний скалярний заряд $\mathbf{p}: G \rightarrow [0, +\infty)$. Кожна фіксована ціна $\mathbf{p}$ та фіксований товарний вектор $\omega \in G$ на комплементарному просторі $(G, \sqsubseteq)$, який називається *початковим запасом*, визначають *бюджетну множину* товарних векторів за допомогою рівності:

$$\mathcal{B}_\omega(\mathbf{p}) := \{x \in G : \mathbf{p}(x) \leq \mathbf{p}(\omega)\}.$$

Для побудови моделі економіки Ерроу-Дебре важливим є питання існування та єдиності максимальних (стосовно певного відношення переваги) елементів бюджетних множин (див. підрозділ 1.2 монографії [67]).

Носієм елемента $\mathbf{z} \in L_0$ називається множина $\text{supp } \mathbf{z} = \{t \in [0, 1] : \mathbf{z}(t) \neq 0\}$, яка визначена з точністю до множини нульової міри.

Розглянемо в ролі комплементарного простору G порядковий інтервал $[0, \mathbf{f}_0]$ у векторній ґратці L_0 з додатним вектором $\mathbf{f}_0 \in L_0$, носій якого є максимальним: $\text{supp } \mathbf{f}_0 = [0, 1]$, тобто,

$$G = [0, \mathbf{f}_0] = \{\mathbf{x} \in L_0 : 0 \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{f}_0\}$$

і наступне відношення переваги на G , залежне від параметру $\mathbf{e} \in L_0^+$, задане для довільних $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in G$:

$$\mathbf{x} \succeq_{\mathbf{e}} \mathbf{y} \Leftrightarrow \|\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}\| \geq \|\mathbf{y} \wedge \mathbf{e}\|,$$

де F-норма $\|\cdot\|$ розглядається у просторі L_0 .

Наступне означення є аналогом строгої додатності ціни для випадку скінченновимірних векторних ґраток.

Означення 4.26. Ціна $\mathbf{p}: G \rightarrow [0, +\infty)$ на G називається **щільно додатною**, якщо для довільної вимірної підмножини $A \subseteq [0, 1]$ міри $\mu(A) > 0$ існує товарний вектор $\mathbf{x} \in G$ такий, що $\text{supp } \mathbf{x} \subseteq A$ та $\mathbf{p}(\mathbf{x}) > 0$.

Наступний результат є аналогом теореми 1.2.3 з [67] для нашого випадку.

Теорема 4.27. Для довільного $\mathbf{f}_0 \in L_0$, $G = [0, f_0]$, довільного $\mathbf{e} \in L_1 \cap G$ та довільного початкового товарного запасу $\boldsymbol{\omega} \in G$ існує $\succeq_{\mathbf{e}}$ -максимальний елемент $\mathbf{x}^*$ бюджетної множини $\mathcal{B}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{q}_{\mathbf{e}})$, який має вигляд $\mathbf{x}^* = \gamma_0 \cdot \mathbf{1}_{[0,1]} \wedge \mathbf{f}_0$, $\gamma_0 \in [0, +\infty)$.

Доведення ґрунтується на двох лемах.

Лема 4.7. Для довільної вимірної підмножини $A \subseteq [0, 1]$, $\mu(A) > 0$ та довільного $x \in L_1^+$ виконується нерівність:

$$\int_A \frac{x}{1+x} d\mu \leq \frac{\int_A x d\mu}{1 + \frac{1}{\mu(A)} \int_A x d\mu}. \quad (4.30)$$

Доведення лема 4.7. Згідно з відомими властивостями інтеграла Лебега, достатньо довести (4.30) для випадку простої функції $x \in L_1^+$. Отже, нехай $x = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{A_k}$, де $a_k \in [0, +\infty)$, $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_k$. Зазначимо, що $\mu(A) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$. У нових позначеннях нерівність (4.30) набуває вигляду:

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k \mu(A_k)}{1+a_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k)}{1 + \frac{1}{\mu(A)} \sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k)} = \frac{\sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k)}{\frac{1}{\mu(A)} \sum_{k=1}^n (1+a_k) \mu(A_k)}. \quad (4.31)$$

Здійснімо кілька послідовних еквівалентних перетворень нерівності (4.31), яку потрібно довести:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(A)} \cdot \sum_{k=1}^n (1+a_k) \mu(A_k) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{a_i \mu(A_i)}{1+a_i} &\leq \sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k) = \sum_{k=1}^n (1+a_k) \mu(A_k) - \mu(A); \\ \sum_{k=1}^n (1+a_k) \mu(A_k) - \frac{1}{\mu(A)} \cdot \sum_{k=1}^n (1+a_k) \mu(A_k) \cdot \sum_{i=1}^n \frac{a_i \mu(A_i)}{1+a_i} &\geq \mu(A); \\ \sum_{k=1}^n (1+a_k) \mu(A_k) \left(1 - \frac{1}{\mu(A)} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{a_i \mu(A_i)}{1+a_i} \right) &\geq \mu(A). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Помножимо (4.32) на $\mu(A)$ та, з урахуванням рівності

$$1 = \frac{1}{\mu(A)} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1 + a_i}{1 + a_i} \mu(A_i),$$

перепишемо (4.32) у наступній еквівалентній формі:

$$\sum_{k=1}^n (1 + a_k) \mu(A_k) \sum_{i=1}^n \frac{\mu(A_i)}{1 + a_i} \geq (\mu(A))^2. \quad (4.33)$$

Але нерівність (4.33) є відомою нерівністю Коші-Буняковського-Шварца

$$\sum_{k=1}^n u_k^2 \cdot \sum_{i=1}^n v_i^2 \geq \left(\sum_{k=1}^n u_k v_k \right)^2, \quad u_k, v_k \geq 0$$

при $u_k = \sqrt{(1 + a_k)\mu(A_k)}$, $v_i = \sqrt{\frac{\mu(A_i)}{1 + a_i}}$, адже тоді $\sum_{k=1}^n u_k v_k = \mu(A)$. $\square$

Лема 4.8. Нехай $a > 0$ – дійсне число та $u, v, w \in L_1$ такі елементи, що $0 < v \leq w \leq a \cdot \mathbf{1}_Y$ та $a \cdot \mathbf{1}_X \leq u$. Нехай для вимірних множин $X, Y \subseteq [0, 1]$ виконується нерівність

$$\int_X (u - a) d\mu \leq \int_Y (w - v) d\mu.$$

Тоді

$$\int_X \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{u} \right) d\mu \leq \int_Y \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{w} \right) d\mu.$$

Доведення лема 4.8. Використовуючи умови лема, запишемо:

$$\begin{aligned} \int_X \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{u} \right) d\mu &= \int_X \frac{u - a}{au} d\mu \leq \\ &\leq \int_X \frac{u - a}{a^2} d\mu = \\ &= \frac{1}{a^2} \int_X (u - a) d\mu \leq \\ &\leq \frac{1}{a^2} \int_Y (w - v) d\mu = \\ &= \int_Y \frac{w - v}{a^2} d\mu \leq \\ &\leq \int_Y \frac{w - v}{vw} d\mu = \\ &= \int_Y \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{w} \right) d\mu. \end{aligned}$$

$\square$

Доведення теореми 4.27. Зафіксуємо довільні $\mathbf{f}_0 \in L_0$, $\mathbf{e} \in L_1$ та $\omega \in G$. Зазначимо, що $\mathbf{q}_\mathbf{e}(\omega) \leq \int_{[0,1]} \mathbf{e} d\mu$ і розглянемо два випадки.

Випадок (i): $\mathbf{q}_\mathbf{e}(\omega) = \int_{[0,1]} \mathbf{e} d\mu$. Тоді $\mathbf{x}_0 = \mathbf{f}_0 \in \succeq_\mathbf{e}$ -максимальним елементом бюджетної множини $\mathcal{B}_\omega(\mathbf{q}_\mathbf{e})$, оскільки в цьому випадку $\mathbf{f}_0 \in \mathcal{B}_\omega(\mathbf{q}_\mathbf{e})$ і $\mathbf{f}_0 \in \succeq_\mathbf{e}$ -максимальним елементом G .

Випадок (ii): $\mathbf{q}_\mathbf{e}(\omega) < \int_{[0,1]} \mathbf{e} d\mu$. Для довільного $\gamma \in [0, +\infty)$ покладемо:

$$\mathbf{x}_\gamma = (\gamma \cdot \mathbf{1}_{[0,1]}) \wedge \mathbf{f}_0.$$

Крім того, визначимо функцію $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, поклавши для кожного $\gamma \in [0, +\infty)$

$$\varphi(\gamma) = \mathbf{q}_\mathbf{e}(\mathbf{x}_\gamma) = \int_{[0,1]} \mathbf{x}_\gamma \wedge \mathbf{e} d\mu.$$

З неперервності ґраткових операцій на L_0 та інтеграла Лебеґа випливає неперервність функції φ . Оскільки $\varphi(0) = 0$ та $\lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \varphi(\gamma) = \int_{[0,1]} \mathbf{e} \wedge \mathbf{f}_0 d\mu$, то існує (не обов'язково єдине) значення $\gamma_0 \in [0, +\infty)$ таке, що $\mathbf{q}_\mathbf{e}(\mathbf{x}_{\gamma_0}) = \mathbf{q}_\mathbf{e}(\omega)$. Покладемо $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_{\gamma_0}$ і доведемо максимальність $\mathbf{x}^*$. Згідно з вибором, маємо

$$\mathbf{q}_\mathbf{e}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{q}_\mathbf{e}(\omega), \quad (4.34)$$

а отже, $\mathbf{x}^* \in \mathcal{B}_\omega(\mathbf{q}_\mathbf{e})$. Розглянемо довільний $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_\omega(\mathbf{q}_\mathbf{e})$ і доведемо, що

$$\|\mathbf{x}^*\| \geq \|\mathbf{x}\|. \quad (4.35)$$

З умови $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_\omega(\mathbf{q}_\mathbf{e})$ та (4.34) випливає

$$\int_{[0,1]} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) d\mu \leq \int_{[0,1]} (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) d\mu. \quad (4.36)$$

Покладемо

$$A := \{t \in [0, 1] : \mathbf{x}^*(t) < \mathbf{e}(t)\}, \quad A^C = [0, 1] \setminus A.$$

Тоді

$$\mathbf{x}^* \cdot \mathbf{1}_A = \gamma_0 \cdot \mathbf{1}_A \quad \text{та} \quad \mathbf{x}^* \cdot \mathbf{1}_{A^C} = \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{1}_{A^C}. \quad (4.37)$$

Розглянемо два підвипадки.

Підвипадок (ii.a): $\int_A (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) d\mu \leq \int_A (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) d\mu$. Оскільки $\int_A (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) d\mu = \int_A \gamma_0 d\mu = \gamma_0 \cdot \mu(A)$, то

$$\int_A (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) d\mu \leq \gamma_0 \cdot \mu(A). \quad (4.38)$$

Отже, згідно з лемою 4.7, використовуючи імплікацію (яка є добре відомою вправою)

$$(\forall s, t \in \mathbb{R}) \quad 0 \leq s \leq t \quad \Rightarrow \quad \frac{s}{1+s} \leq \frac{t}{1+t}, \quad (4.39)$$

отримуємо:

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_A\| &= \int_A \frac{\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}}{1 + \mathbf{x} \wedge \mathbf{e}} d\mu \stackrel{(4.30)}{\leq} \\ &\leq \frac{\int_A (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) d\mu}{1 + \frac{1}{\mu(A)} \int_A (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) d\mu} \stackrel{(4.38)}{\leq} \\ &\leq \frac{\gamma_0 \cdot \mu(A)}{1 + \gamma_0} = \|(\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_A\|. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Крім того,

$$\|(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_{A^c}\| \leq \|(\mathbf{f}_0 \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_{A^c}\| \stackrel{(4.37)}{=} \|(\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_{A^c}\|. \quad (4.41)$$

Нарешті, з (4.40) і (4.41) випливає:

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})\| &= \|(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_A\| + \|(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_{A^c}\| \leq \\ &\leq \|(\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_A\| + \|(\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_{A^c}\| = \|(\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})\|, \end{aligned}$$

тобто, $(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) \preceq_e (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})$.

Підвипадок (ii.a):

$$\alpha := \int_A (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) d\mu - \int_A (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) d\mu = \int_A (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) d\mu - \gamma_0 \cdot \mu(A) > 0. \quad (4.42)$$

Покладемо $B := \{t \in A^c : \mathbf{x}(t) < \mathbf{e}(t)\}$ і зазначимо, що $\mu(B) > 0$, оскільки у протилежному випадку було б $(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_{A^c} = \mathbf{e} = (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_{A^c}$, що разом з (4.42) суперечило би (4.36). Далі покладемо для кожного $s \in [0, 1]$

$$A_s = \{t \in A \cap [0, s] : (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})(t) > \gamma_0\} = \{t \in A \cap [0, s] : (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})(t) > (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})(t)\}.$$

Визначимо функцію $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, поклавши

$$\varphi(s) = \int_{A \setminus A_s} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) d\mu - \int_{A \setminus A_s} (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) d\mu, \quad s \in [0, 1].$$

Зазначимо, що $\varphi(0) > 0$ завдяки (4.42), а також $\varphi(1) \leq 0$, згідно з означенням множини A_s . З відомих властивостей інтеграла Лебега випливає неперервність функції φ . А отже, виберемо $s_0 \in (0, 1]$ так, щоби $\varphi(s_0) = 0$, тобто,

$$\int_{A \setminus A_{s_0}} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) d\mu = \int_{A \setminus A_{s_0}} (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) d\mu. \quad (4.43)$$

Тепер покладемо $\mathbf{1} = \mathbf{1}_{[0,1]}$, $X = A_{s_0}$, $Y = A^C$, $v = (\mathbf{1} + \mathbf{x}) \cdot \mathbf{1}_{A^C}$, $w = (\mathbf{1} + \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{1}_{A^C}$, $a = 1 + \gamma_0$, $u = (\mathbf{1} + \mathbf{x}) \cdot \mathbf{1}_{A_{s_0}}$. Тоді $v > 0$, оскільки $\mathbf{x} \geq 0$, $B \subseteq A^C$ і $\mu(B) > 0$. Крім того, з (4.37) дістаємо, що $v \leq w$. Далі, з означення $\mathbf{f}_0$ випливає, що $\mathbf{x}^* \cdot \mathbf{1}_{A^C} \leq \gamma_0 \cdot \mathbf{1}_{A^C}$, а отже, $w \leq a \cdot \mathbf{1}_Y$. Нарешті, з означення множини A_s отримуємо $a \cdot \mathbf{1}_X = (1 + \gamma_0) \cdot \mathbf{1}_{A^C} \leq (\mathbf{1} + \mathbf{x}) \cdot \mathbf{1}_{A^C} = u$. Таким чином, виконуються умови леми 4.8: $0 < v \leq w \leq a \cdot \mathbf{1}_Y$ та $a \cdot \mathbf{1}_X \leq u$.

Позначимо $\mathbf{z} = (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) - (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})$. Згідно з (4.43),

$$\int_{A \setminus A_{s_0}} \mathbf{z} d\mu = 0. \quad (4.44)$$

Тому

$$\int_Y (w - v) d\mu - \int_X (u - a) d\mu = \int_{A^C} \mathbf{z} d\mu + \int_{A_{s_0}} \mathbf{z} d\mu \stackrel{(4.44)}{=} \int_{[0,1]} \mathbf{z} d\mu \stackrel{(4.36)}{\geq} 0.$$

Згідно з лемою 4.8, має місце нерівність

$$\int_Y \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{w} \right) d\mu - \int_X \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{u} \right) d\mu \geq 0. \quad (4.45)$$

Зазначимо, що для довільного $\mathbf{y} \in L_0^+$ та довільної вимірної підмножини $D \subseteq [0, 1]$

$$\|\mathbf{y} \cdot \mathbf{1}_D\| = \int_D \frac{\mathbf{y}}{1 + \mathbf{y}} d\mu = \int_D \left(1 - \frac{1}{1 + \mathbf{y}} \right) d\mu = \mu(D) - \int_D \frac{d\mu}{1 + \mathbf{y}}.$$

Із врахуванням останньої рівності запишемо:

$$\begin{aligned}
& \|(\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_Y\| - \|(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_Y\| = \\
& = \mu(Y) - \int_Y \frac{d\mu}{1 + (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})} - \mu(Y) + \int_Y \frac{d\mu}{1 + (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})} = \\
& = \int_Y \left(\frac{1}{1 + (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})} - \frac{1}{1 + (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})} \right) d\mu = \\
& = \int_Y \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{w} \right) d\mu;
\end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned}
& \|(\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_X\| - \|(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_X\| = \\
& = \mu(X) - \int_X \frac{d\mu}{1 + (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})} - \mu(X) + \int_X \frac{d\mu}{1 + (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})} = \\
& = \int_X \left(\frac{1}{1 + (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})} - \frac{1}{1 + (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})} \right) d\mu = \\
& = - \int_X \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{a} \right) d\mu.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Крім того, згідно з лемою 4.7,

$$\begin{aligned}
\|(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_{A \setminus A_{s_0}}\| &= \int_{A \setminus A_{s_0}} \frac{\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}}{1 + (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e})} d\mu \leq \\
&\leq \frac{\int_{A \setminus A_{s_0}} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) d\mu}{1 + \frac{1}{\mu(A \setminus A_{s_0})} \int_{A \setminus A_{s_0}} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) d\mu} \stackrel{(4.43)}{=} \\
&= \frac{\int_{A \setminus A_{s_0}} (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) d\mu}{1 + \frac{1}{\mu(A \setminus A_{s_0})} \int_{A \setminus A_{s_0}} (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) d\mu} \stackrel{(4.39)}{\leq} \\
&\leq \frac{\int_{A \setminus A_{s_0}} \gamma_0 d\mu}{1 + \frac{1}{\mu(A \setminus A_{s_0})} \int_{A \setminus A_{s_0}} \gamma_0 d\mu} = \\
&= \frac{\gamma_0 \cdot \mu(A \setminus A_{s_0})}{1 + \gamma_0} = \int_{A \setminus A_{s_0}} \frac{\gamma_0}{1 + \gamma_0} d\mu = \\
&= \|\gamma_0 \cdot \mathbf{1}_{A \setminus A_{s_0}}\| \stackrel{(4.37)}{=} \|(\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_{A \setminus A_{s_0}}\|.
\end{aligned}$$

Отже, доведено нерівність

$$\|(\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_{A \setminus A_{s_0}}\| - \|(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) \cdot \mathbf{1}_{A \setminus A_{s_0}}\| \geq 0. \tag{4.48}$$

Враховуючи, що $X \sqcup Y \sqcup (A \setminus A_{s_0}) = [0, 1]$ і додаючи нерівності (4.46), (4.47) та (4.48), отримуємо $\|\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e}\| - \|\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}\|$, тобто, $(\mathbf{x} \wedge \mathbf{e}) \preceq_e (\mathbf{x}^* \wedge \mathbf{e})$. $\square$

Зауваження 4.3. Легко бачити, що в умовах теореми 4.27, $\succeq_{\mathbf{e}}$ -максимальний елемент бюджетної множини $\mathcal{B}_{\omega}(\mathbf{q}_{\mathbf{e}})$ не завжди єдиний у випадку, коли $\mathbf{e} < \mathbf{f}_0$. Наприклад, у випадку (i): $\mathbf{q}_{\mathbf{e}}(\omega) = \int_{[0,1]} \mathbf{e} d\mu$ кожний вектор $\mathbf{x} \in [\mathbf{e}, \mathbf{f}_0]$ є $\succeq_{\mathbf{e}}$ -максимальним для $\mathcal{B}_{\omega}(\mathbf{q}_{\mathbf{e}})$.

4.5 Висновки до розділу 4

1. Кожна одно-агентна неокласична економіка обміну з цілочисельними товарними векторами та строго монотонним і строго опуклим відношенням переваги має рівноважний вектор цін.
2. Множина всіх регулярних зарядів, що діють з комплементарного простору у порядково повну векторну ґратку є порядково повною векторною ґраткою, на якій ґраткові операції задаються за допомогою формул, подібних до формул Абрамовича.
3. Для врахування ринкових оптових цін в моделі економіки Ерроу-Дебре можна розглядати заряди в ролі цінових векторів замість лінійних функціоналів. Зокрема, за певних природних умов при такій модифікації кожна бюджетна множина має вектор попиту, а для відношень переваги з певного класу кожна бюджетна множина має максимальний елемент.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена побудові та дослідженню існування, стійкості і числовому аналізу математичних моделей із багаточастотним збуренням, моделей імунної відповіді при інфекційних захворюваннях і моделі епідемії із врахуванням екологічного фактору та модифікації моделі рівноважної економіки Ерроу-Дебре.

Основні результати дисертаційної роботи такі:

1. Для математичної моделі із запізненнями аргументу, яка знаходиться під дією багаточастотних збурень із лінійно перетвореними аргументами, доведено існування та єдиність розв'язку, обґрунтовано метод усереднення за фазовими змінними на скінченному часовому відрізку й отримано оцінку похибки методу усереднення, яка явно залежить від малого параметра, кількості фазових змінних і запізнень у них та порядку асимптотики у моделі, яка знаходиться під дією збурення.
2. Математичну модель SIR із врахуванням втрати імунітету та народжуваності і смертності в популяції модифіковано із врахуванням екологічного фактору у вигляді відхилення узагальненого показника забруднення від нормативного значення, досліджено існування, єдиність і невід'ємність розв'язку, встановлено коефіцієнтні умови достатньої стійкості стаціонарного розв'язку, відповідного відсутності епідемії.
3. У базовій математичній моделі імунної відповіді при інфекційних захворюваннях враховано екологічний фактор, доведено невід'ємність, існування і єдиність розв'язку, знайдено стаціонарні розв'язки та умови їх існування. Дано медичну інтерпретацію результатів.
4. Побудовано оцінку $V^* > 0$ для величини інфікування у початковий момент часу. Якщо доза інфікування не перевищує імунологічний бар'єр, то розвиток інфекційного захворювання не відбувається. З часом антиген виводиться з організму людини і його величина асимптотично прямує до нуля при $t \rightarrow \infty$.

5. Адаптовано модель Ерроу-Дебре для випадку цілочисельних товарних запасів. Зокрема доведено, що кожна одно-агентна неокласична економіка обміну з цілочисельними товарними векторами та строго монотонним і строго опуклим відношенням переваги має рівноважний вектор цін.
6. Модифіковано і досліджено модель Ерроу-Дебре із врахуванням гнучких оптових цін. Для цього у роботі в ролі цінових векторів замість лінійних функціоналів розглянуто заряди. За певних природних умов при такій модифікації кожна бюджетна множина має вектор попиту, а для відношень переваги з певного класу кожна бюджетна множина має максимальний елемент.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Anderson R.M., May R.M. Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control. Oxford : Oxford University Press, 1991. 757 p.
- [2] Galvani A.P. Epidemiology meets evolutionary ecology. Trends in Ecology Evolution. 2003. Vol. 18, no. 3. P. 132–139.
- [3] Stiefs D., Venturino E., Feude U. Evidence of chaos in eco-epidemic models. Mathematical Biosciences and Engineering. 2009. Vol. 6, no. 4. P. 855–871.
- [4] Директива 2008/50/ЄС Європейського Парламенту та Ради від 21 травня 2008 року про якість атмосферного повітря та чистіше повітря для Європи. Офіційний вебпортал парламенту України. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/994_950#Text (дата звернення: 10.12.2025).
- [5] Про затвердження Гігієнічних нормативів якості води водних об'єктів для задоволення питних, господарсько-побутових та інших потреб населення. Офіційний вебпортал парламенту України. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z0524-22#Text> (дата звернення: 10.12.2025).
- [6] Про введення в дію Державних гігієнічних нормативів "Норми радіаційної безпеки України (НРБУ-97)". Офіційний вебпортал парламенту України. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/rada/show/v0062282-97#Text> (дата звернення: 10.12.2025).
- [7] Маценко В.Г. Математичне моделювання. Чернівці: Чернівецький національний університет, 2013. 519 с.
- [8] Tsoularis A., Wallace J. Analysis of logistic growth models. Mathematical Biosciences, 2002. Vol. 179, No 1. P. 21–55.
- [9] Smith H. An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences. New York, NY : Springer New York, 2011. 172p.

- [10] Hale J.K., Verduyn Lunel S. Introduction to Functional Differential Equations. New York : Springer, 1993. 424p.
- [11] Kuang Y. Delay differential equations: with applications in population dynamics. Elsevier Science Technology Books, 1993. 398 p.
- [12] Kamgang J. C., Sallet G. Computation of threshold conditions for epidemiological models and global stability of the disease-free equilibrium. Mathematical Biosciences. 2008. Vol. 213, no. 1. P. 1–12.
- [13] Gokce A., Gurbuz B., Rendall A. D. Dynamics of a mathematical model of virus spreading incorporating the effect of a vaccine. Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2024. Vol. 78. P. 97–104.
- [14] Lin Q., Zhao S., Gao D. A conceptual model for the coronavirus disease 2019 (COVID-19) outbreak in Wuhan, China with individual reaction and governmental action. International Journal of Infectious Diseases. 2020. Vol. 93. P. 211–216.
- [15] Войтко О. В., Солонніков В. Г., Полякова О. В. SIR-модель розповсюдження та врахування результатів негативного впливу інформаційних каналів на громадську думку населення. Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони. 2022. № 1(43). С. 115–120.
- [16] Gopalsamy K. Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics. Dordrecht : Springer Netherlands, 1992. 501 p.
- [17] Murray J.D. Mathematical Biology. I. An Introduction. 3rd ed. New York: Springer, 2002. 551 p.
- [18] Kolmanovskii V. B., Myshkis A. D. Applied Theory of Functional Differential Equations. Dordrecht : Kluwer Academic Pub., 1992. 533 p.
- [19] Маценко В.Г. Математичне моделювання динаміки вікової структури біологічних популяцій : монографія. Чернівці : Чернівецький національний університет, 2018. 191 с.

- [20] Bogoliubov N.N., Mitropolsky Y.A. Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillation. New York: Gordon and Breach, 1962. 537 p.
- [21] Самойленко А.М., Петришин Р.І. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. Київ: Наукова думка, 2004. 474 с.
- [22] Бігун Я.Й. Усереднення в багаточастотних системах диференціально-функціональних рівнянь : рукопис. Дис. на здобуття наук. ступеня д-ра фіз.-мат. наук за спец. 01.01.02 «Диференціальні рівняння». Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ, 2009. 298 с.
- [23] Бігун Я.Й. Усереднення багаточастотної крайової задачі з лінійно перетвореним аргументом. Український математичний журнал. 2000. Т. 52, № 3. С. 291–299.
- [24] Петришин Р.І., Сопронюк Т.М. Оцінки похибки методу усереднення для багаточастотних коливних систем. Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Математика. Чернівці : Рута, 2002. Вип. 134. С. 92–96.
- [25] Петришин Р.І., Данилюк І.М. Усереднення крайової задачі для багаточастотної системи з відхиленням аргументом. Нелінійні коливання. 2007. Т. 2, № 4. С. 51–65.
- [26] Петришин Р.І., Петришин Я.Р. Усереднення крайових задач для систем диференціальних рівнянь з повільними та швидкими змінними. Нелінійні коливання. 1998. Т. 1, № 1. С. 51–65.
- [27] Бігун Я.Й., Краснокутська І.В., Петришин Р.І. Усереднення в багаточастотних системах із лінійно перетвореними аргументами і багатоточковими та інтегральними умовами. Буковинський математичний журнал. 2016. Т. 4, № 3–4. С. 30–35.
- [28] Бігун Я.Й., Скутар І.Д. Усереднення в багаточастотних системах із запізненням та локально-інтегральними умовами. Буковинський математичний журнал. 2020. Т. 8, № 2. С. 14–23.
- [29] Martcheva M. An Introduction to Mathematical Epidemiology. New York : Springer, 2015. 453 p.

- [30] Brauer F., van den Driessche P., Wu J. Mathematical Epidemiology. Berlin : Springer-Verlag, 2008. 412 p.
- [31] Arino O., Hbid M.L., Dads E. Ait. Delay differential equations and applications. Springer Netherlands, 2006. 570 p.
- [32] Ma Z., Li J. Dynamical modeling and analysis of epidemics. Singapore : World Scientific Publishing Co, 2009. 498 p.
- [33] Bernoulli D. Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir. Paris : Mém. Math. Phys. Acad. Roy. Sci., 1766. P. 1–45.
- [34] Kermack W.O., McKendrick A.G. Contribution to the mathematical theory of epidemics. Proceedings of the Royal Statistical Society A. 1927. Vol. 115. P. 700–721.
- [35] Byckov O., Gurko E., Khusainov D., Shatyko A., Puza B., Novotna V. Construction of a mathematical model of the heart muscle. CEUR Workshop Proceedings. 2022. Vol. 3132. P. 272–280.
- [36] Khusainov D., Shatyko A. Simulation the impact of time-delay in Richardson arms race models. CEUR Workshop Proceedings. 2023. Vol. 3687. P. 89–97.
- [37] Corduneanu C., Li Y., Mahdavi M. Functional Differential Equations: Advances and Applications. Hoboken : John Wiley & Sons, 2016. 368 p.
- [38] Lakshmanan M., Senthilkumar D. V. Dynamics of Nonlinear Time-Delay Systems. Heidelberg : Springer, 2010. 314 p.
- [39] Hairer E., Norsett S. P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff and Differential-Algebraic Problems. Berlin: Springer-Verlag, 1993. 528 p.
- [40] Cooke K., van den Driessche P., Zou X. Interaction of maturation delay and nonlinear birth in population and epidemic models. Journal of Mathematical Biology. 1999. Vol. 39. P. 332–352.

- [41] Ma W., Song M., Takeuchi Y. Global stability of an SIR epidemic model with time delay. *Applied Mathematics Letters*. 2004. Vol. 17, no. 10. P. 1141–1145.
- [42] Tchuenche J.M., Nwagwo A., Levins R. Global behaviour of an SIR epidemic model with time delay. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2007. Vol. 30, no. 6. P. 733–749.
- [43] Kumar A., Nilam. Stability of a time delayed SIR epidemic model along with nonlinear incidence rate and Holling type II treatment rate. *International Journal of Computational Methods*. 2018. Vol. 15, no. 6. Art. 1850055.
- [44] Beretta E., Takeuchi Y. Global stability of an SIR epidemic model with time delays. *Journal of Mathematical Biology*. 1995. Vol. 33, no. 3. P. 250–260.
- [45] Косович І.Т., Черевко І. М., Шкільнюк Д. В. Математичний аналіз SIR моделей. *Буковинський математичний журнал*. 2025. Т. 13, № 1. С. 83–91.
- [46] Kosovych I., Cherevko I., Shkilniuk D. Modeling Epidemiological Processes Using Reinforcement Learning Methods. 15th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT). Šibenik, Croatia, 17–19 September 2025. P. 51–54.
- [47] Cooke K.L., van den Driessche P. Analysis of an SEIRS epidemic model with two delays. *Journal of Mathematical Biology*. 1996. Vol. 35, no. 2. P. 240–260.
- [48] Wang W. Global behavior of an SEIRS epidemic model with time delays. *Applied Mathematics Letters*. 2002. Vol. 15, no. 4. P. 423–428.
- [49] Yan P., Liu S. SEIR epidemic model with delay. *The ANZIAM Journal*. 2006. Vol. 48, no. 1. P. 119–134.
- [50] Xu R., Ma Z. Stability of a delayed SIRS epidemic model with a nonlinear incidence rate. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2009. Vol. 41, no. 5. P. 2319–2325.

- [51] Bell G.I. Predator-prey equations simulating an immune response. *Mathematical Biosciences*. 1973. Vol. 16, no. 3-4. P. 291-314.
- [52] Marchuk G.I. *Mathematical Modelling of Immune Response in Infectious Diseases*. Dordrecht : Springer Netherlands, 1997. 350 p.
- [53] Bodnar M., Foryś U. Periodic dynamics of the model of immune system. *Warsaw: Applicationes Mathematicae*. 2000. Vol. 27, no. 1. P. 113–126.
- [54] Bodnar M., Foryś U. A model of immune system where time-dependent immune reactivity. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 2009. Vol. 70, no. 2. P. 1049–1058.
- [55] Foryś U. Marchuk's Model of Immune System Dynamics with Application to Tumour Growth. *Journal of Theoretical Medicine*. 2002. Vol. 4, no. 1. P. 85–93.
- [56] Piotrowska M.J., Bodnar M., Poleszczuk J., Foryś U. Mathematical modelling of immune reaction against gliomas: Sensitivity analysis and influence of delays. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2013. Vol. 14, no. 3. P. 1601–1620.
- [57] Foryś U. Global analysis of Marchuk's model in case of strong immune system. *Journal of Biological Systems*. 2000. Vol. 8, no. 4. P. 331–346.
- [58] Foryś U. Hopf bifurcation in Marchuk's model of immune reactions. *Mathematical and Computer Modelling*. 2001. Vol. 34, no. 7–8. P. 725–735.
- [59] Martsenyuk V.P. Construction and study of stability of an antitumor immunity model. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2004. Vol. 40, no. 5. P. 778–783
- [60] Skvortsova M. Asymptotic properties of solutions in Marchuk's basic model of disease. *Functional Differential Equations*. 2017. No. 3–4. P. 127–135.
- [61] Volinsky I., Domoshnitsky A., Bershadsky M., Shklyar R. *Marchuk's Models of Infection Diseases: New Developments*. Singapore : Springer, 2021. P. 131–143.

- [62] Baranovsky S., Bomba A., Lyashko S., Pryshchepa O. Diffusion Perturbations in Models of the Dynamics of Infectious Diseases Taking into Account the Concentrated Effects. Computational Methods and Mathematical Modeling in Cyberphysics and Engineering Applications. 2024. Vol. 1. P. 273–303.
- [63] Baranovsky S.V., Bomba A.Y. Modification of the Model of Mixed Infection Dynamics with Regard for the Diffusion Perturbations and Interactions Between Antigens. Journal of Mathematical Sciences. 2024. Vol. 282. No. 5. P. 870–884.
- [64] Baranovsky S.V., Bomba A.Y. Decision Making in Predicting the Dynamics of Viral Infection Considering Diffusion-Convective Migration of Active Factors Via Several Ways Under Immunotherapy. Cybernetics and Systems Analysis. 2024. Vol. 60, no. 4. P. 561–570.
- [65] Барановський С.В. Математичне моделювання керованих процесів імунології з урахуванням просторових збурень, температури та зосереджених впливів : рукопис. Дис. на здобуття наук. ступеня д-ра техн. наук за спец. 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи». Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, 2025.
- [66] Arrow K.J., Debreu G. Existence of an equilibrium for a competitive economy. Econometrica. 1954. Vol. 22. P. 265–290.
- [67] Aliprantis C.D., Brown D.J., Burkinshaw O. Existence and Optimality of Competitive Equilibria. Berlin : Springer-Verlag, 1989. 284 p.
- [68] Podczeck K., Yannelis N.C. Existence of Walrasian equilibria with discontinuous, non-ordered, interdependent preferences, without free disposal, and without compact consumption sets. Economic Theory. 2022. Vol. 73, no. 2. P. 413–420.
- [69] Fratini S. M. Interest, profit and saving in Arrow-Debreu equilibrium models. Review of Keynesian Economics. 2020. Vol. 8, no. 1. P. 39–53.

- [70] Garg J., Végh L.A. A Strongly Polynomial Algorithm for Linear Exchange Markets. *Operations Research*. 2023. Vol. 71, no. 2. P. 487–505.
- [71] Anderson R.M., Duanmu H., Khan M.A., Uyanik M. Walrasian equilibrium theory with and without free-disposal: theorems and counterexamples in an infinite-agent context. *Economic Theory*. 2022. Vol. 73, no. 2–3. P. 387–412.
- [72] Jang H.S., Lee S. Equilibria in a large production economy with an infinite dimensional commodity space and price dependent preferences. *Journal of Mathematical Economics*. 2020. Vol. 90. P. 57–64.
- [73] Light B. General equilibrium in a heterogeneous-agent incomplete-market economy with many consumption goods and a risk-free bond. *Operations Research*. 2023. Vol. 71, no. 3. P. 1093–1111.
- [74] Huang P.W., Rebentrost P. Quantum algorithm for large-scale market equilibrium computation. *arXiv:2405.13788*. 2024.
- [75] Toda A.A., Walsh K.J. Recent advances on uniqueness of competitive equilibrium. *Journal of Mathematical Economics*. 2024. Vol. 113. Art. 103008.
- [76] Бігун Я.Й., Українець О.З., Скутар І.Д. Усереднення в математичних моделях під дією багаточастотних збурень із запізненням. *Міжнародний науково-технічний журнал «Проблеми керування та інформатики»*. 2024. Т. 69, № 1. С. 34–42.
- [77] Українець О. З. Усереднення в математичних моделях під дією багаточастотних збурень із запізненням. *Міжнародна науково-практична конференція : тези доповідей, м. Софія, 31 січ. – 2 лют. 2024 р. / International Scientific Unity. М. Софія, 2024. С. 263–266.*
- [78] Mitropolsky Yu.A., Samoilenko A.M., Martynyuk D.I. Systems of evolution equations with periodic and quasiperiodic coefficients. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1993. 346 p.

- [79] Arnold V.I. Mathematical methods of classical mechanics. New York : Springer, 1989. 416 p.
- [80] Bihun Y., Petryshyn R., Skutar I. Averaging in a generalized multifrequency system with a delay. Analytical and Approximate Methods for Complex Dynamical Systems. Springer Nature Switzerland AG, 2025. P. 281–294.
- [81] Dodson M., Rynne B.P., Vickers J.A.G. Averaging in multifrequency systems. Nonlinearity. 1989. Vol. 2, no. 1. P. 137–148.
- [82] Бігун Я.Й. Про усереднення початкової і крайової задачі з лінійно перетвореним аргументом. Математичний вісник НТШ. 2008. Т. 5. С. 23–35.
- [83] Петришин Р.І., Бігун Я.Й. Про усереднення в системах із лінійно перетвореним аргументом в резонансному випадку. Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. 2008. Вип. 421. С. 84–89.
- [84] Bihun Y., Skutar I. Averaging in multifrequency systems with multi-point conditions and a delay. Acta et Commentationes. Exact and Natural Sciences. 2023. No. 2(16). P. 13–24.
- [85] Pachpatte B. Inequalities for Differential and Integral Equations. New York: Academic Press, 1998. 611 p.
- [86] Бігун Я. Й., Українець О. З. Математичне моделювання поширення епідемії із врахування екологічного фактору. Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика». 2025. Т. 47, № 2. С. 126–135.
- [87] Бігун Я. Й., Українець О. З. Математична модель впливу забруднення зовнішнього середовища на імунну відповідь організму людини. Буковинський математичний журнал. 2025. Т. 13, № 2. С. 114–124.
- [88] Bihun Y., Ukrainets O. Mathematical modelling of immune response to infectious diseases with ecological factor. International Conference IMCS-60

- : proceedings, Chisinau, Republic of Moldova, October 10–13, 2024 / Vladimir Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science, Moldova State University. Chisinau, 2024. P. 151–154.
- [89] Bihun Y., Ukrainets O. Mathematical modeling of the body's immune response to infectious disease with external factors. Modeling, Control and Information Technologies : proceedings of the VII International Scientific and Practical Conference, Rivne, Ukraine, November 7–9, 2024 / National University of Water and Environmental Engineering. Rivne, 2024. P. 223–224.
- [90] Bihun Y., Ukrainets O. Modelling of immune response with ecological factor. Applications of Mathematics in Biology and Medicine : XXX National Conference (International Edition), Wikno, Poland, September 16–20, 2025 / University of Warmia and Mazury; Institute of Applied Mathematics and Mechanics, University of Warsaw. Wikno, 2025. P. 7–8.
- [91] Бігун Я., Українець О. Математичне моделювання впливу забруднення довкілля на епідемічний процес. Modeling, Control and Information Technologies : proceedings of the International Scientific and Practical Conference, Rivne, Ukraine, 6-8 November / National University of Water and Environmental Engineering. Rivne, 2025. № 8. С. 278–279.
- [92] Bihun Y., Ukrainets O., Patratii M. Asymptotic stability of solutions to an immune-response model under the influence of an environmental factor. Ukraine Mathematics Conference At the End of the Year 2025 : proceedings, Kyiv, December 18–19, 2025 / Taras Shevchenko National University of Kyiv. Kyiv, 2025. P. 90.
- [93] Bihun Y., Ukrainets O. Mathematical modelling of the immune response to infectious diseases with the influence of environmental factors. Acta et Commentationes, Exact and Natural Sciences. 2024. Vol. 18, no. 2. P. 7-17.
- [94] Hartman P. Ordinary Differential Equations. New York : John Wiley & Sons, 1964. 612 p.

- [95] Driver R.D. Ordinary and Delay Differential Equations. New York : Springer, 1977. 505 p.
- [96] Bewley T.F. Existence of equilibria in economies with infinitely many commodities. Journal of Economic Theory. 1972. Vol. 4. P. 514–540.
- [97] Podczeck K., Yannelis N.C. Existence of Walrasian equilibria with discontinuous, non-ordered, interdependent preferences, without free disposal, and with an infinite-dimensional commodity space. Economic Theory. 2024. Vol. 78, no. 2. P. 389–401.
- [98] Popov M.M., Ukrainets O.Z. A maximal Riesz-Kantorovich theorem with applications to markets with an arbitrary commodity set. Mat. Studii. 2024. Vol. 62, no. 2. P. 199–210.
- [99] Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive Operators. Dordrecht : Springer, 2006. 376p.
- [100] Pliev M., Ramdane K. Order unbounded orthogonally additive operators in vector lattices. Mediterranean Journal of Mathematics. 2018. Vol. 15, no. 2. Art. 55. 20 p.
- [101] Mykhaylyuk V.M., Popov M.M. ε -shading operator on Riesz spaces and order continuity of orthogonally additive operators. Results in Mathematics. 2022. Vol. 77. Art. 209. P. 1–22.
- [102] Popov M. Horizontal Egorov property of Riesz spaces. Proceedings of the American Mathematical Society. 2021. Vol. 149, no. 1. P. 323–332.
- [103] Попов М.М., Українець О.З. Цілочисленні товарні вектори у моделі економіки Ерроу-Дебре. Буковинський математичний журнал. 2024. Т. 12, № 2. С. 182–189.
- [104] Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. Львів : СПД Чижиков, 2011. 600 с.
- [105] Mykhaylyuk V., Pliev M., Popov M. The lateral order on Riesz spaces and orthogonally additive operators. Positivity. 2021. Vol. 25, no. 2. P. 291–327.

- [106] Mykhaylyuk V., Pliev M., Popov M. The lateral order on Riesz spaces and orthogonally additive operators II. Positivity. 2024. Vol. 28, no. 8.
- [107] Birkhoff V.G. Lattice theory. 3rd ed. Providence, R.I. : American Mathematical Society, 1967. 418 p.
- [108] Pliev M., Ramdane K. Order unbounded orthogonally additive operators in vector lattices. Mediterranean Journal of Mathematics. 2018. Vol. 15, no. 2. Art. 55. 20 p.
- [109] Kalton N.J., Roberts J.W. A rigid subspace of L_0 . Indiana University Mathematics Journal. 1978. Vol. 27, no. 3. P. 353–381.
- [110] Fotiy O., Popov M., Ukrainets O. A characterization of F-spaces containing an isomorph of ℓ_0 . Carpathian Mathematical Publications. 2025. Vol. 17, no 1. P. 146–151.
- [111] Popov M. Banach lattices of orthogonally additive operators. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2022. Vol. 514, no. 1. Art. 126279. 26 p.
- [112] Українець О.З. Неперервні скалярні заряди на ℓ_0 із застосуванням до моделі економіки Ерроу-Дебре. Буковинський математичний журнал. 2025. Т. 13, № 1. С. 66–82.
- [113] Kamińska A., Krasikova I., Popov M. Projection lateral bands and lateral retracts. Carpathian Mathematical Publications. 2020. Vol. 12, no. 2. P. 333–339.
- [114] Маслюченко В.К. Лекції з теорії міри та інтеграла. Частина 2. Чернівці : ЧНУ, 2011. 175 с.
- [115] Vulikh B.Z. Introduction to the theory of partially ordered spaces. Groningen : Wolters-Noordhoff, 1967. 387 p.

ДОДАТКИ

Додаток А

Список публікацій здобувача за темою дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

Наукові праці у виданнях, включених до переліку наукових фахових видань України:

1. Бігун Я.Й., Українець О.З., Скутар І.Д. Усереднення в математичних моделях під дією багаточастотних збурень із запізненням. Міжнародний науково-технічний журнал «Проблеми керування та інформатики». 2024. Т. 69, № 1. С. 34–42. (*Внесок авторів: Я.Й. Бігуну належить постановка задачі та обговорення результатів; О.З. Українцю належить формулювання і доведення тверджень; І. Д. Скутару належить участь у формулюванні прикладу*).

2. Попов М.М., Українець О.З. Цілочисленні товарні вектори у моделі економіки Ерроу-Дебре. Буковинський математичний журнал. 2024. Т. 12, № 2. С. 182-189. (*Внесок авторів: М.М. Попову належить формулювання Твердження 1 і Твердження 2; О.З. Українцю належить формулювання і доведення Теорема 1*).

3. Українець О.З. Неперервні скалярні заряди на ℓ_0 із застосуванням до моделі економіки Ерроу-Дебре. Буковинський математичний журнал. 2025. Т. 13, № 1. С. 66–82.

4. Бігун Я. Й., Українець О. З. Математичне моделювання поширення епідемії із врахування екологічного фактору. Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика». 2025. Т. 47, № 2. С. 126–135. (*Внесок авторів: Я.Й. Бігуну належить постановка задачі і визначення схеми досліджень; О.З. Українцю належить обґрунтування, доведення теорем та комп'ютерне моделювання*).

5. Бігун Я. Й., Українець О. З. Математична модель впливу забруднення зовнішнього середовища на імунну відповідь організму людини. Буковинський математичний журнал. 2025. Т. 13, № 2. С. 114-124. *(Внесок авторів: Я.Й. Бігуну належить постановка задачі і обговорення результатів досліджень; О.З. Українцю належить формулювання та доведення теорем, комп'ютерне моделювання).*

Наукові праці у періодичних наукових виданнях, проіндексованих у наукометричній базі даних Scopus:

6. Fotiy O., Popov M., Ukrainets O. A characterization of F-spaces containing an isomorph of ℓ_0 . Carpathian Mathematical Publications. 2025. Vol. 17, no 1. P. 146. *(Внесок авторів: О.Г. Фотій належить твердження 1 і 2, а також приклад 1; М.М. Попову належить формулювання і доведення Теорему 1; О.З. Українцю належить участь у доведенні Теорему 1, формулювання прикладу 2, прикладу 3 та їх доведення).* (Scopus, Q1 – <https://www.scimagobjr.com/journalssearch.php?q=21100925710&tip=sid&clean=0>)

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Українець О. З. Усереднення в математичних моделях під дією багаточастотних збурень із запізненням. Міжнародна науково-практична конференція : тези доповідей, м. Софія, 31 січ. – 2 лют. 2024 р. / International Scientific Unity. М. Софія, 2024. С. 263–266.

2. Bihun Y., Ukrainets O. Mathematical modelling of immune response to infectious diseases with ecological factor. International Conference IMCS-60 : proceedings, Chisinau, Republic of Moldova, October 10–13, 2024 / Vladimir Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science, Moldova State University. Chisinau, 2024. P. 151–154. *(Внесок авторів: Я.Й. Бігуну належить постановка задачі і обговорення результатів досліджень, наслідок 2.1; О.З. Українцю належить формулювання та доведення теорем 1 та 2)*

3. Bihun Y., Ukrainets O. Mathematical modeling of the body's immune response to infectious disease with external factors. Modeling, Control and Information Technologies : proceedings of the VII International Scientific and Practical Conference, Rivne, Ukraine, November 7–9, 2024 / National University of Water and Environmental Engineering. Rivne, 2024. P. 223–224. (*Внесок авторів: Я.Й. Бігуну належить обговорення результатів досліджень та наслідок; О.З. Українцю належить формулювання та доведення теорем, числове моделювання результатів*)

4. Bihun Y., Ukrainets O. Modelling of immune response with ecological factor. Applications of Mathematics in Biology and Medicine : XXX National Conference (International Edition), Wikno, Poland, September 16–20, 2025 / University of Warmia and Mazury; Institute of Applied Mathematics and Mechanics, University of Warsaw. Wikno, 2025. P. 7–8. (*Внесок авторів: Я.Й. Бігуну належить участь у постановці задачі; О.З. Українцю належить побудова та дослідження математичної моделі*)

5. Бігун Я., Українець О. Математичне моделювання впливу забруднення довкілля на епідемічний процес. Modeling, Control and Information Technologies : proceedings of the International Scientific and Practical Conference, Rivne, Ukraine, 6-8 November / National University of Water and Environmental Engineering. Rivne, 2025. № 8. С. 278–279. (*Внесок авторів: Я.Й. Бігуну належить обговорення результатів досліджень; О.З. Українцю належить формулювання та доведення теореми, комп'ютерне моделювання*)

6. Bihun Y., Ukrainets O., Patratii M. Asymptotic stability of solutions to an immune-response model under the influence of an environmental factor. Ukraine Mathematics Conference At the End of the Year 2025 : proceedings, Kyiv, December 18–19, 2025 / Taras Shevchenko National University of Kyiv. Kyiv, 2025. P. 90. (*Внесок авторів: Я.Й. Бігуну та М.В. Патратій належать обговорення практичного застосування результатів досліджень; О.З. Українцю – побудова і дослідження математичної моделі*)

**Наукові праці, які додатково відображають наукові результати
дисертації:**

1. Popov M., Ukrainets O. A maximal Riesz-Kantorovich theorem with applications to markets with an arbitrary commodity set. Matematychni Studii. 2024. Vol 62, No 2. P. 199-210. (*Внесок авторів: М.М. Попову належить формулювання і доведення Теорем 1, 2; О.З. Українцю належить формулювання прикладів і участь у доведенні Теорему 3*).

2. Bihun Y., Ukrainets O. Mathematical modelling of the immune response to infectious diseases with the influence of environmental factors. Acta et Commentationes, Exact and Natural Sciences. 2024. Vol. 18, No. 2. P. 7-17. (*Внесок авторів: постановку задачі та обговорення результатів досліджень здійснив Я.Й. Бігун; О.З. Українець виконав формулювання і доведення теорем, а також комп'ютерне моделювання*).

Відомості про апробацію результатів дисертації:

1. VIII Міжнародна науково-практична конференція "Scientific research as a mechanism of effective human development"(31 січня – 2 лютого 2024 р., Софія, Болгарія), форма участі - дистанційна з публікацією тез.
2. Міжнародна конференція IMCS-60 (10–13 жовтня 2024 р., Кишинів, Молдова), форма участі - дистанційна з публікацією тез.
3. VII Міжнародна науково-практична конференція «Моделювання, керування та інформаційні технології» (7–9 листопада 2024 р., Рівне, Україна), форма участі - очна з публікацією тез.
4. XXX Національна конференція (міжнародне видання) "Applications of mathematics in biology and medicine"(16–20 вересня 2025 р., Вікно, Польща), форма участі - дистанційна з публікацією тез.
5. Міжнародна науково-практична конференція «Моделювання, керування та інформаційні технології» (6–8 листопада 2025 р., Рівне, Україна), форма участі - дистанційна з публікацією тез.
6. Українська математична конференція "At the end of the year 2025"(18–19 грудня 2025 р., Київ, Україна), форма участі - дистанційна з публікацією тез.

**Лістинг програм у середовищі Wolfram Mathematica, які були
розроблені в дисертаційному дослідженні**

*Лістинг 1. Програмний код для моделювання динаміки числового розв'язку
узагальненого рівняння Гатчінсона.*

```

Manipulate[
Module[
{kappas = {0.5, 1, 2}, sols},

sols = Table[
NDSolveValue[
{
e'[t] == r (1 - (e[t]/K)^\kappa) e[t],
e[0] == e0
},
e,
{t, 0, tmax},
Method -> {"StiffnessSwitching"}
],
{\kappa, kappas}
];

Plot[
Evaluate@Table[sols[[i]][t], {i, Length[kappas]}],
{t, 0, tmax},
PlotRange -> {0, All},
AxesLabel -> {"t", "E(t)"},
PlotLegends -> (Row[{"\kappa_{\kappa}=", #}] & /@ kappas),
ImageSize -> Large
]

],

{{r, 1, "r"}, 0.01, 5, Appearance -> "Labeled"},
{{K, 10, "K"}, 0.1, 50, Appearance -> "Labeled"},
{{e0, 1, "E(0)"}, 0.001, 50, Appearance -> "Labeled"},

```

```
{tmax, 20, "tmax"}, 1, 200, 1, Appearance -> "Labeled"}
]
```

Лістинг 2. Програмний код для моделювання методу усереднення для моделі типу Вольтерри-Лотки.

```
Manipulate[
Module[
{
phi, F,
ddeSol, uDDE, vDDE, aDDE,
uAVG, vAVG, aAVG
},

phi[t_?NumericQ] := (t + t^2)/\[CurlyEpsilon];
F[t_?NumericQ] := Cos[k*phi[t] + l*phi[t - \[Theta]]];

(* --- Початкова модель (DDE) --- *)
ddeSol =
Quiet @ Check[
NDSolveValue[
{
u'[t] == (\[Beta]1 - \[Gamma]1 v[t]) u[t] - \[Mu] a[t]
+ b1 F[t],
v'[t] == (-\[Beta]2 + \[Gamma]2 u[t]) v[t],
a'[t] == (\[Kappa] - a[t]) a[t] + b2 F[t],

u[t /; t <= 0] == u0,
v[t /; t <= 0] == v0,
a[t /; t <= 0] == a0
},
{u, v, a},
{t, -\[Theta], tmax},
MaxSteps -> Infinity,
AccuracyGoal -> 10,
PrecisionGoal -> 10,
MaxStepFraction -> 1/1000
],
$Failed
```

```

];

(* --- Усредненная модель (AVG) --- *)
{uAVG, vAVG, aAVG} =
  NDSolveValue[
    {
      ub'[t] == (\[Beta]1 - \[Gamma]1 vb[t]) ub[t] - \[Mu] ab
        [t],
      vb'[t] == (-\[Beta]2 + \[Gamma]2 ub[t]) vb[t],
      ab'[t] == (\[Kappa] - ab[t]) ab[t],

      ub[0] == u0,
      vb[0] == v0,
      ab[0] == a0
    },
    {ub, vb, ab},
    {t, 0, tmax},
    MaxSteps -> Infinity
  ];

If[
  ddeSol === $Failed,
  Style["Не удалось смоделировать для данного набора параметров",
    Red, 16],

  {uDDE, vDDE, aDDE} = ddeSol;

  Row[
    {
      Plot[
        {uAVG[t], vAVG[t]},
        {t, 0, tmax},
        PlotRange -> All,
        AxesLabel -> {"t", "u(avg), v(avg)"},
        PlotLegends -> {"u(avg)", "v(avg)"},
        ImageSize -> 800
      ],

      Spacer[20],

```

```

ParametricPlot[
  {
    {uDDE[t], vDDE[t]},
    {uAVG[t], vAVG[t]}
  },
  {t, 0, tmax},
  PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {"u", "v"},
  PlotLegends -> {"(u,v)⊔DDE", "(?,v?)⊔avg"},
  ImageSize -> 400,
  Epilog -> Module[
    {uStar, vStar, aStar},
    aStar = \[Kappa];
    uStar = \[Beta]2/\[Gamma]2;
    vStar = \[Beta]1/\[Gamma]1 - (\[Mu] aStar)/(\[Gamma]1 uStar);
    {Red, PointSize[0.02], Point[{uStar, vStar}], Black
    }
  ]
]
]
}
]
],

```

(* ===== Параметру ===== *)

```

{{\[Beta]1, 1}, 0.1, 3, Appearance -> "Labeled"},
{{\[Gamma]1, 1}, 0.1, 3, Appearance -> "Labeled"},
{{\[Beta]2, 1.5}, 0.1, 3, Appearance -> "Labeled"},
{{\[Gamma]2, 1}, 0.1, 3, Appearance -> "Labeled"},

```

Delimiter,

```

{{\[Mu], 0.1}, 0, 5, Appearance -> "Labeled"},
{{\[Kappa], 1}, 0.1, 3, Appearance -> "Labeled"},

```

Delimiter,

```

{{b1, 0.01}, 0, 0.2, Appearance -> "Labeled"},
{{b2, 0.01}, 0, 0.2, Appearance -> "Labeled"},

Delimiter,

{{\[Theta], 0.5}, 0.01, 2, Appearance -> "Labeled"},
{{\[CurlyEpsilon], 1}, 0.2, 3, Appearance -> "Labeled"},

Delimiter,

{{k, 1}, 1, 5, 1},
{{l, 1}, 1, 5, 1},

Delimiter,

{{u0, 1.2}, 0.1, 3},
{{v0, 0.8}, 0.1, 3},
{{a0, 0.6}, 0.1, 3},

{{tmax, 30}, 5, 60, 1},

TrackedSymbols :> {
  \[Beta]1, \[Gamma]1, \[Beta]2, \[Gamma]2,
  \[Mu], \[Kappa], b1, b2,
  \[Theta], \[CurlyEpsilon], k, l,
  u0, v0, a0, tmax
}
]

```

Лістинг 3. Програмний код для моделювання узагальненого рівняння Гатчінсона з різними значеннями параметра n .

```

r = 0.5;
EStar = 0.25;
delta = 1;
initCond = 0.5;

```

```

tmax = 50;

solutions = Table[
  NDSolve[
    {
      En'[t] == r*(1 - (En[t - delta]/EStar)^n)*En[t],
      En[t /; t <= 0] == initCond
    },
    En,
    {t, 0, tmax}
  ],
  {n, {1, 2, 3, 4, 5}}
];

plotStyles = Join[{Thick}, Table[Automatic, {4}]];

Plot[
  Evaluate[En[t] /. solutions],
  {t, 0, tmax},
  PlotLegends -> ("n⊥=" <> ToString[#] & /@ {1, 2, 3, 4, 5}),
  AxesLabel -> {"Time⊥t", "E(t)"},
  PlotRange -> All,
  PlotStyle -> plotStyles,
  ImageSize -> Large
]

```

Лістинг 4. Програмний код для моделювання динаміки SIR-моделі з екологічним фактором та різними значеннями параметрів.

```

Manipulate[
  Module[
    {\[Gamma], eqns, hist, vars, sol, R0, S2, I2, R2},

    \[Gamma][E_] := \[Gamma]0/(1 + \[Gamma]1 (E - K));

    (* History for t <= 0 *)
    hist = {
      s[t /; t <= 0] == s0,
      i[t /; t <= 0] == i0,

```

```

r[t /; t <= 0] == r0,
ecology[t /; t <= 0] == e0
};

(* Model equations (DDE) *)
eqns = {
  s'[t] ==
    b - \[Beta] s[t] i[t] + \[Alpha] i[t - \[Tau]] +
    \[Sigma] (ecology[t] - K) - \[Mu] s[t],

  i'[t] ==
    \[Beta] s[t] i[t] - \[Gamma][ecology[t]] i[t] - \[Mu] i[t],

  r'[t] ==
    \[Gamma][ecology[t]] i[t] - \[Alpha] i[t - \[Tau]] -
    \[Sigma] (ecology[t] - K) - \[Mu] r[t],

  ecology'[t] ==
    rEc (1 - ecology[t - \[CapitalDelta]]/K) ecology[t]
};

vars = {s, i, r, ecology};

sol = First @ NDSolve[
  Join[eqns, hist],
  vars,
  {t, 0, T}
];

(* Derived quantities *)
R0 = (b \[Beta])/(\[Mu] (\[Gamma]0 + \[Mu]));
S2 = (\[Gamma]0 + \[Mu])/\[Beta];
I2 = \[Beta]*b - (\[Mu]*(\[Gamma]0 + \[Mu])/\[Beta]) (\[Gamma]0
  + \[Mu] - \[Alpha]);
R2 = (\[Gamma]0 - \[Alpha]) I2/\[Mu];

Grid[
{
  {Style["Динаміка SIR", 14, Bold]},

```

```

{
  Plot[
    Evaluate[{s[t], i[t], r[t]} /. sol],
    {t, 0, T},
    PlotLegends -> Placed[{"Susceptible" (схильні)", "Infected" (інфіковані)",
      "Recovered" (одужали)"}, {0.85, 0.8}],
    Frame -> True,
    FrameLabel -> {"time" (час)", "population" (популяція)"},
    PlotRange -> All,
    ImageSize -> 520
  ]
},

{Style["Екологічний фактор E(t)", 14, Bold]},
{
  Plot[
    Evaluate[ecology[t] /. sol],
    {t, 0, T},
    PlotLegends -> {"Екологічний фактор"},
    Frame -> True,
    FrameLabel -> {"час", "E(t)"},
    PlotRange -> All,
    ImageSize -> 520
  ]
},

{Style["Базове репродуктивне число R0", 14, Bold]},
{Style[Row[{"R0 = ", NumberForm[R0, {5, 4}]}], 14]},

{Style["Умова  $r \backslash [CapitalDelta] < \backslash [Pi]/2$ ", 14, Bold]},
{Style[
  Row[{" $r \backslash [CapitalDelta] < \backslash [Pi]/2$  виконується: ",
    NumberForm[rEc* $\backslash [CapitalDelta] < \backslash [Pi]/2$ , {5, 4}]
  ]},
  14
]},

{Style["Умова  $\backslash [Mu] (\backslash [Gamma] 0 + \backslash [Mu]) < \backslash [Beta] b$ ", 14, Bold

```

```

    ]},
{Style[
  Row[{ "\[Mu](\[Gamma]0+\[Mu])<_[Beta]_b выполняется: ",
    NumberForm[\[Mu]*(\[Gamma]0 + \[Mu]) < \[Beta]*b, {5, 4}]
  ]},
  14
]},

{Style["Умова  $b_{-} \backslash [Epsilon] \backslash [Sigma]_{>0}$ ", 14, Bold]},
{Style[
  Row[{ "  $b_{-} \backslash [Epsilon] \backslash [Sigma]_{>0}$  выполняется: ",
    NumberForm[b - \[Sigma]*Max[e0 - K] > 0, {5, 4}]
  ]},
  14
]},

{Style["Умова  $\backslash [Alpha](1+\[Gamma]1 \backslash [Sigma])<_[Gamma]0$ ", 14,
  Bold]},
{Style[
  Row[{ "\[Alpha](1+\[Gamma]1 \backslash [Sigma])<_[Gamma]0 выполняется: ",
    NumberForm[\[Alpha]*(1 + \[Gamma]1*Max[e0 - K]) < \[Gamma]0, {5, 4}]
  ]},
  14
]},

{Style[" $S2, I2, R2$ ", 14, Bold]},
{Style[
  Row[{
    " $S2_{=}$ ", NumberForm[S2, {5, 4}],
    " $, I2_{=}$ ", NumberForm[I2, {5, 4}],
    " $, R2_{=}$ ", NumberForm[R2, {5, 4}]
  ]},
  14
]}
},
Spacings -> {2, 1}
]

```

],

(* Controls *)

{{T, 100, "горизонт_часу_T"}, 10, 500, 1, Appearance -> "Labeled"},

Delimiter,

{{\[Beta], 0.3, "передача_\[Beta]"}, 0, 2, Appearance -> "Labeled"},

{{\[Gamma]0, 0.08, "базове_одужання_\[Gamma]_0"}, 0, 3, Appearance -> "Labeled"},

{{\[Gamma]1, 0.5, "вплив_екології_\[Gamma]_1"}, 0, 5, Appearance -> "Labeled"},

{{\[Alpha], 0.05, "втрата_імунітету_\[Alpha]_(R->S, із_затримкою)"}, 0, 1, Appearance -> "Labeled"},

{{\[Sigma], 0.2, "вплив_екології_\[Sigma]_(S/R<->E)"}, 0, 1, Appearance -> "Labeled"},

{{b, 0.005, "народжуваність_b"}, 0, 1, Appearance -> "Labeled"},

{{\[Mu], 0.001, "природна_смертність_\[Mu]"}, 0, 1, Appearance -> "Labeled"},

Delimiter,

{{rEc, 1., "зростання_екології_r"}, 0, 3, Appearance -> "Labeled"},

{{K, 0.25, "місткість_середовища_K"}, 0.05, 2, Appearance -> "Labeled"},

{{\[CapitalDelta], 1, "затримка_екології_\[CapitalDelta]"}, 0, 20, 0.5, Appearance -> "Labeled"},

{{\[Tau], 1, "затримка_втрати_імунітету_\[Tau]"}, 0, 20, 0.5, Appearance -> "Labeled"},

Delimiter,

(* History values *)

{{s0, 0.99, "S(t<=0)"}, 0, 1, Appearance -> "Labeled"},

{{i0, 0.01, "I(t<=0)"}, 0, 1, Appearance -> "Labeled"},

{{r0, 0., "R(t<=0)"}, 0, 1, Appearance -> "Labeled"},

{{e0, 0.01, "E(t<=0)"}, 0, 1, Appearance -> "Labeled"},

```
TrackedSymbols :> True
]
```

Лістинг 5. Програмний код для моделювання динаміки імунної відповіді організму людини з екологічним фактором

```
Xi[m_, threshold_] := If[m > threshold, 1, (m - 1)/(threshold
- 1)];

initialV[t_] := 10^-6;
initialCn[t_] := 1;
initialF[t_] := 1;
initialM[t_] := 0;
initialEn[t_] := 0.5;

timeline := 30;

Manipulate[
Module[{eqns, sol, curves, labels, styles},

eqns = {
V'[t] == (\[Beta] - \[Gamma] F[t]) V[t],

Cn'[t] ==
\[Alpha] Xi[m[t], mthreshold] F[t - \[Tau]] V[t - \[Tau]] -
\[Mu]c (Cn[t] - Cp) - \[CurlyEpsilon]c En[t],

F'[t] == \[Rho] Cn[t] - (\[Mu]f + \[Eta] \[Gamma] V[t]) F[t],

m'[t] == \[Sigma] V[t] - \[Mu]m m[t] + \[CurlyEpsilon]m En[t
],

En'[t] == r (1 - (En[t - \[CapitalDelta]]/En1)^n) En[t],

V[t /; t <= 0] == initialV[t],
Cn[t /; t <= 0] == initialCn[t],
F[t /; t <= 0] == initialF[t],
m[t /; t <= 0] == initialM[t],
```

```

    En[t /; t <= 0] == initialEn[t]
};

sol = NDSolve[eqns, {V, Cn, F, m, En}, {t, 0, timeline}];

curves = {V[t], Cn[t], F[t], m[t], En[t]};
labels = {
    "V(t) - величина популяції антигена",
    "Cn(t) - величина популяції плазмоклітин",
    "F(t) - величина популяції антитіл",
    "m(t) - міра ураження органу-мішені",
    "En(t) - міра впливу екологічного фактору"
};

styles = {Red, Blue, Green, Orange, Purple};

Column[
{
    Column[
        MapThread[
            Plot[
                Evaluate[#1 /. sol],
                {t, 0, timeline},
                PlotRange -> All,
                PlotLabel -> #2,
                PlotLegends -> None,
                ImageSize -> 520,
                PlotStyle -> #3
            ] &,
            {curves, labels, styles}
        ],
        Spacings -> 1.2
    ],

    Column[
        {
            Style["Динамічні умови", 16, Bold],
            Dynamic @ Style[
                {
                    "r_n\[CapitalDelta] < \[Pi]/2:" <>

```

```

If[r*n*\[CapitalDelta] < Pi/2, "True", "False"],

"\[Alpha]\[Rho]>_\[Mu]c_\[Eta]_\[Gamma]:_" <>
If\[Alpha]*\[Rho] > \[Mu]c*\[Eta]*\[Gamma], "True", "
False"],

"\[Rho]\[Gamma]\[Mu]cCp<_\[Mu]c\[Mu]f\[Beta]_+_\[Rho]
_\[Gamma]\[CurlyEpsilon]cEn1:_" <>
If\[Rho]*\[Gamma]*\[Mu]cCp <
\[Mu]c*\[Mu]f*\[Beta] + \[Rho]*\[Gamma]*\[
CurlyEpsilon]c*En1,
"True", "False"],

"Cp_\[Mu]c>_\[CurlyEpsilon]cEn1:_" <>
If\[Mu]cCp > \[CurlyEpsilon]c*En1, "True", "False"],

"\[CurlyEpsilon]mEn1_\[LessEqual]_\[Mu]mthreshold:_"
<>
If\[CurlyEpsilon]m*En1 <= \[Mu]m*threshold, "True", "
False"]
},
14
]
},
Spacings -> 0.6
]
},
Spacings -> 1.5
]
],

{{\[Beta], 0.6, Style["розмноження_\[virus]_\[Beta]"), 13]}, 0,
10, 0.01},
{{\[Gamma], 0.2, Style["ймовірність_\[нейтралізації]_\[антигену]_\[Gamma]"), 13]}, 0, 10, 0.01},
{{\[Alpha], 0.9, Style["зіткнення_\[антиген-антитіло]_\[Alpha]"), 13]}, 0, 10, 0.1},

{{\[Mu]c, 0.5, Style["1/\[тривалість]_\[життя]_\[плазмоклітин]_\[Mu]c"),

```

```

13]], 0, 1, 0.05},
{{Cp, 1, Style["нормальний_рівень_плазмоклітин_(Cp)", 13]}, 0,
1, 0.05},
{{\[CurlyEpsilon]c, 10^-6, Style["вплив_екології_на_Cn_(\[CurlyEpsilon]c)", 13]}, 0, 1, 0.01},

{{\[Rho], 0.9, Style["продукція_антитіл_однією_плазмоклітиною_(\[Rho])", 13]}, 0, 1, 0.05},
{{\[Mu]f, 0.17, Style["розпад_антитіл_(\[Mu]f)", 13]}, 0, 1,
10^-9},
{{\[Eta], 0.8, Style["антитіл_на_1_антиген_(\[Eta])", 13]}, 0,
100, 0.5},

{{\[Sigma], 0.35, Style["коефіцієнт_ураження_органу_(\[Sigma])",
13]}, 0, 100, 1},
{{\[Mu]m, 0.4, Style["відновлення_органу:_1/період_(\[Mu]m)",
13]}, 0, 1, 0.05},
{{\[CurlyEpsilon]m, 0.01, Style["вплив_екології_на_ураження_(\[CurlyEpsilon]m)", 13]}, 0, 1, 0.01},

{{r, 0.5, Style["екологічне_зростання_r", 13]}, 0, 2, 0.1},
{{En1, 0.25, Style["норма_екології_(En1)", 13]}, 0, 1, 0.1},
{{n, 1, Style["показник_n", 13]}, 1, 5, 1},

{{\[Tau], 3, Style["затримка_формування_плазмоклітин_(\[Tau])",
13]}, 1, 10, 1},
{{\[CapitalDelta], 1, Style["екологічна_затримка_(\[CapitalDelta]
)"), 13]}, 1, 10, 1},

{{mthreshold, 0.5, Style["поріг_ураження_mthreshold", 13]}, 0,
1, 0.1},

TrackedSymbols :> True
]

```