

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ: означення, теореми та практика

Навчальний посібник



Чернівці
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича
2025

Друкується за ухвалою Вченої ради
факультету математики та інформатики
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича
(протокол № 2 від 1 жовтня 2025 р.)

Укладачі:

Звоздецький Тарас Іванович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного аналізу Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича;

Карлова Олена Олексіївна, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математичного аналізу Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича;

Михайлюк Володимир Васильович, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математичного аналізу Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича;

Онипа Денис Павлович, кандидат фізико-математичних наук, асистент кафедри математичного аналізу Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича;

Фотій Олена Георгіївна, кандидат фізико-математичних наук, асистент кафедри математичного аналізу Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

Рецензенти:

Маслюченко Олександр Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор Сілезького університету, м. Катовіце, Польща;

Івасюк Галина Петрівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного моделювання факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

М-34

Математичний аналіз: означення, теореми та практика /

укл.: Т. І. Звоздецький, О. О. Карлова, В. В. Михайлюк, Д. П. Онипа, О. Г. Фотій, Чернівці : Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 2025. 192 с.

Посібник містить завдання для практичних занять з основних розділів математичного аналізу. До кожної теми подано стислий виклад необхідних теоретичних відомостей. Може бути використаний як під час аудиторних занять, так і для самостійної роботи студентів з метою поглиблення теоретичних знань та набуття практичних навичок у галузі математичного аналізу.

Для студентів спеціальностей галузі "Інформаційні технології".

Зміст

Вступ	7
Розділ I. Числові послідовності і ряди	8
1.1. Метод математичної індукції	8
1.2. Формула бінома Ньютона	10
1.3. Обмежені числові множини та їх точні межі	12
1.4. Обчислення границь послідовностей	13
1.5. Ознаки існування границь послідовностей	15
1.6. Верхня і нижня границі послідовності	18
1.7. Сума числового ряду. Необхідна умова збіжності ряду. Критерій Коші	19
1.8. Ознаки збіжності додатних рядів	21
1.9. Ознака Лейбніца. Ознаки Абеля і Діріхле	25
1.10. Абсолютна і умовна збіжності	27
1.11. Нескінченні добутки	28
Розділ II. Границя і неперервність функції однієї змінної	30
2.1. Функції та їх властивості	30
2.2. Знаходження границь раціональних та ірраціональних виразів	33
2.3. Важливі границі, застосування еквівалентних до знаходження границь	38
2.4. Неперервні функції	42
2.5. Основні теореми про неперервні функції	44
Розділ III. Диференціальне числення функцій однієї змінної	46
3.1. Похідна функції та її знаходження	46
3.2. Геометричний та механічний зміст похідної	50
3.3. Диференціал функції та його застосування	53
3.4. Похідні та диференціали вищих порядків	55
3.5. Основні теореми диференціального числення і правила Лопітала	58
3.6. Застосування похідної до дослідження функцій на монотонність і екстремуми	61
Розділ IV. Функціональні і степеневі ряди	65
4.1. Рівномірна збіжність функціональних послідовностей	65
4.2. Рівномірна збіжність функціональних рядів	67
4.3. Властивості сум функціональних рядів	71
4.4. Область збіжності степеневих рядів	74

4.5. Формула Тейлора і розклад функцій у степеневі ряди	76
Розділ V. Невизначений інтеграл	80
5.1. Первісна, невизначений інтеграл, простіші методи інтегрування	80
5.2. Внесення під знак диференціала і заміна змінної у невизначеному інтегралі	83
5.3. Інтегрування частинами у невизначеному інтегралі	85
5.4. Інтегрування раціональних функцій	87
5.5. Інтегрування ірраціональних функцій	90
5.6. Інтегрування тригонометричних функцій	92
Розділ VI. Визначений інтеграл та його застосування	94
6.1. Формула Ньютона–Лейбніца	94
6.2. Заміна змінної та інтегрування частинами у визначеному інтегралі	98
6.3. Обчислення площ плоских фігур	100
6.4. Обчислення довжин дуг кривих	102
6.5. Обчислення об'ємів тіл і площ поверхонь обертання	104
Розділ VII. Невласні інтеграли та інтеграли Ейлера	107
7.1. Означення та обчислення невластних інтегралів	107
7.2. Збіжність невластних інтегралів від невід'ємних функцій	110
7.3. Абсолютна і умовна збіжність невластних інтегралів	113
7.4. Ейлерові інтеграли	115
Розділ VIII. Ряди Фур'є	119
8.1. Розклад функцій у ряди Фур'є на проміжках завдовжки 2π	119
8.2. Розклад функцій у ряди Фур'є на довільних проміжках	122
8.3. Розклад у ряди Фур'є лише за косинусами або лише за синусами	124
Розділ IX. Функції багатьох змінних	127
9.1. Простір $\mathbb{R}^m$ і поняття функції багатьох змінних	127
9.2. Границя і неперервність функції багатьох змінних	131
9.3. Частинні похідні і диференціали функцій багатьох змінних	134
9.4. Частинні похідні та диференціали вищих порядків. Формула Тейлора	139
9.5. Неявно задані функції	144
9.6. Екстремум функцій багатьох змінних	146

Розділ X. Інтегрування функцій багатьох змінних	149
10.1. Криволінійні інтеграли I роду	149
10.2. Криволінійні інтеграли II роду	156
10.3. Обчислення подвійних інтегралів	163
10.4. Формула Гріна та її застосування	168
10.5. Потрійні інтеграли	175
10.6. Поверхневі інтеграли I роду	180
10.7. Поверхневі інтеграли II роду	185
10.8. Формули Стокса і Гаусса–Остроградського	189
Список літератури	191

Вступ

Математичний аналіз є однією з фундаментальних дисциплін, що формують аналітичне та алгоритмічне мислення майбутніх фахівців у галузі інформаційних технологій. Його понятійний апарат і методи лежать в основі більшості сучасних обчислювальних процесів, алгоритмів оптимізації, чисельного моделювання та аналізу даних. Розуміння структури неперервних процесів, границь, похідних та інтегралів є необхідною передумовою для подальшого вивчення прикладних дисциплін — таких як комп'ютерна графіка, машинне навчання, цифрова обробка сигналів чи теорія керування.

Цей посібник містить добірку вправ і задач разом з основними теоретичними відомостями з математичного аналізу, підібраних з урахуванням специфіки підготовки студентів спеціальності “Комп'ютерні науки”, “Системний аналіз”, “Прикладна математика” та суміжних напрямів.

Видання може бути використане як для самостійної роботи студентів, так і під час аудиторних занять з метою поглиблення розуміння основ математичного аналізу та формування навичок аналітичного мислення.

Розділ І. Числові послідовності і ряди

1.1. Метод математичної індукції

Для того, щоб довести істинність тверджень T_n при $n \in \mathbb{N}$, достатньо:

- 1) перевірити істинність твердження T_1 (*база індукції*);
- 2) припустивши, що твердження T_n істинне для деякого натурального $n = k$ (*індуктивне припущення*), довести, що твердження T_n істинне і для наступного $n = k + 1$ (*індуктивний перехід*).

За допомогою методу математичної індукції довести, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ виконуються такі рівності:

1. $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;
2. $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$;
3. $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
4. $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$;
5. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$;
6. $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$;
7. $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;
8. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \dots + n(3n - 1) = n^2(n + 1)$;
9. $1^2 + 3^2 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$;
10. $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + (n - 1) \cdot n^2 = \frac{n(n^2 - 1)(3n + 2)}{12}$;
11. $(1 - \frac{1}{4}) \cdot (1 - \frac{1}{9}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{1}{(n+1)^2}) = \frac{n+2}{2n+2}$;
12. $(1 - \frac{4}{1}) \cdot (1 - \frac{4}{9}) \cdot (1 - \frac{4}{25}) \cdot \dots \cdot (1 - \frac{4}{(2n-1)^2}) = \frac{1+2n}{1-2n}$;
13. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$;
14. Довести нерівність Бернуллі:
 $(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n$,
де $x_1, x_2, \dots, x_n$ — числа одного знака, більші від -1 .
Довести нерівності:

15. $(1+x)^n \geq 1+nx$, де $x \geq -1$;
16. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$ при $n > 1$;
17. $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ при $n > 1$;
18. $\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < n$ при $n > 1$;
19. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$;
20. $2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2n)! > [(n+1)!]^n$ при $n > 1$;
21. $n^{n+1} > (n+1)^n$ при $n > 2$;
22. Довести, що для кожного натурального n вираз
 - а) $n(2n^2 - 3n + 1)$ націло ділиться на 6;
 - б) $(n^3 + 11n)$ націло ділиться на 6;
 - в) $n^3 + 3n^2 + 5n + 3$ націло ділиться на 3;
 - г) $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ націло ділиться на 19;
 - г) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ націло ділиться на 133;
 - д) $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ націло ділиться на 11;
 - е) $n^5 - n$ націло ділиться на 5;
 - є) $n^7 - n$ націло ділиться на 7;
 - ж) $4^n + 15n - 1$ націло ділиться на 9.

1.2. Формула бінома Ньютона

Для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $a, b \in \mathbb{R}$ має місце така рівність, яка називається *формулою бінома Ньютона*:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n,$$

де біноміальні коефіцієнти C_n^k обчислюються за формулою $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Біноміальні коефіцієнти мають такі властивості:

1) $C_n^0 = C_n^n = 1$ для довільного $n \in \mathbb{N}$;

2) $C_n^k = C_n^{n-k}$ для довільних $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$;

3) $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$ для довільних $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$.

За допомогою цих властивостей коефіцієнти бінома можна виписати у вигляді таблиці, яка називається *трикутником Паскаля*:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
 & & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 \\
 & 1 & & 9 & & 36 & & 84 & & 126 & & 126 & & 84 & & 36 & & 9 & & 1 \\
 1 & 10 & 45 & 120 & 210 & 252 & 210 & 120 & 45 & 10 & 1 & & & & & & & &
 \end{array}$$

1. Розв'язати рівняння:

a) $C_{x+2}^4 = x^2 - 1$; б) $C_x^{x-3} + C_x^{x-2} = 15(x-1)$;

$$\text{B) } \frac{1}{C_4^x} - \frac{1}{C_5^x} = \frac{1}{C_6^x}; \quad \text{r) } C_{x+1}^{x-1} + C_x^{x-2} = 9x + 10.$$

2. Написати формулу бінома Ньютона для степенів двочлена:

а) $(x + 1)^7$; б) $(a - b)^6$;

$$\text{B)} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}} \right)^5; \quad \text{Г)} \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + 2\sqrt{\frac{y}{x}} \right)^6.$$

3. Знайти:

- а) п'ятий член розкладу $(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^8$;
- б) сьомий член розкладу $(\sqrt{a} - \sqrt[3]{b})^{13}$;
- в) член розкладу $(x + \frac{1}{x})^7$ з x^3 ;
- г) член розкладу $(x^2 - 2\frac{1}{x})^9$ з x^3 ;
- г) член розкладу $(x^5 + 1)^{2010}$ з x^{2010} ;
- д) член розкладу $(\sqrt[3]{x^{-2}} - x)^7$ з x^2 ;
- е) член розкладу $(\sqrt{x} + \sqrt{2})^{18}$ з x^8 .

4. Знайти доданок, який не містить змінної x , у таких розкладах:

- а) $(x + \frac{1}{x})^8$; б) $(x - \frac{1}{x^2})^9$; в) $(2x + \frac{1}{\sqrt{x}})^{12}$;
- г) $(x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{2}})^{15}$; г) $(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[4]{x^3})^{17}$; д) $(2\sqrt[5]{x^4} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})^{19}$.

5. Довести тотожності:

- а) $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$; б) $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$;
- в) $\sum_{k=0}^n (-1)^k k C_n^k = 0$; г) $\sum_{k=1}^m C_{n-k}^{n-m} = C_n^{n-m+1}$;
- г) $\sum_{k=2}^n C_k^2 = C_{n+1}^3$, де $n \geq 2$; д) $\frac{1}{C_n^k} = \frac{n+1}{n+2} \left(\frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} \right)$.

1.3. Обмежені числові множини та їх точні межі

Число a називається *нижньою (верхньою) межею множини* $X \subseteq \mathbb{R}$, якщо для кожного $x \in X$ виконується нерівність $x \geq a$ ($x \leq a$). Множина $X \subseteq \mathbb{R}$, яка має хоча б одну нижню (верхню) межу, називається *обмеженою знизу (зверху)*. Обмежена знизу і зверху множина називається *обмеженою*.

Найбільша (найменша) з усіх нижніх (верхніх) меж множини X називається *точною нижньою (верхньою) межею множини* X і позначається $\inf X$ ($\sup X$).

Теорема. Число $\alpha \in \mathbb{R}$ є точною нижньою (верхньою) межею множини $X \subseteq \mathbb{R}$, тоді і тільки тоді, коли виконуються умови:

- 1) $x \geq \alpha$ ($x \leq \alpha$) для кожного $x \in X$;
- 2) для довільного $\gamma > \alpha$ ($\gamma < \alpha$) існує таке $x \in X$, що $x < \gamma$ ($x > \gamma$).

Якщо множина $X \subseteq \mathbb{R}$ не є обмеженою знизу (зверху), то вважають, що $\inf X = -\infty$ ($\sup X = +\infty$).

1. Довести, що множина $X \subseteq \mathbb{R}$ обмежена тоді і тільки тоді, коли існує $C > 0$, таке, що $|x| \leq C$ для кожного $x \in X$.
2. Встановити, чи є нижченаведені множини обмеженими зверху, обмеженими знизу, обмеженими:

- | | |
|--|---|
| а) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 5\}$; | б) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq x + 2\}$; |
| в) $\{x \in \mathbb{R} : x^3 + x < 1\}$; | г) $\{x \in \mathbb{R} : x^5 - x \geq 1\}$; |
| г) $\{x \in \mathbb{R} : \sin x \leq x\}$; | д) $\{x \in \mathbb{R} : \cos x \leq \sqrt{x}\}$; |
| е) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x = n\}$; | є) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = nx\}$. |

Знайти $\sup A$ та $\inf A$, де $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, якщо:

- | | |
|--|---|
| 3. $x_n = 1 - \frac{1}{n}$; | 4. $x_n = -1 + \frac{2}{n}$; |
| 5. $x_n = (-1)^n(1 + \frac{3}{n})$; | 6. $x_n = (-1)^n \frac{n}{n+2}$; |
| 7. $x_n = (-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$; | 8. $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$; |
| 9. $x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos(\frac{\pi n}{2})$; | 10. $x_n = 2 - \frac{n+1}{n} \sin(\frac{\pi n}{2})$; |
| 11. $x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos(\frac{2\pi n}{3})$; | 12. $x_n = \frac{n+2}{n} \sin(\frac{2\pi n}{3})$; |
| 13. $x_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(1 + \frac{2}{n})$; | 14. $x_n = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \cdot \frac{n+3}{n}$; |
| 15. $x_n = (-1)^n \sqrt{n}$; | 16. $x_n = -n(2 + (-1)^n)$; |
| 17. $x_n = n^{(-1)^n}$; | 18. $x_n = 1 + n \sin(\frac{\pi n}{2})$; |
| 19. $x_n = \sin n$; | 20. $x_n = \operatorname{tg} n$. |

1.4. Обчислення границь послідовностей

Число a називається *границею послідовності* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ (позначається $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий номер N , що для кожного $n \geq N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$. Кажуть також, що $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ збігається до a , і пишуть $x_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$.

Вважають, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ чи $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$), якщо для довільного $E > 0$ існує такий номер N , що для кожного $n \geq N$ виконується нерівність $|x_n| > E$ ($x_n > E$ чи $x_n < -E$).

Послідовність називається *збіжною*, якщо вона має скінченну границю, і *розбіжною*, якщо вона не має скінченної границі.

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, то послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ називається *нескінченно малою*. Якщо ж $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, то послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ називається *нескінченно великою*.

Теорема 1 (арифметичні дії над збіжними послідовностями). *Нехай $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ і $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ – збіжні послідовності. Тоді:*

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$ при $y_n \neq 0$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2 (граничний перехід під знаком нерівності). *Нехай $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ і $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ – збіжні послідовності, причому існує номер $n_0 \in \mathbb{N}$, такий, що $x_n \leq y_n$ для кожного $n \geq n_0$. Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.*

Послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ називається *обмеженою*, якщо множина $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ обмежена.

Теорема 3. *Кожна збіжна послідовність обмежена.*

Теорема 4. *Добуток нескінченно малої послідовності, на обмежену є нескінченно малою послідовністю.*

1. Використовуючи означення границі послідовності довести такі рівності:

- а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+1}{n^2+2n} = 2$;
г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-1}{n^2+2} = 3$; р) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1}-2^n}{5^n+1} = 5$; д) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n-2^n}{3^n+2^n} = 1$.

2. Використовуючи означення границі послідовності, довести розбіжність послідовності $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, якщо:

- а) $x_n = (-1)^n$; б) $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$;
в) $x_n = \sin \frac{\pi n}{2}$; г) $x_n = \cos \frac{\pi n}{3}$.

3. Довести, що послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ($x_n \neq 0$) є нескінченно великою тоді і тільки тоді, коли $(\frac{1}{x_n})_{n=1}^{\infty}$ є нескінченно малою.

Обчислити такі границі:

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 5}{1 - 6n^2};$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 - 77}{18 + n - 4n^2 + 5n^3 + 3n^4 + n^5};$
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 - 5n^2 - 4n + 1}{(n+3)(3-2n^2)};$
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2(10-5n^2)}{2n^4 - 13n^2 + 100};$
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 - 5n + 3}{9999n^2 - n^3};$
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15 - 5n + 6n^2 - 4n^3}{n^4 + 8n^2 + 180};$
11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0,001n^2 - 5n + 3}{1000 + n};$
12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + 4n + n^3}{5 + 4n + n^2};$
13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n}}{2n + \sqrt{n^2 + 3n}};$
14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 8} + n}{\sqrt{4n^2 + 8}};$
15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{10n^2 - n^3 + 3n}}{\sqrt[3]{8n^3 - 99 - n}};$
16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{27n^3 + 1} - n}{\sqrt[3]{64n^3 + n} + n};$
17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 3^n}{4^n + 3^n};$
18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 2^n}{5^n - (-4)^n};$
19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 5^n}{5^{n+1} - 3^{n+2}};$
20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n + 7^{n+1}}{7^{n+2} - 6^{n+1}};$
21. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n + 1)(3^n - 2)}{5^n - 6^{n+1}};$
22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12^{n+1} - 11^n}{(3^n + 2^{n+1})(1 - 4^n)};$
23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6^{n+1} + 4^n)(2^n - 10)}{(3^n - 2^n)(2^{2n} + 10)};$
24. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(8^{n+1} - 7^n)(18^n - 17^{n+1})}{(12^{n+1} - 10^n)^2};$
25. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n}{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n};$
26. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}};$
27. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n});$
28. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n-1});$
29. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 - n});$
30. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n);$
31. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 3n} - \sqrt[3]{n^3 - 1});$
32. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + n} - \sqrt[3]{n});$
33. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + n^2} - \sqrt[3]{n^3 - 1});$
34. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + n^2} - \sqrt{n^2 + n});$
35. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n};$
36. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n^2 - n)}{(1,02)^n};$
37. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \cos(n^2 + 1)}{n + 2};$
38. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{n^2 - \sin(n^3 + n)};$
39. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \cos(n!)}{n + 6};$
40. $\lim_{n \rightarrow \infty} ((-1)^n \frac{\sqrt{n^3 + 1}}{(n+2)^2});$
41. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctg \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n+2}};$
42. $\lim_{n \rightarrow \infty} ((-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 3n}}{\sqrt[5]{n^7 + 18}}).$

1.5. Ознаки існування границь послідовностей

Теорема 1 (про затиснену послідовність). Нехай $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ і $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ – такі послідовності, що $y_n \leq x_n \leq z_n$ для кожного номера $n \geq n_0$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ – збіжні, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$. Тоді послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ також збіжна і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Теорема 2 (ознака збіжності монотонної послідовності). Монотонна послідовність збіжна тоді і тільки тоді, коли вона обмежена.

Послідовність називається *фундаментальною*, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N \in \mathbb{N}$, що для всіх $m, n \geq N$ виконується нерівність $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Теорема 3 (критерій Коші збіжності числової послідовності). Послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ збіжна тоді і тільки тоді, коли вона фундаментальна.

Послідовність $((1 + \frac{1}{n})^n)_{n=1}^{\infty}$ є збіжною, а її границя називається числом *Ейлера* і позначається через e , тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718281828459045 \dots$$

1. Використовуючи теорему про збіжність монотонної послідовності, довести такі рівності:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} &= 0; & \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3^n} &= 0; & \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} &= 0; \\ \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} &= 0, \text{ де } k \in \mathbb{N} \text{ і } a > 1; & \text{р) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} &= 0; \\ \text{д) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} &= 0. \end{aligned}$$

2. Використовуючи теорему про затиснену послідовність, довести такі рівності:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} &= 1, \text{ де } a > 0; & \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} &= 1; \\ \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 n}{n} &= 0, \text{ де } a > 1; & \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{\sqrt[n]{n}} &= 0, \text{ де } a > 1. \end{aligned}$$

Використовуючи теорему про затиснену послідовність, обчислити такі границі:

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2n}; \quad 4. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n+5};$$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5n^2 + 7}$;
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4n^2 - n + 1}$;
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$;
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^{n+1} + 4^n}$;
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{8^n - 7^n}$;
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{12^n - 11^n}$;
11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{100n^3 + 5^n}$;
12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2010n^{2010} + (1, 01)^n}$;
13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{n}\right)^n$;
14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{\sqrt{n}}\right)^n$;
15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$;
16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(1+a)(1+2a)\dots(1+na)}}, \text{ де } a > 0$;
17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$;
18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+2n} \right)$;
19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n^2}} \right)$;
20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^4+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^4+n^2}} \right)$;
21. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n} \right)$;
22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{3}{\sqrt{n^4+2}} + \dots + \frac{2n-1}{\sqrt{n^4+n}} \right)$;
23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{\sqrt[3]{n^9+1}} + \frac{2^2}{\sqrt[3]{n^9+2}} + \dots + \frac{(2n)^2}{\sqrt[3]{n^9+2n}} \right)$;
24. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lg(10^n+1)} + \frac{1}{\lg(10^n+2)} + \dots + \frac{1}{\lg(10^n+3n)} \right)$;
25. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^n+1} + \frac{2}{2^n+2} + \frac{2^2}{2^n+3} + \dots + \frac{2^{n-1}}{2^n+n} \right)$.

Використовуючи теорему про збіжність монотонної послідовності, обчислити $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо:

26. $x_1 = \frac{1}{2}, x_{n+1} = \frac{x_n+1}{2}$ при $n \in \mathbb{N}$;
27. $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{2x_n+3}{8}$ при $n \in \mathbb{N}$;
28. $x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{x_n}{2+x_n}$ при $n \in \mathbb{N}$;
29. $x_1 = 3, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})$ при $n \in \mathbb{N}$;
30. $x_1 = 2, x_{n+1} = \frac{2+x_n^2}{2x_n}$ при $n \in \mathbb{N}$;
31. $x_1 = \frac{1}{4}, x_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{x_n^2}{2}$ при $n \in \mathbb{N}$.

Використовуючи теорему про збіжність монотонної послідовності, довести збіжність послідовності $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, якщо:

$$32. x_n = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \dots + \frac{1}{2^n+1};$$

$$33. x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2};$$

$$34. x_n = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{4}) \dots (1 - \frac{1}{2^n});$$

$$35. x_n = (1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{4}) \dots (1 + \frac{1}{2^n}).$$

Використовуючи критерій Коші, дослідити на збіжність послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, якщо:

$$36. x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n};$$

$$37. x_n = \frac{\cos 1^2}{3} + \frac{\cos 2^2}{3^2} + \dots + \frac{\cos n^2}{3^n};$$

$$38. x_n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots + a_n q^n,$$

де $|a_n| < M$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і $|q| < 1$;

$$39. x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos n!}{n \cdot (n+1)};$$

$$40. x_n = \frac{\sin 1!}{1!} + \frac{\sin 2!}{2!} + \dots + \frac{\sin n!}{n!};$$

$$41. x_n = \frac{\arctg 1}{1^2} + \frac{\arctg 2}{2^2} + \dots + \frac{\arctg n}{n^2};$$

$$42. x_n = \frac{\text{arcctg } 1^2}{1^3} + \frac{\text{arcctg } 2^2}{2^3} + \dots + \frac{\text{arcctg } n^2}{n^3};$$

$$43. x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n};$$

$$44. x_n = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)};$$

$$45. x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n};$$

$$46. x_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

1.6. Верхня і нижня границі послідовності

Число $a \in \mathbb{R}$ ($a = +\infty$ або $a = -\infty$) називається *частковою границею послідовності* $(x_n)_{n=1}^\infty$, якщо a є границею деякої підпослідовності послідовності $(x_n)_{n=1}^\infty$.

Теорема 1. *Нехай $(x_n)_{n=1}^\infty$ – така числова послідовність, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, де a – скінченне або нескінченне. Тоді $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ для довільної підпослідовності $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ послідовності $(x_n)_{n=1}^\infty$.*

Теорема 2 (Больцано-Вейєрштрасса). *Довільна обмежена числова послідовність має хоча б одну скінченну часткову границю.*

Найменша часткова границя (скінченна або нескінченна) послідовності $(x_n)_{n=1}^\infty$ називається *нижньою границею послідовності* $(x_n)_{n=1}^\infty$ і позначається через $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$. Найбільша часткова границя (скінченна або нескінченна) послідовності $(x_n)_{n=1}^\infty$ називається *верхньою границею послідовності* $(x_n)_{n=1}^\infty$ і позначається через $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Теорема 3. *Нехай $(x_n)_{n=1}^\infty$ – довільна числова послідовність. Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ тоді і тільки тоді, коли $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, де $a \in \mathbb{R}$ або $a = +\infty$ або $a = -\infty$.*

Знайти верхню і нижню границі послідовності $(x_n)_{n=1}^\infty$, якщо:

1. $x_n = 1 - \frac{1}{n}$;
2. $x_n = (-1)^n(2 + \frac{3}{n})$;
3. $x_n = (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n+1}$;
4. $x_n = (-1)^n \cdot \frac{n^2+n}{3-n^2}$;
5. $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$;
6. $x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{\pi n}{2}$;
7. $x_n = \frac{n^2+1}{100n-n^2+1} \sin \frac{\pi n}{2}$;
8. $x_n = (-1)^n + \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$;
9. $x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2\pi n}{3}$;
10. $x_n = \frac{2n}{n+1}(-1)^n + (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}$;
11. $x_n = \frac{n}{n+1} \sin \frac{2\pi n}{3}$;
12. $x_n = n(-1)^n$;
13. $x_n = n(-1)^n$;
14. $x_n = 1 + n \sin \frac{\pi n}{3}$;
15. $x_n = \frac{n^2}{1+n} \cos \frac{\pi n}{3}$;
16. $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n(-1)^n + \sin \frac{\pi n}{4}$;
17. $x_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{\pi n}{4}$;
18. $x_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}$;
19. $x_n = \cos^n \frac{2\pi n}{3}$;
20. $x_n = \operatorname{tg}^n \frac{2\pi n}{3}$.

1.7. Сума числового ряду. Необхідна умова збіжності ряду. Критерій Коші

Розглянемо числову послідовність $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Числовим рядом або просто рядом називається нескінченна сума

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (6.1)$$

Позначимо

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1, \\ S_2 &= a_1 + a_2, \\ &\dots\dots\dots \\ S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n. \end{aligned}$$

Тоді S_n називається n -ою частинною сумою ряду (6.1), а a_n – загальним членом ряду (6.1).

Для $n \in \mathbb{N}$ вираз $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ називається n -им залишком ряду (6.1). Зауважимо, що $S = S_n + r_n$.

Числовий ряд (6.1) називається збіжним, якщо існує скінченна границя S послідовності $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ його частинних сум, при цьому S називається сумою ряду (6.1). Якщо границі послідовності $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ не існує або вона нескінченна, то ряд називається розбіжним.

Теорема 1 (критерій Коші). Числовий ряд (6.1) збіжний тоді і тільки тоді, коли для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $N \in \mathbb{N}$, що для всіх $n \geq N$ і $p \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Теорема 2 (необхідна умова збіжності). Якщо ряд (6.1) збіжний, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Властивості збіжних рядів.

Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжні ряди і $c \in \mathbb{R}$. Тоді

1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ збіжний і $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ збіжний і $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
3. $\lim_{m \rightarrow \infty} r_m = 0$, де r_m – m -ий залишок ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Довести збіжність рядів і знайти їх суми:

1. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \dots;$
2. $\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n}\right) + \dots;$
3. $\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} + \dots;$
4. $\frac{1}{20} + \frac{9}{40} + \dots + \frac{5^n - 4^n}{20^n} + \dots;$
5. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots;$
6. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots;$
7. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} + \dots;$
8. $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \dots;$
9. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots;$
10. $\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \dots;$

Користуючись необхідною умовою збіжності, довести розбіжність рядів:

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1};$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 1}{1 - 6n^2};$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-2}{n+2}\right)^n;$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}.$

За допомогою критерію Коші довести збіжність рядів:

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n \cdot 10^n};$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n};$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n!)}{3^n};$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha - \cos(n+1)\alpha}{n}.$

1.8. Ознаки збіжності додатних рядів

Числовий ряд (6.1) називається *додатним*, якщо $a_n \geq 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Розглянемо ще один ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n. \quad (6.2)$$

Теорема 1 (ознака порівняння у формі нерівностей). Нехай $m \in \mathbb{N}$ таке, що $0 \leq a_n \leq b_n$ для всіх $n \geq m$. Тоді

- (i) якщо ряд (6.2) збіжний, то ряд (6.1) збіжний;
- (ii) якщо ряд (6.1) розбіжний, то ряд (6.2) розбіжний.

Теорема 2 (ознака порівняння у граничній формі). Нехай $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ і $m \in \mathbb{N}$ таке, що $a_n \geq 0$ і $b_n \geq 0$ для всіх $n \geq m$. Тоді

- (i) якщо $0 \leq L < +\infty$ і ряд (6.2) збіжний, то ряд (6.1) збіжний;
- (ii) якщо $0 < L \leq +\infty$ і ряд (6.1) збіжний, то ряд (6.2) збіжний.

Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ строго додатний, тобто $a_n > 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Число $C_n = \sqrt[n]{a_n}$ називається *варіантою Коші*.

Теорема 3 (ознака Коші у формі нерівності). Якщо існує такий номер N , що для всіх $n \geq N$ виконується нерівність $C_n \leq q$, де $q < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний. Якщо ж існує такий

номер N , що $C_n \geq 1$ для всіх $n \geq N$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний.

Теорема 4 (ознака Коші у граничній формі). Нехай $C = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$.

(i) Якщо $C < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний.

(ii) Якщо $C > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний.

(iii) Якщо $C = 1$, то про збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ нічого сказати не можна.

Число $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ називається *варіантою Даламбера*.

Теорема 5 (ознака Даламбера у формі нерівності). Якщо існує такий номер N , що для всіх $n \geq N$ виконується нерівність $D_n \leq q$, де $q < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний. Якщо ж існує такий

номер N , що $D_n \geq 1$ для всіх $n \geq N$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний.

Теорема 6 (ознака Даламбера у граничній формі). Нехай $D = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n$.

(i) Якщо $D < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний.

(ii) Якщо $D > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний.

(iii) Якщо $D = 1$, то про збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ нічого сказати не можна.

Число $R_n = n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$ називається *варіантою Раабе*.

Теорема 7 (ознака Раабе у формі нерівності). Якщо існує такий номер N , що для всіх $n \geq N$ виконується нерівність $R_n \geq r > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний. Якщо ж існує такий номер

N , що $R_n \leq 1$ для всіх $n \geq N$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний.

Теорема 8 (ознака Раабе у граничній формі). Нехай $R = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n$.

(i) Якщо $R > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний.

(ii) Якщо $R < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбіжний.

(iii) Якщо $R = 1$, то про збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ нічого сказати не можна.

За допомогою ознак порівняння дослідити на збіжність ряди:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 5};$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)};$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{4n+3};$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)};$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^2;$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n}};$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)};$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)};$$

$$\begin{array}{ll}
9. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}); & 10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}); \\
11. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}; & 12. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}; \\
13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \sin n}{\sqrt{n^5 + 4} + n^3 + 15}; & 14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + \cos(n!) \cdot (1 + n + n^2)^2}{(n+4)^7}; \\
15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-n}}{2n^3 + 5}; & 16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sqrt[3]{n^3 - n + 3}}{3^{n+1}(n^5 + 1)^3}; \\
17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3} + 5^{n+2}}{8^{n+4} + 25^{2n-3}}; & 18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^5}}.
\end{array}$$

За допомогою ознак Коші чи Даламбера дослідити на збіжність ряди:

$$\begin{array}{ll}
19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}; & 20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}; \\
21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}; & 22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \\
23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}; & 24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}; \\
25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}; & 26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}; \\
27. \sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}; & 28. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{3^n}; \\
29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{4^n \cdot n!}; & 30. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^3.
\end{array}$$

$$31. \frac{1000}{1} + \frac{1000 \cdot 1001}{1 \cdot 3} + \frac{1000 \cdot 1001 \cdot 1002}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots;$$

$$32. \frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \dots; \quad 33. \frac{2}{1} + \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{1 \cdot 5 \cdot 9} + \dots;$$

$$34. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}) \dots (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2});$$

$$35. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{7^n};$$

$$36. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n};$$

$$37. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2 + \frac{1}{n})^n};$$

$$38. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)};$$

$$39. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n};$$

$$40. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n + 3^n};$$

$$41. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} \cdot 3^n};$$

$$42. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}.$$

За допомогою ознаки Раабе дослідити на збіжність ряди:

$$43. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}};$$

$$44. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1) \dots (p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q};$$

$$45. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^p \cdot \frac{1}{n^q}.$$

1.9. Ознака Лейбніца. Ознаки Абеля і Діріхле

Ряд вигляду

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n \quad (6.3)$$

називається *знакозмінним*.

Теорема 1 (ознака Лейбніца). *Нехай*

1) *послідовність* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *монотонна;*

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Тоді ряд (6.3) збіжний.

Дослідити на збіжність знакозмінні ряди:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{2n-1}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^2}{(2n-1)^3}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{3n^2+2}$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\ln(n+1)}$;
7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$;
8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{n^3}{2^n}$;
9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2^{n^2}}{n!}$;
10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n - \ln n}$;
11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2 + (-1)^n}{n}$;
12. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n-1)/2} \cdot \frac{1}{2^n}$;
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{4} \cdot \frac{\ln^4 n}{n}$;
14. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n$;
15. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sqrt{n}}{n+100}$;
16. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}$;
17. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sin^2 n}{n}$;
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + k^2})$;

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n};$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}.$$

Розглянемо ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n. \quad (6.4)$$

Теорема 2 (ознака Діріхле). Нехай

1) послідовність $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ монотонна;

2) $\lim_{n=1}^{\infty} a_n = 0$;

3) послідовність $(\sum_{k=1}^n b_k)_{n=1}^{\infty}$ обмежена.

Тоді ряд (6.4) збіжний.

Теорема 3 (ознака Абеля). Нехай

1) послідовність $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ монотонна;

2) послідовність $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ обмежена;

3) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжний.

Тоді ряд (6.4) збіжний.

Використовуючи ознаки Абеля і Діріхле, дослідити на збіжність ряди:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n};$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot \sqrt{n}}{n+2};$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n};$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n};$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n}};$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n+1}};$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \cdot \arctg n}{\sqrt{n} + \sqrt[4]{n}};$$

$$8. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sin(n+1)}{\sqrt[3]{n^2-1}} \cdot \frac{2 \ln n}{1 + \ln^2 n}.$$

1.10. Абсолютна і умовна збіжності

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *абсолютно збіжним*, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ збіжний.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *умовно збіжним*, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ розбіжний, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний.

Дослідити на абсолютну і умовну збіжності числові ряди:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^5};$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^{2011}};$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3 + 5n - 2};$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 + 4\sqrt{n} + 1};$
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2};$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^3};$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2 + 3n}};$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n + 4}};$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^{100}}{2^n};$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^{90}}{(2n)!};$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}};$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right);$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{(n+1)^{\frac{100}{\sqrt{n}}}};$
14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \sqrt{n}};$
15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n - (-1)^n)^3};$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n \sin^{2n} \alpha}{n};$
17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{4}}{n^2 + \sin \frac{\pi n}{4}};$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{3}}{\ln n}.$

1.11. Нескінченні добутки

Нехай $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ — деяка числова послідовність. Вираз

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n \cdot \dots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

називається *нескінченним добутком*.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо n -ий *частинний добуток*

$$P_n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n.$$

Якщо існує скінченна границя $P \neq 0$ послідовності $(P_n)_{n=1}^{\infty}$, то добуток $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ називається *збіжним*. Якщо ж такої границі не існує, або вона нескінченна чи дорівнює нулю, то добуток називається *розбіжним*. Число P називається *значенням добутку*.

Теорема 1 (необхідна умова добутку). *Якщо добуток $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ збіжний, то $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$.*

Теорема 2. *Нескінченний добуток $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$, $p_n > 0$, збіжний тоді і тільки тоді, коли збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$.*

Довести рівності:

1. $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2};$
2. $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2}{3};$
3. $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{3};$
4. $\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right) = 2.$
5. $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi};$
6. $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\alpha}{2^n} = \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$

Довести збіжність добутків та знайти їх значення:

7. $\prod_{n=3}^{\infty} \frac{n^2 - 4}{n^2 - 1};$
8. $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{n(n+2)}\right];$
9. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)};$
10. $\prod_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{(-1)^n}{n}}.$

Дослідити на збіжність добутки:

$$11. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3 + 1}{n^3 + 5}; \quad 12. \prod_{n=2}^{\infty} \frac{1 + n^7}{4n^7 + n - 5};$$

$$13. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}; \quad 14. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)};$$

$$15. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^p}\right); \quad 16. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right);$$

$$17. \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}\right)^p; \quad 18. \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}};$$

$$19. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}; \quad 20. \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}};$$

$$21. \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{n}; \quad 22. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right) e^{-\frac{5}{n}}.$$

23. Нехай добутки $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ і $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ збіжні. Довести, що добутки

$\prod_{n=1}^{\infty} p_n^2$, $\prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n$ і $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n}$ збіжні. Чи є збіжним добуток $\prod_{n=1}^{\infty} (p_n + q_n)$?

Розділ II. Границя і неперервність функції однієї змінної

2.1. Функції та їх властивості

Функцією f , що діє з множини X в множину Y (позначається $f : X \rightarrow Y$ або $y = f(x)$), називається певне правило, згідно з яким кожному елементу x з множини X ставиться у відповідність єдиний цілком визначений елемент y з множини Y , який називається значенням функції f у точці x і позначається $f(x)$. Множина X називається областю визначення (або областю існування) функції f і позначається D_f . Множина $\{f(x) : x \in X\}$ називається множиною значень функції f і позначається E_f або $f(X)$.

Композицією (або суперпозицією) $g \circ f$ функцій $g : Y \rightarrow Z$ і $f : X \rightarrow Y$ називається функція $h : X \rightarrow Z$, яка визначається формулою: $h(x) = g(f(x))$, тобто $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Нехай $f : X \rightarrow Y$ – така функція, що для кожного $y \in E_f$ існує єдине $x \in X$ таке, що $y = f(x)$. Тоді це правило визначає деяку функцію $g : E_f \rightarrow X$, яка називається оберненою функцією до функції f і позначається через f^{-1} . Отже, $f^{-1}(y) = x$ тоді і тільки тоді, коли $y = f(x)$.

Функція $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, де $X \subseteq \mathbb{R}$, називається монотонно зростаючою (строго зростаючою), якщо для довільних $x_1, x_2 \in X$ з нерівності $x_1 < x_2$ випливає нерівність $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) < f(x_2)$). Функція $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, де $X \subseteq \mathbb{R}$, називається монотонно спадною (строго спадною), якщо для довільних $x_1, x_2 \in X$ з нерівності $x_1 < x_2$ випливає нерівність $f(x_1) \geq f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Функція $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, де $X \subseteq \mathbb{R}$, називається парною (непарною), якщо область визначення X функції f симетрична відносно початку координат, тобто $x \in X$ тоді і тільки тоді, коли $-x \in X$, і для довільного $x \in X$ виконується рівність $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

Нехай $X \subseteq \mathbb{R}$ і $T \neq 0$. Функція $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ називається періодичною з періодом T або T -періодичною, якщо область визначення X функції f є інваріантною відносно зсуву на T одиниць вліво і вправо, тобто для довільного $x \in \mathbb{R}$ точки x , $x + T$ і $x - T$ або одночасно належать множині X , або одночасно не належать множині X , і $f(x + T) = f(x)$ для довільного $x \in X$.

Знайти області визначення таких функцій:

$$1. y = \frac{x^2}{1+x};$$

$$2. y = \sqrt{3x - x^2};$$

$$3. y = (x - 2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$$

$$4. y = \lg(x^2 - 4);$$

$$5. y = \sqrt{\sin \sqrt{x}};$$

$$6. y = \lg(x - 2) + \lg(x + 2);$$

7. $y = \sqrt{\cos x^2}$; 8. $y = \lg(\sin \frac{\pi}{x})$;
 9. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin(\pi x)}$; 10. $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$;
 11. $y = \arccos(2 \sin x)$; 12. $y = \lg(\cos(\lg x))$;
 13. $y = \sqrt{x \sin^2(\pi x)}$; 14. $y = \operatorname{ctg}(\pi x) + \arccos(2^x)$;
 15. $y = \log_2(\log_3(\log_4 x))$; 16. $y = \arcsin(1 - x) + \lg(\lg x)$;
 17. $y = \sqrt{\lg(\operatorname{tg} x)}$; 18. $y = \sqrt{\sin(2x)} + \sqrt{\sin(3x)}$.

Знайти область визначення і множину значень таких функцій:

19. $y = \sqrt{2 + x - x^2}$; 20. $y = \lg(1 - 2 \cos x)$;
 21. $y = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$; 22. $y = \arcsin(\lg \frac{x}{10})$.
 23. Функція $y = \operatorname{sgn} x$ визначається так: $\operatorname{sgn} x = 1$, якщо $x > 0$,
 $\operatorname{sgn} x = -1$, якщо $x < 0$, і $\operatorname{sgn} 0 = 0$. Побудувати графік функції
 $y = \operatorname{sgn} x$. Довести, що $|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$.
 24. Функція $y = [x]$ (цїла частина числа x) визначається так:
 $[x] = n$, якщо $n \in \mathbb{Z}$ і $x \in [n, n + 1)$. Іншими словами, цїла
 частина числа x – це найбільше цїле число, що не перевищує
 x . Побудувати графік функції $y = [x]$.
 25. Функція $y = \{x\}$ (дробова частина числа x) визначається так:
 $\{x\} = x - [x]$. Побудувати графік функції $y = \{x\}$.

Знайти обернену функцію $x = f^{-1}(y)$ до функції $y = f(x)$, якщо:

26. $f(x) = 2x + 3$ і $D_f = \mathbb{R}$;
 27. $f(x) = x^2$ і $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$;
 28. $f(x) = x^2$ і $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$;
 29. $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ і $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\}$;
 30. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ і $D_f = [-1, 0]$;
 31. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ і $D_f = [0, 1]$;
 32. $f(x) = \operatorname{sh} x$, де $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ і $D_f = \mathbb{R}$;
 33. $f(x) = \operatorname{th} x$, де $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ і $D_f = \mathbb{R}$;

$$34. f(x) = \begin{cases} x, & x < 1; \\ x^2, & 1 \leq x \leq 4; \\ 2^x, & x > 4. \end{cases}$$

35. Довести, що нижченаведені функції строго зростаючі на відповідних проміжках:

$$\text{а) } f(x) = x^2 \text{ на } [0, +\infty); \quad \text{б) } f(x) = \sin x \text{ на } [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}];$$

$$\text{в) } f(x) = \operatorname{tg} x \text{ на } (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}); \quad \text{г) } f(x) = x + \sin x \text{ на } \mathbb{R}.$$

36. Довести, що нижченаведені функції строго спадні на відповідних проміжках:

$$\text{а) } f(x) = x^2 \text{ на } (-\infty, 0]; \quad \text{б) } f(x) = \cos x \text{ на } [0, \pi];$$

$$\text{в) } f(x) = \operatorname{ctg} x \text{ на } (0, \pi); \quad \text{г) } f(x) = 2^{-x} \text{ на } \mathbb{R}.$$

37. Дослідити на монотонність такі функції:

$$\text{а) } f(x) = ax + b; \quad \text{б) } f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ де } a \neq 0;$$

$$\text{в) } f(x) = x^3; \quad \text{г) } f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ де } c \neq 0;$$

$$\text{г) } f(x) = a^x, \text{ де } a > 0; \quad \text{д) } f(x) = \log_a x, \text{ де } a > 0 \text{ і } a \neq 1.$$

38. Встановити, які з нижченаведених функцій парні, а які непарні:

$$\text{а) } f(x) = 3x - x^3; \quad \text{б) } f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2};$$

$$\text{в) } f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}; \quad \text{д) } f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2});$$

$$\text{г) } f(x) = \operatorname{sh} x; \quad \text{г) } f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x);$$

$$\text{е) } f(x) = \operatorname{ch} x; \quad \text{е) } f(x) = (2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x.$$

39. Довести, що довільну функцію, визначену на симетричній відносно початку координат множині $X \subseteq \mathbb{R}$, можна в єдиний спосіб подати у вигляді суми парної і непарної функцій.

40. Встановити, які з нижченаведених функцій періодичні, і знайти їхні найменші додатні періоди:

$$\text{а) } f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x);$$

$$\text{б) } f(x) = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 \operatorname{tg} \frac{x}{3}; \quad \text{в) } f(x) = \sin^2 x;$$

$$\text{г) } f(x) = \sin x^2; \quad \text{г) } f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x};$$

$$\text{д) } f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}; \quad \text{е) } f(x) = \sin x + \sin(\sqrt{2}x).$$

2.2. Знаходження границь раціональних та ірраціональних виразів

Нехай $a \in \mathbb{R}$ і $\varepsilon > 0$. Інтервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ називається ε -околом точки $a \in \mathbb{R}$. Множини $(-\infty, -E) \cup (E, +\infty)$, $(-\infty, -E)$ і $(E, +\infty)$, де $E > 0$, називаються E -околами точок ∞ , $-\infty$ і $+\infty$ відповідно. Околом точки $a \in \mathbb{R}$ ($a = \infty, \pm\infty$) називається множина, яка містить деякий ε -окіл (E -окіл) точки a в $\mathbb{R}$.

Точка a (скінченна або нескінченна) називається *граничною точкою множини* $A \subseteq \mathbb{R}$ або *точкою накопичення множини* A , якщо для довільного околу U точки a в $\mathbb{R}$ множина $A \cap U$ нескінченна.

Означення *границі функції* мовою " $\varepsilon - \delta$ ": число $b \in \mathbb{R}$ називається *границею функції* $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ при $x \rightarrow a$ (позначається $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$), де $X \subseteq \mathbb{R}$, і a – гранична точка множини X , якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для довільного $x \in X$ з нерівності $|x - a| < \delta$ випливає нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Нехай $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty, +\infty\}$, причому a – гранична точка області визначення X функції f .

Означення *границі функції мовою послідовностей*: $b = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, якщо для довільної послідовності $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ аргументів $x_n \in X$, яка прямує до a , відповідна послідовність $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ значень функції $f(x_n)$ прямує до b .

Теорема 1. *Нехай $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, де $X \subseteq \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, причому a – гранична точка множини X . Тоді наступні твердження еквівалентні:*

- 1) b є границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow a$ на мові " $\varepsilon - \delta$ ";
- 2) b є границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow a$ на мові послідовностей.

Точка $a \in \mathbb{R}$ називається *точкою лівостороннього (правостороннього) накопичення множини* $A \subseteq \mathbb{R}$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ множина $A \cap (a - \varepsilon, a)$ ($A \cap (a, a + \varepsilon)$) непорожня.

Число $b \in \mathbb{R}$ називається *границею функції* $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ при x *прямує до a зліва (справа)*, де $X \subseteq \mathbb{R}$, a – точка лівостороннього (правостороннього) накопичення множини X і $b \in \mathbb{R}$, тобто $b = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ ($b = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для довільного $x \in X$ з нерівності $a - \delta < x < a$ ($a < x < a + \delta$) випливає нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Теорема 2. *Нехай $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, де $X \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ – точка лівостороннього і правостороннього накопичення області визначення X функції f і $b \in \mathbb{R}$. Тоді $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ тоді і тільки тоді, коли*

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b, \text{ причому } b = f(a), \text{ якщо } a \in X.$$

Теорема. *Нехай a – гранична точка перетину $D_f \cap D_g$ областей визначення D_f і D_g функцій f і g відповідно, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ і*

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$. Тоді:

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = b \pm c$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$, якщо $c \neq 0$.

1. Довести, що точка $a \in \mathbb{R}$ є граничною точкою множини $A \subseteq \mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли a є точкою лівостороннього або правостороннього накопичення множини A .
2. Довести, що точка $a = \infty$ є граничною точкою множини $A \subseteq \mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли $-\infty$ або $+\infty$ є граничною точкою множини A .
3. Нехай $A \subseteq \mathbb{R}$ і послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ граничних точок x_n множини A збігається до деякої точки $a \in \mathbb{R}$. Довести, що точка a є граничною точкою множини A .
4. Використовуючи означення границі функції мовою " $\varepsilon - \delta$ " довести, що:

- а) $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$; б) $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x} = 3$; в) $\lim_{x \rightarrow -8} \sqrt[3]{x} = -2$;
- г) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$; р) $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos x = -1$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} 2^x = 1$.

5. Нехай $b \in \mathbb{R}$. Сформулювати мовою " $\varepsilon - \Delta$ " такі твердження:

- а) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$; б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$; в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$.

6. Нехай $a \in \mathbb{R}$. Сформулювати мовою " $E - \delta$ " такі твердження:

- а) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$; б) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$;
- в) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$; г) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$;
- р) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$; д) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty$;
- е) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$; є) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$;
- ж) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$.

7. Сформулювати мовою "E - Δ" такі твердження:

- а) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$;
 в) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$; г) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$;
 ґ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; д) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$;
 е) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$; є) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$;
 ж) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

8. Використовуючи означення мовою "E - δ", "ε - Δ" чи "E - Δ" відповідно, довести такі рівності:

- а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$; б) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$;
 в) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x = 0$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x} = \infty$;
 ґ) $\lim_{x \rightarrow +0} \ln x = -\infty$; д) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty$.

9. Використовуючи означення границі функції мовою послідовностей, довести, що таких границь не існує:

- а) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{\pi}{x}$;
 в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(\pi x)$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cos x$.

10. Використовуючи односторонні границі, довести, що таких границь не існує:

- а) $\lim_{x \rightarrow 2} [x]$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} \frac{1}{x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$;
 ґ) $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{x}}$; р) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}$.

Знайти нижченаведені границі раціональних виразів:

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{100-3x^2}{x+2010-x^2}$; 12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5+1}{99x^3-2x-2x^5}$;
 13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4+2x^3+4x+1}{1-x^6}$; 14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{13+2x-5x^2-x^3}{28+4x^4}$;
 15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6+2x^3+1}{44+x^4}$; 16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x^5-x^7}{1+5x^3-4x^6}$;
 17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\dots+b_m}$, де $a_0, b_0 \neq 0$;

18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5};$
19. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x^3-3)(x^5-5)}{x^9-9};$
20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x+1)^{10}(3x-5)^{20}}{(1-18x^3)^{10}};$
21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x-2)^{30}}{(2x+1)^{50}};$
22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)-1}{x};$
23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2-x)(3+2x)-6}{x};$
24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x};$
25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)(2+2x)(3+x)-6}{x};$
26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5};$
27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2-x)^4+16(2x-1)}{2x^2+x^7};$
28. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2};$
29. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1};$
30. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6};$
31. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15};$
32. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+5x+4}{x^2-1};$
33. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-7x-18}{x^2-x-6};$
34. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{x^2+7x+12};$
35. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^4-5x+4};$
36. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+3x^2-x-3}{x^3+27};$
37. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3};$
38. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3};$
39. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16};$
40. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1};$
41. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-4x^2+5x-2};$
42. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+3x+4}{x^3+4x^2+5x+2};$
43. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4-18x^2+81}{x^3-5x^2+3x+9};$
44. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4-16}{x^4+2x^3-3x^2-4x+4};$
45. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3+7x^2+8x-16}{x^4-32x^2+256};$
46. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}};$
47. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2+x-6)^{30}}{(x^3+5x^2+3x-9)^{15}};$
48. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+x^2+\dots+x^n-n}{x-1};$
49. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1};$
50. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n-1}{x^m-1}, \text{ де } m, n \in \mathbb{N};$
51. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}, \text{ де } n \in \mathbb{N}.$

Знайти нижченаведені границі ірраціональних виразів:

52. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}};$
53. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+\sqrt[3]{x^2+\sqrt[3]{x^2}}}}{\sqrt[3]{2x^2+5}};$
54. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt[3]{x+\sqrt[4]{x}}}}{\sqrt{2x+1}};$
55. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{14+15x^4}}{\sqrt[3]{3x^2+\sqrt[4]{4x^3+\sqrt[5]{5x^4}}}};$

56. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x};$
57. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x};$
58. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2};$
59. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3-x}-2}{\sqrt{5-4x}-3};$
60. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x}-2}{x};$
61. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2};$
62. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}};$
63. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt[3]{x-1}-1};$
64. $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}};$
65. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt[3]{4x-7}+3}{\sqrt{4-x}-3};$
66. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt{x}-2};$
67. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}, \text{ где } a > 0;$
68. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9};$
69. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3x+2}{\sqrt{1-3x}-\sqrt{3-x}};$
70. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8};$
71. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-27}{\sqrt[3]{x-11}+2};$
72. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}-1}{\sqrt[3]{3x+5}-\sqrt[3]{5x+3}};$
73. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{5+4x}+\sqrt[3]{4+5x}}{\sqrt[3]{7-x}-2};$
74. $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4};$
75. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}};$
76. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2};$
77. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x});$
78. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x+x});$
79. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1});$
80. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}).$

2.3. Важливі границі, застосування еквівалентних до знаходження границь

Мають місце такі рівності, які називаються *важливими границями*:

- | | |
|--|---|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$ | 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2};$ |
| 3) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e;$ | |
| 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$ | 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \text{ де } a > 0;$ |
| 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$ | 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$ |

Функції $f(x)$ і $g(x)$ називаються *еквівалентними при $x \rightarrow a$* (позначається $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow a$), якщо $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

При $x \rightarrow 0$ мають місце такі еквівалентності:

$$x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim \operatorname{tg} x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim (e^x - 1) \sim \\ \sim \frac{a^x - 1}{\ln a} \sim \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha} \quad \text{і} \quad (1 - \cos x) \sim \frac{1}{2}x^2.$$

Теорема. Нехай $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow a$, $h(x)$ – довільна функція. Тоді $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)h(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (g(x)h(x))$, причому ці дві границі існують або не існують одночасно.

За допомогою важливих границь обчислити:

- | | |
|---|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x};$ | 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(7x)};$ |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}, \text{ де } a, b \neq 0;$ | 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x};$ |
| 5. $\lim_{x \rightarrow 0} (x \operatorname{ctg}(3x));$ | 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x};$ |
| 7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2};$ | 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x)}{1 - \cos(4x)};$ |
| 9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{\sin x};$ | 10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(3x) - \cos x}{x^2};$ |
| 11. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a};$ | 12. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a};$ |
| 13. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a}{x - a};$ | 14. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} a}{x - a};$ |

15. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1};$
16. $\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \frac{2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1}{2 \cos^2 x - \cos x - 1};$
17. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2 \cos x};$
18. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(2x)}{\sin(3x)};$
19. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(nx)}{\sin(mx)}, \text{ где } n, m \in \mathbb{N};$
20. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(3x)}{\cos x};$
21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2 \sin(a+x) + \sin a}{x^2};$
22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) \cdot \sin(a+2x) - \sin^2 a}{x};$
23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin^2 x} - 1}{\cos x - 1};$
24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3};$
25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x^2};$
26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\operatorname{tg}(2x)(\sqrt{1 + \sin(3x)} - 1)};$
27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x};$
28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}};$
29. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}};$
30. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{x}};$
31. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x};$
32. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 x)^{\frac{1}{x^2}};$
33. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + 2x^2)^{\frac{1}{x^2}};$
34. $\lim_{x \rightarrow -2} (1 - 3x)^{\frac{4}{x^2}};$
35. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{3x};$
36. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{x^2};$
37. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}};$
38. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(2x))^{\operatorname{ctg}^2 x};$
39. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}};$
40. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}};$
41. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin(\pi x))^{\operatorname{ctg}(\pi x)};$
42. $\lim_{x \rightarrow 2} (\cos(\pi x))^{\frac{1}{x-2}};$
43. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}, \text{ где } a \neq \pi n, n \in \mathbb{Z};$
44. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos(2x)}\right)^{\frac{1}{x^2}};$
45. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - x))^{\operatorname{ctg} x};$
46. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + x))^{\frac{1}{2x}};$
47. $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}}, \text{ где } x \neq 0;$
48. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{3x^2}};$
49. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{x};$
50. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\ln(1-4x)};$
51. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \operatorname{tg}^2 x)}{\ln(1 + 5x^2)};$
52. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 3\sqrt{x})}{\ln(1 + \sin \sqrt{x})};$
53. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\operatorname{tg} x^2};$
54. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos(2x)}{\ln \cos(3x)};$

55. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(5x))}{\ln^2(1-2x)};$
56. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-\operatorname{tg}^2(7x))}{\ln(\cos(3x))};$
57. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)};$
58. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{6^x})}{\ln(1-\frac{1}{5^x})};$
59. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a}, \text{ де } a > 0;$
60. $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg x - 1}{x - 10};$
61. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) + \ln(a-x) - 2 \ln a}{x^2}, \text{ де } a > 0;$
62. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x)^2 - 1}{x};$
63. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x)^3 - 1}{x};$
64. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x};$
65. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg}(2x)} - 1}{\ln(1 + \sin 3x)};$
66. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\operatorname{tg} x} - 1}{\ln(1 - 4x)};$
67. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1 + \sqrt{7x})}{5^{\sin(5x)} - 1};$
68. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\ln \cos(4x)};$
69. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(5x))}{e^{\operatorname{tg}^2(3x)} - 1};$
70. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x};$
71. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2};$
72. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{3x}}{\sin(5x) - \sin(3x)};$
73. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin(\alpha x) - \sin(\beta x)};$
74. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - 4}{x - 2};$
75. $\lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b}, \text{ де } a > 0;$
76. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n, \text{ де } a, b > 0;$
77. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}, \text{ де } a, b, c > 0;$
78. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} \right)^{\frac{1}{x}}, \text{ де } a, b, c > 0;$
79. $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}};$
80. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - \sin x)^{\frac{1}{x}};$
81. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{2}} - 1}{x};$
82. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-2x)^{\frac{1}{3}} - 1}{x};$
83. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\sqrt{2x})^{\frac{1}{4}} - 1}{\ln(1+\sqrt{x})};$
84. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\sqrt[3]{2x})^{-\frac{1}{3}} - 1}{\operatorname{tg} \sqrt[3]{x}};$
85. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\sqrt{x})^\alpha - 1}{\sqrt{\sin x}};$
86. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x^2} - 1}{\ln(1+\arcsin^2 x)};$
87. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-\operatorname{arctg} x)}{\sqrt[3]{1-\operatorname{tg}^2 x} - 1};$
88. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\frac{1}{5}} - 1 \right) \sin \frac{1}{x};$
89. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^\alpha - 1 \right) \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{x};$
90. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}, \text{ де } a > 0;$

$$91. \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}, \text{ де } a > 0;$$

$$92. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a}, \text{ де } a > 0.$$

Використовуючи важливі границі або переходячи до еквівалентних функцій, обчислити такі границі:

$$93. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + \sqrt{1+x^2})}{\ln(1+x(e^x-1))};$$

$$94. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{e^{\arctg^2 x} - 1};$$

$$95. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3};$$

$$96. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(xe^x) - \sin(xe^{-x})}{x^2};$$

$$97. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3};$$

$$98. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(xe^x) - \sin(xe^{-x})}{x^2};$$

$$99. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})};$$

$$100. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})};$$

$$101. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \arcsin(3x))(3^{\sin x^2} - 1)}{(e^{\tg x} - 1) \ln(\cos(2x))};$$

$$102. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin(4x))(4^{\tg^2 x} - 1)}{(e^{\sin(3x)} - 1) \ln(\cos(7x))};$$

$$103. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{\arctg^2(3x)} - 1}{((1 + \sin x)^{\frac{1}{3}} - 1) \ln^2(1 + \sqrt{6x})};$$

$$104. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \arctg \sqrt{x})^{\frac{1}{5}} - 1}{\ln(1 + \sqrt[3]{\sin x})(e^{\sqrt[5]{\arcsin x}} - 1)};$$

$$105. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^{\sqrt{x}} - 1) \tg(2\sqrt{x} - 1)}{\ln(\cos \sqrt[3]{5x}) \ln(\cos \sqrt[6]{2x})};$$

$$106. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\arcsin^2(2x)} - 1}{((1 + \tg x)^{\frac{1}{2}} - 1) \ln^2(1 - \sqrt{3x})};$$

$$107. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^{3x} - 1) \ln(\cos \sqrt{x})}{\arcsin(\sqrt{1 + 3x^2} - 1)};$$

$$108. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(e^{2x} - 1))}{\ln(1 + \arcsin(e^{x^2} - 1))};$$

$$109. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \ln^2(1 + \sqrt{3x})} - 1}{\sin^2(e^{\tg \sqrt{x}} - 1)};$$

$$110. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{3x^2} - 1) \ln(1 - \sin^3 \sqrt[3]{x})}{\arctg^3(\ln(\cos \sqrt{x}))};$$

$$111. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2 \arcsin \sqrt{x}} - 1) \ln(1 - \tg^2 \sqrt[4]{\sin x^3})}{\sqrt{\cos(2x)} - 1};$$

$$112. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{1+x}{1-x})}{\arctg(1+x) - \arctg(1-x)};$$

$$113. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(a+x) - \arctg a}{x};$$

$$114. \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \arctg \frac{x}{x+1} \right);$$

$$115. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right).$$

2.4. Неперервні функції

Нехай $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ і $x_0 \in X$. Функція f називається *неперервною в точці* x_0 , якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для довільного $x \in X$ з нерівності $|x - x_0| < \delta$ випливає нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Мовою околів це означення має такий вигляд: функція f неперервна в точці x_0 , якщо для довільного околу V точки $f(x_0)$ в $\mathbb{R}$ існує окіл U точки x_0 в $\mathbb{R}$, такий, що $f(x) \in V$ для всіх $x \in U \cap X$. Кажуть також, що точка x_0 є *точкою неперервності функції* f . Якщо, крім того, x_0 є граничною точкою області визначення функції f , то f неперервна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функція $y = f(x)$ називається *неперервною на множині* $A \subseteq D_f$, якщо вона неперервна в кожній точці множини A . Функції, неперервні на всій своїй області визначення, називаються *неперервними*.

Якщо точка x_0 є граничною точкою області визначення функції $y = f(x)$ і функція f не є неперервною в точці x_0 , то f називається *розривною в точці* x_0 , а точка x_0 — *точкою розриву функції* f .

Точка розриву x_0 функції $y = f(x)$ називається *точкою розриву першого роду*, якщо існують скінченні границі $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ і $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$. Різниця $h_f(x_0) = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ називається *стрибком функції* f в точці x_0 . Якщо $h_f(x_0) = 0$, тобто $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$, то точка розриву x_0 функції f називається *точкою усувного розриву*.

Якщо хоча б одна з границь $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ і $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ не існує або нескінченна, то точка розриву x_0 функції $y = f(x)$ називається *точкою розриву другого роду*. Зокрема, у випадку, коли хоча б одна з границь нескінченна, точку розриву називають також *точкою нескінченного розриву*.

Теорема 1. Нехай $X \subseteq \mathbb{R}$ і функції $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ та $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ неперервні в точці $x_0 \in X$. Тоді функції $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ і $\frac{f(x)}{g(x)}$, якщо $g(x_0) \neq 0$, також неперервні в точці x_0 .

Теорема 2. Нехай $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, функція $f : X \rightarrow Y$ неперервна в точці $x_0 \in X$ і функція $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна в точці $y_0 = f(x_0)$. Тоді функція $h = g \circ f$ також неперервна в точці x_0 .

1. Нехай x_0 — ізольована точка області визначення функції $y = f(x)$, тобто $x_0 \in D_f$ і x_0 не є граничною точкою множини D_f . Довести, що f неперервна в точці x_0 .
2. За допомогою "ε — δ"-міркувань довести неперервність таких функцій:

$$\begin{array}{lll}
 \text{а) } y = ax + b; & \text{б) } y = x^2; & \text{в) } y = x^3; \\
 \text{г) } y = \frac{1}{x}; & \text{г) } y = \sqrt{x}; & \text{д) } y = \sqrt[3]{x}; \\
 \text{е) } y = \sin x; & \text{е) } y = \cos x; & \text{ж) } y = \arctg x.
 \end{array}$$

Дослідити на неперервність, визначити характер точок розриву (якщо вони є) і зобразити графіки таких функцій:

$$\begin{array}{ll}
 3. f(x) = |x|; & 4. f(x) = -|x - 1|; \\
 5. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2; \\ 3, & x = 2; \end{cases} & 6. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x+1}, & x \neq -1; \\ 0, & x = -1; \end{cases} \\
 7. f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0; \\ 1-x, & x < 0; \end{cases} & 8. f(x) = \begin{cases} x-3, & x > 1; \\ 2-x^2, & x \leq 1; \end{cases} \\
 9. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2}, & x \neq -1; \\ 0, & x = -1; \end{cases} & 10. f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x-3)^2}, & x \neq 3; \\ 3, & x = 3; \end{cases} \\
 11. f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0; \end{cases} & 12. f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases} \\
 13. f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0; \end{cases} & 14. f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ -1, & x = 0; \end{cases}
 \end{array}$$

Визначити точки розриву нижченаведених функцій і дослідити характер цих точок:

$$\begin{array}{ll}
 15. f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}; & 16. f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-3x+2}; \\
 17. f(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}}; & 18. f(x) = \frac{x}{\sin x}; \\
 19. f(x) = \sqrt{\frac{1-\cos \frac{\pi x}{2}}{4-x^2}}; & 20. f(x) = \frac{\cos \frac{\pi}{x}}{\cos \frac{\pi}{x}}; \\
 21. f(x) = \operatorname{sgn}(\sin \frac{\pi}{x}); & 22. f(x) = \operatorname{sgn}(\cos \frac{1}{x}).
 \end{array}$$

2.5. Основні теореми про неперервні функції

Перша теорема Больцано–Коші. *Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на $[a, b]$ і $f(a)f(b) < 0$. Тоді існує таке $c \in (a, b)$, що $f(c) = 0$.*

Друга теорема Больцано–Коші. *Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на деякому проміжку X , $a, b \in X$, $a < b$, $f(a) = A$ і $f(b) = B$. Тоді для довільного числа C , яке знаходиться між A та B , існує таке $c \in (a, b)$, що $f(c) = C$.*

Теорема. *Нехай функція $y = f(x)$ визначена, строго зростає (спадає) і неперервна на деякому проміжку X . Тоді на проміжку $Y = f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ існує обернена функція $x = f^{-1}(y)$, яка є строго зростаючою (спадною) і неперервною.*

Нехай $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ і $A \subseteq X$. Функція називається обмеженою на множині A , якщо існують числа $m, M \in \mathbb{R}$ такі, що $m \leq f(x) \leq M$ для кожного $x \in A$. Функції, обмежені на всій своїй області визначення, називаються обмеженими. Кажуть, що функція f має найбільше (найменше) значення на множині A , якщо існує таке $x_0 \in A$, що для всіх $x \in A$ виконується нерівність

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)).$$

Перша теорема Вейерштрасса. *Кожна неперервна на відрізьку функція обмежена на цьому відрізьку.*

Друга теорема Вейерштрасса. *Кожна неперервна на відрізьку функція має на цьому відрізьку найбільше і найменше значення.*

1. Довести, що функція $f(x) = x^3 - 3x + 1$ має хоча б один нуль на відрізьку $[0, 1]$.
2. Довести, що рівняння $x^5 + 3\cos^2 x = \sin x$ має хоча б один розв'язок.
3. Довести, що кожен многочлен непарного степеня має хоча б один дійсний корінь.
4. Знайти множину значень функції $f(x) = \arcsin(\lg \frac{x}{10})$.
5. Знайти множину значень функції $f(x) = \frac{2|x|}{1+x^2}$.
6. Скільки існує неперервних функцій $y = f(x)$, визначених на $\mathbb{R}$, які задовольняють умову $y^2 = x^2$?
7. Скільки існує неперервних функцій $y = f(x)$, визначених на $[-1, 1]$, які задовольняють умову $x^2 + y^2 = 1$?

8. Неперервна на відрізку $[a, b]$ функція має рівно n нулів: $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Довести, що на кожному інтервалі (x_k, x_{k+1}) , $k = 1, 2, \dots, n-1$, функція f зберігає свій знак.
9. Нехай неперервна функція $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ така, що $f(f(x)) = x$ для кожного $x \in \mathbb{R}$. Довести, що існує таке $c \in \mathbb{R}$, що $f(c) = c$.
10. Нехай функція $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ зростає на відрізку $[a, b]$ і $f([a, b]) = \{f(x) : x \in [a, b]\} = [f(a), f(b)]$. Довести, що функція f неперервна на $[a, b]$.
11. Довести, що функція $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ на довільному відрізку $[0, a]$, де $a > 0$, набуває всіх значень між $f(0)$ і $f(a)$, але функція f не є неперервною на $[0, a]$.
12. Нехай $y = f(x)$ – строго додатна неперервна на відрізку $[a, b]$ функція. Довести, що існує таке $c > 0$, що $f(x) > c$ для всіх $x \in [a, b]$.
13. Нехай $a \in \mathbb{R}$ і функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку $[a, +\infty)$, причому існує скінченна границя $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Довести, що функція f обмежена на $[a, +\infty)$.
14. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$. Довести, що існує таке $c \in [a, b]$, що $f(c) = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n))$.
15. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна і обмежена на проміжку $[a, +\infty)$. Довести, що для довільного числа $T > 0$ існує послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ точок $x_n \in [a, +\infty)$, така, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(x_n + T)) = 0$.
16. Функції f і g – такі неперервні періодичні функції на $\mathbb{R}$, що $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$. Довести, що $f(x) = g(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.
17. Яка властивість графіка функції $y = f(x)$ означає, що функція f має обернену f^{-1} , яка збігається з функцією f ?
18. Довести, що розривна функція $y = (1 + x^2) \operatorname{sgn} x$ має неперервну обернену функцію.

Розділ III. Диференціальне числення функцій однієї змінної

3.1. Похідна функції та її знаходження

Нехай задано функцію $y = f(x)$ і $x_0 \in D_f$ – гранична точка множини D_f . Для кожного $x \in D_f$ число $\Delta x = x - x_0$ називається *приростом аргументу*, а число $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ – відповідним *приростом функції* f у точці x_0 .

Якщо існує скінченна границя відношення приросту функції f у точці x_0 до приросту аргументу в цій точці при $\Delta x \rightarrow 0$, то вона називається *похідною функції* f у точці x_0 і позначається $f'(x_0)$ або $\frac{df}{dx}(x_0)$, тобто

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Теорема 1. *Якщо функція f має похідну в точці x_0 , то вона неперервна в цій точці.*

Теорема 2 (правила знаходження похідних). *Якщо C – стала, а функції u і v мають похідні в точці x_0 , то функції Cu , $u \pm v$, uv , $\frac{u}{v}$ (якщо $v(x_0) \neq 0$) також мають похідні в цій точці і*

- 1) $(Cu)'(x_0) = Cu'(x_0)$;
- 2) $(u \pm v)'(x_0) = u'(x_0) \pm v'(x_0)$;
- 3) $(uv)'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$;
- 4) $\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}$.

Теорема 3 (похідна складеної функції). *Нехай функція $\varphi : T \rightarrow X$ має похідну в точці $t_0 \in T$, а функція $f : X \rightarrow Y$ має похідну в точці $x_0 = \varphi(t_0) \in X$. Тоді складена функція $g : T \rightarrow Y$, $g(t) = f(\varphi(t))$, також має похідну в точці t_0 , причому*

$$g'(t_0) = f'(x_0)\varphi'(t_0).$$

Теорема 4 (таблиця похідних). Якщо $C, p \in \mathbb{R}$, $a > 0$ ($a \neq 1$), то для всіх тих x , для яких існують відповідні вирази, правильні такі рівності:

- | | |
|--|--|
| 1) $C' = 0$; | 2) $(x^p)' = p x^{p-1}$; |
| 3) $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$; | 4) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; |
| 5) $(e^x)' = e^x$; | 6) $(a^x)' = a^x \ln a$; |
| 7) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; | 8) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$; |
| 9) $(\sin x)' = \cos x$; | 10) $(\cos x)' = -\sin x$; |
| 11) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; | 12) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$; |
| 13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; | 14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; |
| 15) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$; | 16) $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$; |
| 17) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$; | 18) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$; |
| 19) $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$; | 20) $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$. |

1. Використовуючи означення похідної, знайти $f'(x)$, якщо:

- | | |
|--|--|
| а) $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$; | б) $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$; |
| в) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$; | г) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$; |
| г) $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$; | д) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \neq 0$. |

2. Знайти $f'(1)$, $f'(2)$ і $f'(3)$, якщо $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$.

3. Знайти $f'(-1)$ і $f'(5)$, якщо $f(x) = (x+1)(x-5)^2$.

4. Знайти $f'(2)$, якщо $f(x) = x^2 \sin(x-2)$.

5. Знайти $f'(3)$, якщо $f(x) = x \operatorname{tg}(x-3)$.

6. Знайти $f'(1)$, якщо $f(x) = x + (x-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$.

7. Знайти $f'(-1)$, якщо $f(x) = x + (x+1) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{x-2}}$.

Використовуючи правила знаходження похідних і таблицю похідних, знайти похідні таких функцій:

- | | |
|---|---|
| 8. $f(x) = 10x^2 - 18x + 1$; | 9. $f(x) = 8x^4 - 3x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 7$; |
| 10. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$; | 11. $f(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$; |
| 12. $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + \frac{4}{\sqrt[4]{x}}$; | 13. $f(x) = 4\sqrt{x} + 8\sqrt[4]{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$; |
| 14. $f(x) = (x^2 - 1)(x^3 + 2)$; | 15. $f(x) = (x^4 + 2x)(x^2 - 5)$; |

$$16. f(x) = (1-x)(1-x^2)(1-x^3);$$

$$17. f(x) = (x+1)(x^2+2)(x^3+3);$$

$$18. f(x) = \frac{2x}{1-x^2};$$

$$19. f(x) = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2};$$

$$20. f(x) = \frac{x^3+20}{(x+1)^2};$$

$$21. f(x) = \frac{2-x^2}{(x-1)^3};$$

$$22. f(x) = x(\sin x + \cos x);$$

$$23. f(x) = \arccos x \arcsin x;$$

$$24. f(x) = \frac{\arcsin x}{\arccos x};$$

$$25. f(x) = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x + \cos x};$$

$$26. f(x) = x^2 \operatorname{tg} x \operatorname{arctg} x;$$

$$27. f(x) = x^4 \operatorname{ctg} x \operatorname{arctg} x;$$

$$28. f(x) = x^4 \ln x;$$

$$29. f(x) = x^3 \ln x;$$

$$30. f(x) = \frac{1-\ln x}{1+\ln x};$$

$$31. f(x) = \frac{\ln x}{\ln x + x^2};$$

$$32. f(x) = e^x \operatorname{ctg} x;$$

$$33. f(x) = e^x \cos x;$$

$$34. f(x) = \frac{e^x}{\operatorname{arctg} x};$$

$$35. f(x) = \frac{e^x}{\operatorname{arctg} x};$$

$$36. f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3^x};$$

$$37. f(x) = \frac{x}{4^x};$$

$$38. f(x) = 10^x \lg x;$$

$$39. f(x) = 5^{\frac{x}{2}} \lg x;$$

$$40. f(x) = 2 \operatorname{sh} x - 3 \operatorname{th} x;$$

$$41. f(x) = 4 \operatorname{ch} x + 5 \operatorname{cth} x;$$

$$42. f(x) = \operatorname{ch} x \operatorname{cth} x;$$

$$43. f(x) = \operatorname{sh} x \operatorname{th} x;$$

$$44. f(x) = \sin x \arccos x \operatorname{arctg} x e^x;$$

$$45. f(x) = \cos x \arcsin x \operatorname{tg} x \ln x.$$

Знайти похідні таких складених функцій:

$$46. f(x) = \sqrt{1+x^2};$$

$$47. f(x) = \sqrt{2x+x^4};$$

$$48. f(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}};$$

$$49. f(x) = \sqrt[3]{\frac{2-x}{3+x}};$$

$$50. f(x) = \cos 2x - \sin 3x;$$

$$51. f(x) = \operatorname{tg} 4x - \operatorname{ctg} 5x;$$

$$52. f(x) = \sin(\cos x);$$

$$53. f(x) = \cos(\sin x);$$

$$54. f(x) = \cos^3 x;$$

$$55. f(x) = \sin^2 x;$$

$$56. f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos(x^2)};$$

$$57. f(x) = \frac{\sin(x^3)}{\cos^2 x};$$

$$58. f(x) = e^{-x^2};$$

$$59. f(x) = e^{x^3};$$

$$60. f(x) = \ln(\ln(\ln x));$$

$$61. f(x) = \lg(\lg(\lg x));$$

$$62. f(x) = 3^{\operatorname{ctg}(\ln^3 x)};$$

$$63. f(x) = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{\ln x}};$$

$$64. f(x) = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}};$$

$$65. f(x) = e^{e^x} + e^{x^e} + x^{e^e};$$

$$66. f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm 1});$$

$$67. f(x) = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}});$$

$$68. f(x) = \arcsin(\sin x);$$

$$70. f(x) = \ln(\operatorname{ch} x) + \frac{1}{2\operatorname{ch}^2 x};$$

$$72. f(x) = x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x));$$

$$74. f(x) = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}};$$

$$76. f(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right);$$

$$78. f(x) = 2\operatorname{arctg} (x + \sqrt{1 + x^2});$$

$$80. f(x) = x + x^x + x^{x^x};$$

$$82. f(x) = x^{x^e} + x^{e^x} + e^{x^x};$$

$$69. f(x) = \arccos(\cos x);$$

$$71. f(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} - \ln \left(\operatorname{cth} \frac{x}{2} \right);$$

$$73. f(x) = x^x;$$

$$75. f(x) = \sqrt[x]{x};$$

$$77. f(x) = (\sin x)^{\cos x};$$

$$79. f(x) = (\cos x)^{\sin x};$$

$$81. f(x) = (\ln x)^x;$$

$$83. f(x) = x^{\ln x}.$$

3.2. Геометричний та механічний зміст похідної

Геометричний зміст. Нехай l – деяка крива на площині, $M_0 \in l$ – фіксована точка, а $M \in l$ – довільна точка кривої l . Пряма M_0T називається *дотичною до кривої l у точці M_0* , якщо кут між прямими M_0T і M_0M прямує до нуля при $M \rightarrow M_0$. Іншими словами, дотична M_0T – це граничне положення січної M_0M при $M \rightarrow M_0$.

Нехай задано функцію $y = f(x)$, яка має похідну в точці $x_0 \in D_f$. Тоді існує дотична до графіка цієї функції в точці x_0 і її кутовий коефіцієнт (тобто тангенс кута нахилу прямої до осі Ox) дорівнює $f'(x_0)$. У цьому полягає *геометричний зміст похідної*. Враховуючи це, *рівняння дотичної* до графіка функції f у точці x_0 має вигляд

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Нехай задано дві функції f та g , які мають похідні в точці x_0 і графіки яких перетинаються в цій точці. *Кутом між графіками функцій f та g в точці x_0* називається кут φ між дотичними до графіків цих функцій, проведеними в цій точці. Він обчислюється за формулою

$$\varphi = \begin{cases} \arctg \left| \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)} \right|, & \text{якщо } f'(x_0)g'(x_0) \neq -1; \\ \frac{\pi}{2}, & \text{якщо } f'(x_0)g'(x_0) = -1. \end{cases}$$

Механічний зміст. Точка P рухається вздовж числової прямої, $s(t)$ – координата точки P у момент часу t . Нехай t_1, t_2 – два моменти часу, причому $t_1 < t_2$. Середня швидкість руху точки за період часу $[t_1, t_2]$ дорівнює

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1},$$

де $s(t_2) - s(t_1)$ – шлях, який пройдено за час $t_2 - t_1$. Миттєва швидкість у точці t_1 визначається як границя

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1 + 0} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Отже, миттєва швидкість $v(t)$ точки P у момент часу t є похідна у точці t від шляху s : $v(t) = s'(t)$. Якщо миттєва швидкість точки у момент часу t відома, то наближене значення шляху, який пройдено за проміжок часу $[t, t + \Delta t]$, дорівнює наближено $s'(t) \Delta t$.

Якщо швидкість руху v не стала і сама змінюється з часом t , то розглядають прискорення – «швидкість зміни швидкості». Границя відношення приросту швидкості Δv до приросту часу Δt дає

прискорення руху в момент часу t . Отже, прискорення — це похідна від швидкості за часом: $a(t) = v'(t)$.

Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці x_0 , якщо:

1. $f(x) = x^3, x_0 = -1$;
 2. $f(x) = x^3 - 3x, x_0 = 2$;
 3. $f(x) = 3 - 2x^2, x_0 = -2$;
 4. $f(x) = (3x - 7)^3, x_0 = 3$;
 5. $f(x) = -\frac{2}{x}, x_0 = 1$;
 6. $f(x) = \frac{3}{x^2}, x_0 = 1$;
 7. $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 4$;
 8. $f(x) = \sqrt{2x - 1}, x_0 = 5$;
 9. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}, x_0 = -2$;
 10. $f(x) = x\sqrt{x - 1}, x_0 = 2$;
 11. $f(x) = \sin x, x_0 = 0$;
 12. $f(x) = \cos 2x, x_0 = \frac{\pi}{12}$;
 13. $f(x) = \sin^2 3x, x_0 = \frac{\pi}{12}$;
 14. $f(x) = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4}), x_0 = \frac{\pi}{2}$;
 15. $f(x) = x^2 e^{-x}, x_0 = 1$;
 16. $f(x) = x(\ln x - 1), x_0 = e$.
17. Знайти кут нахилу до осі Ox дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 \ln x$ у точці $x_0 = 1$.
 18. Під яким кутом до осі Ox нахилена дотична, проведена до графіка функції $f(x) = 2x^3 - x$ у точці перетину з віссю Oy ?
 19. В яких точках дотична до графіка функції $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x - 4$ утворює з віссю Ox кут 45° ?
 20. В яких точках кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 1$ дорівнює 3?
 21. Знайти кут, який утворює з віссю ординат дотична до графіка функції $f(x) = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3$, проведена в точці з абсцисою $x_0 = 1$.
 22. Під яким кутом графік функції $f(x) = e^x$ перетинає вісь Oy ?
 23. Під яким кутом нахилена до осі Ox дотична, проведена до графіка функції $f(x) = x^3 - x^2 - 7x + 6$ у точці $M(2; -4)$?
 24. На графіку функції $y = x(x - 4)^3$ знайти точки, в яких дотичні паралельні до осі Ox .
 25. Довести, що дотичні, проведені до графіка функції $f(x) = \frac{x-4}{x-2}$ в точках його перетину з осями координат, паралельні.
 26. Знайти точку, в якій дотична до графіка функції $f(x) = x^2 + 5x + 1$ паралельна до прямої $y = 3x + 1$.
 27. В яких точках дотична до графіка функції $f(x) = 2 + x - x^2$:
а) паралельна до осі Ox ;
б) паралельна до бісектриси першого координатного кута?

28. В точці $M(1; 8)$ до кривої $y = \sqrt{(5 - x^{2/3})^3}$ проведена дотична. Знайти довжину її відрізка між осями координат.
29. Знайти площу трикутника, утвореного бісектрисами координатних кутів і дотичною до кривої $y = \sqrt{x^2 - 5}$ у точці $M(3; 2)$.
30. Довести, що парабола $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$, $b^2 - 4ac > 0$) перетинає вісь Ox під рівними кутами.
31. Скласти рівняння дотичних до параболи $y = 1 - x^2$, що проходять через точку $M(0; 3)$.
32. Скласти рівняння дотичних до параболи $y = x^2 - 4x + 3$, що проходять через точку $M(2; -5)$.
33. Скласти рівняння дотичних до кривих $y = 2x^2 - 5$ і $y = x^2 - 3x + 5$, що проходять через точки перетину цих кривих, та знайти кут між цими дотичними.
34. Під яким кутом перетинаються графіки функцій
- $y = \ln x$ і $y = 1 - x$;
 - $y = e^x$ і $y = 1 - x$;
 - $y = 2^x$ і $y = 3 - x$;
 - $y = \arcsin x$ і $y = \arccos x$;
 - $y = \arctg x$ і $y = \operatorname{arccotg} x$?
35. Під якими кутами перетинаються лінії
- $y = x^2$ і $x = y^2$;
 - $y = x^3$ і $x = y^3$;
 - $y = \sin x$ і $y = \cos x$?
36. Переміщення об'єкта на s метрів відносно точки P через t секунд задається рівнянням $s(t) = 2.1 + 1.7t^2 - 0.2t^3$.
- Знайти миттєву швидкість і прискорення об'єкта через 5 с.
 - Знайти початкове зміщення автомобіля відносно точки P .
 - Знайдіть середню швидкість протягом перших 5 с руху.
37. Об'єкт рухається вздовж прямої. Через t секунд після того, як він пройшов точку O , його зміщення x метрів відносно O задається рівнянням $x = 0.1t^3 - 1.2t^2 + 3.5t$.
- Знайти швидкість і прискорення об'єкта через 6 секунд після проходження точки O .
 - Якою є швидкість об'єкта в момент, коли він уперше повертається в точку O ?
 - Знайдіть перший момент часу, коли швидкість дорівнює нулю, і зміщення об'єкта відносно точки O у цей момент.

3.3. Диференціал функції та його застосування

Функція $y = f(x)$ називається диференційовною в точці $x_0 \in D_f$, якщо її приріст у цій точці можна подати у вигляді

$$(\Delta f)(x_0) = A \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x, \quad (1)$$

де $A \in \mathbb{R}$, а $\alpha(\Delta x)$ – нескінченно мала при $\Delta x \rightarrow 0$.

Теорема 1. Функція $y = f(x)$ диференційовна в точці $x_0 \in D_f$ тоді й лише тоді, коли вона має похідну в цій точці, причому $A = f'(x_0)$, де A – константа з формули (1).

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в точці $x_0 \in D_f$. Тоді головна лінійна частина її приросту в цій точці називається *диференціалом функції f у точці x_0* і позначається $df(x_0)$.

Диференціал функції $f(x) = x$ позначається через dx . Оскільки $dx = \Delta x$ для незалежної змінної x , то диференціал $df(x_0)$ довільної диференційовної в точці x_0 функції f можна подати у вигляді

$$df(x_0) = f'(x_0) dx.$$

Ця формула залишається правильною і в тому випадку, коли змінна $x \in$ функцією від іншої незалежної змінної (*властивість інваріантності форми першого диференціала*).

Теорема 2. Якщо C – стала, а u і v – диференційовні функції, то

$$1) d(Cu) = Cdu;$$

$$2) d(u \pm v) = du \pm dv;$$

$$3) d(uv) = u dv + v du;$$

$$4) d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}.$$

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в точці $x_0 \in D_f$. Тоді для малих значень приросту аргументу Δx , для яких $x_0 + \Delta x \in D_f$, маємо

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (\Delta f)(x_0) \approx df(x_0).$$

Тому

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x.$$

Якщо функція задається параметричними рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in T$, де φ і ψ – диференційовні на T , причому $\varphi(t) \neq 0$ на T , то вона диференційовна на множині $X = \varphi(T)$, причому її похідна задається такими параметричними рівняннями:

$$x = \varphi(t), \quad y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad t \in T.$$

1. Для функції $f(x) = x^3 - 2x + 1$ обчислити $\Delta f(1)$ та $df(1)$ і порівняти їх, якщо:

$$а) \Delta x = 1; \quad б) \Delta x = 0,1; \quad в) \Delta x = 0,01.$$

Знайти диференціал функції f , якщо:

2. $f(x) = \frac{1}{x}$;
3. $f(x) = \frac{1}{x^2}$;
4. $f(x) = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \quad (a \neq 0)$;
5. $f(x) = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} \quad (a \neq 0)$;
6. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a})$;
7. $f(x) = \arcsin \frac{x}{a} \quad (a \neq 0)$.

Обчислити такі диференціали:

8. $d(\frac{1}{x^3} + \sqrt[3]{x})$;
9. $d(\arcsin x - x^3)$;
10. $d(xe^x)$;
11. $d(\sin x - x \cos x)$;
12. $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$;
13. $d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$;
14. $d(\sqrt{a^2 + x^2})$;
15. $d(\ln(1 - x^2))$;
16. $d(\arccos \frac{1}{x})$.

Нехай u, v, w – диференційовні функції відносно x . Знайти dy , якщо:

17. $y = uvw$;
18. $y = uv - \frac{v}{w}$;
19. $y = \frac{u}{v^2}$;
20. $y = \operatorname{arctg} \frac{u}{v}$;
21. $y = \ln \sqrt{u^2 + v^2}$;
22. $y = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$.

Замінюючи приріст функції відповідним диференціалом, обчислити наближені значення таких виразів:

23. $\sqrt{0,98}$;
24. $\sqrt[3]{1,03}$;
25. $\sqrt[3]{30}$;
26. $\sqrt[4]{80}$;
27. $\sin 29^\circ$;
28. $\cos 121^\circ$;
29. $\operatorname{arctg} 1,05$;
30. $\operatorname{arcctg} 0,98$.

Обчислити:

31. $\frac{d(x^3 - 2x^6 - x^9)}{d(x^3)}$;
32. $\frac{d\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{d(x^2)}$;
33. $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$;
34. $\frac{d(\operatorname{tg} x)}{d(\operatorname{ctg} x)}$;
35. $\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$;
36. $\frac{d(\operatorname{arctg} x)}{d(\operatorname{arcctg} x)}$.

Знайти похідні $y'(x)$ від нижченаведених параметрично заданих функцій:

37. $x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}}$, $y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}$;
38. $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$;
39. $x = a \cos t$, $y = b \sin t \quad (a, b > 0)$;
40. $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t \quad (a, b > 0)$;
41. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t \quad (a > 0)$;
42. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t) \quad (a > 0)$;
43. $x = e^{2t} \cos^2 t$, $y = e^{2t} \sin^2 t$;
38. $x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

3.4. Похідні та диференціали вищих порядків

Нехай функція f диференційовна в кожній точці деякої множини $X \subseteq D_f$, яка є околом точки $x \in X$. Якщо функція f' диференційовна в точці x , то її похідна в цій точці називається *похідною другого порядку* функції f і позначається через $f''(x)$ або $\frac{d^2 f}{dx^2}(x)$, тобто

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

При цьому кажуть, що функція f *двічі диференційовна* в точці x .

Аналогічно, якщо для деякого $n \geq 2$ функція f має похідну $(n-1)$ -го порядку в кожній точці деякої множини $X \subseteq D_f$, яка є околом точки $x \in X$, і ця похідна $f^{(n-1)}$ диференційовна в точці x , то похідна функції $f^{(n-1)}$ в точці x називається *похідною n -го порядку* функції f у точці x і позначається через $f^{(n)}(x)$ або $\frac{d^n f}{dx^n}(x)$, тобто

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

При цьому кажуть, що f є n разів диференційовною в точці x .

Якщо функція f n разів диференційовна в точці x ($n \geq 2$), то *диференціалом n -го порядку* від функції f називається диференціал від диференціала $(n-1)$ -го порядку від функції f і позначається він $d^n f(x)$, тобто

$$d^n f(x) = d(d^{n-1} f(x)).$$

Якщо x – незалежна змінна, то

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x) dx^n.$$

Теорема 1 (похідні n -го порядку від елементарних функцій). Нехай $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{R}$, $a > 0$ ($a \neq 1$). Тоді для всіх тих x , для яких існують відповідні вирази, правильні такі рівності

- 1) $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$; 2) $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$;
- 3) $(e^x)^{(n)} = e^x$; 4) $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$;
- 5) $(x^p)^{(n)} = p(p-1)\dots(p-n+1)x^{p-n}$;
- 6) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{(n-1)} \frac{(n-1)!}{x^n}$.

Теорема 2 (формула Лейбніца). Якщо u і v – n разів диференційовні функції ($n \in \mathbb{N}$), то

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

Знайти $f''(x)$, якщо:

1. $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$;
2. $f(x) = (1+x^2) \arctg x$;
3. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;
4. $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;
5. $f(x) = e^{-x^2}$;
6. $f(x) = \operatorname{tg} x$;
7. $f(x) = x \sin x$;
8. $f(x) = x \ln x$;

9. $f(x) = x [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$.
10. Знайти $f(0)$, $f'(0)$ і $f''(0)$, якщо $f(x) = e^{\sin x} \cos(\sin x)$.
11. Нехай u і v – двічі диференційовні функції відносно x . Знайти y'' , якщо:
- а) $y = u^2$; б) $y = \ln \frac{u}{v}$; в) $y = \sqrt{u^2 + v^2}$; г) $y = u^v$.
12. Нехай f – тричі диференційовна функція відносно x . Знайти y'' і y''' , якщо:
- а) $y = f(x^2)$; б) $y = f(\frac{1}{x})$; в) $y = f(e^x)$; г) $y = f(\ln x)$.
13. Для функції $y = e^x$ знайти d^2y у двох випадках:
- а) x – незалежна змінна; б) $x = \varphi(t)$.
14. Вважаючи x незалежною змінною, знайти d^2y , якщо:
- а) $y = \sqrt{1 + x^2}$; б) $y = \frac{\ln x}{x}$; в) $y = x^x$.
15. Нехай u і v – двічі диференційовні функції відносно x . Знайти d^2y , якщо:
- а) $y = uv$; б) $y = \arctg \frac{u}{v}$; в) $y = u^m v^n$ ($m, n \in \mathbb{R}$);
г) $y = \frac{u}{v}$; д) $y = a^u$ ($a > 0$); е) $y = \ln \sqrt{u^2 + v^2}$.
16. Знайти похідні $y'(x)$, $y''(x)$ і $y'''(x)$ від нижченаведених параметрично заданих функцій:
- а) $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$;
б) $x = a \cos t$, $y = a \sin t$ ($a > 0$);
в) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($a > 0$);
г) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$.
17. Знайти $y^{(6)}$ і $y^{(7)}$, якщо $y = x(2x - 1)^2(x + 3)^3$.
- Для нижченаведених функцій знайти похідну $y^{(n)}$ вказаного порядку n :
18. $y = \sqrt{x}$, $n = 10$; 19. $y = \sqrt[3]{x}$, $n = 15$;
20. $y = \frac{x^2}{1-x}$, $n = 8$; 21. $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, $n = 80$;
22. $y = x^2 e^{2x}$, $n = 20$; 23. $y = x^2 2^x$, $n = 32$;
24. $y = x^2 \sin 3x$, $n = 30$; 25. $y = x^2 \cos 4x$, $n = 40$;
26. $y = x \operatorname{sh} x$, $n = 100$; 27. $y = x^3 \operatorname{ch} x$, $n = 25$;
28. $y = x \ln x$, $n = 8$; 29. $y = \frac{\ln x}{x}$, $n = 5$;
30. $y = e^x \cos x$, $n = 4$; 31. $y = \sin^2 x \ln x$, $n = 6$;

$$32. y = \sin x \sin 2x \sin 3x, \quad n = 10;$$

$$33. y = \cos x \cos 2x \cos 3x, \quad n = 12.$$

Для нижченаведених функцій знайти диференціал $d^n y$ вказаного порядку n :

$$34. y = x^5, \quad n = 5;$$

$$35. y = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad n = 3;$$

$$36. y = x \cos 2x, \quad n = 8;$$

$$37. y = x \sin 3x, \quad n = 7;$$

$$38. y = e^x \ln x, \quad n = 4;$$

$$39. y = \cos x \operatorname{ch} x, \quad n = 6.$$

Вважаючи, що u – n разів диференційовна функція від x , знайти диференціал $d^n y$ вказаного порядку n для таких функцій:

$$40. y = u^2, \quad n = 10; \quad 41. y = e^u, \quad n = 4; \quad 42. y = \ln u, \quad n = 3.$$

Знайти похідну $y^{(n)}$ ($n \in \mathbb{N}$) для таких функцій:

$$43. y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}};$$

$$44. y = \frac{ax+b}{cx+d};$$

$$45. y = \frac{1}{x(1-x)};$$

$$46. y = \frac{1}{x^2-3x+2};$$

$$47. y = \sin^2 x;$$

$$48. y = \cos^2 x;$$

$$49. y = \sin^3 x;$$

$$50. y = \cos^3 x;$$

$$51. y = \sin ax \sin bx;$$

$$52. y = \cos ax \cos bx;$$

$$53. y = \sin ax \cos bx;$$

$$54. y = \sin^2 ax \cos bx;$$

$$55. y = \sin^4 x + \cos^4 x;$$

$$56. y = \ln \frac{a+bx}{a-bx};$$

$$57. y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}};$$

$$58. y = x \operatorname{sh} x;$$

$$59. y = x \cos ax;$$

$$60. y = x^2 \sin ax;$$

$$61. y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x};$$

$$62. y = \frac{e^x}{x};$$

$$63. y = e^x \cos x;$$

$$64. y = e^x \sin x.$$

3.5. Основні теореми диференціального числення і правила Лопітала

Теорема Ролля. Нехай функція $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна на відрізку $[a, b]$, диференційовна на інтервалі (a, b) і $f(a) = f(b)$. Тоді існує таке $c \in (a, b)$, що $f'(c) = 0$.

Теорема Лагранжа. Нехай функція $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і диференційовна на інтервалі (a, b) . Тоді існує таке $c \in (a, b)$, що $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Теорема Коші. Нехай функції $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ і $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ неперервні на відрізку $[a, b]$ і диференційовні на інтервалі (a, b) , причому $g'(x) \neq 0$ для кожного $x \in (a, b)$. Тоді існує таке $c \in (a, b)$, що $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Теорема (правило Лопітала розкриття невизначеностей $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$). Нехай $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ і функції f та g визначені і диференційовні на проміжку $(a; b)$, причому $g'(x) \neq 0$ на цьому проміжку. Якщо $c \in \{a, b\}$, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ (або $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$) та існує скінченна чи нескінченна границя $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1. Перевірити правильність висновку теореми Ролля для функції $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ на відрізку:
а) $[1, 2]$; б) $[2, 3]$.
2. Функція $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ така, що $f(-1) = f(1) = 0$. Чому для функції f не справджується висновок теореми Ролля на відрізку $[-1, 1]$, тобто $f'(x) \neq 0$ для кожної точки $x \in (-1, 1)$?
3. Нехай функція $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – неперервна на відрізку $[a, b]$, n разів диференційовна на інтервалі (a, b) і $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ – такі точки, що $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n)$. Довести, що існує точка $c \in (a, b)$, така, що $f^{(n)}(c) = 0$.
4. Нехай многочлен $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ з дійсними коефіцієнтами $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ з $a_n \neq 0$ має лише дійсні корені. Довести, що його похідні $P'(x), P''(x), \dots, P^{(n-1)}(x)$ також мають лише дійсні корені.
5. На кривій $y = f(x)$ знайти точку, через яку проходить дотична, паралельна до прямої AB , якщо:

а) $f(x) = x^2$, $A(0, 1)$ і $B(3, 4)$;

б) $f(x) = x^3$, $A(-1, 1)$ і $B(2, 8)$.

6. За допомогою теореми Лагранжа довести нерівності:

а) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ для довільних $x, y \in \mathbb{R}$;

б) $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$ для довільних $x, y \in \mathbb{R}$;

в) $|x - y| \leq |\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y|$ для довільних $x, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;

г) $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq |x - y|$ для довільних $x, y \in \mathbb{R}$;

г) $py^{p-1}(x-y) \leq x^p - y^p \leq px^{p-1}(x-y)$ для довільних $0 < y < x$ і $p > 1$;

д) $\frac{x-y}{x} \leq \ln \frac{x}{y} \leq \frac{x-y}{y}$ для довільних $0 < y < x$.

Обчислити такі границі:

7. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\sin 6x}$;

8. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x}$;

9. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$;

10. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{ctg} 5x}{\operatorname{ctg} 7x}$;

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$;

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}$;

13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3}$;

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{4}} - \operatorname{arctg} \sqrt{x}}{x \sqrt{x}}$;

15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$;

16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$;

17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$;

18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$;

19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{tg} 4x - 12 \operatorname{tg} x}{3 \sin 4x - 12 \sin x}$;

20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$;

21. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$;

22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2}$;

23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}$, $a > 0$;

24. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}$, $a > 0$;

25. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$;

26. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2x}{x^2}$;

27. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\varepsilon}{e^x}$, $\varepsilon > 0$;

28. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-0,01x}$;

29. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2^x}$;

30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^{100}}$;

31. $\lim_{x \rightarrow 0+} x^\varepsilon \ln x$, $\varepsilon > 0$;

32. $\lim_{x \rightarrow 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x)$;

33. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$;

34. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$;

35. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right)$;

36. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)$;

37. $\lim_{x \rightarrow 0+} x^x$;

38. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$;

$$39. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x};$$

$$41. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^x;$$

$$43. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$45. \lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}};$$

$$47. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x};$$

$$40. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x};$$

$$42. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}};$$

$$44. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$46. \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x;$$

$$48. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}.$$

3.6. Застосування похідної до дослідження функцій на монотонність і екстремуми

Функція $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, визначена на множині $E \subseteq \mathbb{R}$, називається *монотонно зростаючою* (*монотонно спадаючою*) на множині $X \subseteq E$, якщо

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2))$$

для довільних $x_1, x_2 \in X$ з $x_1 < x_2$. Функція f , яка монотонно зростає або монотонно спадає на множині X , називається *монотонною* на множині X .

Аналогічно, функція $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ називається *строго зростаючою* (*строго спадаючою*) на множині $X \subseteq E$, якщо

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2))$$

для довільних $x_1, x_2 \in X$ з $x_1 < x_2$. Функція f , яка строго зростає або строго спадає на множині X , називається *строго монотонною* на множині X .

Теорема 1. Нехай функція $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна на проміжку X із кінцями a та b і диференційовна на інтервалі (a, b) . Тоді функція f монотонно зростає (спадає) на X тоді і тільки тоді, коли $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для кожного $x \in (a, b)$.

Теорема 2. Нехай функція $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна на проміжку X із кінцями a та b і диференційовна на інтервалі (a, b) . Тоді функція f строго зростає (спадає) на X тоді і тільки тоді, коли $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для кожного $x \in (a, b)$ і похідна f' не дорівнює тотожно нулю на кожному інтервалі $I \subseteq (a, b)$.

Нехай область визначення $D_f \subseteq \mathbb{R}$ функції f є околom точки x_0 . Точка x_0 називається *точкою локального максимуму* (*локального мінімуму*) функції f , якщо існує такий окіл $U \subseteq D_f$ точки x_0 , що

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

для довільного $x \in U$. Точка x_0 , яка є точкою локального максимуму або мінімуму, називається *точкою локального екстремуму*.

Якщо для всіх $x \in U \setminus \{x_0\}$ виконуються відповідні строгі нерівності, то точка x_0 називається *точкою строгого локального максимуму*, *мінімуму* і *екстремуму* відповідно.

Теорема 3 (необхідна умова екстремуму). Нехай x_0 – точка локального екстремуму функції f і f диференційовна в точці x_0 . Тоді $f'(x_0) = 0$.

Теорема 4. Нехай функція f – диференційовна в деякому околі $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки $x_0 \in D_f$. Тоді

(i) якщо $f'(x) \geq 0$ для кожного $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ і $f'(x) \leq 0$ для кожного $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 – точка локального максимуму;

(ii) якщо $f'(x) \leq 0$ для кожного $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ і $f'(x) \geq 0$ для кожного $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 – точка локального мінімуму.

Теорема 5. Нехай функція f – диференційовна в деякому околі $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки $x_0 \in D_f$, $f'(x_0) = 0$ і існує $f''(x_0)$. Тоді

(i) якщо $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимуму;

(ii) якщо $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка локального мінімуму.

Нехай функція $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ визначена на множині $X \subseteq \mathbb{R}$, $\alpha = \inf\{f(x) : x \in X\}$ і $\beta = \sup\{f(x) : x \in X\}$. Якщо існує $a \in X$, таке, що $f(a) = \alpha$, то кажуть, що функція f має найменше значення, а число α називається найменшим значенням функції f і позначається через $f_{\min}$. Аналогічно, якщо існує $b \in X$, таке, що $f(b) = \beta$, то кажуть, що функція f має найбільше значення, а число β називається найбільшим значенням функції f і позначається через $f_{\max}$.

Теорема 6. Нехай функція $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна на відрізку $[a, b]$, диференційовна на інтервалі (a, b) і $\{x_1, \dots, x_n\} = \{x \in (a, b) : f'(x) = 0\}$. Тоді

$$f_{\min} = \min\{f(a), f(b), f(x_1), \dots, f(x_n)\}$$

і

$$f_{\max} = \max\{f(a), f(b), f(x_1), \dots, f(x_n)\}.$$

Теорема 7. Нехай $f : (a, b) \rightarrow (-\infty, \beta)$ – диференційовна функція, така, що $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \beta$. Тоді функція f має найменше значення і

$$f_{\min} = \min\{f(x) : x \in (a, b), f'(x) = 0\}.$$

Теорема 8. Нехай $f : (a, b) \rightarrow (\alpha, +\infty)$ – диференційовна функція, така, що $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \alpha$. Тоді функція f має найбільше значення і

$$f_{\max} = \max\{f(x) : x \in (a, b), f'(x) = 0\}.$$

Знайти проміжки строгої монотонності таких функцій:

1. $y = 2x^2 + 3x + 2$;

2. $y = 2 + x - x^2$;

3. $y = 3x - x^3$;

4. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x$;

5. $y = \frac{2x}{1+x^2}$;

6. $y = \frac{\sqrt{x}}{x+100}$;

7. $y = x + \sin x$;

8. $y = \cos^2 x - x$;

9. $y = \cos \frac{\pi}{x}$;

10. $y = \sin \frac{\pi}{2x}$;

11. $y = \frac{x^2}{2^x}$;

12. $y = x^3 e^{-x}$;

$$13. y = x^n e^{-x} \text{ при } n > 0 \text{ і } x \geq 0;$$

$$14. y = x^2 - \ln x;$$

$$15. y = x^2 - \ln x^2;$$

$$16. y = x \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x \right);$$

$$17. y = x \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos \ln x \right).$$

Довести такі нерівності:

$$18. e^x > 1 + x \text{ при } x \neq 0;$$

$$19. \sqrt{1+2x} < 1 + x \text{ при } x > 0;$$

$$20. \cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \text{ при } x \neq 0;$$

$$21. x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x \text{ при } x > 0;$$

$$22. x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \text{ при } x > 0;$$

$$23. x < \operatorname{tg} x < x + \frac{x^3}{3} \text{ при } x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Знайти екстремуми таких функцій:

$$24. y = 5x^2 - 7x + 4;$$

$$25. y = 4x^3 + 6x + 5;$$

$$26. y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4;$$

$$27. y = 2x^2 - x^4;$$

$$28. y = x(x-1)^2(x-2)^3;$$

$$29. y = x^2(x+1)^4(x+2)^6;$$

$$30. y = x + \frac{1}{x};$$

$$31. y = \frac{2x}{1+x^2};$$

$$32. y = \frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1};$$

$$33. y = \sqrt{2x-x^2};$$

$$34. y = \sqrt{x^2-4x+5};$$

$$35. y = x\sqrt[3]{x-1};$$

$$36. y = xe^x;$$

$$37. y = xe^{-x};$$

$$38. y = (x-3)e^{x+1};$$

$$39. y = x^2e^{-x};$$

$$40. y = \ln(9-x^2);$$

$$41. y = x - \ln(1+x);$$

$$42. y = \sqrt{x} \ln x;$$

$$43. y = \frac{\ln^2 x}{x};$$

$$44. y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x;$$

$$45. y = \sin x - \frac{1}{3} \sin 3x;$$

$$46. y = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2);$$

$$47. y = e^x \sin x;$$

$$48. y = e^x \cos x;$$

$$49. y = \frac{10}{1+\sin^2 x}.$$

Знайти найменше та найбільше значення нижченаведених функцій на відповідних проміжках:

50. $f(x) = 2^x$ на відрізку $[-1; 5]$;
51. $f(x) = \frac{1}{3^x}$ на відрізку $[-3; 2]$;
52. $f(x) = 2^{\sqrt[3]{x^2}}$ на відрізку $[-8; -1]$;
53. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5-4x}}$ на відрізку $[-1; 1]$;
54. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{13+3x}}$ на відрізку $[-4; 4]$;
55. $f(x) = x^2 - 4x + 6$ на відрізку $[-3; 10]$;
56. $f(x) = x^2 + 6x - 8$ на відрізку $[-7; 4]$;
57. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$ на відрізку $[-2; 2]$;
58. $f(x) = x^5 - x^3 + x + 2$ на відрізку $[-2; 1]$;
59. $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ на відрізку $[-10; 10]$;
60. $f(x) = |x^2 + 5x + 4|$ на відрізку $[-7; 7]$;
61. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ на відрізку $[\frac{1}{10}; 10]$;
62. $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$ на відрізку $[-5; -1]$;
63. $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ на відрізку $[\frac{3}{2}; 5]$;
64. $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2+16}}$ на відрізку $[2\sqrt{5}; 8]$;
65. $f(x) = x + \cos^2 x$ на відрізку $[0; \frac{\pi}{2}]$;
66. $f(x) = \cos^2 x + \sin x$ на відрізку $[0; \frac{\pi}{4}]$;
67. $f(x) = \frac{1}{2} \cos 2x + \sin x$ на відрізку $[0; \frac{\pi}{2}]$;
68. $f(x) = (5-x)2^{-x}$ на відрізку $[-1; 0]$;
69. $f(x) = 2x^2 - \ln x$ на відрізку $[1; e]$;
70. $f(x) = xe^{-x}$ на $[0, +\infty)$;
71. $f(x) = x^2e^{-x}$ на $[0, +\infty)$;
72. $f(x) = x^n e^{-x}$, де $n \in \mathbb{N}$, на $[0, +\infty)$;
73. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ на $[0, +\infty)$;
74. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+25}$ на $[0, +\infty)$.

Розділ IV. Функціональні і степеневі ряди

4.1. Рівномірна збіжність функціональних послідовностей

Послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ функцій $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ називається *поточково збіжною на множині X до функції $f : X \rightarrow \mathbb{R}$* , якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

для кожного $x \in X$. При цьому функцію f називають *граничною функцією* і пишуть

$$f_n \rightarrow f \quad \text{на } X.$$

Послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ функцій $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ називається *рівномірно збіжною на множині X до функції $f : X \rightarrow \mathbb{R}$* , якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $N \in \mathbb{N}$, що для всіх $n \geq N$ і для всіх $x \in X$ має місце нерівність

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Для позначення рівномірної збіжності функціональної послідовності $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ до функції f на множині X використовують запис

$$f_n \rightrightarrows f \quad \text{на } X.$$

Зрозуміло, що кожна рівномірно збіжна на множині X послідовність функцій є поточково збіжною на цій множині.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ вважатимемо

$$r_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|.$$

Теорема 1. Нехай послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ функцій $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ поточково збігається на множині X до функції $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Тоді функціональна послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ рівномірно збігається на X до функції f у тому і тільки в тому випадку, коли

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.$$

Дослідити на рівномірну збіжність функціональну послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ на множині X , якщо:

1. $f_n(x) = x^n$, $X = [0, \frac{1}{2}]$;
2. $f_n(x) = x^n$, $X = [0, 1]$;
3. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $X = [0, 1]$;
4. $f_n(x) = x^{n+2} - x^n$, $X = [0, 1]$;

5. $f_n(x) = x^{2n} - x^n, X = [0, 1];$
6. $f_n(x) = x^{2n} - x^{5n}, X = [0, 1];$
7. $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}, X = [0, 1];$
8. $f_n(x) = \sin^n x, X = [0, \frac{\pi}{2}];$
9. $f_n(x) = \frac{\arctg nx}{\sqrt{n+x}}, X = [0, +\infty);$
10. $f_n(x) = \frac{\arctg(n+2x)}{n^3+|x|}, X = \mathbb{R};$
11. $f_n(x) = \frac{\sin(n-x)}{n+x^2}, X = \mathbb{R};$
12. $f_n(x) = \frac{\cos \sqrt{nx^5}}{\sqrt{2n+3x}}, X = [0, 2\pi];$
13. $f_n(x) = \frac{n^2}{n^2+x^2}, X = [-1, 1];$
14. $f_n(x) = \frac{x}{x+n}, X = [0, 3];$
15. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n+x}, X = [0, 1];$
16. $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+2n+x}, X = [0, 1];$
17. $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}, X = [0, 1];$
18. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^3x^2}, X = [0, 1];$
19. $f_n(x) = \frac{n^2x}{n^5+x^2}, X = [1, +\infty);$
20. $f_n(x) = \frac{2nx}{n^2+x^2}, X = [1, +\infty);$
21. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}, X = \mathbb{R};$
22. $f_n(x) = \frac{nx}{n+x}, X = (0, 1);$
23. $f_n(x) = e^{-nx^2}, X = [1, +\infty);$
24. $f_n(x) = \frac{\sin n\sqrt{x}}{\ln(n+1)}, X = [0, \pi];$
25. $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}, X = [-1, 1];$
26. $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}, X = \mathbb{R};$
27. $f_n(x) = e^{-x^2-nx}, X = (0, 1);$
28. $f_n(x) = \frac{\sqrt[4]{n^3}x}{e^{\sqrt{nx}}}, X = [0, +\infty);$
29. $f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}, X = (0, 2);$
30. $f_n(x) = \frac{\ln(nx)}{nx^2}, X = [1, +\infty).$

4.2. Рівномірна збіжність функціональних рядів

Розглянемо функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad (1)$$

де $u_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Для $x \in X$ та $n \in \mathbb{N}$ суму

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$$

називають n -ою частинною сумою ряду (1).

Функціональний ряд (1) називається *поточково збіжним на множині X* , якщо послідовність $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ його частинних сум поточково збіжна на X . При цьому функція

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

називається *сумою функціонального ряду* (1).

Функціональний ряд (1) називається *рівномірно збіжним на множині X* , якщо

$$S_n \Rightarrow S \quad \text{на } X.$$

Теорема 1. Якщо ряд (1) рівномірно збігається на множині X , то $u_n \Rightarrow 0$ на X .

Теорема 2. [критерій Коші] Функціональний ряд (1) рівномірно збігається на X тоді і тільки тоді, коли для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $N \in \mathbb{N}$, що для всіх $n \geq N$, $p \in \mathbb{N}$ і $x \in X$ має місце нерівність

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

Теорема 3. [ознака Вейерштрасса] Нехай

1) $|u_n(x)| \leq c_n$ для всіх $x \in X$ і $n \in \mathbb{N}$;

2) числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ збіжний.

Тоді функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ рівномірно збіжний на X .

Теорема 4. [ознака Діріхле] Нехай

1) послідовність $(a_n(x))_{n=1}^{\infty}$ монотонна для кожного $x \in X$;

2) $a_n \rightrightarrows 0$ на X ;

3) існує таке $K > 0$, що $\left| \sum_{k=1}^n b_k(x) \right| \leq K$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $x \in X$.

Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ рівномірно збіжний на X .

Теорема 5.[ознака Абеля] Нехай

1) послідовність $(a_n(x))_{n=1}^{\infty}$ монотонна для кожного $x \in X$;

2) існує таке $K > 0$, що $|a_n(x)| \leq K$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $x \in X$;

3) функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ рівномірно збіжний на X .

Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ рівномірно збіжний на X .

Знайти області збіжності таких функціональних рядів:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} x^n; \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n;$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}; \quad 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n};$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}; \quad 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}};$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n} + n}; \quad 8. \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n;$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}; \quad 10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}.$$

Користуючись ознакою Вейерштрасса, довести рівномірну збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множині X , якщо:

$$11. u_n(x) = \frac{1}{x^2 + n^2}, \quad X = \mathbb{R};$$

$$12. u_n(x) = \frac{n}{x^4 + n^3}, \quad X = \mathbb{R};$$

$$13. u_n(x) = \frac{\sin nx}{n!}, \quad X = \mathbb{R};$$

$$14. u_n(x) = \frac{\cos(x+n)}{2^n}, \quad X = \mathbb{R};$$

15. $u_n(x) = \frac{\cos(n^2 + x^3)}{3^n + x^4}, X = \mathbb{R};$
16. $u_n(x) = \frac{\sin(\sqrt{n}x)}{(2n)! + |x|}, X = \mathbb{R};$
17. $u_n(x) = \frac{\sin(x^2 - n)}{n^3 + |x|}, X = \mathbb{R};$
18. $u_n(x) = \frac{\cos(n^7 + x)}{n^2 + x^6}, X = \mathbb{R};$
19. $u_n(x) = \frac{1}{n^2(1 + nx^2)}, X = \mathbb{R};$
20. $u_n(x) = \frac{1}{n\sqrt{n + x^2}}, X = \mathbb{R};$
21. $u_n(x) = \frac{n}{\sqrt{n^5 + x^4}}, X = \mathbb{R};$
22. $u_n(x) = \frac{\sqrt{n + 7}}{\sqrt{n^5 + |x|}}, X = \mathbb{R};$
23. $u_n(x) = \frac{(3x)^n}{n\sqrt{n + x}}, X = [0, \frac{1}{3}];$
24. $u_n(x) = \frac{x^n}{n^2}, X = [-1, 1];$
25. $u_n(x) = \frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}, X = \mathbb{R};$
26. $u_n(x) = \frac{2^{-nx^4}}{\sqrt{n^3 + x^2}}, X = \mathbb{R};$
27. $u_n(x) = \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{(n + |x|)^2}, X = \mathbb{R};$
28. $u_n(x) = \frac{\operatorname{arctg}(n^2x)}{n\sqrt{n}}, X = \mathbb{R};$
29. $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n + x}, X = (-2, +\infty);$
30. $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^2 + \frac{x}{2}}, X = (-2, +\infty);$
31. $u_n(x) = \frac{\sqrt{x}}{n^3 + x}, X = [0, +\infty);$
32. $u_n(x) = \frac{x}{n^4 + x^2}, X = \mathbb{R};$
33. $u_n(x) = \frac{nx}{1 + n^5x^2}, X = \mathbb{R};$
34. $u_n(x) = \frac{nx^2}{1 + n^6x^4}, X = \mathbb{R};$
35. $u_n(x) = \frac{n^2(x^{2n} + 1)}{x^n\sqrt{n!}}, X = [\frac{1}{2}, 2];$
36. $u_n(x) = \frac{x^n}{n!}, X = [-98, 89];$
37. $u_n(x) = \frac{x^2}{e^{nx}}, X = [0, +\infty);$
38. $u_n(x) = \frac{x}{e^{n^2x}}, X = [0, +\infty);$
39. $u_n(x) = \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{1 + n^2x}, X = [0, +\infty);$
40. $u_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2 + n^3}, X = \mathbb{R};$

$$41. u_n(x) = \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right), X = [-5, 5];$$

$$42. u_n(x) = \frac{n \ln(1 + nx)}{x^n}, X = [2, +\infty);$$

За допомогою ознак Абеля чи Діріхле дослідити на рівномірну збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множині X , якщо:

$$43. u_n(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{n+x}}, X = [\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]; \quad 44. u_n(x) = \frac{\sin nx}{n}, X = [\frac{\pi}{7}, \frac{13\pi}{7}];$$

$$45. u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}, X = (0, +\infty); \quad 46. u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + \sin x}, X = [0, 2\pi];$$

$$47. u_n(x) = \frac{\cos \frac{2\pi n}{3}}{\sqrt{n^2 + x^2}}, X = \mathbb{R};$$

$$48. u_n(x) = \frac{\sin x \cdot \sin nx}{\sqrt{n+x}}, X = [0, +\infty);$$

$$49. u_n(x) = \frac{\cos n}{n} \sin \frac{x}{x+n}, X = [0, +\infty);$$

$$50. u_n(x) = \frac{(-1)^n nx}{(n+1)\sqrt{n+x}}, X = [0, 5];$$

$$51. u_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} x^n, X = [0, +\infty);$$

$$52. u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{arctg}(nx), X = \mathbb{R}.$$

4.3. Властивості сум функціональних рядів

Теорема 1. Нехай функції $u_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ такі, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ рівномірно збіжний на X , a – гранична точка множини X і для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує скінченна границя $\lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = c_n$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ збіжний і

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

Наслідок 1. Нехай $f_n \Rightarrow f$ на X , a – гранична точка множини X і $b_n = \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$. Тоді

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Теорема 2. Нехай $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність функцій $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, неперервних в точці $x_0 \in X$, яка рівномірно збігається до функції $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ на X . Тоді f також неперервна в точці x_0 .

Наслідок 2. Границя рівномірно збіжної на X послідовності неперервних на множині $A \subseteq X$ функцій є неперервною на A функцією.

Наслідок 3. Сума рівномірно збіжного на X ряду з неперервних на множині $A \subseteq X$ функцій є неперервною на A функцією.

Теорема 3. Нехай функції $u_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ мають неперервні похідні на $[a, b]$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ поточково збіжний на $[a, b]$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ рівномірно збіжний на $[a, b]$ і $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Тоді функція S диференційовна на $[a, b]$, причому

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

для кожного $x \in [a, b]$.

Наслідок 4. Нехай функції $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ мають неперервні похідні на $[a, b]$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ поточково збігається до функції f на $[a, b]$, а послідовність $(f'_n)_{n=1}^{\infty}$ рівномірно збігається на $[a, b]$. Тоді функція f диференційовна на $[a, b]$ і

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

для кожного $x \in [a, b]$.

Довести неперервність суми ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на множині X , якщо:

1. $u_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^2}}, X = \mathbb{R};$
2. $u_n(x) = \arcsin \frac{1}{n^2 + x^4}, X = \mathbb{R};$
3. $u_n(x) = x^4 e^{-nx}, X = [0, +\infty);$
4. $u_n(x) = x e^{-n^3 x}, X = [0, +\infty);$
5. $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^2 + \sqrt{n}}, X = [2, 5];$
6. $u_n(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \cos nx, X = [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}].$

Знайти область визначення D функції f і дослідити її на неперервність на D , якщо:

7. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x^7 - n^5)}{\sqrt[3]{n^5 + x^2}};$
8. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\ln x)}{\sqrt[4]{n^5 + x}};$
9. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x^2} \cos nx;$
10. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n^2};$
11. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{n}\right)^n;$
12. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n;$
13. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{1 + n^x}};$
14. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x};$
15. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1 + x^2)^n};$
16. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1 + n^x}.$

Знайти область визначення D функції f і дослідити її на диференційовність на D , якщо:

17. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x + n}{e^n};$
18. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n^5}};$
19. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x + n)}{2^n + x^2};$
20. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3}{e^{nx}};$
21. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n + x};$
22. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + x^2}.$

Знайти границі:

$$23. \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{x^n}{x^n + 1};$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+x}{n(n+1)+x};$$

$$27. \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2 x^2};$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}).$$

$$24. \lim_{x \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x};$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2 + x};$$

$$28. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n(n+1)x};$$

4.4. Область збіжності степеневих рядів

Нехай $x_0 \in \mathbb{R}$ і $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ – фіксована послідовність дійсних чисел. Функціональний ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots \quad (2)$$

називається *степеневим рядом з центром у точці x_0* . Якщо $x_0 = 0$, то отримуємо такий степеневий ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

Множина тих $x \in \mathbb{R}$, для яких ряд (3) збігається, називається *областю збіжності* цього ряду.

Радіусом збіжності степеневого ряду (3) називається число R , яке обчислюється за допомогою *формули Коші–Адамара*

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

або *формули Даламбера–Адамара*

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Теорема 1. Ряд (3) абсолютно збігається при $|x - x_0| < R$ і розбігається при $|x - x_0| > R$.

Множина $(x_0 - R, x_0 + R)$ називається *інтервалом збіжності* степеневого ряду (3).

Знайти області збіжності таких степеневих рядів:

- | | |
|---|--|
| 1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n;$ | 2. $\sum_{n=0}^{\infty} (x+2)^{2n-1};$ |
| 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n\sqrt{n}};$ | 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2};$ |
| 5. $\sum_{n=0}^{\infty} 10^n (x-3)^n;$ | 6. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x-1)^n;$ |
| 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^{n-1}};$ | 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n} \cdot 2^n};$ |

$$\begin{aligned}
9. & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n + 4^n}; \\
11. & \sum_{n=0}^{\infty} n! (x + \pi)^n; \\
13. & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}; \\
15. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} x^n; \\
17. & \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^n (x-1)^n; \\
19. & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} x^n; \\
21. & \sum_{n=0}^{\infty} 3^n (n^3 + 3) (x+3)^{3n}; \\
23. & \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{n^2}; \\
25. & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n + (-3)^n}{n+1} x^n; \\
27. & \sum_{n=0}^{\infty} [2 + (-1)^n]^n (x-1)^n; \\
29. & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[1 + 4 \sin \frac{2\pi n}{3}]^n}{\ln(n+1)} x^n; \\
31. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} (x+2)^n; \\
33. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n; \\
35. & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a\sqrt{n}}, \quad a > 0; \\
37. & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n}, \quad a, b > 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10. & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n + 3^n}; \\
12. & \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! x^n; \\
14. & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-e)^n}{n!}; \\
16. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} (x+1)^n; \\
18. & \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{6n-1} \right)^n (x-5)^n; \\
20. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n} x^n; \\
22. & \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x^{2(n-1)}; \\
24. & \sum_{n=0}^{\infty} 4^n (x+4)^{n^2}; \\
26. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} x^n; \\
28. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{[3 + (-1)^n]^n}; \\
30. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 + 2 \cos \frac{n\pi}{4}]^n}{\ln n} x^n; \\
32. & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2)^{2n}}{2n \cdot (2n)!}; \\
34. & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}} x^n; \\
36. & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n, \quad a > 1; \\
38. & \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) x^n, \quad a, b > 0.
\end{aligned}$$

4.5. Формула Тейлора і розклад функцій у степеневі ряди

Нехай $x_0 \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ і

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

Коефіцієнти a_k цього многочлена обчислюються за формулами

$$a_k = \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Тому його можна подати у вигляді

$$p(x) = p(x_0) + p'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

який називається *формулою Тейлора для многочлена* $p(x)$.

Теорема 1. Нехай функція f визначена і $(n - 1)$ разів диференційовна в деякому околі точки x_0 , а також існує $f^{(n)}(x_0)$. Тоді при $x \rightarrow x_0$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Остання формула називається *формулою Тейлора для функції* f із залишковим членом у формі Пеано.

Теорема 2. Нехай функція f визначена і $(n + 1)$ разів диференційовна в деякому околі точки x_0 . Тоді для всіх x із цього околу

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c_x)(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!},$$

де точка c_x лежить між точками x_0 та x .

Остання формула називається *формулою Тейлора для функції* f із залишковим членом у формі Лагранжа.

Якщо $x_0 = 0$, то відповідні формули Тейлора називаються *формулами Маклорена* для многочлена p або функції f .

Якщо функція f визначена в деякому околі точки x_0 і має в цій точці похідні всіх порядків, то степеневий ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (3)$$

називається *рядом Тейлора функції* f у точці x_0 . Якщо $x_0 = 0$, то відповідний ряд (3) називають *рядом Маклорена*.

Теорема 1. Якщо існує така стала, що функція f та всі її похідні обмежені за модулем цією сталою в деякому інтервалі $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, то функція f подається у кожній точці $x \in I$ збіжним до неї рядом Тейлора, тобто

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Основні елементарні функції розкладаються в наведені нижче ряди Маклорена.

1) Показникова функція: для $x \in \mathbb{R}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

2) Тригонометричні функції: для $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

3) Гіперболічні функції: для $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

4) Логарифмічна функція: для $x \in (-1, 1]$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

5) Степенева функція: для $x \in (-1, 1)$

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{p(p-1) \dots (p-n+1)}{n!} x^n + \dots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1) \dots (p-n+1)}{n!} x^n.$$

Користуючись розкладами основних елементарних функцій у степеневі ряди, розкласти в ряди Маклорена такі функції та знайти радіуси збіжності цих рядів:

1. e^{-x^2} ;

2. e^{-x^3} ;

3. $e^{-3x} + 3e^x$;

4. $e^{2x} + 2e^{-x}$;

5. $(1+x)e^{-x}$;

6. $e \cdot e^{x^2} \cdot e^{2x}$;

7. $\sin \frac{x^3}{3}$;

8. $\cos(2x^2)$;

9. $\cos^2 x$;

10. $\sin^2 x$;

11. $\frac{1}{2}(\operatorname{sh} x + \sin x)$;

12. $\frac{1}{2}(\operatorname{ch} x - \cos x)$;

13. $\sin 3x \sin 5x$;

14. $\cos 5x \cos 7x$;

15. $\sin x \cos^2 x$;

16. $x \sin 2x \cos 3x$;

17. $x \cos^3 2x$;

18. $\sin^3 x$;

19. $\frac{x^2}{(1+x)^2}$;

20. $\frac{1}{(1-x^3)^2}$;

21. $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$;

22. $\frac{x^3}{\sqrt{1-2x}}$;

23. $\ln(1+x^4)$;

24. $x \ln(1-3x^2)$;

25. $x^2 \ln(4+x^2)$;

26. $(1-x) \ln(1-x)$;

27. $\ln \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$;

28. $\ln \sqrt[4]{\frac{x+2}{2-x}}$;

29. $\ln \frac{3-2x}{2+3x}$;

30. $\ln(12-x-x^2)$;

31. $\ln \frac{2+x^2}{\sqrt{1-2x^2}}$;

32. $\ln \frac{2+x^2}{1-x}$;

33. $\frac{1}{2x+3}$;

34. $\frac{5x-4}{x+2}$;

35. $\frac{1}{x^2+4}$;

36. $\frac{1}{4x^2+25}$;

$$37. \frac{1}{x^2 - 2x - 3};$$

$$39. \operatorname{arctg} x;$$

$$41. \arccos x;$$

$$43. (x^2 - 1) \arcsin 2x^2;$$

$$45. x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2};$$

$$47. x \ln(x + \sqrt{x^2 + 2});$$

$$49. x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2};$$

$$38. \frac{1}{2x^2 + 5x - 3};$$

$$40. (1 + x^2) \operatorname{arctg} x;$$

$$42. x \arcsin x;$$

$$44. x^2 \arccos 2x;$$

$$46. x \arccos x - \sqrt{1 - x^2};$$

$$48. x \ln(x^2 + \sqrt{x^4 + 9});$$

$$50. x \sqrt{x^2 + 4} + 4 \ln(x + \sqrt{x^2 + 4}).$$

Обчислити суми та вказати області збіжності таких рядів:

$$51. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n!};$$

$$52. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^n x}{2^n n!};$$

$$53. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^{2n+1}(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{(2n + 1)!};$$

$$54. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^{2n}(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{(2n)!}.$$

За допомогою почленного диференціювання знайти суми наведених нижче рядів та вказати області збіжності цих рядів:

$$55. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n + 1};$$

$$56. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n + 1};$$

$$57. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n}}{3n + 1};$$

$$58. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n + 1};$$

$$59. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2};$$

$$60. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n + 1)};$$

Розділ V. Невизначений інтеграл

5.1. Первісна, невизначений інтеграл, простіші методи інтегрування

Функція $F(x)$ називається *первісною до функції $f(x)$ на проміжку X* , якщо $F'(x) = f(x)$ для кожного $x \in X$.

Теорема 1. *Нехай $F(x)$ – первісна до функції $f(x)$ на проміжку X . Тоді функція $G(x)$ є первісною до функції $f(x)$ на проміжку X тоді і тільки тоді, коли існує $C \in \mathbb{R}$, таке, що $G(x) = F(x) + C$ для кожного $x \in X$.*

Сукупність усіх первісних до функції $f(x)$ на проміжку X називається *невизначеним інтегралом від функції f* і позначається $\int f(x)dx$. Згідно з теоремою 1, невизначений інтеграл має такий вигляд:

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

де $F(x)$ – деяка первісна до функції $f(x)$ і $C \in \mathbb{R}$ – довільна стала.

Властивості невизначеного інтеграла.

1. $d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx$;
2. $\int d(F(x)) = F(x) + C$;
3. $\int af(x) dx = a \int f(x) dx$;
4. $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$;
5. Якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$ і $a \neq 0$, то $\int f(ax + b) dx = F(ax + b) + C$.

Таблиця основних інтегралів.

- | | |
|---|---|
| 1. $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, \text{ де } p \neq -1$; | 2. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$; |
| 3. $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$; | 4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$; |
| 5. $\int e^x dx = e^x + C$; | 6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$; |
| 7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$; | 8. $\int \cos x dx = \sin x + C$; |
| 9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$; | 10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$; |
| 11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$; | 12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$; |
| 13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$; | 14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$; |
| 15. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left \frac{1+x}{1-x} \right + C$; | 16. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C$; |
| 17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln x + \sqrt{x^2+a} + C, \text{ де } a \neq 0$; | |
| 18. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$; | 19. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$; |
| 20. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$; | 21. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$. |

За допомогою таблиці інтегралів знайти нижчеподані невизначені інтеграли:

$$1. \int (2 + 4x^3 - 3x^2) dx;$$

$$3. \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx;$$

$$5. \int \left(3\sqrt[4]{x^3} - \frac{2}{\sqrt{x^5}} \right) dx;$$

$$7. \int \left(\frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x^3} \right) dx;$$

$$9. \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx;$$

$$11. \int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx;$$

$$13. \int (2^x + 3^x)^2 dx;$$

$$15. \int \frac{3e^{2x} - e^x + 2^x}{e^x} dx;$$

$$17. \int (1 + \sin x + \cos x) dx;$$

$$19. \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx;$$

$$21. \int \operatorname{tg}^2 x dx;$$

$$23. \int \frac{x^2}{1+x^2} dx;$$

$$25. \int \frac{x^2+3}{x^2-1} dx;$$

$$27. \int \frac{dx}{x+2};$$

$$29. \int \frac{x}{x+4} dx;$$

$$31. \int (x+1)^{100} dx;$$

$$2. \int (7x^6 - 2x + 11) dx;$$

$$4. \int \left(\frac{2}{x^3} - \sqrt[3]{x} \right) dx;$$

$$6. \int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + 5\sqrt[6]{x^7} \right) dx;$$

$$8. \int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx;$$

$$10. \int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx;$$

$$12. \int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \sqrt{x\sqrt{x}} dx;$$

$$14. \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx;$$

$$16. \int \frac{25^x - 4e^{3x}}{e^{2x}} dx;$$

$$18. \int (2 \cos x - 3 \sin x) dx;$$

$$20. \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx;$$

$$22. \int \operatorname{ctg}^2 x dx;$$

$$24. \int \frac{2x^2 - 3}{4+x^2} dx;$$

$$26. \int \frac{3x^2+1}{9-x^2} dx;$$

$$28. \int \frac{dx}{3x-5};$$

$$30. \int \frac{x+1}{2x+3} dx;$$

$$32. \int (2x-3)^{10} dx;$$

33. $\int \frac{dx}{4+9x^2};$
35. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}};$
37. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}};$
39. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-3}};$
41. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x^2}};$
43. $\int (e^{-x}+e^{-2x})dx;$
45. $\int \sin 3x \, dx;$
47. $\int \frac{dx}{1+\cos x};$
49. $\int \sin^2 x \, dx;$
51. $\int \frac{dx}{\cos^2(5x+\frac{\pi}{4})};$
53. $\int (\sin 5x - \sin 2x) \, dx;$
55. $\int \sin 3x \cos 5x \, dx;$
57. $\int (\operatorname{sh}(2x-1) + \operatorname{ch}(2x+1)) \, dx;$
59. $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} \, dx;$
34. $\int \frac{dx}{1+16x^2};$
36. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4-1}};$
38. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}};$
40. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}};$
42. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+7}};$
44. $\int e^{-3x+4}dx;$
46. $\int \cos 5x \, dx;$
48. $\int \frac{dx}{1-\cos x};$
50. $\int \cos^2 x \, dx;$
52. $\int \frac{dx}{\sin^2(2x+\frac{\pi}{3})};$
54. $\int (\cos 4x - \cos 3x) \, dx;$
56. $\int \cos 6x \cos 8x \, dx;$
58. $\int (\operatorname{ch} 7x - \operatorname{sh} 3x) \, dx;$
60. $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}} \, dx.$

5.2. Внесення під знак диференціала і заміна змінної в невизначеному інтегралі

Теорема Нехай $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $x = \varphi(t)$ – диференційовна функція. Тоді $\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C$.

Цей факт може бути записаний у вигляді

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \stackrel{x=\varphi(t)}{=} \int f(x) dx$$

і називається *формулою заміни змінної у невизначеному інтегралі*.

Використання формули заміни змінної у вигляді $\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int f(\varphi(x)) d(\varphi(x))$ називається *внесенням під знак диференціала*.

Перехід від інтеграла $\int f(x) dx$ при заміні змінної $x = \varphi(t)$ до інтеграла $\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ називається *підстановкою*.

Використовуючи внесення під знак диференціала елементарних функцій, знайти інтеграли:

- | | |
|--|---|
| 1. $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx;$ | 2. $\int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} dx;$ |
| 3. $\int x^4 \cdot \sqrt{4 + x^5} dx;$ | 4. $\int x^3 \cdot \sqrt[5]{x^4 + 1} dx;$ |
| 5. $\int \frac{\ln x}{x} dx;$ | 6. $\int \frac{\sqrt{\ln x + 1}}{x} dx;$ |
| 7. $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx;$ | 8. $\int \cos^2 x \cdot \sin x dx;$ |
| 9. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx;$ | 10. $\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx;$ |
| 11. $\int \operatorname{tg} x dx;$ | 12. $\int \operatorname{ctg} x dx;$ |

$$\begin{array}{ll}
13. \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx; & 14. \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}; \\
15. \int x e^{-x^2} dx; & 16. \int x^2 e^{-x^3} dx; \\
17. \int \frac{e^x}{1 + e^x} dx; & 18. \int \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 2}} dx; \\
19. \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}; & 20. \int \frac{dx}{e^x - e^{-x}}; \\
21. \int \frac{\arctg^2 x}{1 + x^2} dx; & 22. \int \frac{\sqrt[4]{\arcsin^3 x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx; \\
23. \int \frac{dx}{\arcsin^3 x \sqrt{1 - x^2}}; & 24. \int \frac{\sqrt{\arctg x}}{x^2 + 1} dx;
\end{array}$$

Використовуючи формулу заміни змінної, знайти такі інтеграли:

$$\begin{array}{ll}
25. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}; & 26. \int \frac{dx}{2 + \sqrt{x + 1}}; \\
27. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}; & 28. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 1}}; \\
29. \int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x}}; & 30. \int e^x \cdot \sqrt{1 - e^x} dx; \\
31. \int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x \ln x} dx; & 32. \int \frac{\ln x dx}{x \sqrt{2 + \ln x}}; \\
33. \int \frac{\sqrt{x}}{x + 1} dx; & 34. \int \frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{e^x + 1}} dx.
\end{array}$$

Використовуючи тригонометричні ($x = a \sin t$, $x = a \operatorname{tg} t$) або гіперболічні ($x = a \operatorname{sh} t$, $x = a \operatorname{ch} t$) підстановки, знайдіть інтеграли:

$$\begin{array}{ll}
35. \int \sqrt{1 - x^2} dx; & 36. \int \sqrt{4 - x^2} dx; \\
37. \int \sqrt{1 + x^2} dx; & 38. \int \sqrt{9 + x^2} dx; \\
39. \int \sqrt{x^2 - 1} dx; & 40. \int \sqrt{x^2 - 16} dx; \\
41. \int \frac{dx}{(9 - x^2)^{\frac{3}{2}}}; & 42. \int \frac{dx}{(4 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{array}$$

5.3. Інтегрування частинами у невизначеному інтегралі

Нехай u і v – диференційовні функції. Тоді має місце рівність

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du,$$

яка називається *формулою інтегрування частинами*.

Для знаходження інтеграла $\int f(x)g(x) \, dx$ зручно використовувати формулу інтегрування частинами у таких випадках.

1. Якщо $f(x)$ многочлен, а $g(x)$ функція вигляду e^{ax} , $\sin ax$ або $\cos ax$. При цьому функцію $g(x)$ вносять під знак диференціала і з допомогою формули інтегрування частинами переходять до подібного інтеграла, у якому степінь многочлена менший, ніж у вихідного.

2. Якщо $f(x) = x^p$, де $p \neq -1$, а $g(x)$ функція вигляду $\ln x$, $\arcsin x$ або $\arctg x$. При цьому функцію $f(x)$ вносять під знак диференціала і за допомогою формули інтегрування частинами переходять до інтеграла, у якого підінтегральний вираз не містить логарифмічної чи оберненої тригонометричної функції.

3. Якщо $f(x) = e^{ax}$, а $g(x)$ функція вигляду $\sin bx$ або $\cos bx$. При цьому двічі використовують формулу інтегрування частинами, вносячи під знак диференціала функцію $f(x)$ або $g(x)$, і переходять до такого ж інтеграла, одержуючи в такий спосіб рівняння відносно нього.

Для знаходження інтегралів $I_{n+1} = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$ при $n \in \mathbb{N}$ використовують рекурентну формулу

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n,$$

яка одержується інтегруванням частинами інтеграла I_n .

За допомогою формули інтегрування частинами знайти невизначені інтеграли:

- | | |
|-----------------------------|----------------------------|
| 1. $\int x \sin x \, dx;$ | 2. $\int x \cos x \, dx;$ |
| 3. $\int x e^x \, dx;$ | 4. $\int x \cos 2x \, dx;$ |
| 5. $\int x e^{-x} \, dx;$ | 6. $\int x 3^x \, dx;$ |
| 7. $\int x^2 e^{-x} \, dx;$ | 8. $\int x^3 e^x \, dx;$ |

- | | |
|--|---|
| 9. $\int x \cos^2 x \, dx;$ | 10. $\int x^2 \sin^2 3x \, dx;$ |
| 11. $\int \ln x \, dx;$ | 12. $\int x \ln x \, dx;$ |
| 13. $\int x^2 \ln x \, dx;$ | 14. $\int x^n \ln x \, dx;$ |
| 15. $\int \ln(x^2 + 1) \, dx;$ | 16. $\int \ln^2 x \, dx;$ |
| 17. $\int x^3 \ln^2 x \, dx;$ | 18. $\int x^2 \ln^3 x \, dx;$ |
| 19. $\int x \operatorname{arctg} x \, dx;$ | 20. $\int \arccos x \, dx;$ |
| 21. $\int x \operatorname{arctg}^2 x \, dx;$ | 22. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} \, dx;$ |
| 23. $\int \frac{x \, dx}{\cos^2 x};$ | 24. $\int \frac{x \, dx}{\sin^2 x}.$ |

За допомогою формули інтегрування частинами одержати рівняння відносно нижченаведених інтегралів і знайти їх:

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| 25. $\int e^x \sin x \, dx;$ | 26. $\int e^x \cos x \, dx;$ |
| 27. $\int e^{2x} \cos 3x \, dx;$ | 28. $\int e^{-x} \sin 2x \, dx;$ |
| 29. $\int \sin(\ln x) \, dx;$ | 30. $\int \cos(\ln x) \, dx.$ |

За допомогою формули інтегрування частинами вивести рекурентну формулу і знайти такі інтеграли:

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| 31. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2};$ | 32. $\int \frac{dx}{(4+x^2)^2}$ |
| 33. $\int \frac{dx}{(9+x^2)^3};$ | 34. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^3};$ |
| 35. $\int \frac{dx}{(3+x^2)^4};$ | 36. $\int \frac{dx}{(5+x^2)^4}.$ |

5.4. Інтегрування раціональних функцій

Функція $R(x)$ вигляду $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ – деякі многочлени, називається *раціональною функцією*. Раціональна функція $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ називаються *правильним раціональним дробом*, якщо степінь многочлена $P(x)$ менший, ніж степінь многочлена $Q(x)$.

Серед правильних раціональних дробів розрізняють *прості дроб*и таких чотирьох типів:

- 1) $\frac{A}{x-a}$ – *простий дріб першого типу*;
- 2) $\frac{A}{(x-a)^n}$, де $n = 2, 3, \dots$, – *простий дріб другого типу*;
- 3) $\frac{Bx+D}{x^2+px+q}$, де $x^2 + px + q$ – незвідний квадратний тричлен, – *простий дріб третього типу*;
- 4) $\frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^n}$, де $x^2 + px + q$ – незвідний квадратний тричлен і $n = 2, 3, \dots$, – *простий дріб четвертого типу*.

Теорема. Довільний правильний раціональний дріб можна подати у вигляді скінченної суми простих дробів.

Прості дробы 1 - 4-го типів інтегруються так:

$$1) \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + C;$$

$$2) \int \frac{A}{(x-a)^n} dx = \frac{A}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C;$$

$$3-4) \quad \text{інтеграл} \quad \int \frac{Bx+D}{(x^2+px+q)^n} dx \quad \text{подаємо у вигляді суми}$$

$$\frac{B}{2} \int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n} dx + \left(D - \frac{Bp}{2}\right) \int \frac{dx}{\left((x+\frac{p}{2})^2 + (q-\frac{p^2}{4})\right)^n},$$

перший доданок в якій зводиться до табличного інтеграла (аналогічно, як при інтегруванні дробів першого і другого типів), а другий – до знаходження інтеграла $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} dx$.

Схема інтегрування довільної раціональної функції $R(x)$

I. Раціональну функцію $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ подаємо у вигляді суми многочлена $S(x)$ і правильного раціонального дробу $R_1(x) = \frac{P_1(x)}{Q(x)}$ (виділення цілої частини).

II. Знаменник $Q(x)$ дробу $R_1(x)$ розкладаємо у добуток взаємно простих незвідних множників

$$Q(x) = (x-a_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{m_1} \cdot \dots \quad (1)$$

III. Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів правильний раціональний дріб $R_1(x)$ розкладаємо у суму простих дробів, породжених множниками $(x-a_1)^{n_1}, \dots, (x^2+p_1x+q_1)^{m_1}, \dots$.

IV. Інтегруємо многочлен $S(x)$ і прості дробы з розкладу, одержаного на попередньому кроці, і знаходимо суму цих інтегралів.

Розклавши на прості дроби відповідний правильний дріб, знайти невизначені інтеграли:

1. $\int \frac{1}{x(x-1)} dx;$
2. $\int \frac{1}{x(x+1)} dx;$
3. $\int \frac{1}{(x+1)(2x-3)} dx;$
4. $\int \frac{1}{(x-2)(3x+1)} dx;$
5. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx;$
6. $\int \frac{x}{(x+1)(2x+1)} dx;$
7. $\int \frac{1}{x^2-7x+10} dx;$
8. $\int \frac{1}{x^2+3x-10} dx;$
9. $\int \frac{2x^3-11x^2+4x+6}{x^2-6x+5} dx;$
10. $\int \frac{x^4+5x^3+4x^2+13}{x^2+5x+6} dx;$
11. $\int \frac{(2x^2+41x-91) dx}{(x-1)(x+3)(x-4)};$
12. $\int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)};$
13. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx;$
14. $\int \frac{3x^2+10x}{(x+2)(x^2-4)} dx;$
15. $\int \frac{4x}{x^4-2x^2+1} dx;$
16. $\int \frac{2x^2+8}{x^4-8x^2+16} dx;$
17. $\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2} dx;$
18. $\int \frac{8x^2-36}{x^4-18x^2+81} dx;$
19. $\int \frac{(2x^3+6x) dx}{x^6-3x^4+3x^2-1};$
20. $\int \frac{(12x^2+16) dx}{x^6-12x^4+48x^2-64};$
21. $\int \frac{x^5-6x^4+13x^2+11x-7}{(x-1)^3(x-2)^2(x-3)} dx;$
22. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3};$
23. $\int \frac{dx}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1};$

- | | |
|---|--|
| 24. $\int \frac{dx}{x^4 + 3x^2 + 2};$ | 25. $\int \frac{(16x + 8) dx}{x^4 + 10x^2 + 9};$ |
| 26. $\int \frac{(x^2 + 5x + 4) dx}{x^4 + 5x^2 + 4};$ | 27. $\int \frac{dx}{(x + 1)(x^2 + 1)};$ |
| 28. $\int \frac{dx}{x^3 + 1};$ | 29. $\int \frac{x dx}{x^3 - 1};$ |
| 30. $\int \frac{x^4 + 3}{x^4 - 1} dx;$ | 31. $\int \frac{2x^2 dx}{x^4 - 16};$ |
| 32. $\int \frac{2(x^2 + 1)dx}{x^4 + 1};$ | 33. $\int \frac{4x dx}{x^4 + 4};$ |
| 34. $\int \frac{(x^2 + 2x - 1) dx}{x(x + 1)(x^2 + 1)};$ | 35. $\int \frac{(x^2 + x + 2) dx}{x(x - 1)(x^2 + 1)};$ |
| 36. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2};$ | 37. $\int \frac{dx}{(x^2 + 4)^2};$ |
| 38. $\int \frac{dx}{(x^2 + 9)^3};$ | 39. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^4}.$ |

5.5. Інтегрування ірраціональних функцій

Нехай $R(u, v)$ – раціональна функція двох змінних, тобто $R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)}$, де $P(u, v)$ і $Q(u, v)$ – деякі поліноми.

Інтегрування простіших ірраціональностей

Інтеграл $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, де $n \in \mathbb{N}$, за допомогою заміни $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ зводиться до інтеграла від деякої раціональної функції.

Інтегрування з допомогою підстановок Ейлера

Інтеграл $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$ зводиться до інтеграла від деякої раціональної функції за допомогою таких підстановок Ейлера:

- 1) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}x + t$, якщо $a > 0$;
- 2) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$, якщо $c > 0$;
- 3) $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1)$, якщо $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$.

Інтегрування біноміальних диференціалів

Інтеграл $\int x^m(a + bx^n)^p dx$, де $m, n, p \in \mathbb{Q}$, за допомогою вказаних підстановок можна звести до інтеграла від деякої раціональної функції у наступних випадках:

- 1) якщо $p \in \mathbb{Z}$ (підстановка $x = t^N$, де N – спільний знаменник дробів m і n);
- 2) $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ (підстановка $a + bx^n = t^N$, де N – знаменник дробу p);
- 3) $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ (підстановка $\frac{a+bx^n}{x^n} = t^N$, де N – знаменник дробу p).

Зводячи до інтегралів від раціональних функцій, знайти невідзначені інтеграли:

- | | |
|--|--|
| 1. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}};$ | 2. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x}};$ |
| 3. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{1 - \sqrt[4]{x+1}} dx;$ | 4. $\int \frac{\sqrt[6]{x-1}}{2 + \sqrt[3]{x-1}} dx;$ |
| 5. $\int \frac{2\sqrt[4]{x+2} + 3}{(x+2)\sqrt[4]{x+2} + 2x - \sqrt{x+2}\sqrt[4]{x+2} + 4} dx;$ | |
| 6. $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})};$ | 7. $\int \frac{dx}{x(1 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})};$ |
| 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}};$ | 9. $\int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx;$ |
| 10. $\int \frac{dx}{(1 + \sqrt[4]{x})\sqrt[3]{x}};$ | 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x}};$ |

12. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx;$
13. $\int \sqrt{\frac{2+x}{x-2}} dx;$
14. $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} dx;$
15. $\int \sqrt[3]{\frac{3+x}{x-1}} dx;$
16. $\int \frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}} dx;$
17. $\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx;$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}};$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}};$
20. $\int \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} dx;$
21. $\int \sqrt{\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[3]{x}}} dx;$
22. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}};$
23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x-4}}.$

Використовуючи підстановки Ейлера, знайти такі інтеграли:

24. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}};$
25. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}};$
26. $\int \frac{dx}{1-\sqrt{x^2+x+1}};$
27. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}};$
28. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}};$
29. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-x^2-4}}.$

Знайти такі інтеграли від біноміальних диференціалів:

30. $\int \sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})^4 dx;$
31. $\int \frac{dx}{x(1 + \sqrt[3]{x})};$
32. $\int \sqrt{x} \sqrt[3]{2 - \sqrt{x}} dx;$
33. $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx;$
34. $\int \frac{dx}{x \sqrt[3]{x^2 + 1}};$
35. $\int x^5 \sqrt[3]{(1 + x^3)^2} dx;$
36. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}};$
37. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x^4}};$
38. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^3}};$
39. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}};$
40. $\int x \sqrt[3]{1 + x^3} dx;$
41. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}.$

5.6. Інтегрування тригонометричних функцій

Нехай $R(u, v)$ – довільна раціональна функція двох змінних.

Універсальна тригонометрична підстановка

Інтеграл $\int R(\cos x, \sin x) dx$ за допомогою заміни $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, яка називається *універсальною тригонометричною підстановкою*, зводиться до інтеграла від деякої раціональної функції.

Спеціальні випадки інтегрування тригонометричних виразів

Для знаходження інтеграла $\int R(\cos x, \sin x) dx$ при виконанні деяких додаткових умов на раціональну функцію R зручніше використовувати наступні підстановки:

- 1) $t = \sin x$, якщо $R(-u, v) = -R(u, v)$;
- 2) $t = \cos x$, якщо $R(u, -v) = -R(u, v)$;
- 3) $t = \operatorname{tg} x$, якщо $R(-u, -v) = R(u, v)$.

Знайти інтеграли від тригонометричних функцій:

- | | |
|---|---|
| 1. $\int \sin^2 x \cos^5 x dx$; | 2. $\int \cos^5 x dx$; |
| 3. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$; | 4. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx$; |
| 5. $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$; | 6. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}$; |
| 7. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$; | 8. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$; |
| 9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 4 \cos^2 x}$; | 10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x - 9 \sin^2 x}$; |
| 11. $\int \sin^4 x dx$; | 12. $\int \cos^6 x dx$; |
| 13. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$; | 14. $\int \cos^2 x \sin^4 x dx$; |
| 15. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^5 x}} dx$; | 16. $\int \cos x \sqrt[7]{\sin^2 x} dx$; |
| 17. $\int \operatorname{tg}^5 x dx$; | 18. $\int \operatorname{ctg}^6 x dx$. |

Використовуючи відповідні тригонометричні підстановки, знайти:

$$19. \int \frac{dx}{(1 + \cos x) \sin x};$$

$$20. \int \frac{dx}{(1 - \sin x) \cos x};$$

$$21. \int \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^3 x - 2 \sin^2 x \cos x} dx;$$

$$22. \int \frac{2 + \cos^2 x}{2 \sin^3 x + \sin x \cos^2 x} dx;$$

$$23. \int \frac{dx}{1 + \cos^2 x};$$

$$24. \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x};$$

$$25. \int \frac{\sin x \cos x dx}{\sin x + \cos x};$$

$$26. \int \frac{\sin x \cos x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x};$$

$$27. \int \frac{dx}{\sin x + \cos x};$$

$$28. \int \frac{dx}{\sin x - \cos x};$$

$$29. \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5};$$

$$30. \int \frac{dx}{3 \cos x - \sin x - 1};$$

$$31. \int \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x} dx;$$

$$32. \int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx;$$

$$33. \int \frac{dx}{4 \sin^2 x + 25 \cos^2 x};$$

$$34. \int \frac{dx}{1 - 16 \cos^2 x};$$

$$35. \int \frac{2 \sin^3 x + \cos^2 x \sin 2x}{\sin^4 x + 3 \cos^2 x} dx;$$

$$36. \int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx.$$

Розділ VI. Визначений інтеграл і його застосування

6.1. Формула Ньютона–Лейбніца

Нехай на відрізку $[a; b]$ визначена деяка функція f . Множина $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ точок відрізка $[a; b]$ називається *розбиттям* цього відрізка на n частин, якщо

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Якщо $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$, то число

$$\lambda(P) = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$$

називається *параметром розбиття* P .

Для довільного розбиття P відрізка $[a; b]$ на n частин та довільного набору $T = \{\tau_k : \tau_k \in [x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, \dots, n\}$ *відмічених точок* відрізка $[a; b]$ відповідною *інтегральною сумою функції* f називається така сума:

$$\sigma_{P,T}(f) = \sum_{k=1}^n f(\tau_k) \Delta x_k.$$

Якщо існує скінченна границя $\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sigma_{P,T}(f) = I$, яка не залежить ні від розбиття P відрізка $[a; b]$, ні від вибору відмічених точок T , то функція f називається *інтегровною на відрізку* $[a; b]$, а число I називається *визначеним інтегралом від f по $[a; b]$* і позначається через $\int_a^b f(x) dx$. Отже,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\tau_k) \Delta x_k.$$

Теорема 1 (необхідна умова інтегровності функції). *Якщо f інтегровна на відрізку $[a; b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.*

Нехай f обмежена на відрізку $[a; b]$, P – фіксоване розбиття відрізка $[a; b]$ на n частин і для $k = 1, 2, \dots, n$

$$m_k(P, f) = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x), \quad M_k(P, f) = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x),$$

$$\omega_k(P, f) = M_k(P, f) - m_k(P, f).$$

Число $\omega_k(P, f)$ називається *коливанням функції f на відрізку $[x_{k-1}; x_k]$* , а суми

$$\underline{s}_P(f) = \sum_{k=1}^n m_k(P, f) \Delta x_k \quad \text{та} \quad \bar{S}_P(f) = \sum_{k=1}^n M_k(P, f) \Delta x_k -$$

відповідно нижньою та верхньою сумами Дарбу функції f для розбиття P .

Теорема 2 (критерій інтегровності функції). *Обмежена на відрізку $[a; b]$ функція f інтегровна на цьому відрізку тоді й лише тоді, коли*

$$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} (\overline{S}_P(f) - \underline{s}_P(f)) \equiv \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \omega_k(P, f) \Delta x_k = 0.$$

Теорема 3. *Кожна неперервна на відрізку функція інтегровна на цьому відрізку.*

Теорема 4. *Кожна монотонна на відрізку функція інтегровна на цьому відрізку.*

Теорема 5. *Якщо обмежена на відрізку функція має на ньому лише скінченну кількість точок розриву, то вона інтегровна на цьому відрізку.*

Нехай функція f інтегровна на відрізку $[a; b]$. Тоді вона інтегровна на кожному відрізку $[a; x]$, $x \in [a; b]$. Тому на $[a; b]$ можна визначити функцію

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

яка називається *інтегралом зі змінною верхньою межею*.

Теорема 6. *Якщо f інтегровна на $[a; b]$, то Φ неперервна на $[a; b]$.*

Теорема 7. *Якщо f неперервна на $[a; b]$, то Φ диференційовна на $[a; b]$ і*

$$\Phi'(x) = f(x), \quad x \in [a; b].$$

Наслідок. *Кожна неперервна на проміжку функція має первісну функцію.*

Зауважимо, що не кожна первісна для неперервної функції виражається через елементарні функції. Наприклад, первісні для функцій e^{x^2} , $\sin x^2$, $\cos x^2$ через елементарні функції не виражаються.

Теорема 8 (Ньютона–Лейбніца). *Нехай функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, а F – одна з її первісних. Тоді*

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

1. Знайти інтегральну суму σ_n для функції $f(x) = x+1$ на відрізку $[-1; 4]$, розбиваючи його на n рівних відрізків і вибираючи за відмічені точки τ_k середини відповідних відрізків.

2. Знайти інтегральну суму σ_n для функції $f(x) = 2x$ на відрізку $[0; 2]$, розбиваючи його на n рівних відрізків і вибираючи за відмічені точки τ_k середини відповідних відрізків.
3. Для вказаних нижче функцій $f(x)$ знайти нижню $\underline{s}_n(f)$ та верхню $\overline{s}_n(f)$ суми Дарбу на відповідних відрізках, розбиваючи ці відрізки на n рівних частин:
- а) $f(x) = x^2, \quad x \in [1; 4];$ б) $f(x) = x^3, \quad x \in [-2; 3];$
 в) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x \in [0; 1];$ г) $f(x) = 2^x, \quad x \in [0; 10].$

Обчислити визначені інтеграли, розглядаючи їх як границі відповідних інтегральних сум:

4. $\int_{-1}^2 x^2 dx;$ 5. $\int_1^3 x^3 dx;$ 6. $\int_0^2 3^x dx;$ 7. $\int_0^1 a^x dx \quad (a > 0);$
8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx;$ 9. $\int_0^{\pi} \cos x dx;$ 10. $\int_1^4 \frac{dx}{x^2};$ 11. $\int_1^3 \frac{dx}{x};$
12. $\int_a^b x^m dx \quad (0 < a < b, \quad m \neq -1).$

13. Використовуючи формулу Ньютона–Лейбніца, обчислити наведені нижче визначені інтеграли:

а) $\int_{-1}^8 \sqrt[3]{x} dx;$ б) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1}};$ в) $\int_0^{\pi} \sin x dx;$

г) $\int_0^{\pi} \cos x dx;$ ґ) $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2};$ д) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$

е) $\int_0^2 |1-x| dx;$ є) $\int_{-2}^0 |x^2-1| dx;$ ж) $\int_{\text{sh } 1}^{\text{sh } 2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$

14. Обчислити:

а) $\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} dx;$ б) $\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx.$

15. Обчислити:

а) $\int_0^2 f(x) dx$, якщо $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2; \end{cases}$

б) $\int_0^1 f(x) dx$, якщо $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq t, \\ t \frac{1-x}{1-t}, & t < x \leq 1. \end{cases}$

За допомогою визначених інтегралів знайти такі границі:

16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right);$

17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right);$

18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right);$

19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{2}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right);$

20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{n+1}{n^3}} + \sqrt{\frac{n+2}{n^3}} + \dots + \sqrt{\frac{n+n}{n^3}} \right);$

21. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \left(\sqrt{n^2+1^2} + 2\sqrt{n^2+2^2} + \dots + n\sqrt{n^2+n^2} \right);$

6.2. Заміна змінної та інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Теорема 1. Нехай функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна, а функція $\varphi : [\alpha; \beta] \rightarrow [a; b]$ неперервно диференційовна, причому $\varphi(\alpha) = a$ і $\varphi(\beta) = b$. Тоді

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Теорема 2. Нехай функції u та v неперервно диференційовні на відрізку $[a; b]$. Тоді

$$\int_a^b u(x) dv(x) = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x).$$

Зауважимо, що формули заміни змінної та інтегрування частинами використовуються, як правило, у тих самих випадках, що й для невизначеного інтеграла.

Використовуючи відповідну заміну змінної, обчислити наведені нижче визначені інтеграли:

- | | |
|--|--|
| 1. $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}};$ | 2. $\int_1^9 x \sqrt[3]{1-x} dx;$ |
| 3. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx;$ | 4. $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}};$ |
| 5. $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx;$ | 6. $\int_0^1 x^{15} \sqrt{1+3x^8} dx;$ |
| 7. $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx;$ | 8. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}};$ |
| 9. $\int_0^{0,75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x^2}};$ | 10. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$ |

Використовуючи формулу інтегрування частинами, обчислити такі визначені інтеграли:

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------------|
| 11. $\int_0^1 x e^{2x} dx;$ | 12. $\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx;$ |
|-----------------------------|-----------------------------------|

$$13. \int_0^{\pi} x \sin x \, dx;$$

$$14. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x \, dx;$$

$$15. \int_0^{\pi} x^2 \cos 3x \, dx;$$

$$16. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx;$$

$$17. \int_{\frac{1}{e}}^e x \ln x \, dx;$$

$$18. \int_1^e x^2 \ln x \, dx;$$

$$19. \int_0^1 \arccos x \, dx;$$

$$20. \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x \, dx;$$

$$21. \int_0^1 x \arcsin x \, dx;$$

$$22. \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \arccos x \, dx;$$

$$23. \int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx;$$

$$24. \int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x \, dx;$$

$$25. \int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} \, dx;$$

$$26. \int_1^e x^2 \ln^2 x \, dx;$$

$$27. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \, dx;$$

$$28. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx.$$

29. Довести, що коли функція f неперервна і парна на $[-a; a]$, то

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx.$$

30. Довести, що коли функція f неперервна і непарна на $[-a; a]$,

$$\text{то } \int_{-a}^a f(x) \, dx = 0.$$

31. Довести, що одна з первісних для неперервної і парної на $[-a; a]$ функції є непарною функцією, а кожна первісна для неперервної і непарної на $[-a; a]$ функції є парною функцією.

32. Довести, що коли функція f неперервна і періодична з періо-

$$\text{дом } T > 0 \text{ на } \mathbb{R}, \text{ то для кожного } a \in \mathbb{R} \quad \int_a^{a+T} f(x) \, dx = \int_0^T f(x) \, dx.$$

6.3. Обчислення площ плоских фігур

Теорема 1. Нехай фігура P на декартовій площині обмежена прямими $x = a$ та $x = b$ і графіками неперервних на $[a; b]$ функцій $y = \varphi(x)$ та $y = \psi(x)$, причому $\varphi(x) \leq \psi(x)$ на $[a; b]$. Тоді площа $S(P)$ цієї фігури обчислюється за формулою

$$S(P) = \int_a^b [\psi(x) - \varphi(x)] dx.$$

Теорема 2. Нехай фігура P на полярній площині є криволінійним сектором, обмеженим променями $\varphi = \alpha$ та $\varphi = \beta$ і графіком неперервної на відрізку $[\alpha; \beta]$ функції $r = r(\varphi)$. Тоді площа $S(P)$ цієї фігури обчислюється за формулою

$$S(P) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Теорема 3. Нехай проста замкнена лінія L на декартовій площині задається параметричними рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, де φ і ψ – неперервно диференційовні на $[\alpha; \beta]$ функції. Якщо лінія L , що проходиться проти годинникової стрілки, обмежує зліва від себе фігуру P із площею $S(P)$, то

$$\begin{aligned} S(P) &= \int_{\alpha}^{\beta} x(t) y'(t) dt = - \int_{\alpha}^{\beta} y(t) x'(t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [x(t) y'(t) - y(t) x'(t)] dt. \end{aligned}$$

Знайти площі фігур, обмежених кривими, заданими в прямокутних декартових координатах:

1. $y = x^2$, $x = y^2$;
2. $y^2 + 8x = 16$, $y^2 - 24x = 48$;
3. $y = 2x - x^2$, $x + y = 0$;
4. $y = x^2$, $x + y = 2$;
5. $xy = 3$, $x + y = 4$;
6. $xy = a$, $x + y = a + 1$ ($a > 1$);
7. $y = x^2$, $3y = x^3$;
8. $y = x(x - 1)^2$, $y = 0$;
9. $x = y^2(y - 1)$, $x = 0$;
10. $y(1 + x^2) = 1$, $2y = x^2$;
11. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$);
12. $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ ($a > 0$);
13. $y = x$, $y = x + \sin^2 x$, $0 \leq x \leq \pi$;
14. $x = (y - 1)^2$, $x = 0$, $y = \sin(\pi x)$, $0 \leq x \leq 1$;
15. $y = |\ln x|$, $y = 0$, $x = \frac{1}{e}$, $x = e$;
16. $y = e^x$, $y = e$, $x = 0$;

17. $y^2 = 2px$, $27py^2 = 8(x - p)^3$ ($p > 0$);
18. $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$, $y = 0$ ($a > 0$);
19. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ (циссоїда), $x = 2a$ ($a > 0$);
20. $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ (трактриса) ($a > 0$), $y = 0$,
 $x = 0$.
21. Знайти площу фігури, яка обмежена параболою $y = -x^2 + 4x - 3$ і дотичними до неї в точках $(0; -3)$ і $(3; 0)$.
22. Знайти площі фігур, на які парабола $2y = x^2$ ділить круг $x^2 + y^2 \leq 8$.
23. Знайти площі фігур, на які парабола $y^2 = 6x$ ділить круг $x^2 + y^2 \leq 16$.

Знайти площі фігур, обмежених кривими, заданими в полярних координатах:

24. $r = a(1 + \cos \varphi)$ (кардіоїда) ($a > 0$); 25. $r = 3 + 2 \cos \varphi$;
 26. $r = 4 + \sin 2\varphi$; 27. $r = 3 + \cos 2\varphi$;
 28. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (лемніската) ($a > 0$); 29. $r = 2\sqrt{\sin 2\varphi}$;
 30. $r = a \sin 3\varphi$ (трилисник) ($a > 0$); 31. $r = 4 \cos 3\varphi$;
 32. $r = 3 + \cos 3\varphi$; 33. $r = 4 + \sin 3\varphi$;
 34. $r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}$ (парабола) ($p > 0$), $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$;
 35. $r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$ (еліпс) ($p > 0$, $0 < \varepsilon < 1$);
 36. $r = \frac{1}{\varphi}$, $r = \frac{1}{\sin \varphi}$, $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Переходячи до полярних координат, знайти площі фігур, обмежених лініями:

37. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ (лемніската) ($a > 0$);
 38. $x^3 + y^3 = 3axy$ (лист Декарта) ($a > 0$);
 39. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ ($a > 0$).

6.4. Обчислення довжин дуг кривих

Теорема 1. Нехай лінія L на декартовій площині задана явним рівнянням $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, причому функція f неперервно диференційовна на відрізку $[a; b]$. Тоді довжина $\ell(L)$ цієї лінії обчислюється за формулою

$$\ell(L) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Теорема 2. Нехай лінія L на декартовій площині задається параметричними рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, де φ і ψ – неперервно диференційовні на $[\alpha; \beta]$ функції. Тоді довжина $\ell(L)$ цієї лінії обчислюється за формулою

$$\ell(L) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Теорема 3. Нехай лінія L на полярній площині задана рівнянням $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, причому функція $r(\varphi)$ неперервно диференційовна на відрізку $[\alpha; \beta]$. Тоді довжина $\ell(L)$ цієї лінії обчислюється за формулою

$$\ell(L) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[r'(\varphi)]^2 + [r(\varphi)]^2} d\varphi.$$

Знайти довжини дуг кривих, заданих у прямокутних декартових координатах:

1. $y = x^{\frac{3}{2}}$, $0 \leq x \leq 4$;
2. $x^2 = y^3$, $0 \leq y \leq 1$;
3. $4y = x^2$, $-1 \leq x \leq 1$;
4. $y^2 = 2x$, $0 \leq x \leq 2$;
5. $y = \operatorname{ch} x$, $0 \leq x \leq \ln 3$;
6. $y = e^x$, $\ln 3 \leq 2x \leq \ln 8$;
7. $y = \ln x$, $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$;
8. $y = \ln(1 - x^2)$, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$;
9. $x = \frac{y^2 - 2 \ln y}{4}$, $1 \leq y \leq e$;
10. $x = 2 \ln \frac{4}{4 - x^2}$, $0 \leq x \leq 1$;
11. $y = \ln(\cos x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$;
12. $y = \ln(\sin x)$, $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$;
13. $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$;
14. $(y - \arcsin x)^2 = 1 - x^2$;
15. $y = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $0 < a \leq x \leq b$;
16. $x = 2 \ln \frac{2 + \sqrt{4 - y^2}}{y} - \sqrt{4 - y^2}$, $1 \leq y \leq 2$.

Знайти довжини дуг кривих, заданих параметричними рівняннями:

17. $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ (еліпс) ($a, b > 0$);

18. $x = a \cos^2 t, \quad y = b \sin^2 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (a, b > 0);$
19. $x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (\text{астроїда}) \quad (a > 0);$
20. $x = a \cos^4 t, \quad y = a \sin^4 t, \quad 0 \leq t \leq \pi \quad (a > 0);$
21. $x = a \cos^5 t, \quad y = a \sin^5 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (a > 0);$
22. $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (a > 0);$
23. $x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (a > 0);$
24. $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \quad y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi;$
25. $x = a(\operatorname{sh} t - t), \quad y = a(\operatorname{ch} t - 1), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (a > 0);$
26. $x = \frac{9}{5} \cos^3 t, \quad y = \frac{9}{4} \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

Знайти довжини дуг кривих, заданих у полярних координатах:

27. $r = a \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (\text{спіраль Архімеда}) \quad (a > 0);$
28. $r = a e^\varphi, \quad 0 < r < a \quad (a > 0);$
29. $r = a(1 + \cos \varphi) \quad (a > 0); \quad 30. \quad r = a(1 - \cos \varphi) \quad (a > 0).$

6.5. Обчислення об'ємів тіл і площ поверхонь обертання

Теорема 1. Нехай проекцією тіла T на вісь Ox є відрізок $[a; b]$ і для кожного $x_0 \in [a; b]$ площа перерізу тіла T площиною $x = x_0$ дорівнює $S(x_0)$. Якщо функція $S(x)$ неперервна на $[a; b]$, то об'єм $V(T)$ тіла T обчислюється за формулою

$$V(T) = \int_a^b S(x) dx.$$

Теорема 2. Нехай тіло T обмежене площинами $x = a$ та $x = b$ і поверхнею, яка утворена обертанням навколо осі Ox графіка неперервної на відрізку $[a; b]$ функції $y = f(x)$. Тоді об'єм $V(T)$ тіла обертання T обчислюється за формулою

$$V(T) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Теорема 3. Нехай поверхня P утворена обертанням навколо осі Ox графіка неперервно диференційовної на відрізку $[a; b]$ функції $y = f(x)$. Тоді площа $S(P)$ поверхні обертання P обчислюється за формулою

$$S(P) = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Теорема 4. Нехай лінія L на площині з прямокутною декартовою системою координат задається параметричним рівнянням

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta],$$

де φ і ψ – неперервно диференційовні на $[\alpha; \beta]$ функції, а поверхня P утворена обертанням лінії L навколо осі Ox . Тоді площа $S(P)$ поверхні обертання P обчислюється за формулою

$$S(P) = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |\psi(t)| \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

Теорема 5. Нехай лінія L на площині з полярною системою координат задана рівнянням $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, причому функція $r(\varphi)$ неперервно диференційовна на відрізку $[\alpha; \beta]$, а поверхня P утворена обертанням лінії L навколо полярної осі. Тоді площа $S(P)$ поверхні обертання P обчислюється за формулою

$$S(P) = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi) |\sin \varphi| \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2} d\varphi.$$

1. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею, яка утворюється обертанням навколо осі Ox параболи $y^2 = 4x$, і площиною $x = 1$.
2. Фігура, обмежена дугами парабол $y = x^2$ і $x = y^2$, обертається навколо осі Oy . Обчислити об'єм тіла обертання, яке отримується при цьому.
3. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею, яка утворюється обертанням навколо осі Ox лінії $(x-4)y^2 = x(x-3)$, $0 \leq x \leq 3$.
4. Знайти об'єм тіла, отриманого обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, яка обмежена лінією $y = xe^x$ і прямими $x = 1$ та $y = 0$.
5. Знайти об'єм тіла, отриманого обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, яка обмежена лінією $y = \arcsin x$ і прямими $x = 1$ та $y = 0$.
6. Знайти об'єм тіла, отриманого обертанням фігури, яка обмежена прямою $y = 0$ і графіком функції $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$:
 - а) навколо осі Ox ; б) навколо осі Oy .
7. Знайти об'єм тіла, отриманого обертанням криволінійної трапеції, яка обмежена прямою $y = 0$ і графіком функції $y = 2x - x^2$, $0 \leq x \leq 2$:
 - а) навколо осі Ox ; б) навколо осі Oy .
8. Знайти об'єм тіла, отриманого обертанням криволінійної трапеції, яка обмежена прямою $y = 0$ і аркою циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ ($a > 0$):
 - а) навколо осі Ox ; б) навколо осі Oy ;
 - в) навколо прямої $y = 2a$; г) навколо прямої $x = a\pi$.
9. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею, яка утворюється обертанням лінії $x = a \sin^3 t$, $y = b \cos^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ ($a, b > 0$):
 - а) навколо осі Ox ; б) навколо осі Oy .
10. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнею, яка утворюється обертанням петлі лінії $x = 2t - t^2$, $y = 4t - t^3$:
 - а) навколо осі Ox ; б) навколо осі Oy .

Знайти площі поверхонь, утворених обертанням навколо осі Ox таких кривих:

11. $y^2 = 4ax, 0 \leq x \leq 3a \ (a > 0)$; 12. $ay^2 = x^3, 0 \leq x \leq a \ (a > 0)$;

13. $3y = x^3, 0 \leq x \leq a \ (a > 0)$; 14. $y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$;

15. $y = a \cos \frac{\pi x}{2b}, |x| \leq b \ (a, b > 0)$; 16. $y = \operatorname{tg} x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$;

17. $x^2 + (y - b)^2 = a^2 \ (a \geq b > 0)$; 18. $y = e^{-x}, x \geq 0$.

Знайти площі поверхонь, утворених обертанням нижченаведених кривих навколо: а) осі Ox ; б) осі Oy .

19. $2py = x^2, 0 \leq y \leq a \ (a, p > 0)$;

20. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a \geq b > 0)$;

21. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, |x| \leq b \ (\text{ланцюгова лінія}) \ (a, b > 0)$.

22. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням астроїди $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t \ (a > 0)$ навколо:

а) осі Ox ; б) прямої $y = x$.

23. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі абсцис дуги лінії $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

24. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням арки циклоїди $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$, навколо:

а) осі Ox ; б) прямої $x = a\pi$;

в) осі Oy ; г) прямої $y = 2a \ (a > 0)$.

Розділ VII. Невласні інтеграли та інтеграли Ейлера

7.1. Означення та обчислення невластних інтегралів

Нехай $a \in \mathbb{R}$, функція f визначена на проміжку $[a; \omega)$, де $\omega \in (a; +\infty]$ – особлива точка для f (тобто $\omega = +\infty$ або $\omega \in \mathbb{R}$ і f необмежена в кожному околі точки ω), і для кожного $A \in (a; \omega)$ функція f інтегровна на відрізку $[a; A]$.

Якщо існує скінченна границя $\lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A f(x) dx$, то функція f називається *інтегровою* (у невластному розумінні) на проміжку $[a, \omega)$, а значення границі $\lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A f(x) dx$ називається *невласним інтегралом від функції f на проміжку $[a; \omega)$* і позначається через $\int_a^\omega f(x) dx$,

тобто

$$\int_a^\omega f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A f(x) dx.$$

При цьому невластний інтеграл $\int_a^\omega f(x) dx$ називається *збіжним*.

У випадку, коли границя $\lim_{A \rightarrow \omega} \int_a^A f(x) dx$ нескінченна або не існує, то функція f не інтегровна на $[a, \omega)$ і невластний інтеграл $\int_a^\omega f(x) dx$ називається *розбіжним*. При цьому, у випадку нескінченної границі, вважають, що значення невластного інтеграла дорівнює відповідній нескінченності ($+\infty$ чи $-\infty$), а в іншому випадку невластний інтеграл значення не має.

Аналогічно визначається невластний інтеграл виду

$$\int_\omega^a f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \omega} \int_A^a f(x) dx,$$

де $\omega \in [-\infty; a)$ – особлива точка для визначеної на проміжку $(\omega; a]$ функції f . Крім цього, якщо f визначена на проміжку $(\omega_1; \omega_2)$, де $\omega_1, \omega_2 \in [-\infty; +\infty]$ – особливі точки для f , то вважають, що

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x) dx = \int_{\omega_1}^a f(x) dx + \int_a^{\omega_2} f(x) dx,$$

де $a \in (\omega_1; \omega_2)$, причому інтеграл з лівої частини останньої рівності збігається, якщо збігаються обидва інтеграли з правої частини цієї рівності.

Якщо $\omega \in \{-\infty, +\infty\}$, то відповідний невластний інтеграл називають *невласним інтегралом першого роду*, а якщо $\omega \in \mathbb{R}$, то *невласним інтегралом другого роду*.

Теорема 1.[критерій Коші] *Нехай функція f визначена на проміжку $[a; \omega)$ і для кожного $A \in (a; \omega)$ інтегровна на відрізку $[a; A]$. Тоді невластний інтеграл $\int_a^\omega f(x) dx$ збігається в тому й лише в тому випадку, коли для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $A_0 \in [a; \omega)$, що для всіх $A', A'' \in [A_0; \omega)$ виконується нерівність*

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Теорема 2. *Нехай функція f неперервна на проміжку $[a; \omega)$, а F – одна з її первісних на цьому проміжку. Тоді*

$$\int_a^\omega f(x) dx = \lim_{x \rightarrow \omega} F(x) - F(a).$$

Різниця $\lim_{x \rightarrow \omega} F(x) - F(a)$ позначається ще через $F(x) \Big|_a^\omega$.

Аналогічно, як для визначених інтегралів, для невластних інтегралів вважають, що

$$\int_a^\omega f(x) dx = - \int_\omega^a f(x) dx.$$

1. Довести, що невластний інтеграл

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p},$$

де $a > 0$, збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \leq 1$.

2. Довести, що невластний інтеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$$

збігається при $p < 1$ і розбігається при $p \geq 1$.

Обчислити такі невласні інтеграли:

3. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4};$
4. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}};$
5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2};$
6. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2};$
7. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{2x}};$
8. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^{|x|}};$
9. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x-3};$
10. $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{2x-x^2};$
11. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$
12. $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{x-2}};$
13. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}};$
14. $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}};$
15. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}};$
16. $\int_1^e \frac{dx}{x \ln x};$
17. $\int_0^1 \frac{dx}{x \ln^2 x};$
18. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)};$
19. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)^2};$
20. $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$
21. $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}};$
22. $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x)^3};$
23. $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}};$
24. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1};$
25. $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^3-1};$
26. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx;$
27. $\int_0^1 \ln x dx;$
28. $\int_0^e \ln^2 x dx;$
29. $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx;$
30. $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx;$
31. $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx;$
32. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx;$
33. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx;$
34. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2};$
35. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx.$

7.2. Збіжність невласних інтегралів від невід'ємних функцій

Нехай $\omega \in [-\infty; +\infty]$ – особлива точка для функцій f та g . Позначимо через F та G відповідно невласні інтеграли

$$\int_a^\omega f(x) dx \quad \text{та} \quad \int_a^\omega g(x) dx.$$

Теорема 1. [ознака порівняння у формі нерівностей] *Нехай $0 \leq f(x) \leq g(x)$ на проміжку $[a; \omega)$. Тоді*

1) *якщо інтеграл G збігається, то інтеграл F також збігається;*

2) *якщо інтеграл F розбігається, то інтеграл G також розбігається.*

Теорема 2. [ознака порівняння у граничній формі] *Нехай $f(x) > 0$ і $g(x) > 0$ на $[a; \omega)$, причому $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow \omega$. Тоді інтеграли F і G збігаються чи розбігаються одночасно.*

Використовуючи ознаки порівняння, дослідити на збіжність такі невласні інтеграли:

1. $\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{x^3 + 1};$

2. $\int_1^{+\infty} \frac{x - 1}{x^4 + 1} dx;$

3. $\int_1^{+\infty} \frac{x^3 dx}{1 + 2x^3 + 3x^5};$

4. $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{2 + 3x^5};$

5. $\int_1^{+\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4} dx;$

6. $\int_1^{+\infty} \frac{2x^2 + 5x + 1}{x^3} dx;$

7. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt[3]{x^2 + 1}};$

8. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt[5]{x^3 + 4}};$

9. $\int_1^{+\infty} \frac{(2x + 1) dx}{\sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{4x^3 + 3}};$

10. $\int_1^{+\infty} \frac{(4x - 3) dx}{\sqrt[3]{x^4 + 1} + \sqrt[3]{x^4 + 2}};$

$$11. \int_2^{+\infty} \frac{2^{-x} dx}{x^2 + 5x^3 + 4x^6};$$

$$13. \int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx;$$

$$15. \int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x^2 + 1};$$

$$17. \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+2} dx;$$

$$19. \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1};$$

$$21. \int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{3^{\sin x} - 1};$$

$$23. \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x};$$

$$25. \int_0^1 \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\arcsin x} dx;$$

$$27. \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x} dx}{1 - \cos \sqrt{x}};$$

$$29. \int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1 - x^4}};$$

$$31. \int_e^{+\infty} \frac{dx}{\ln x};$$

$$33. \int_0^1 \frac{\ln x}{1 - x^2} dx;$$

$$12. \int_e^{+\infty} \frac{e^{-x} dx}{x^4 + x + 3};$$

$$14. \int_0^{+\infty} \sqrt[3]{x} e^{-x} dx;$$

$$16. \int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x^3 + 2};$$

$$18. \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+2)}{\sqrt{x^2 + 4}} dx;$$

$$20. \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x} dx}{e^x - 1};$$

$$22. \int_0^1 \frac{2^{\operatorname{tg} x} - 1}{\sqrt[3]{x}} dx;$$

$$24. \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos \sqrt{x}};$$

$$26. \int_0^1 \frac{\ln(1 + 2x)}{\sin \sqrt[4]{x}} dx;$$

$$28. \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x}}{\arctg x} dx;$$

$$30. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1 - x^2)^5}};$$

$$32. \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln \ln x};$$

$$34. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}};$$

$$35. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x^3 + \sqrt[3]{x^4}} dx;$$

$$37. \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx;$$

$$39. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \sqrt[3]{x^2} dx}{\sqrt[4]{(1+x^2)^3} - 1};$$

$$41. \int_1^{+\infty} \frac{x+3}{x^3 - x^2 - 4} dx;$$

$$36. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x}};$$

$$38. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 - \sin x)}{\sqrt{x^3}} dx;$$

$$40. \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^4} dx}{\sqrt[3]{(1+x^2)^4} - 1};$$

$$42. \int_1^{+\infty} \frac{x^5 + x + 2}{128 - x^7} dx.$$

Встановити, при яких значеннях параметрів збігаються наведені нижче невласні інтеграли:

$$43. \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx;$$

$$45. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^p} dx;$$

$$47. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln x};$$

$$49. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{x^p} dx \quad (a > 0);$$

$$51. \int_0^{+\infty} \frac{x^q}{1+x^p} dx \quad (p \geq 0);$$

$$44. \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx;$$

$$46. \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^p x};$$

$$48. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x};$$

$$50. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax}{1+x^p} dx \quad (a > 0);$$

$$52. \int_0^{+\infty} \frac{x^q \operatorname{arctg} x}{2+x^p} dx \quad (p \geq 0).$$

7.3. Абсолютна й умовна збіжність невластних інтегралів

Нехай $\omega \in [-\infty; +\infty]$ – особлива точка для функції f .

Невластний інтеграл $\int_a^\omega f(x) dx$ називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається інтеграл $\int_a^\omega |f(x)| dx$. Якщо ж інтеграл $\int_a^\omega |f(x)| dx$ розбігається, але сам інтеграл $\int_a^\omega f(x) dx$ збігається, то він називається *умовно збіжним*.

Теорема 1. *Якщо інтеграл $\int_a^\omega f(x) dx$ абсолютно збіжний, то він збігається.*

Нехай на проміжку $[a; \omega)$ визначені функції f та g , причому точка ω особлива для їх добутку fg .

Теорема 2. [ознака Діріхле] *Інтеграл $\int_a^\omega f(x) g(x) dx$ збігається, якщо виконуються такі умови:*

- 1) *функція f монотонна на $[a; \omega)$;*
- 2) $\lim_{x \rightarrow \omega} f(x) = 0$;
- 3) *існує таке $C > 0$, що для всіх $A \in (a; \omega)$ виконується нерівність $\left| \int_a^A g(x) dx \right| \leq C$.*

Теорема 3. [ознака Абеля] *Інтеграл $\int_a^\omega f(x) g(x) dx$ збігається, якщо виконуються такі умови:*

- 1) *функція f монотонна на $[a; \omega)$;*
- 2) *функція f обмежена на $[a; \omega)$;*
- 3) *інтеграл $\int_a^\omega g(x) dx$ збіжний.*

Дослідити на абсолютну й умовну збіжності такі невластні інтеграли:

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x^3 + 1}} dx;$$

$$2. \int_1^{+\infty} \frac{\sin 3x}{\sqrt[3]{x^4 + 1}} dx;$$

$$3. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 + 3} dx;$$

$$4. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arccotg} x}{x^3 + 4} dx;$$

$$5. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx;$$

$$7. \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos 5x}{x+10} dx;$$

$$9. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arccotg} x \sin 2x}{\ln(x+2)} dx;$$

$$11. \int_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x) dx;$$

$$6. \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx;$$

$$8. \int_0^{+\infty} \frac{x \sin 4x}{x^2+6} dx;$$

$$10. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x \cos x}{\ln(x+3)} dx;$$

$$12. \int_0^{+\infty} x \sin(e^x) dx;$$

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність при всіх значеннях параметрів такі невласні інтеграли:

$$13. \int_1^{+\infty} \frac{\cos ax}{x^p} dx;$$

$$15. \int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{x^3+1} dx;$$

$$14. \int_1^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^p} dx;$$

$$16. \int_2^{+\infty} \frac{x^p \cos x}{\ln x} dx.$$

7.4. Ейлерові інтеграли

Гамма-функція Ейлера $\Gamma(a)$ означається формулою

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx, \quad \text{де } a > 0.$$

Властивості гамма-функції Ейлера

1. $\Gamma(a)$ нескінченно диференційовна на $(0, +\infty)$, причому

$$\Gamma^{(n)}(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} (\ln x)^n e^{-x} dx \quad \text{для кожного } n \in \mathbb{N};$$

2. $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$;

3. $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ для всіх $a > 0$;

4. $\Gamma(n+1) = n!$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Бета-функція Ейлера $B(a, b)$ означається формулою

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx, \quad \text{де } a > 0 \text{ та } b > 0.$$

Властивості бета-функції Ейлера

1. $B(a, b) = B(b, a)$ для всіх $a, b > 0$;

2. $B(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1} dx}{(1+x)^{a+b}}$ для всіх $a, b > 0$.

Зв'язок між гамма-функцією Ейлера та бета-функцією Ейлера виражається формулою

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad \text{для всіх } a, b > 0.$$

Формула доповнення

$$B(a, 1-a) = \Gamma(a) \Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi} \quad \text{при } 0 < a < 1.$$

Підставляючи у формулу доповнення значення $a = b = \frac{1}{2}$, одержуємо, що

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Наступні невласні інтеграли мають численні застосування в різних розділах математики:

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \text{інтеграл Діріхле};$$

$$2) \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \text{інтеграл Ейлера-Пуассона}.$$

За допомогою Ейлерових інтегралів обчислити такі інтеграли:

$$1. \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx;$$

$$3. \int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx;$$

$$5. \int_0^{+\infty} x e^{-x^4} dx;$$

$$7. \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{\sqrt{x}} dx;$$

$$9. \int_0^1 \sqrt[3]{x^2 - x^3} dx;$$

$$11. \int_0^1 \sqrt[6]{x^5 - x^6} dx;$$

$$13. \int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx, \quad a > 0;$$

$$15. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}};$$

$$17. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}, \quad n > 0;$$

$$2. \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x} dx;$$

$$4. \int_0^{+\infty} \sqrt{x^3} e^{-x} dx;$$

$$6. \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^6} dx;$$

$$8. \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x}} dx;$$

$$10. \int_0^1 \sqrt{x - x^2} dx;$$

$$12. \int_0^1 \sqrt[4]{x^3 - x^4} dx;$$

$$14. \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx;$$

$$16. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}};$$

$$18. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x)^3};$$

$$19. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(1+x)^4};$$

$$21. \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x} dx}{(1+x)^4};$$

$$23. \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x} dx}{(1+x)^2};$$

$$25. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^3};$$

$$27. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4};$$

$$29. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(2-x)}};$$

$$31. \int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{(2+x)^3(2-x)}};$$

$$33. \int_1^2 \sqrt[3]{(2-x)^2(x-1)} dx;$$

$$35. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx;$$

$$37. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^5 x dx;$$

$$39. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} dx}{(\sin x + \cos x)^2};$$

$$20. \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{(1+x)^5};$$

$$22. \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2} dx}{(1+x)^6};$$

$$24. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3};$$

$$26. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^4};$$

$$28. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^6};$$

$$30. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{x^3(2-x)^2}};$$

$$32. \int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{(2-x)(1+x)^3}};$$

$$34. \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[6]{x^3(3-x)^3}};$$

$$36. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx;$$

$$38. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^6 x dx;$$

$$40. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{2a-1} x dx, 0 < a < 1.$$

Визначити область існування і виразити через гамма-функцію Ейлера або бета-функцію Ейлера такі інтеграли:

41. $\int_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-nx} dx$ при $n > 0$; 42. $\int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx$ при $n > 0$;
 43. $\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n} dx$ при $n > 0$; 44. $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{n}{2x^2}} \frac{dx}{x^{m+1}}$ при $n > 0$;
 45. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[m]{1-x^n}}$ при $n, m > 0$; 46. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx$ при $n > 0$;
 47. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x dx$; 48. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^n x dx$;
 49. $\int_0^1 x^m (1-x^n)^p dx$ при $n > 0$; 50. $\int_0^{+\infty} \frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p}$ при $a, b, n > 0$;

За допомогою інтеграла Діріхле обчислити такі інтеграли:

51. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx$, $a \in \mathbb{R}$; 52. $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos ax}{x^2} dx$, $a \in \mathbb{R}$;
 53. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} dx$; 54. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^3)}{x} dx$.

За допомогою інтеграла Ейлера-Пуассона обчислити такі інтеграли:

55. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+2x-1} dx$; 56. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4x^2+x} dx$;
 57. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx)} dx$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$; 58. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx$, $a > 0$;
 59. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \operatorname{ch} bx dx$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$; 60. $\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+a^2/x^2)} dx$, $a > 0$.

Розділ VIII. Ряди Фур'є

8.1. Розклад функцій у ряди Фур'є на проміжках завдовжки 2π

Функція f називається *абсолютно інтегровною на відрізку $[a, b]$* , якщо інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ абсолютно збіжний.

Нехай функція f абсолютно інтегровна на відрізку $[-\pi, \pi]$. У цьому випадку *рядом Фур'є* функції f називається тригонометричний ряд (1) вигляду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (1)$$

коефіцієнти якого обчислюються за допомогою *формул Ейлера-Фур'є*

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Якщо функція f парна, то $b_n = 0$ для всіх $n = 1, 2, 3, \dots$, а

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Якщо функція f непарна, то $a_n = 0$ для всіх $n = 0, 1, 2, \dots$, а

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Функція f називається *кусково диференційовною на відрізку $[a, b]$* , якщо вона диференційовна у всіх точках цього відрізка, крім, можливо, скінченної кількості точок x_i , в яких існують її скінченні односторонні границі $f(x_i \pm 0) = \lim_{x \rightarrow x_i \pm 0} f(x)$ та скінченні односторонні похідні $f'(x_i \pm 0) = \lim_{x \rightarrow x_i \pm 0} \frac{f(x) - f(x_i \pm 0)}{x - x_i}$. Зрозуміло, що кожна

кусково диференційовна на відрізку функція абсолютно інтегровна на цьому відрізку.

Теорема 1. *Ряд Фур'є кусково диференційовної на відрізку $[-\pi, \pi]$ функції f збігається в кожній точці $x \in (-\pi, \pi)$ до числа*

$$S(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, \quad (2)$$

а в точках $x = \pi$ та $x = -\pi$ – до числа

$$\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}.$$

Відзначимо, що сума ряду Фур'є кусково диференційовної на відрізку $[-\pi, \pi]$ функції $f \in 2\pi$ -періодичною на $\mathbb{R}$ і збігається з функцією f у кожній точці неперервності цієї функції з інтервалу $(-\pi, \pi)$.

Нехай $a \in \mathbb{R}$, а функція f визначена й абсолютно інтегровна на відрізку $[a, a+2\pi]$. У цьому випадку коефіцієнти ряду Фур'є функції f обчислюються за такими формулами:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

З теореми 1 випливає, що ряд Фур'є кусково диференційовної на відрізку $[a, a+2\pi]$ функції f збігається в кожній точці $x \in (a, a+2\pi)$ до числа $S(x)$ вигляду (2), а в точках $x = a$ та $x = a+2\pi$ – до числа

$$\frac{f(a+0) + f(a+2\pi-0)}{2}.$$

Крім цього, сума $S(x)$ ряду Фур'є кусково диференційовної на відрізку $[a, a+2\pi]$ функції $f \in 2\pi$ -періодичною на $\mathbb{R}$ і збігається з функцією f у кожній точці неперервності цієї функції з інтервалу $(a, a+2\pi)$.

Зауважимо, що коли функція f неперервна і 2π -періодична на $\mathbb{R}$, а також кусково диференційовна на відрізку $[-\pi, \pi]$, то вона у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ є сумою свого ряду Фур'є вигляду (2).

Розкласти в ряд Фур'є функцію f на відповідній множині, якщо:

1. $f(x) = \cos^4 x, x \in \mathbb{R};$
2. $f(x) = \sin^5 x, x \in \mathbb{R};$
3. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \pi], \\ 0, & x \in [-\pi, 0); \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} -2, & x \in [0, \pi], \\ 2, & x \in [-\pi, 0); \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \pi], \\ x, & x \in [-\pi, 0); \end{cases}$
6. $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, \pi], \\ 0, & x \in [-\pi, 0); \end{cases}$
7. $f(x) = \begin{cases} 4x, & x \in [0, \pi], \\ -3x, & x \in [-\pi, 0); \end{cases}$
8. $f(x) = \begin{cases} ax, & x \in [0, \pi], \\ bx, & x \in [-\pi, 0); \end{cases}$
9. $f(x) = x, x \in (-\pi, \pi);$
10. $f(x) = x + \pi, x \in (-\pi, \pi);$
11. $f(x) = |x|, x \in (-\pi, \pi);$
12. $f(x) = \pi - |x|, x \in (-\pi, \pi);$
13. $f(x) = \pi - x, x \in (0, 2\pi);$
14. $f(x) = x, x \in (0, 2\pi);$
15. $f(x) = \pi^2 - x^2, x \in (-\pi, \pi);$
16. $f(x) = x^3, x \in (-\pi, \pi);$
17. $f(x) = \operatorname{sh} x, x \in (-\pi, \pi);$
18. $f(x) = \operatorname{ch} x, x \in (-\pi, \pi);$
19. $f(x) = e^{2x}, x \in (-\pi, \pi);$
20. $f(x) = e^{-3x}, x \in (-\pi, \pi);$
21. $f(x) = \sin \frac{x}{2}, x \in (-\pi, \pi);$
22. $f(x) = \cos \frac{x}{2}, x \in (-\pi, \pi);$
23. $f(x) = x \sin x, x \in [-\pi, \pi];$
24. $f(x) = x \cos x, x \in (-\pi, \pi);$

25. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = \operatorname{sign} x$ на інтервалі $(-\pi, \pi)$ і, користуючись цим розкладом, знайти суму *ряду Лейбніца*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}.$$

Розкласти в ряд Фур'є 2π -періодичну на $\mathbb{R}$ функцію f , якщо:

26. $f(x) = \operatorname{sign}(\sin x);$
27. $f(x) = \operatorname{sign}(\cos x);$
28. $f(x) = \arcsin(\cos x);$
29. $f(x) = \arcsin(\sin x);$
30. $f(x) = \arccos(\sin x);$
31. $f(x) = \arccos(\cos x);$
32. $f(x) = |\cos x|;$
33. $f(x) = |\sin x|.$

8.2. Розклад функцій у ряди Фур'є на довільних проміжках

Нехай $l > 0$, а функція f визначена й абсолютно інтегровна на відрізку $[-l, l]$. У цьому випадку *рядом Фур'є* функції f називається тригонометричний ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (3)$$

коефіцієнти якого обчислюються за такими формулами:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Якщо функція f парна, то $b_n = 0$ для всіх $n = 1, 2, 3, \dots$, а

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Якщо функція f непарна, то $a_n = 0$ для всіх $n = 0, 1, 2, \dots$, а

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

З теореми 1 (п. 8.1) випливає, що ряд Фур'є (3) кусково диференційовної на відрізку $[-l, l]$ функції f збігається в кожній точці $x \in (-l, l)$ до числа $S(x)$ вигляду (2), а в точках $x = l$ та $x = -l$ – до числа

$$\frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}.$$

При цьому сума ряду Фур'є (1) кусково диференційовної на відрізку $[-l, l]$ функції $f \in 2l$ -періодичною на $\mathbb{R}$ і збігається з функцією f у кожній точці неперервності цієї функції з інтервалу $(-l, l)$.

Якщо функція f визначена й абсолютно інтегровна на відрізку $[a, a+2l]$ для деякого $a \in \mathbb{R}$, то коефіцієнти ряду Фур'є (3) функції f обчислюються за формулами

$$a_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

З теореми 1 (п. 8.1) випливає, що ряд Фур'є кусково диференційовної на відрізку $[a, a+2l]$ функції f збігається в кожній точці $x \in (a, a+2l)$ до числа $S(x)$ вигляду (2), а в точках $x = a$ та $x = a+2l$ — до числа

$$\frac{f(a+0) + f(a+2l-0)}{2}.$$

Крім цього, сума $S(x)$ ряду Фур'є кусково диференційовної на відрізку $[a, a+2l]$ функції $f \in 2l$ -періодичною на $\mathbb{R}$ і збігається з функцією f у кожній точці неперервності цієї функції з інтервалу $(a, a+2l)$.

Розкласти в ряд Фур'є функцію f на відповідній множині, вважаючи довжину проміжку, який є областю визначення функції, періодом суми ряду Фур'є:

- | | |
|--|--|
| 1. $f(x) = \begin{cases} 3, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}, \\ 1, & \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ | 2. $f(x) = \begin{cases} a, & -\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{6}, \\ b, & \frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{3}; \end{cases}$ |
| 3. $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 < x < 2, \\ 1, & x = 2, \\ 0, & 2 < x < 4; \end{cases}$ | 4. $f(x) = \begin{cases} 2a, & 0 < x < l, \\ a, & x = l, \\ 0, & l < x < 2l; \end{cases}$ |
| 5. $f(x) = x , x \in (-1, 1);$ | 6. $f(x) = 2 - x , x \in (-2, 2);$ |
| 7. $f(x) = x, \quad a) x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}),$ | б) $x \in (-l, l);$ |
| 8. $f(x) = \pi - x, x \in (0, \pi);$ | 9. $f(x) = x^2, x \in (0, \frac{\pi}{2});$ |
| 10. $f(x) = e^{2x}, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2});$ | 11. $f(x) = e^{ax}, x \in (-l, l);$ |
| 12. $f(x) = x \cos x, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2});$ | 13. $f(x) = x \sin x, x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}).$ |

Розкласти в ряд Фур'є періодичну на $\mathbb{R}$ функцію f , якщо:

- | | |
|---|-------------------------|
| 14. $f(x) = \left \cos \frac{x}{2} \right ;$ | 15. $f(x) = \sin 2x ;$ |
| 16. $f(x) = \{x\};$ | 17. $f(x) = \{2x\}.$ |

8.3. Розклад у ряди Фур'є лише за косинусами або лише за синусами

Нехай $l > 0$ і функція f абсолютно інтегровна на відрізку $[0, l]$. Розглянемо функцію

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq l, \\ f(-x), & -l \leq x < 0. \end{cases}$$

Вона парна, тому її ряд Фур'є має вигляд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

а коефіцієнти цього ряду обчислюються за формулами

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Якщо функція f кусково диференційовна на відрізку $[0, l]$, то в усіх точках $x \in [0, l]$, за винятком, можливо, скінченної кількості точок (які є точками розриву функції f), виконується рівність

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

яку називають *розкладом функції f лише за косинусами на відповідній множині $X \subseteq [0, l]$* .

Розглянемо тепер функцію

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \leq l, \\ 0, & x = 0, \\ -f(-x), & -l \leq x < 0. \end{cases}$$

Вона непарна, тому її ряд Фур'є має вигляд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

а коефіцієнти цього ряду обчислюються за формулами

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Якщо функція f кусково диференційовна на відрізку $[0, l]$, то в усіх точках $x \in (0, l)$, за винятком, можливо, скінченної кількості точок (які є точками розриву функції f), виконується рівність

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

яку називають *розкладом функції f лише за синусами на відповідній множині $X \subseteq (0, l)$* . При цьому сума $S(x)$ відповідного ряду Фур'є дорівнює нулю, якщо $x \in \{0, l\}$.

У випадку, коли $l = \pi$, розклади лише за косинусами чи лише за синусами кусково диференційовної на $[0, \pi]$ функції f будуть мати відповідно такий вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

де

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

або

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

де

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

1. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = 1$ лише за синусами на $(0, \pi)$.
2. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = x$ лише за косинусами на $[0, \pi]$.
3. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = \cos 2x$ лише за синусами на $(0, \pi)$.
4. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = \sin x$ лише за косинусами на $[0, \pi]$.
5. Розкласти функцію $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ в ряд Фур'є:

а) за синусами на $(0, \pi)$; б) за косинусами на $[0, \pi]$.

6. Розкласти в ряд Фур'є на множині $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$ за синусами функцію

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi. \end{cases}$$

7. Розкласти в ряд Фур'є на відрізьку $[0, \pi]$ за косинусами функцію

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

8. Розкласти в ряд Фур'є на множині $[0, \frac{\pi}{2}] \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ за синусами функцію

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

9. Розкласти в ряд Фур'є на відрізку $[0, \pi]$ за косинусами функцію

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

10. Розкласти в ряд Фур'є на відрізку $[0, 2]$ за косинусами функцію

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

11. Розкласти функцію $f(x) = x - \frac{x^2}{2}$ в ряд Фур'є:

а) за синусами на $[0, 1)$, б) за косинусами на $[0, 1]$.

12. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = x(\pi - x)$ лише за синусами на $[0, \pi]$.

13. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = x \sin x$ лише за синусами на $[0, \pi]$.

14. Розкласти функцію $f(x) = x^2$ в ряд Фур'є:

а) за косинусами на $[-\pi, \pi]$;

б) за синусами на $[0, \pi]$;

в) за синусами і косинусами на $(0, 2\pi)$.

Користуючись отриманими розкладами, знайти суми таких рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

15. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = e^x$ лише за косинусами на $[0, \ln 2]$.

16. Розкласти функцію $f(x) = e^{ax}$ в ряд Фур'є:

а) за синусами на $(0, \pi)$, б) за косинусами на $[0, \pi]$.

17. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = \cos ax$ лише за синусами на $(0, \pi)$.

18. Розкласти в ряд Фур'є лише за косинусами функцію $f(x) = \sin ax$, $x \in [0, \pi]$.

Розділ IX. Функції багатьох змінних

9.1. Простір $\mathbb{R}^m$ і поняття функції багатьох змінних

Нехай $m \in \mathbb{N}$ і

$$\mathbb{R}^m = \{(x_1, \dots, x_m) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq m\}.$$

Функція $d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, яка діє за правилом

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2},$$

де $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, називається *евклідовою відстанню в $\mathbb{R}^m$* .

Елемент $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$ називається *нульовим елементом* і позначається через 0.

Множина $A \subseteq \mathbb{R}^m$ називається *обмеженою*, якщо існує таке $C \geq 0$, що для всіх $x \in A$ виконується нерівність $d(x, 0) \leq C$.

Елемент $x_0 \in \mathbb{R}^m$ називається *границею послідовності* $(x_n)_{n=1}^\infty$, де $x_n \in \mathbb{R}^m$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ (позначається $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ або $x_n \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$), якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N \in \mathbb{N}$, що для довільного $n \geq N$ виконується нерівність $d(x_n, x_0) < \varepsilon$.

Послідовність $(x_n)_{n=1}^\infty$ елементів $x_n \in \mathbb{R}^m$ називається *збіжною* в просторі $\mathbb{R}^m$, якщо існує таке $x_0 \in \mathbb{R}^m$, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Нехай $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ і $\varepsilon > 0$. Множина

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^m : d(x, a) < \varepsilon\}$$

називається *відкритою кулею з центром у точці a і радіусом ε* , а множина

$$B[a, r] = \{x \in \mathbb{R}^m : d(x, a) \leq \varepsilon\}$$

називається *замкненою кулею з центром у точці a і радіусом ε* .

Точка $x \in \mathbb{R}^m$ називається *точкою дотику множини* $A \subseteq \mathbb{R}^m$, якщо $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ для довільного $\varepsilon > 0$.

Множина $F \subseteq \mathbb{R}^m$ називається *замкненою*, якщо вона містить всі свої точки дотику.

Замкнена і обмежена множина $K \subseteq \mathbb{R}^m$ називається *компактною*.

Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^m$. Функцією $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ називається певне правило, за яким кожному $x \in X$ ставиться у відповідність єдине $y \in \mathbb{R}$, яке називається *значенням функції f у точці x* і позначається $f(x)$. При цьому множина X називається *областю визначення функції f* і позначається D_f , а множина $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ називається *множиною значень функції f* і позначається E_f .

Функція $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, визначена на деякій множині $X \subseteq \mathbb{R}^m$, називається *функцією m змінних*. Її позначають також так: $y = f(x)$, $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ або просто $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

1. Функції $d_1, d_\infty : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ означаються так:

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_m - y_m|,$$

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_m - y_m|\},$$

де $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. Довести, що

$$d_\infty(x, y) \leq d(x, y) \leq d_1(x, y) \leq m d_\infty(x, y)$$

для довільних $x, y \in \mathbb{R}^m$.

2. Довести, що множина $A \subseteq \mathbb{R}^m$ обмежена тоді і тільки тоді, коли існує таке $C \geq 0$, що $d(x, y) \leq C$ для довільних $x, y \in A$.
3. Довести, що множина $A \subseteq \mathbb{R}^m$ обмежена тоді і тільки тоді, коли множина A покоординатно обмежена, тобто для кожного $i = 1, \dots, m$ множина A_i i -х координат усіх елементів $a \in A$ обмежена в $\mathbb{R}$.
4. Нехай $x_0 \in \mathbb{R}^m$ і $x_n \in \mathbb{R}^m$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Довести, що $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ тоді і тільки тоді, коли $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_0, x_n) = 0$.
5. Довести, що кожна збіжна послідовність у просторі $\mathbb{R}^m$ обмежена.
6. Довести, що послідовність $(x_n)_{n=1}^\infty$ точок $x_n = (x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{m,n})$ збіжна в просторі $\mathbb{R}^m$ тоді і тільки тоді, коли вона покоординатно збіжна, тобто для кожного $i = 1, \dots, m$ послідовність $(x_{i,n})_{n=1}^\infty$ збіжна в $\mathbb{R}$.
7. Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$ в просторі $\mathbb{R}^m$. Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(x_0, y_0)$.
8. Довести, що замкнена куля в просторі $\mathbb{R}^m$ є замкнутою множиною.

9. Довести, що множина F замкнена в $\mathbb{R}$, якщо:

а) $F = [0, 1]$;

б) $F = [a, b]$;

в) $F = [2, 3] \cup [5, 7]$;

г) $F = [0, +\infty)$.

10. Довести, що множина F замкнена в $\mathbb{R}^2$, якщо:

а) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$;

б) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \text{ або } x = 6\}$;

в) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}$;

г) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y \geq 0\}$;

г') $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin x = \cos y\}$;

д) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 + 3|x| \leq 2\}$;

е) $F = [0, 1] \times [0, 1]$.

11. Довести, що множина F замкнена в $\mathbb{R}^3$, якщо:

а) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 4\}$;

б) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$;

в) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - x^2 - y^2 \leq 0\}$;

г) $F = [0, 1] \times [2, -3] \times [-5, +\infty)$.

12. Нехай $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – неперервна функція. Довести, що її графік $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ – замкнена в $\mathbb{R}^2$ множина. Чи правильне обернене твердження?

13. Довести, що множина $A \subseteq \mathbb{R}^m$ компактна тоді і тільки тоді, коли з довільної послідовності $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ елементів x_n із A можна виділити підпослідовність $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, збіжну до деякого елемента $x_0 \in A$.

Знайти і зобразити області визначення таких функцій:

14. $u = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$;

15. $u = x + \sqrt{y}$;

16. $u = \sqrt{4 - x^2 - y^2};$
17. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}};$
18. $u = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}};$
19. $u = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)};$
20. $u = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}};$
21. $u = \sqrt{x + y} + \sqrt{x - y};$
22. $u = \frac{1}{\sqrt{x + y}} + \frac{1}{\sqrt{x - y}};$
23. $u = \sqrt{x - \sqrt{y}};$
24. $u = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)};$
25. $u = \sqrt{\frac{x^2 + 2x + y^2}{x^2 - 2x + y^2}};$
26. $u = \ln(xy);$
27. $u = \ln(-x - y);$
28. $u = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}};$
29. $u = \ln(xyz);$
30. $u = \ln(x \ln(y - x));$
31. $u = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y);$
32. $u = \arcsin \frac{y}{x};$
33. $u = \arccos \frac{x}{x + y};$
34. $u = \ln x - \ln(\sin y);$
35. $u = \arcsin(2y(1 + x^2) - 1);$
36. $u = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)};$
37. $u = \sqrt{x \sin y};$
38. $u = \operatorname{ctg} \pi(x + y);$
39. $u = \sqrt{\sin \pi(x^2 + y^2)};$
40. $u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}};$
41. $u = \ln(-1 - x^2 - y^2 + z^2).$

9.2. Границя і неперервність функції багатьох змінних

Точка $a \in \mathbb{R}^m$ називається *граничною точкою множини* $A \subseteq \mathbb{R}^m$, якщо для довільної кулі U з центром в точці a множина $A \cap U$ нескінченна.

Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ і $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ – гранична точка множини X .

Число $b \in \mathbb{R}$ називається *границею функції* f при $x \rightarrow a$ і позначається

$$b = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{або} \quad b = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_m \rightarrow a_m}} f(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що $|f(x) - b| < \varepsilon$, як тільки $d(x, a) < \delta$.

Теорема 1. *Нехай (a, b) – гранична точка множини $X \times Y \subseteq \mathbb{R}^2$, на якій визначена функція $f(x, y)$, існує подвійна границя $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y)$ і для кожного $y \in Y$ існує границя $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$. Тоді існує повторна границя $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$, причому*

$$\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y).$$

Функція $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, де $X \subseteq \mathbb{R}^m$, називається *неперервною в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для довільного $x \in X$ з нерівності $d(x, x_0) < \delta$ випливає нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Зокрема, якщо $x_0 \in X$ – гранична точка області визначення X функції f , то f неперервна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Функція, неперервна в кожній точці своєї області визначення, називається *неперервною*.

Аналогічно вводиться поняття границі і неперервності для відображення $f : X \rightarrow Y$, де $X \subseteq \mathbb{R}^m$ і $Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Наприклад, відображення $f : X \rightarrow Y$ *неперервне в точці* $x_0 \in X$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для довільного $x \in X$ з нерівності $d(x, x_0) < \delta$ випливає нерівність $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Множина $X \subseteq \mathbb{R}^m$ називається *зв'язною* або *лінійно зв'язною*, якщо для довільних точок $a, b \in X$ існує таке неперервне відображення $f : [0, 1] \rightarrow X$, що $f(0) = a$ і $f(1) = b$.

Теорема 2. [теорема Больцано–Коші] *Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^m$ – зв'язна множина, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ – неперервна функція, $a, b \in X$, $A = f(a)$ і $B = f(b)$. Тоді для довільного $C \in [A, B]$ існує таке $c \in X$, що $f(c) = C$.*

Теорема 3. [теорема Вейерштрасса] *Нехай функція $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна на компактній множині $K \subseteq \mathbb{R}^m$. Тоді f має на K найбільше і найменше значення.*

Знайти $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$ і $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$, якщо:

$$1. f(x, y) = \frac{(x^2 - 5x + 6)(y^2 - 1)}{(x^2 - 8x + 15)(y^2 - 3y + 2)}, a = 3, b = 1;$$

$$2. f(x, y) = \frac{(x - 4)(8 - y^3)}{(x + 5)(2y - 4)}, a = 4, b = 2;$$

$$3. f(x, y) = \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 + y^2}, a = 0, b = \infty;$$

$$4. f(x, y) = \frac{e^{x^3 y^2} - 1}{\operatorname{tg} \sqrt{xy}}, a = 0, b = 0;$$

$$5. f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}, a = \infty, b = \infty;$$

$$6. f(x, y) = \frac{x^2 - 5y^2}{2x^2 + y^2 + 1}, a = \infty, b = \infty;$$

$$7. f(x, y) = \frac{x^y}{1 + xy}, a = \infty, b = +0;$$

$$8. f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{2x + y}, a = \infty, b = \infty;$$

$$9. \text{Показати, що для функції } f(x, y) = \frac{x - y}{x + y} \text{ виконуються рівності } \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1, \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 1, \text{ але не існує границі } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y).$$

$$10. \text{Показати, що для функції } f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} \text{ виконуються рівності } \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0, \text{ але не існує границі } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y).$$

11. Показати, що для функції $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ існує $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$, але не існують $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ і $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$.

Обчислити такі подвійні границі:

- | | |
|--|--|
| 12. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{xy - x}{(y^2 - 1) \ln(1 + x)};$ | 13. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin(x - 1) \operatorname{tg}(y - 2)}{xy - 2x - y + 2};$ |
| 14. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1};$ | 15. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[3]{xy + 1} - 1}{e^{xy} - 1};$ |
| 16. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2};$ | 17. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2 y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2};$ |
| 18. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin(xy)}{x};$ | 19. $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1 + xy^2)}{e^{y^2} - 1};$ |
| 20. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + x^2 y^2)^{-\frac{1}{x^2 + y^2}};$ | 21. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2 y^2};$ |
| 22. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4};$ | 23. $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^3 + y^5}{x^4 + y^6}.$ |

Знайти точки розриву таких функцій:

- | | |
|--|--|
| 24. $f(x, y) = \frac{2}{x^2 + y^2};$ | 25. $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}};$ |
| 26. $f(x, y) = \frac{1}{x - y};$ | 27. $f(x, y) = \frac{xy}{x + y};$ |
| 28. $f(x, y) = \frac{x + y}{x^3 + y^3};$ | 29. $f(x, y) = \frac{y^2 + 2x}{y^2 - 2x};$ |
| 30. $f(x, y) = \sin \frac{1}{xy};$ | 31. $f(x, y) = \frac{1}{\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y};$ |
| 32. $f(x, y) = \frac{1}{\sin x \sin y};$ | 33. $f(x, y) = \frac{1}{\sin \pi x} + \frac{1}{\sin \pi y};$ |
| 34. $f(x, y) = \frac{1}{xy};$ | 35. $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2).$ |

9.3. Частинні похідні і диференціали функцій багатьох змінних

Нехай $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ і $x_0 = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ – внутрішня точка множини D_f .

Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + \Delta x_k, a_{k+1}, \dots, a_m) - f(a_1, \dots, a_m)}{\Delta x_k},$$

то вона називається *частинною похідною* функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ у точці x_0 по змінній x_k і позначається одним із таких символів:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0), \quad f'_{x_k}(x_0), \quad \frac{\partial u}{\partial x_k}, \quad u'_{x_k}.$$

Приростом функції $u = f(x_1, \dots, x_m)$ у точці $x_0 = (a_1, \dots, a_m)$, який відповідає приросту $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$ аргументу $x = (x_1, \dots, x_m)$, називається вираз

$$f(a_1 + \Delta x_1, \dots, a_m + \Delta x_m) - f(a_1, \dots, a_m),$$

який позначається через $\Delta f(x_0)$ або Δu .

Функція $f(x_1, \dots, x_m)$ називається *диференційовною в точці x_0* , якщо її приріст $\Delta f(x_0)$ можна подати у вигляді

$$\Delta f(x_0) = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m, \quad (9.1)$$

де $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}$ і для кожного $k = 1, \dots, m$ функція $\alpha_k = \alpha_k(\Delta x)$ нескінченно мала при $\Delta x \rightarrow 0$.

Теорема 1. Якщо функція $f(x_1, \dots, x_m)$ визначена в деякому околі точки $x_0 \in \mathbb{R}^m$ і диференційовна в точці x_0 , то

$$A_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)$$

для всіх $k = 1, \dots, m$, де $A_1, \dots, A_m$ – сталі з рівності (9.1).

Теорема 2. Якщо функція $f(x_1, \dots, x_m)$ визначена в деякому околі точки $x_0 \in \mathbb{R}^m$ і має в цьому околі всі частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$, які неперервні в точці x_0 , то функція f диференційовна в точці x_0 .

Для диференційовної в точці x_0 функції $u = f(x_1, \dots, x_m)$ вираз

$$A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m,$$

який є головною лінійною частиною приросту функції f у точці x_0 , називається *диференціалом* або *повним диференціалом* функції f у точці x_0 і позначається через $df(x_0)$ або du .

Згідно з теоремою 2, для диференційовної в точці x_0 функції $u = f(x_1, \dots, x_m)$ маємо, що

$$df(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0) \Delta x_m.$$

Оскільки $dx_k = \Delta x_k$ для всіх $k = 1, \dots, m$ і незалежних змінних $x_1, \dots, x_m$, то

$$df(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0) dx_m,$$

що можна записати ще й у такому вигляді

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m.$$

Зокрема,

$$df(x, y) = f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy$$

і

$$df(x, y, z) = f'_x(x, y, z) dx + f'_y(x, y, z) dy + f'_z(x, y, z) dz.$$

Теорема 3. Якщо функція $u = f(x_1, \dots, x_m)$ визначена в деякому околі точки $x_0 = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ і диференційовна в точці x_0 , а функції $x_1 = \varphi_1(t)$, $\dots$, $x_m = \varphi_m(t)$ визначені в деякому околі точки $t_0 \in \mathbb{R}$ і диференційовні в точці t_0 , причому $\varphi_1(t_0) = a_1$, $\dots$, $\varphi_m(t_0) = a_m$, то функція $u = g(t) = f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))$ диференційовна в точці t_0 і

$$g'(t_0) = f'_{x_1}(x_0) \varphi'_1(t_0) + f'_{x_2}(x_0) \varphi'_2(t_0) + \dots + f'_{x_m}(x_0) \varphi'_m(t_0). \quad (9.2)$$

Формулу (9.2) записують також в одному з таких виглядів:

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt}(t_0) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \cdot \frac{d\varphi_1}{dt}(t_0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0) \cdot \frac{d\varphi_m}{dt}(t_0); \\ \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \cdot \frac{dx_m}{dt}. \end{aligned}$$

Зокрема, якщо $u = f(x, y)$, а $x = \varphi(t)$ і $y = \psi(t)$, то для складеної функції $u = f(\varphi(t), \psi(t))$ формулу для похідної можна записати ще й так:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}; \\ u'_t &= u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t. \end{aligned}$$

А якщо $u = f(x, y, z)$, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, то для складеної функції $u = f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$ формула для похідної записується в одному з таких виглядів:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt};$$

$$u'_t = u'_x \cdot x'_t + u'_y \cdot y'_t + u'_z \cdot z'_t.$$

З теореми 3 випливає наведена нижче теорема, яка дає формули для знаходження частинних похідних складених функцій багатьох змінних.

Теорема 4. *Якщо функція $u = f(x_1, \dots, x_m)$ визначена в деякому околі точки $x_0 = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ і диференційовна в точці x_0 , а функції $x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_n)$, $\dots$, $x_m = \varphi_m(t_1, \dots, t_n)$ визначені в деякому околі точки $t_0 \in \mathbb{R}^n$ і мають усі частинні похідні в точці t_0 , причому $\varphi_1(t_0) = a_1, \dots, \varphi_m(t_0) = a_m$, то функція*

$$u = g(t_1, \dots, t_n) = f(\varphi_1(t_1, \dots, t_n), \dots, \varphi_m(t_1, \dots, t_n))$$

має всі частинні похідні в точці t_0 , причому

$$\frac{\partial g}{\partial t_k}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_k}(t_0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0) \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial t_k}(t_0) \quad (9.3)$$

для кожного $k = 1, \dots, n$.

Якщо, крім того, всі функції $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ диференційовні в точці t_0 , то функція g також диференційовна в точці t_0 і її диференціал, як і для випадку незалежних змінних $x_1, \dots, x_m$, має вигляд

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m.$$

Зауважимо, що формулу (9.3) записують також у такому вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial t_k} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m}{\partial t_k}.$$

Нехай функція $f(x_1, \dots, x_m)$ визначена в деякому околі точки $x_0 \in \mathbb{R}^m$ і диференційовна в точці x_0 . Вектор $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0) \right)$ називається *градієнтом функції f у точці x_0* і позначається через $\text{grad } f(x_0)$.

Знайти частинні похідні першого порядку від таких функцій:

1. $z = x - y$;
2. $z = x^3 y - y^3 x$;
3. $z = 2x^3 + y - 4xy^2 + 8$;
4. $z = (x - 3y)(5y^4 + 6)$;
5. $z = \frac{x}{y}$;
6. $z = \frac{y^2 - 5}{\sqrt{x}}$;
7. $z = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$;
8. $z = (5x^2 y - y^3 + 7)^3$;
9. $z = x\sqrt{y} + \frac{x}{\sqrt[3]{y}}$;
10. $z = 7y\sqrt[4]{x+3} - \sqrt{\frac{y+x}{x}}$;
11. $z = \cos(x^2 y)$;
12. $z = \sin(x - y) + 2\cos(x + 2y)$;
13. $z = \sin \frac{x+2y}{x-2y^2}$;
14. $u = \frac{\cos(x-2y)}{\cos(x+2y)}$;
15. $z = \sin \frac{x}{y} \cos yx$;
16. $u = \frac{x \cos y - y \cos x}{1 + \sin x + \sin y}$;
17. $z = \frac{\cos x^2}{y}$;
18. $z = x \sin(x - \sqrt{y})$;
19. $z = \operatorname{tg} \frac{1+x+x^2}{1-y-\sqrt{y}}$;
20. $z = \operatorname{tg}(\sin x) \cdot \cos y$;
21. $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$;
22. $z = \frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}$;
23. $z = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;
24. $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{x-y}$;
25. $z = x^y$;
26. $z = e^{-\frac{x}{y}}$;
27. $z = e^{\sin \pi xy} xy$;
28. $z = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}}$;
29. $z = \ln(x^2 + y^2)$;
30. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$;
31. $z = (1 + xy)^y$;
32. $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$;
33. $z = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$;
34. $z = \ln(x + \ln y)$;
35. $u = xyz$;
36. $u = xy + yz + xz$;
37. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
38. $u = \ln(x + y + z)$;

39. $u = x^3 + yz^2 + 3yx + z$; 40. $u = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$;
 41. $u = \operatorname{arctg}(x - y)^z$; 42. $u = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}$;
 43. $u = (\sin x)^{yz}$; 44. $u = \ln(1 + x + y^2 + z^3)$.

Знайти повні диференціали таких функцій:

45. $z = x^2y^4 - x^3y^3 + x^4y^2$; 46. $z = xy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4$;
 47. $z = \frac{x + y}{x - y}$; 48. $z = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$;
 49. $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$; 50. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;
 51. $z = \sin(xy)$; 52. $z = \arcsin \frac{x}{y}$;
 53. $z = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}$; 54. $z = \operatorname{arctg}(xy)$;
 55. $u = \ln(x^3 + 2y^3 - z^3)$; 56. $u = x^{y^z}$.

Нехай f – диференційовна функція відповідної кількості змінних. Знайти частинні похідні від таких складених функцій:

57. $u = f(x^2 + y^2)$; 58. $u = f(2xy)$;
 59. $u = f(z^2 + 2xy - y^3)$; 60. $u = f(x^3 + y^3)$;
 61. $u = f(x + y, x - y)$; 62. $u = f\left(xy, \frac{x}{y}\right)$;
 63. $u = f(x, xy, xyz)$; 64. $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right)$.

65. Нехай $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – диференційовна функція. Довести, що функція $u = \varphi(x^2 + y^2)$ є розв'язком рівняння $y \frac{\partial u}{\partial x} = x \frac{\partial u}{\partial y}$.

66. Нехай $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – диференційовна функція. Довести, що функція $u = \frac{y^2}{3x} + \varphi(xy)$ є розв'язком рівняння $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - xy \frac{\partial u}{\partial y} + y^2 = 0$.

9.4. Частинні похідні та диференціали вищих порядків. Формула Тейлора

Нехай $u = f(x_1, \dots, x_m)$ – функція m змінних і $v = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_m)$ – її частинна похідна по змінній x_k .

Якщо функція v має частинну похідну $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ по змінній x_i в точці $x_0 \in \mathbb{R}^m$, то ця похідна називається *частинною похідною функції $f(x_1, \dots, x_m)$ другого порядку по змінних x_k та x_i* і позначається одним із символів:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(x_0), \quad f''_{x_k x_i}(x_0), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}, \quad u''_{x_k x_i}.$$

Іншими словами,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)$$

або

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(x_0) = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)}{\partial x_i}(x_0).$$

У випадку, коли $i = k$, частинну похідну $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_k}$ називають *чистою* і позначають її через $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}$. У випадку, коли $k \neq i$, частинна

похідна $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}$ називається *змішаною*.

Теорема 1. *Нехай функція $f(x, y)$ на деякому околі точки $(x_0, y_0) \in D_f$ має частинні похідні f''_{xy} і f''_{yx} , які неперервні в точці (x_0, y_0) . Тоді $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.*

Аналогічно вводяться поняття частинних похідних вищих порядків: третього, четвертого і так далі. Наприклад,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} \right)$$

або

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} \right)}{\partial x_j}(x_0).$$

І в загальному,

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_{n-1}} \partial x_{k_n}} = \frac{\partial}{\partial x_{k_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_{n-1}}} \right)$$

або

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_{n-1}} \partial x_{k_n}}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_{k_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_{n-1}}} \right)(x_0).$$

Як і для випадку $n = 2$, якщо $k_1 = k_2 = \dots = k_n$, то відповідна частинна похідна n -го порядку називається чистою, в протилежному випадку – змішаною.

Індукцією відносно порядку похідних за допомогою теореми 1 доводиться рівність неперервних змішаних похідних, які беруться по однакових наборах змінних, але в різній послідовності.

Аналогічно, як для функції однієї змінної, *другим диференціалом функції* $u = f(x_1, \dots, x_m)$, який позначається через d^2u або $d^2f(x_1, \dots, x_m)$, називається диференціал від першого диференціала функції f , який розглядається як функція від змінних $x_1, \dots, x_m$ при фіксованих значеннях приростів $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$. Іншими словами,

$$d^2u = d(du)$$

або

$$d^2f(x_1, \dots, x_m) = d(df(x_1, \dots, x_m)).$$

Так само, для кожного $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$d^{n+1}u = d(d^n u)$$

або

$$d^{n+1}f(x_1, \dots, x_m) = d(d^n f(x_1, \dots, x_m)).$$

Якщо функція $u = f(x_1, \dots, x_m)$ має диференціал n -го порядку в точці $x_0 \in D_f$, то функція f називається n разів диференційовною в точці x_0 . Зауважимо, що вигляд n -го диференціала функції f залежить від n (можливо, різних) приростів аргументу $x = (x_1, \dots, x_m)$. Надалі ми розглядатимемо лише випадок, коли ці прирости однакові. Це спільне значення приростів позначатимемо через $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$.

Якщо функція $u = f(x_1, \dots, x_m)$ $(n - 1)$ раз диференційовна в деякому околі точки x_0 і n разів диференційовна в точці x_0 , то f має всі частинні похідні n -го порядку в точці x_0 і n -й диференціал цієї функції в точці x_0 має вигляд

$$d^n f(x_0) = \sum_{k_1=1}^m \dots \sum_{k_n=1}^m \frac{\partial^n f}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_n}}(x_0) \Delta x_{k_1} \dots \Delta x_{k_n}.$$

Цю формулу в символічному вигляді можна записати так:

$$d^n f(x_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \Delta x_m \right)^n f(x_0).$$

У випадку, коли змінні $x_1, \dots, x_m$ незалежні, ця формула набуває такого вигляду:

$$d^n f(x_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n f(x_0).$$

Зокрема, для функції двох змінних $u = f(x, y)$ маємо

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n u,$$

а для функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ –

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \right)^n u.$$

Нехай функція $u = f(x_1, \dots, x_m)$ $(n+1)$ раз диференційовна в деякому околі U точки x_0 і $\Delta x \in \mathbb{R}^m$ таке, що $x_0 + t\Delta x \in U$ для кожного $t \in [0, 1]$. Тоді існує таке $\theta \in (0, 1)$, що

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^n \frac{d^k f(x_0)}{k!} + \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x)}{(n+1)!}.$$

Ця формула називається *формулою Тейлора для функції багатьох змінних*.

Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = z(x, y)$, якщо:

- | | |
|--|-------------------------------|
| 1. $z = xy(x^3 + y^3 - 3)$; | 2. $z = e^{xy}$; |
| 3. $z = y^2(1 - e^x)$; | 4. $z = x^y$; |
| 5. $z = \frac{x}{x+y}$; | 6. $z = \ln(x^2 + y)$; |
| 7. $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$; | 8. $z = y \sin \frac{y}{x}$; |
| 9. $z = \cos(xy - \cos y)$; | 10. $z = e^{xy}$; |
| 11. $z = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; | 12. $z = (xy)^{x+y}$. |

Знайти частинні похідні другого порядку функції $u = u(x, y, z)$, якщо:

- | | |
|----------------------------|-----------------------------|
| 13. $u = x(1 + y^2 z^3)$; | 14. $u = \sin(x + y + z)$; |
|----------------------------|-----------------------------|

15. $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2);$

16. $u = x^{y^z}.$

Перевірити рівність $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, якщо:

17. $u = x^2 - 3xy - 2y^2;$

18. $u = x^{y^2};$

19. $u = \arcsin(xy);$

20. $u = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}}.$

21. Довести, що функція

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

така, що $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$.

22. Знайти $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}, \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$, якщо

$$u = x - y + x^2 + 2xy - y^2 + x^3 - 3x^2y - y^3 + x^4 - 5x^2y^2 + y^4.$$

23. Знайти $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, якщо $u = x \ln(xy)$.

24. Знайти $\frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3}$, якщо $u = x^3 \sin y + y^3 \sin x$.

25. Знайти $\frac{\partial^8 f}{\partial x^4 \partial y^4}$, якщо $u = x^4 \cos y + y^4 \cos x$.

Для функції $u = f(x, y, z)$ знайти частинну похідну $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, якщо:

26. $u = \sqrt{xy^3z^5};$

27. $u = x^4 + x^2y^3 - xz + xy^2z^3;$

28. $u = e^{xyz};$

29. $u = \arctg \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}.$

Знайти всі частинні похідні другого порядку від наведених нижче складених функцій, де f – двічі диференційовна функція відповідної кількості змінних:

30. $u = f(x^3 - y^2);$

31. $u = f(x^2 + y^2 + z^2);$

32. $u = f\left(x, \frac{x}{y}\right);$

33. $u = f(x + y, xy);$

34. $u = f(x, xy, xyz);$

35. $u = f(xy, yz, zx).$

Знайти другий диференціал функції $z = z(x, y)$, якщо:

$$36. z = x(1 + y);$$

$$37. z = x \sin^2 y;$$

$$38. z = \frac{e^{xy}}{y};$$

$$39. z = y \ln x;$$

$$40. z = \ln(x^2 + y^2);$$

$$41. z = \arcsin(xy);$$

$$42. z = e^{\frac{x^2}{y}};$$

$$43. z = \frac{x}{y} e^{x^2}.$$

Знайти другий диференціал функції $u = u(x, y, z)$, якщо:

$$44. u = xy + yz + xz;$$

$$45. u = \ln(x + y + z);$$

$$46. u = x^4 + 2y^3x + 3z^2y;$$

$$47. u = (1 + x)(1 + y)^2 z^3;$$

$$48. u = \frac{z}{x^2 + y^2};$$

$$49. u = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}.$$

Відображення (оператор), яке кожній двічі диференційовній функції ставить у відповідність суму її чистих похідних другого порядку, називається *оператором Лапласа* і позначається через Δ , тобто

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

для двічі диференційовної функції $u = f(x, y)$ і

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

для двічі диференційовної функції $u = f(x, y, z)$.

Знайти Δu , якщо:

$$50. u = \sin x \operatorname{ch} y;$$

$$51. u = \ln \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$52. u = x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz;$$

$$53. u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$54. u = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2});$$

$$55. u = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2).$$

9.5. неявно задані функції

Нехай $P \subseteq \mathbb{R}^2$, $F : P \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ і $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Кажуть, що функція $y = f(x)$ задається неявно за допомогою рівності

$$F(x, y) = 0, \quad (9.4)$$

якщо $(x, f(x)) \in P$ і $F(x, f(x)) = 0$ для кожного $x \in X$. У такому випадку також говорять, що рівняння (9.4) неявно задає функцію f . При цьому звертають увагу на такий зв'язок між функціями F і f : якщо для фіксованого $x \in X$ рівність (9.4) розглядати як рівняння відносно змінної y , то значення функції f у точці x є розв'язком цього рівняння.

Неявно задана функція називається також *неявною функцією*. Зауважимо, що хоча термін "неявна функція" за своєю формою стосується функції, насправді він вказує лише на спосіб задання цієї функції і не має стосунку до її природи. Так, наприклад, рівність

$$x^2 + y^2 = 1$$

неявно задає дві неперервні функції $y = \sqrt{1 - x^2}$ і $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

Теорема 1. *Нехай виконуються такі умови:*

1) *функція $F(x, y)$ неперервна на прямокутнику*

$$[x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b];$$

2) $F(x_0, y_0) = 0$;

3) *для кожного фіксованого $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ функція $F^x : [y_0 - b, y_0 + b] \rightarrow \mathbb{R}$, $F^x(y) = F(x, y)$, строго зростає на відрізку $[y_0 - b, y_0 + b]$.*

Тоді на деякому околі U точки x_0 рівняння (9.4) визначає єдину неперервну функцію $y = f(x)$, таку, що $f(x_0) = y_0$ і

$$F(x, f(x)) = 0$$

для кожного $x \in X$.

Теорема 2. *Нехай виконуються такі умови:*

1) *функція $F(x, y)$ неперервна на прямокутнику*

$$P = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b];$$

2) *існують неперервні на P частинні похідні F'_x, F'_y ;*

3) $F(x_0, y_0) = 0$;

4) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тоді в деякому околі точки (x_0, y_0) рівняння (8.4) визначає єдину функцію $y = f(x)$, яка є неперервно диференційовною, причому $f(x_0) = y_0$ і

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Знайти похідні y' функцій $y = f(x)$, які визначаються неявно такими рівностями:

- | | |
|---|--|
| 1. $x^3 + y^3 = 1$; | 2. $x^4 - y^4 = 2$; |
| 3. $x^3y - y^3x = a^4$; | 4. $x^2y^2 - x^4 - y^4 = a^4$; |
| 5. $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$; | 6. $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$; |
| 7. $\sin(xy) - e^{xy} - x^2y = 0$; | 8. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. |

Знайти похідні y' та y'' функцій $y = f(x)$, які визначаються неявно такими рівностями:

- | | |
|---|--|
| 9. $x^2 - 2xy - y^2 = 1$; | 10. $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$; |
| 11. $xy - \ln y = a$; | 12. $y - a \sin y = x$ ($0 < a < 1$); |
| 13. $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctg \frac{y}{x}$; | 14. $\arctg \frac{x+y}{a} - \frac{y}{a} = 0$; |
| 15. $4y = xe^{\frac{y}{x}}$; | 16. $y = 2x \arctg \frac{y}{x}$; |
| 17. $x^y = y^x$; | 18. $yx^2 = e^y$. |

19. Нехай $k \in \mathbb{R}$ і функція $y = f(x)$ визначається неявно рівнянням

$$1 + xy = k(x - y).$$

Довести, що

$$\frac{dx}{1+x^2} = \frac{dy}{1+y^2}.$$

20. Функція $y = f(x)$ визначається неявно рівнянням

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 = 1,$$

причому $xy > 0$ для кожного $x \in D_f$. Довести, що

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

9.6. Екстремум функцій багатьох змінних

Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ – деяка функція і $x_0 \in X$. Точка x_0 називається *точкою локального максимуму (мінімуму)* функції f , якщо існує такий окіл U цієї точки в $\mathbb{R}^m$, що для всіх $x \in U \cap X$ виконується нерівність

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)). \quad (9.5)$$

Точка локального максимуму або мінімуму називається *точкою локального екстремуму*.

Якщо у (9.5) виконуються строгі нерівності для кожного $x \in U \cap X$, відмінного від x_0 , то точка x_0 називається *точкою строгого локального максимуму (мінімуму)* функції f , або, загальніше, *точкою строгого локального екстремуму*.

Теорема 1. [необхідна умова екстремуму функції багатьох змінних] *Нехай точка x_0 є точкою локального екстремуму функції f і в цій точці існують усі частинні похідні першого порядку функції f . Тоді*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0) = 0.$$

Відзначимо, що для диференційовної функції f рівність нулю всіх її частинних похідних першого порядку в точці x_0 рівносильна тому, що $df(x_0) = 0$. Як і для випадку функцій однієї змінної, точка $x_0 \in X$, для якої $df(x_0) = 0$, називається *стаціонарною* для f . З теореми 1 випливає, що стаціонарні точки підозрілі на екстремум.

Теорема 2. [достатня умова екстремуму функції двох змінних] *Нехай функція $u = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні першого і другого порядків у деякому околі своєї стаціонарної точки $p_0 = (x_0; y_0)$,*

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0).$$

Тоді:

- 1) якщо $AC - B^2 > 0$ і $A > 0$, то p_0 – точка строгого локального мінімуму;
- 2) якщо $AC - B^2 > 0$ і $A < 0$, то p_0 – точка строгого локального максимуму;
- 3) якщо $AC - B^2 < 0$, то p_0 не є точкою локального екстремуму.

Для формулювання достатніх умов існування чи відсутності екстремуму функції m змінних у загальному випадку нагадаємо деякі відомості з курсу вищої алгебри щодо квадратичних форм від m змінних $t_1, \dots, t_m$, тобто однорідних многочленів другого степеня вигляду

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij} t_i t_j, \quad (9.6)$$

де a_{ij} – фіксовані числа, причому $a_{ij} = a_{ji}$ для довільних $i, j = 1, \dots, m$. Квадратична форма (8.9) називається *додатно (від’ємно) визначеною*, якщо вона набуває лише строго додатних (від’ємних) значень при будь-яких значеннях змінних $t_1, \dots, t_m$, для яких $|t_1| + \dots + |t_m| \neq 0$. Якщо ж квадратична форма (9.6) набуває значень різних знаків, то вона називається *невизначеною*.

Теорема 3. [критерій Сільвестра] *Квадратична форма (9.6) додатно визначена тоді й лише тоді, коли*

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} > 0,$$

а від’ємно визначена тоді й лише тоді, коли

$$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, (-1)^m \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} > 0.$$

Теорема 4. [достатня умова екстремуму функції багатьох змінних] *Нехай функція $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ має неперервні частинні похідні першого і другого порядків у деякому околі своєї стаціонарної точки $x_0 \in X$, а*

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$$

для всіх $i, j = 1, \dots, m$. Тоді якщо відповідна квадратична форма (8.9) додатно визначена, то x_0 – точка строгого локального мінімуму, якщо від’ємно визначена, то x_0 – точка строгого локального максимуму, а якщо невизначена, то x_0 не є точкою локального екстремуму.

Дослідити на екстремум наведені нижче функції двох змінних:

- | | |
|---------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $u = 3 - (x - 2)^2 - (y + 2)^2$; | 2. $u = (x + 1)^2 + (y - 3)^2$; |
| 3. $u = (x - 2y + 4)^2$; | 4. $u = 1 - (x + y - 2)^2$; |
| 5. $u = x^2 + y^2 - 2x + 4y$; | 6. $u = 8x - 6y - 2x^2 - y^2$; |
| 7. $u = x^2 - y^2$; | 8. $u = (x + 3)^2 - (y - 1)^2$; |
| 9. $u = x^2 - 2xy + 2y^2$; | 10. $u = x^2 - xy - y^2$; |
| 11. $u = 12x + 3y - x^2 - xy - y^2$; | 12. $u = 2x - y - x^2 + xy - y^2$; |
| 13. $u = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$; | 14. $u = x^2 + xy + y^2 + x - y$; |

15. $u = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$;
16. $u = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$;
17. $u = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$;
18. $u = 3x^3 + y^3 - 3y^2 - x$;
19. $u = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y$;
20. $u = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$;
21. $u = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y$;
22. $u = (x + y^2 + 2y)e^{2x}$;
23. $u = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$;
24. $u = e^{x^2-y}(5 - 2x + y)$;
25. $u = (x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$;
26. $u = xy \ln(x^2 + y^2)$;
27. $u = x^2y^3(6 - x - y)$;
28. $u = x^3y^2(12 - x - y)$;
29. $u = 4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y$;
30. $u = x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y$;
31. $u = x^3 + y^3 + 3axy \quad (a \in \mathbb{R})$;
32. $u = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \quad (x > 0, \quad y > 0)$;
33. $u = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (a > 0, \quad b > 0)$;
34. $u = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$;
35. $u = x - 2y + \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 3 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$;
36. $u = x + y + 4 \sin x \sin y$.

Дослідити на екстремум наведені нижче функції трьох змінних:

37. $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$;
38. $u = x^2 + y^2 + (z + 1)^2 - xy + x$;
39. $u = 8 - 6x + 4y - 2z - x^2 - y^2 - z^2$;
40. $u = x^2 + y^2 - z^2 - 4x + 6y - 2z$;
41. $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$;
42. $u = x^2 + y^3 + z^2 + 6xy - 4z$;
43. $u = xyz(16 - x - y - 2z)$;
44. $u = xy^2z^3(a - x - 2y - 3z) \quad (a > 0)$.

Розділ Х. Інтегрування функцій багатьох змінних

10.1. Криволінійні інтеграли I роду

Нехай на кривій $L = \widetilde{AB}$, яка знаходиться в площині OXY , визначена функція $f(x, y)$. Розіб'ємо криву точками $\widetilde{A} = A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n = B$ на n частин і на кожній кривій $\widetilde{A_{i-1}A_i}$ виберемо точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$. Нехай Δs_i – це довжина кривої $\widetilde{A_{i-1}A_i}$ для $i = 1, 2, \dots, n$ та

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta s_i.$$

Розглянемо відповідну *інтегральну суму*

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i.$$

Якщо існує скінченна границя інтегральних сум σ при $\lambda \rightarrow 0$, яка не залежить від способу розбиття кривої L і вибору набору $(M_i)_{i=1}^n$ відмічених точок, то вона називається *криволінійним інтегралом першого роду від функції f по кривій L* і позначається $\int_L f(x, y) ds$,

тобто

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i.$$

Властивості криволінійного інтеграла I роду

1. Значення інтеграла не залежить від напрямку проходження кривої, тобто

$$\int_{\widetilde{AB}} f(x, y) ds = \int_{\widetilde{BA}} f(x, y) ds.$$

2. Нехай існує криволінійний інтеграл $\int_{\widetilde{AB}} f(x, y) ds$ і точка C

лежить на кривій $\widetilde{AB}$. Тоді існують криволінійні інтеграли $\int_{\widetilde{AC}} f(x, y) ds$ і $\int_{\widetilde{BC}} f(x, y) ds$, при цьому виконується рівність

$$\int_{\widetilde{AB}} f(x, y) ds = \int_{\widetilde{AC}} f(x, y) ds + \int_{\widetilde{CB}} f(x, y) ds.$$

З іншого боку, з існування інтегралів $\int_{\widetilde{AC}} f(x, y) ds$ і $\int_{\widetilde{BC}} f(x, y) ds$ випливає існування інтеграла $\int_{\widetilde{AB}} f(x, y) ds$.

Формули для обчислення криволінійного інтеграла I роду

1. Нехай крива L задана параметрично системою

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \end{cases}$$

причому функції $x(t)$ і $y(t)$ неперервно диференційовні на $[\alpha, \beta]$. Тоді

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

2. Нехай крива L задана за допомогою явного рівняння

$$y = g(x), \quad x \in [a, b],$$

причому функція $g(x)$ неперервно диференційовна на $[a, b]$. Тоді

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, g(x)) \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx.$$

3. Нехай крива L задана за допомогою рівняння в полярних координатах

$$r = r(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha, \beta],$$

причому функція $r(\varphi)$ неперервно диференційовна на $[\alpha, \beta]$. Тоді

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi.$$

Криволінійні інтеграли I роду вздовж просторових кривих

Аналогічно вводиться поняття криволінійного інтеграла I роду вздовж кривої $L = \widetilde{AB}$, яка знаходиться в просторі з прямокутною

декартовою системою координат $OXYZ$, від функції трьох змінних $f(x, y, z)$, яка визначена на кривій L . А саме,

$$\int_L f(x, y, z) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i,$$

де $A = A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n = B$ – розбиття кривої L на n частин, Δs_i – це довжина кривої $A_{i-1}A_i$ для $i = 1, 2, \dots, n$, $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta s_i$ і

$(M_i)_{i=1}^n$ – набір відмічених точок $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in A_{i-1}A_i$.

Нехай крива L задана параметрично системою

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

причому функції $x(t)$, $y(t)$ і $z(t)$ неперервно диференційовні на $[\alpha, \beta]$. Тоді

$$\int_L f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Застосування криволінійних інтегралів I роду

1. Довжина ℓ плоскої або просторової кривої L обчислюється за формулою

$$\ell = \int_L ds.$$

2. Нехай задана плоска крива L із лінійною густиною $\rho(x, y)$. Тоді маса m кривої L знаходиться за формулою

$$m = \int_L \rho(x, y) ds.$$

Статичні моменти M_x і M_y кривої L відносно осей OX і OY відповідно вираховують так:

$$M_x = \int_L y \rho(x, y) ds \quad \text{і} \quad M_y = \int_L x \rho(x, y) ds.$$

Отже, координати x_0 і y_0 центра ваги кривої L обчислюються за формулами

$$x_0 = \frac{M_y}{m} \quad \text{і} \quad y_0 = \frac{M_x}{m}.$$

3. Якщо $\rho = \rho(x, y, z)$ – лінійна густина просторової кривої $\widetilde{AB}$, то маса m кривої $\widetilde{AB}$ знаходиться так:

$$m = \int_{\widetilde{AB}} \rho(x, y, z) ds.$$

Координати центра ваги (x_0, y_0, z_0) цієї кривої вираховують за формулами

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{m} \int_{\widetilde{AB}} x \rho(x, y, z) ds; & y_0 &= \frac{1}{m} \int_{\widetilde{AB}} y \rho(x, y, z) ds; \\ z_0 &= \frac{1}{m} \int_{\widetilde{AB}} z \rho(x, y, z) ds. \end{aligned}$$

Обчислити такі криволінійні інтеграли першого роду вздовж плоских кривих:

1. $\int_L (x - y) ds$, де L – відрізок з кінцями в точках $A(0; -2)$ і $B(4; 0)$;
2. $\int_L \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, де L – відрізок із кінцями в точках $A(0; 0)$ і $B(1; 2)$;
3. $\int_L (x + y) ds$, де L – контур трикутника з вершинами в точках $A(0; 0)$, $B(1; 0)$ і $C(0; 1)$;
4. $\int_L x(y + 1) ds$, де L – контур трикутника з вершинами в точках $A(0; 0)$, $B(-1; 0)$ і $C(0; -3)$;
5. $\int_L xy ds$, де L – контур прямокутника з вершинами в точках $A(0; 0)$, $B(4; 0)$, $C(4; 2)$ і $D(0; 2)$;
6. $\int_L (y - 3x) ds$, де L – контур чотирикутника з вершинами в точках $A(0; 0)$, $B(1; 2)$, $C(2; 2)$ і $D(3; 0)$;

7. $\int_L y \, ds$, де L – дуга параболи $y^2 = 8x$, що відтинається параболою $x^2 = 8y$;
8. $\int_L xy \, ds$, де L – частина кривої $y = \sqrt{x}$, що міститься всередині круга $x^2 + y^2 \leq 2$;
9. $\int_L x^2 \, ds$, де L – коло $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$;
10. $\int_L (x^2 + y^2)^4 \, ds$, де L – коло $x^2 + y^2 = 2$;
11. $\int_L (x + y) \, ds$, де L – дуга кола $x^2 + y^2 = 4$ при $y \geq 0$;
12. $\int_L (2x - y) \, ds$, де L – дуга кола $x^2 + y^2 = 9$ при $x \leq 0$;
13. $\int_L (y - 1)^2 \, ds$, де L – коло $x^2 + y^2 - 2y = 0$;
14. $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} \, ds$, де L – коло $x^2 + y^2 = 2x$;
15. $\int_L \frac{xy \, ds}{\sqrt{81x^2 + 16y^2}}$, де L – чверть еліпса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, що міститься в першому квадранті;
16. $\int_L \sqrt{4x^2 + \frac{y^2}{4}} \, ds$, де L – еліпс $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$;
17. $\int_L \sqrt{2y} \, ds$, де L – перша арка циклоїди $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$;
18. $\int_L (x^2 + y^2) \, ds$, де L – крива $x = \cos t + t \sin t$, $y = \sin t - t \cos t$, $t \in [0, 2\pi]$;

19. $\int_L (x^{4/3} + y^{4/3}) ds$, де L – астроида $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$;
20. $\int_L xy ds$, де L – дуга гіперболи $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$, $t \in [0, \ln 2]$;
21. $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$, де L – дуга кола $r = 1$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$;
22. $\int_L |y| ds$, де L – лемніската $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$;
23. $\int_L x\sqrt{x^2 - y^2} ds$, де L – дуга лемніскати $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$,
 $x \geq 0$;
24. $\int_L \operatorname{arctg} \frac{y}{x} ds$, де L – частина спіралі Архімеда $r = 2\varphi$, яка знаходиться всередині круга $r \leq 2$;
25. $\int_L x ds$, де L – частина логарифмічної спіралі $r = e^\varphi$, яка знаходиться всередині круга $r \leq e^\pi$.

Знайти довжини таких просторових кривих:

26. $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$, де $t \in [0, 1]$;
27. $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$, де $t \in [0, \sqrt{2}]$;
28. $x = t \cos t^2$, $y = t \sin t^2$, $z = t^2$, де $t \in [0, \sqrt{2\pi}]$;
29. $x = 1 + \cos t$, $y = t - \sin t$, $z = 4 \sin \frac{t}{2}$, де $t \in [0, 2\pi]$;
30. $x = e^{-t} \cos t$, $y = e^{-t} \sin t$, $z = e^{-t}$, де $t \in [0, +\infty)$;

Обчислити такі криволінійні інтеграли першого роду вздовж просторових кривих:

31. $\int_L \frac{z^2 ds}{x^2 + y^2}$, де L – перший виток гвинтової лінії $x = a \cos t$,
 $y = a \sin t$, $z = at$ ($a > 0$);

32. $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$, де L – перший виток гвинтової лінії $x = \cos t$,
 $y = \sin t$, $z = t$;

33. $\int_L z ds$, де L – дуга кінчної гвинтової лінії $x = t \cos t$, $y = t \sin t$,
 $z = t$, $t \in [0, 2\pi]$;

Знайти масу плоскої кривої L з лінійною густиною $\rho(x, y)$, якщо:

34. L – графік функції $y = \ln x$, де $x \in [1, e]$, а $\rho(x, y) = x^2$;

35. L – графік функції $y = \operatorname{ch} x$, де $x \in [0, 1]$, а $\rho(x, y) = \frac{1}{y}$;

36. L – дуга параболи $2y = x^2$, де $x \in [1, 2]$, а $\rho(x, y) = \frac{y}{x}$;

37. L – дуга параболи $y^2 = 4x$, де $x \in [0, 1]$, а $\rho(x, y) = |y|$.

Знайти масу просторової кривої L з лінійною густиною $\rho(x, y, z)$, якщо:

38. L – лінія $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$, де $t \in [0, 1]$, а $\rho(x, y, z) = \sqrt{\frac{y}{3}}$;

39. L – лінія $y = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$, $z = \frac{x^3}{3}$, де $x \in [0, 4]$, а $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$;

Знайти координати центра ваги однорідної кривої L , якщо:

40. L – графік функції $y = \operatorname{ch} x$, де $x \in [0, 1]$;

41. L – частина арки циклоїди $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, де $t \in [0, \pi]$;

10.2. Криволінійні інтеграли II роду

Нехай функція $P(x, y)$ визначена на плоскій спрямній кривій $L = \overline{AB}$, яка не має самоперетинів. Рухаючись по цій кривій від точки A до точки B , розіб'ємо її точками $A = A_0(x_0, y_0), A_1(x_1, y_1), \dots, A_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}), A_n(x_n, y_n) = B$ на n частин. На кожній кривій $A_{i-1}A_i$ виберемо точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$ і утворимо відповідну інтегральну суму

$$\sigma = \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i, \quad \text{де } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Нехай Δs_i – це довжина кривої $A_{i-1}A_i$ для $i = 1, 2, \dots, n$ та

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta s_i.$$

Якщо існує скінченна границя інтегральних сум σ при $\lambda \rightarrow 0$, яка не залежить від способу розбиття кривої L і вибору набору $(M_i)_{i=1}^n$ відмічених точок, то вона називається *криволінійним інтегралом другого роду від функції $P(x, y)$ по кривій L* і позначається $\int_L P(x, y) dx$, тобто

$$\int_L P(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i.$$

Аналогічно,

$$\int_L Q(x, y) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i,$$

де функція $Q(x, y)$ визначена на кривій L і $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$.

Загальний вигляд криволінійного інтеграла другого роду такий:

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_L P(x, y) dx + \int_L Q(x, y) dy.$$

Властивості криволінійного інтеграла II роду

$$1. \quad \int_{\overline{AB}} P(x, y) dx = - \int_{\overline{BA}} P(x, y) dx.$$

2. Нехай існує криволінійний інтеграл $\int_{\widetilde{AB}} P(x, y) dx$ і точка C

лежить на кривій $\widetilde{AB}$. Тоді існують криволінійні інтеграли $\int_{\widetilde{AC}} P(x, y) dx$ і $\int_{\widetilde{CB}} P(x, y) dx$, при цьому виконується рівність

$$\int_{\widetilde{AB}} P(x, y) dx = \int_{\widetilde{AC}} P(x, y) dx + \int_{\widetilde{CB}} P(x, y) dx.$$

З іншого боку, з існування інтегралів $\int_{\widetilde{AB}} P(x, y) dx$ і $\int_{\widetilde{BC}} P(x, y) dx$ випливає існування інтеграла $\int_{\widetilde{AC}} P(x, y) dx$.

Якщо крива L задається параметрично системою

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \end{cases}$$

де функції $x(t)$ та $y(t)$ неперервно диференційовні на відрізку $[\alpha, \beta]$, а функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервні на кривій L , яка проходиться в напрямку зростання параметра t , то

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)] dt.$$

Криволінійний інтеграл II роду по замкнутому контуру, додатний напрямок проходження кривої

Нехай L – замкнена крива без самоперетинів із заданим напрямком проходження і точки A, B, C, D розміщені на кривій L у вказаному порядку, що узгоджується з напрямком проходження кривої. Тоді

$$\int_L P(x, y) dx = \int_{\widetilde{ABC}} P(x, y) dx + \int_{\widetilde{CDA}} P(x, y) dx.$$

Зауважимо, що значення інтеграла $\int_L P(x, y) dx$ не залежить від вибору точок A, B, C і D . Інтеграл по замкнутому контуру L позначається також так:

$$\oint_L P(x, y) dx.$$

Напрямок проходження замкнутої кривої проти годинникової стрілки (тобто такий напрямок проходження, при якому частина площини, обмежена контуром, знаходиться зліва) називається *до-датним*. А, відповідно, напрямок проходження замкнутої кривої за годинниковою стрілкою називається *від'ємним*.

Якщо для замкнутої кривої не вказано напрямок проходження, то він вважається додатним.

Криволінійні інтеграли II роду вздовж просторових кривих

Аналогічно до випадку плоскої кривої вводиться поняття криволінійного інтеграла II роду вздовж спрямованої кривої $L = \overrightarrow{AB}$, яка знаходиться у просторі з прямокутною декартовою системою координат $OXYZ$, від функції трьох змінних $P(x, y, z)$, яка визначена на кривій L . А саме,

$$\int_L P(x, y, z) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i,$$

де $A = A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n = B$ – розбиття кривої L на n частин, $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta s_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ і $(M_i)_{i=1}^n$ – набір відмічених точок

$M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \widetilde{A_{i-1}A_i}$ для $i = 1, 2, \dots, n$.

Аналогічно вводяться інтеграли $\int_L Q(x, y, z) dy$ і $\int_L R(x, y, z) dz$.

Отже, загальний вигляд криволінійного інтеграла другого роду по просторовій кривій такий:

$$\int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

Нехай крива L задана параметрично системою

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

причому функції $x(t)$, $y(t)$ і $z(t)$ неперервно диференційовні на $[\alpha, \beta]$, а функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ і $R(x, y, z)$ неперервні на кривій L , яка проходить у напрямку зростання параметра t . Тоді

$$\begin{aligned} & \int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ & = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + \\ & \quad + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t)] dt. \end{aligned}$$

Фізичні застосування криволінійних інтегралів II роду

Нехай у площині OXY задано силове поле $\vec{F}(x, y)$, де

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

– це сила, яка діє на матеріальну точку (x, y) одиничної маси. Тоді робота A силового поля при русі матеріальної точки одиничної маси вздовж плоскої кривої $\overline{BC}$ обчислюється за формулою

$$A = \int_{\overline{BC}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Аналогічна формула має місце для роботи силового поля

$$\vec{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

в просторі з прямокутною декартовою системою координат.

Обчислити криволінійні інтеграли другого роду, взяті вздовж указаних кривих у напрямку зростання параметра:

1. $\int_L x dy - y dx$, якщо:

- а) L – відрізок OA , де $O(0, 0)$, $A(1, 2)$;
- б) L – дуга параболи $y = 2x^2$, $x \in [0, 1]$;
- в) L – ламана OBA , де $O(0, 0)$, $B(1, 0)$, $A(1, 2)$;

2. $\int_L x dy + y dx$, якщо:

- а) L – відрізок OA , де $O(0, 0)$, $A(1, 2)$;
- б) L – дуга параболи $y = 2x^2$, $x \in [0, 1]$;
- в) L – ламана OBA , де $O(0, 0)$, $B(1, 0)$, $A(1, 2)$;

3. $\int_L xy dx$, де L – дуга синусоїди $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$;

4. $\int_L \left(x - \frac{1}{y} \right) dy$, де L – дуга параболи $y = 3x^2$, $x \in [1, 2]$;

5. $\int_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, де L – дуга параболи $y = x^2$, $x \in [-1, 1]$;

6. $\int_L \frac{y}{x} dx + dy$, де L – дуга кривої $y = \ln x$, $x \in [1, e]$;
7. $\int_L 2xy dx + x^2 dy$, де L – дуга параболи $y = \frac{x^2}{4}$, $x \in [0, 2]$;
8. $\int_L 2xy dx - x^2 dy$, де L – дуга параболи $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$, $x \in [0, 2]$;
9. $\int_L (xy - y^2) dx + x dy$, де L – дуга параболи $y = 2\sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$;
10. $\int_L xy dx + (y - x) dy$, де L – дуга кривої $y = x^3$, $x \in [0, 1]$;
11. $\int_L y dx + x dy$, де L – чверть кола $x = 2 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$;
12. $\int_L \frac{y^2 dx - x^2 dy}{x^2 + y^2}$, де L – півколо $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, \pi]$;
13. $\int_L y dx - x dy$, де L – еліпс $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$;
14. $\int_L y^2 dx + x^2 dy$, де L – верхня половина еліпса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0, \pi]$;
15. $\int_L (2a - y) dx - (a - y) dy$, де L – арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$;
16. $\int_L \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{5/3} + y^{5/3}}$, де L – дуга астроїди $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Обчислити криволінійні інтеграли II роду, взяті вздовж просторових кривих у напрямку зростання параметра:

17. $\int_L y dx + z dy + x dz$, де L – виток гвинтової лінії $x = \cos t$, $y = 2 \sin t$, $z = t$, $t \in [0, 2\pi]$;

18. $\int_L (y^2 - z^2) dx + 2yz dy - x^2 dz$, де L – крива $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $t \in [0, 1]$;

19. $\int_L yz dx + zx dy + xy dz$, де L – дуга гвинтової лінії $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = \frac{at}{2\pi}$, $t \in [0, 2\pi]$;

20. $\int_L (y + z) dx + (z + x) dy + (x + y) dz$, де L – крива $x = a \sin^2 t$, $y = 2a \sin t \cos t$, $z = a \cos^2 t$, $t \in [0, \pi]$;

21. $\int_L x dx + (x + y) dy + (x + y + z) dz$, де L – крива $x = a \sin t$, $y = a \cos t$, $z = a(\sin t + \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$;

22. $\int_L y dx + z dy + x dz$, де L – коло $x = \frac{a}{2} \cos t$, $y = \frac{a}{2} \sin t$, $z = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $t \in [0, 2\pi]$.

23. Знайти роботу силового поля $\vec{F}(x, y) = (xy, x + y)$ вздовж дуги $\widetilde{BC}$ кривої L , де $B(0, 0)$, $C(1, 1)$, якщо:

- а) L – пряма $y = x$; б) L – парабола $y = x^2$.

24. Знайти роботу силового поля $\vec{F}(x, y)$ вздовж дуги $\widetilde{BC}$ кривої L , якщо:

а) $\vec{F}(x, y) = (4x - 5y, 2x + y)$, $B(1, -9)$, $C(3, -3)$, а L – відрізок BC ;

б) $\vec{F}(x, y) = (2xy, -y)$, $B(1, 0)$, $C(2, 3)$, а L – парабола $y = x^2 - 1$;

в) $\vec{F}(x, y) = (3xy^2, x - y)$, $B(0, 1)$, $C(3, 2)$, а L – парабола $y^2 = x + 1$;

г) $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$, $B(0, 0)$, $C(2\pi, 0)$, а L – циклоїда $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$;

г) $\vec{F}(x, y) = (y, -2x)$, $B(1, 0)$, $C(-1, 0)$, а L – півколо $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$.

25. Знайти роботу силового поля $\vec{F}(x, y, z)$ вздовж кривої L , якщо:

а) $\vec{F}(x, y, z) = (yz, zx, xy)$, а L – ламана $BCDE$ з вершинами $B(1, 1, 1)$, $C(2, 1, 1)$, $D(2, 3, 1)$, $E(2, 3, 4)$;

б) $\vec{F}(x, y, z) = (x + z, x, -y)$, а L – замкнена ламана $BCDB$ з вершинами $B(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $D(0, 0, 1)$;

в) $\vec{F}(x, y, z) = (\frac{x^2}{y}, \frac{y}{x}, \cos z)$, а L – виток гвинтової лінії $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ від точки $B(1, 0, 0)$ до точки $C(1, 0, 2\pi)$.

10.3. Обчислення подвійних інтегралів

Нехай на квадратній множині $D \subseteq \mathbb{R}^2$ задана функція $f(x, y)$. Розіб'ємо фігуру D на n квадратних частин $D_1, \dots, D_n$. Для кожного $i = 1, 2, \dots, n$ виберемо точку $M_i(\xi_i, \eta_i) \in D_i$, позначимо через S_i площу фігури D_i і покладемо

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \text{diam } D_i,$$

де $\text{diam } D_i = \sup_{p, q \in D_i} d(p, q)$, причому $d(p, q)$ – це евклідова відстань від точки p до точки q в просторі $\mathbb{R}^2$. Розглянемо *інтегральну суму*

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) S_i.$$

Якщо існує скінченна границя $I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$, яка не залежить від способу розбиття множини D і вибору набору $(M_i)_{i=1}^n$ відмічених точок M_i , то вона називається *подвійним інтегралом від функції $f(x, y)$ по множині D* і позначається через $\iint_D f(x, y) dx dy$, тобто

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) S_i.$$

Зауважимо, що відкрита зв'язна множина $D \subseteq \mathbb{R}^2$ називається *областю*. Якщо множина D буде замиканням деякої області в $\mathbb{R}^2$, то називатимемо її *замкненою областю*, а якщо вона буде ще й обмеженою, то – *компактною областю*. Найчастіше подвійні інтеграли розглядаються по компактних областях, обмежених замкненими спрямленими кривими.

Властивості подвійних інтегралів

1. Кожна неперервна на компактній області D функція $f(x, y)$ інтегровна по цій області D .
2. Якщо значення інтегрованої по (замкненій, компактній) області D функції довільно змінити на кривій нульової площі, залишаючи при цьому функцію обмеженою, то одержана функція також інтегровна по цій області D .
3. Нехай функція $f(x, y)$ інтегровна по (замкненій, компактній) області D і крива γ нульової площі розбиває D на дві частини

D' і D'' . Тоді функція $f(x, y)$ інтегровна по цих частинах D' і D'' , при цьому виконується рівність

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x, y) dx dy + \iint_{D''} f(x, y) dx dy.$$

З іншого боку, з інтегровності функції $f(x, y)$ по множинах D' і D'' випливає інтегровність функції $f(x, y)$ по цій області D .

Теорема 1. Нехай функція $f(x, y)$ визначена на прямокутнику $D = [a, b] \times [c, d]$, існує подвійний інтеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ і для

кожного $x \in [a, b]$ існує інтеграл $I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$. Тоді існує

повторний інтеграл $\int_a^b I(x) dx$, причому

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Теорема 2. Нехай $\psi(x)$ і $\varphi(x)$ – неперервні функції на відрізку $[a, b]$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$, існує подвійний інтеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ і для кожного $x \in [a, b]$ існує інтеграл

$I(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$. Тоді існує повторний інтеграл $\int_a^b I(x) dx$, причому

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$

Аналогічно, якщо компактна область D в теоремі 2 описується нерівностями: $c \leq y \leq d$ і $\alpha(y) \leq x \leq \beta(y)$, де $\alpha, \beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ – неперервні функції, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx.$$

Якщо неперервна межа області D перетинається не більше ніж у двох точках із кожною горизонтальною і вертикальною прямими,

то при переході від подвійного інтеграла до повторного можна вибрати порядок інтегрування в тій чи іншій послідовності змінних.

У випадку, коли область D має складнішу структуру, потрібно область D кривими нульової площі (наприклад, горизонтальними і вертикальними відрізками) розбити на частини з простішими межами і перейти до суми подвійних інтегралів по простіших областях.

Обчислити такі повторні інтеграли:

$$1. \int_0^1 dx \int_1^2 (x+1) dy;$$

$$2. \int_0^2 dy \int_3^5 (2y-1) dx;$$

$$3. \int_0^{\pi/2} dx \int_{-x}^0 \sin(x+y) dy;$$

$$4. \int_0^{\pi/2} dx \int_0^x \cos(x-y) dy;$$

$$5. \int_0^1 dy \int_0^{2y} x e^{x-2y} dx;$$

$$6. \int_{-1}^1 dy \int_{2y}^y (x-y) e^y dx.$$

У подвійному інтегралі $\iint_D f(x, y) dx dy$ розставити межі інтегрування в обох порядках, якщо:

7. D – це квадрат з вершинами $O(0, 0)$, $A(0, 3)$, $B(3, 3)$, $C(3, 0)$;
8. D – це прямокутник з вершинами $O(0, 0)$, $A(-4, 0)$, $B(-4, 1)$, $C(0, 1)$;
9. D – це трикутник з вершинами $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$;
10. D – це трикутник з вершинами $A(1, 0)$, $B(0, 2)$, $C(1, 2)$;
11. D – це трапеція з вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 2)$, $C(0, 1)$;
12. D – це чотирикутник з вершинами $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(1, 2)$, $C(0, 1)$;
13. D – це круг $x^2 + y^2 \leq 1$;
14. D – це чверть круга $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $y \leq 0$;
15. D – це півкруг $x^2 + y^2 \leq 6x$, $y \geq 0$;
16. D – це півкруг $x^2 + y^2 \leq 2y$, $x \leq 0$;
17. D – це кільце $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$;

18. D – це кільце $2x + 2y - 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x + 2y$;
 19. D – це область, обмежена лініями $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$;
 20. D – це область, обмежена лініями $y = x^3$, $y = 1$, $x = -1$;
 21. D – це область, обмежена лініями $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 0$, $y = -2$;
 22. D – це область, обмежена лініями $y = e^x$, $x + y = 1$, $y = 0$, $x = -1$.

Змінити порядок інтегрування в таких повторних інтегралах:

23. $\int_0^2 dx \int_{\frac{2x}{y^2+y}}^{6-x} f(x, y) dy$; 24. $\int_1^2 dx \int_{\frac{x}{3+2x-x^2}}^{2x} f(x, y) dy$;
 25. $\int_0^1 dy \int_0^{y^2+y} f(x, y) dx$; 26. $\int_{-1}^2 dx \int_{x^2-1}^x f(x, y) dy$;
 27. $\int_{-6}^2 dx \int_{x^2/4-1}^{2-x} f(x, y) dy$; 28. $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy$;
 29. $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$; 30. $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$;

Обчислити такі подвійні інтеграли:

31. $\iint_D \sin(x + y) dx dy$, якщо область D обмежена лініями $x = 0$,
 $x = \pi$, $y = 0$ і $y = \pi$;
 32. $\iint_D \cos(x - y) dx dy$, якщо область D обмежена лініями $x = 0$,
 $x = \pi$, $y = \pi$ і $y = 2\pi$;
 33. $\iint_D (x^2 + y) dx dy$, якщо область D обмежена лініями $y = x^2$ і
 $y^2 = x$;
 34. $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$, якщо область D обмежена лініями $x = 2$, $y = x$ і
 $xy = 1$;

35. $\iint_D x^3 y \, dx dy$, якщо область D – це круг $x^2 + y^2 < R^2$;
36. $\iint_D |xy| \, dx dy$, якщо область D – це круг радіуса R з центром у початку координат;
37. $\iint_D \cos(x+y) \, dx dy$, якщо область D – це трикутник зі сторонами $x = 0$, $y = \pi$ і $y = x$;
38. $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx dy$, якщо область D – це паралелограм зі сторонами $y = x$, $y = x + 2$, $y = 2$ і $y = 6$.

10.4. Формула Гріна та її застосування

Нехай область D обмежена кусково-гладким контуром L і функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ мають неперервні частинні похідні $P'_y(x, y)$ та $Q'_x(x, y)$ на множині D . Тоді має місце *формула Гріна*:

$$\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D (Q'_x(x, y) - P'_y(x, y)) dx dy,$$

де напрямок проходження замкненої кривої L додатний (проти годинникової стрілки), тобто при проходженні кривої L область D залишається зліва.

Заміна змінних у подвійних інтегралах

Нехай система функцій

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases} \quad (4)$$

встановлює відповідність між компактними областями Δ і D в площинах OUV і OXY відповідно. Крім того, нехай ця відповідність взаємно однозначна між внутрішностями областей Δ і D і функції $x(u, v)$ та $y(u, v)$ неперервно диференційовні на Δ , тобто диференціали цих функцій неперервно залежать від координат точки диференційовності. Тоді має місце *формула заміни змінних*

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv,$$

де $J(u, v)$ – це якобіан системи (4), який обчислюється за формулою

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u(u, v) & y'_u(u, v) \\ x'_v(u, v) & y'_v(u, v) \end{vmatrix}.$$

Зокрема, при переході до полярних координат ρ і φ за формулами

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases}$$

маємо:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi,$$

де D і Δ – області у відповідних площинах.

Незалежність криволінійного інтеграла II роду від шляху інтегрування та інтеграли від повних диференціалів

Інтеграл $\int_{\widetilde{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ не залежить від шляху інтегрування в області D , якщо для довільних двох кривих $\widetilde{AmB}$, $\widetilde{AnB} \subseteq D$ виконується рівність

$$\int_{\widetilde{AmB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\widetilde{AnB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

У випадку, коли криволінійний інтеграл $\int_{\widetilde{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ по кривій $\widetilde{AB}$, що з'єднує точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$, не залежить від шляху інтегрування, цей інтеграл позначається також так:

$$\int_A^B P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad \text{або} \quad \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Нагадаємо, що плоска область D називається *однозв'язною*, якщо вона разом із кожною неперервною замкненою кривою без самоперетинів містить і внутрішність цієї кривої.

Теорема 1. Нехай функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервні і мають неперервні частинні похідні $P'_y(x, y)$ і $Q'_x(x, y)$ в однозв'язній області D . Тоді такі умови рівносильні:

- (i) $P'_y(x, y) = Q'_x(x, y)$ для кожної точки $(x, y) \in D$;
- (ii) існує така диференційовна функція $F : D \rightarrow \mathbb{R}$, що

$$dF(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy;$$

- (iii) інтеграл $\int_{\widetilde{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ не залежить від шляху інтегрування в D .

Теорема 2. Нехай $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ – диференційовна в області $D \subseteq \mathbb{R}^2$ функція і

$$dF(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

причому функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервні в області D . Тоді інтеграл $\int_{\widetilde{AB}} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ не залежить від шляху інтегру-

вання в D і

$$\int_A^B P(x, y) dx + Q(x, y) dy = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1)$$

для довільних точок $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \in D$.

Теорема 3. Нехай $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ – диференційовна в області $D \subseteq \mathbb{R}^3$ функція і

$$dF(x, y, z) = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz,$$

причому функції $P(x, y, z), Q(x, y, z)$ і $R(x, y, z)$ неперервні в області D . Тоді інтеграл $\int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$ не

залежить від шляху інтегрування в D і

$$\int_A^B P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = F(x_2, y_2, z_2) - F(x_1, y_1, z_1)$$

для довільних точок $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2) \in D$.

За допомогою формули Гріна обчислити наведені нижче криволінійні інтеграли вздовж відповідних кусково-гладких замкнених кривих, які проходяться у додатному напрямку та обмежують певні області:

1. $\int_L (x + y) dx + (x - y) dy$;
2. $\int_L (x^2 + y^2) dx + (y^2 + 2xy) dy$;
3. $\int_L (2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy$;
4. $\int_L e^{-(x^2 - y^2)} (\cos 2xy dx + \sin 2xy dy)$;
5. $\int_L \varphi(x) dx + \psi(y) dy$, якщо φ і ψ – довільні неперервні функції;
6. $\int_L f(xy)(y dx + x dy)$, якщо f – довільна диференційовна функція;

7. $\int_L f\left(\frac{y}{x}\right) \frac{x dy - y dx}{x^2}$, якщо f – довільна диференційовна функція і L не перетинає вісь OY ;
8. $\int_L (f(x+y) + f(x-y)) dx + (f(x+y) - f(x-y)) dy$, якщо f – довільна диференційовна функція;
9. $\int_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, якщо L – коло $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$;
10. $\int_L (x+y) dx - (x-y) dy$, якщо L – еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

У подвійному інтегралі $\iint_D f(x, y) dx dy$ перейти до полярних координат і розставити межі інтегрування, якщо:

11. D – це круг $x^2 + y^2 \leq 1$;
12. D – це круг $x^2 + y^2 \leq R^2$;
13. D – це круг $x^2 + y^2 \leq 4x$;
14. D – це круг $x^2 + y^2 \leq 8y$;
15. D – це кільце $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$;
16. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\}$.

Переходячи до полярних координат, обчислити такі подвійні інтеграли:

17. $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, якщо D – це круг $x^2 + y^2 \leq 25$;
18. $\iint_D \cos(\pi \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$, якщо D – це круг $x^2 + y^2 \leq 1$;
19. $\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, якщо D – це кільце $\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$;
20. $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2 - 1}$, якщо D – це кільце $9 \leq x^2 + y^2 \leq 25$;

21. $\iint_D xy^2 dx dy$, якщо D – це півкруг $x^2 + y^2 \leq a^2$, $x \geq 0$;
22. $\iint_D y^2 e^{x^2+y^2} dx dy$, якщо D – це чверть круга $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$,
 $y \leq 0$.

У наведених нижче подвійних інтегралах перейти до нових змінних u і v та розставити межі інтегрування відносно нових змінних:

23. $\iint_D f(x, y) dx dy$, якщо $u = \frac{y}{x}$ і $v = \frac{y}{2-x}$, а область D обмежена
 прямими $x = 2y$, $y = 2x$, $x + 2y = 2$, $2x + y = 4$;

24. $\iint_D f(x, y) dx dy$, якщо $x = u \cos^4 v$ і $y = u \sin^4 v$, а область D
 обмежена кривими $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, $x = 0$, $y = 0$;

25. $\iint_D f(x, y) dx dy$, якщо $x = u \cos^6 v$ і $y = u \sin^6 v$, а область D
 обмежена кривими $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 2$, $x = 0$, $y = 0$.

Зробивши відповідну заміну змінних, обчислити такі подвійні інтеграли:

26. $\iint_D (x + y) dx dy$, якщо область D обмежена лінією $|x| + |y| = 1$;
27. $\iint_D xy dx dy$, якщо область D обмежена лініями $xy = 1$, $xy = 2$,
 $y = x$, $y = 4x$;
28. $\iint_D (x + y) dx dy$, якщо $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq x + y\}$;
29. $\iint_D (2x - 4y) dx dy$, якщо $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x - 4y\}$;
30. $\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} dx dy$, якщо $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \right\}$;

$$31. \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \text{ якщо область } D \text{ обмежена лінією } x^4 + y^4 = 1.$$

Довести, що наведені нижче криволінійні інтеграли другого роду не залежать від шляху інтегрування в областях визначення своїх підінтегральних виразів, та обчислити значення цих інтегралів:

$$32. \int_{(-1,2)}^{(2,3)} x dx + y dy;$$

$$33. \int_{(0,1)}^{(3,-4)} x dx + y dy;$$

$$34. \int_{(1,0)}^{(2,3)} (x + y) dx + (x - y) dy;$$

$$35. \int_{(0,0)}^{(-2,1)} 2xy dx + x^2 dy;$$

$$36. \int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x - y) (dx - dy);$$

$$37. \int_{(0,1)}^{(1,3)} (x + 2y) (dx + 2 dy);$$

$$38. \int_{(1,2)}^{(2,1)} \frac{y dx - x dy}{x^2};$$

$$39. \int_{(1,2)}^{(2,1)} \frac{x dy - y dx}{(x - y)^2};$$

$$40. \int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$41. \int_{(0,e)}^{(1,2)} \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2};$$

$$42. \int_{(-2,-1)}^{(0,3)} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy;$$

$$43. \int_{(3,0)}^{(0,-3)} (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy;$$

$$44. \int_{(-1,2)}^{(1,-2)} (3x^2 - 2xy + y^2) dx + (2xy - x^2 - 3y^2) dy;$$

$$45. \int_{(0,\pi)}^{(0,0)} e^x (\cos y \, dx - \sin y \, dy);$$

$$46. \int_{(-1,0,2)}^{(0,1,-2)} x \, dx + y^2 \, dy - z^3 \, dz;$$

$$47. \int_{(2,-1,0)}^{(1,2,3)} yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz;$$

$$48. \int_{(\sqrt{3},-1,1)}^{(\frac{1}{2},1,2)} \frac{yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz}{1 + x^2 y^2 z^2};$$

$$49. \int_{(0,-1,0)}^{(4,0,3)} \frac{x \, dx + y \, dy + z \, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$50. \int_{(-1,0,2)}^{(2,3,-6)} \frac{dx + dy + dz}{(x + y + z)^2};$$

$$51. \int_{(1,2,3)}^{(-1,1,3)} (x^2 - 2yz) \, dx + (y^2 - 2xz) \, dy + (z^2 - 2xy) \, dz;$$

$$52. \int_{(1,2,3)}^{(-1,1,3)} \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right) \, dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right) \, dy - \frac{xy}{z^2} \, dz.$$

10.5. Потрійні інтеграли

Нехай на кубовному тілі $T \subseteq \mathbb{R}^3$ задана функція $f(x, y, z)$. Розіб'ємо тіло T на n кубовних частин $T_1, \dots, T_n$. Для кожного $i = 1, 2, \dots, n$ виберемо точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in T_i$, позначимо через V_i об'єм тіла T_i і покладемо

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \text{diam } T_i,$$

де $\text{diam } T_i = \sup_{p, q \in T_i} d(p, q)$, причому $d(p, q)$ – це евклідова відстань від точки p до точки q в просторі $\mathbb{R}^3$. Розглянемо відповідну *інтегральну суму*

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) V_i.$$

Якщо існує скінченна границя $I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$, яка не залежить від способу розбиття тіла T і вибору набору $(M_i)_{i=1}^n$ відмічених точок M_i , то вона називається *потрійним інтегралом від функції $f(x, y, z)$ по тілу T* і позначається через $\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz$, тобто

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) V_i.$$

Теорема 1. *Нехай кубовне тіло $T \subseteq \mathbb{R}^3$ обмежене поверхнями $x = a$, $x = b$ і для кожного $x \in [a, b]$ площиною, перпендикулярною до осі OX , перетинає тіло T по квадратній фігурі, ортогональна проекція якої на площину OYZ дорівнює $D(x)$. Нехай, окрім того, функція $f(x, y, z)$ інтегровна по тілу T і для кожного $x \in [a, b]$ функція $f_x : D(x) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_x(y, z) = f(x, y, z)$, інтегровна по області $D(x)$. Тоді функція*

$$I(x) = \iint_{D(x)} f_x(y, z) dy dz$$

інтегровна на відрізку $[a, b]$, причому

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b I(x) dx.$$

Формулу переходу від потрійного інтеграла до повторного, одержану в попередній теоремі, записують також у такому вигляді:

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \iint_{D(x)} f(x, y, z) dy dz.$$

Теорема 2. Нехай кубовне тіло $T \subseteq \mathbb{R}^3$ обмежене бічною поверхнею циліндра з основою $D \subseteq OXY$ і твірними, паралельними осі OZ , та поверхнями $z = \varphi(x, y)$ і $z = \psi(x, y)$, де $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y)$ і функції φ та ψ неперервні на D . Нехай, крім того, функція $f(x, y, z)$ інтегровна по тілу T і для кожної точки $(x, y) \in D$ функція $f_{x,y} : [\varphi(x, y), \psi(x, y)] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_{x,y}(z) = f(x, y, z)$, інтегровна на відрізку $[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$. Тоді функція

$$I(x, y) = \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f_{x,y}(z) dz$$

інтегровна по області D , причому

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D I(x, y) dx dy.$$

Цю формулу записують також у вигляді

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Теорема 3. Нехай кубовне тіло $T \subseteq \mathbb{R}^3$ описується нерівностями $a \leq x \leq b$, $\alpha(x) \leq y \leq \beta(x)$ і $\varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)$, причому функції α , β , φ і ψ неперервні. Нехай, крім того, функція $f(x, y, z)$ неперервна на T . Тоді

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Нехай система функцій

$$\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w) \end{cases} \quad (5)$$

встановлює відповідність між замкненими обмеженими тілами Ω і T в просторах із прямокутними декартовими системами координат $OUVW$ і $OXYZ$ відповідно. Крім того, нехай ця відповідність взаємно однозначна між внутрішностями тіл Ω і T , а функції x , y та z неперервно диференційовні на Ω , тобто диференціали цих функцій неперервно залежать від координат точки диференційовності. Тоді для інтегрованої на T функції $f(x, y, z)$ має місце така *формула заміни змінних* :

$$\begin{aligned} & \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \iiint_{\Omega} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw, \end{aligned}$$

де $J(u, v, w)$ – це якобіан системи (5), який обчислюється за формулою

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} x'_u(u, v, w) & y'_u(u, v, w) & z'_u(u, v, w) \\ x'_v(u, v, w) & y'_v(u, v, w) & z'_v(u, v, w) \\ x'_w(u, v, w) & y'_w(u, v, w) & z'_w(u, v, w) \end{vmatrix}.$$

Зокрема, при переході до циліндричних координат ρ , φ і z за формулами

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

отримаємо

$$J(\rho, \varphi, z) = \rho.$$

А при переході до сферичних координат ρ , φ і ψ за формулами

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \cos \psi, \\ y = \rho \sin \varphi \cos \psi, \\ z = \rho \sin \psi, \end{cases}$$

маємо

$$J(\rho, \varphi, \psi) = \rho^2 \cos \psi.$$

У потрійному інтегралі $\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz$ розставити межі інтегрування у всіх можливих порядках, якщо:

1. T обмежене площинами $x = 0$, $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$, $z = 1$ і $z = 3$;
2. T обмежене площинами $x = -3$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 5$, $z = -2$ і $z = 1$;

3. T обмежене площинами $x = 0, y = 0, z = 0$ і $x + y + z = 1$;
4. T обмежене площинами $x = 0, y = 0, z = 0$ і $x + 2y + 3z = 6$;
5. T – це куля $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$;
6. T – це еліпсоїд $x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 36$.

Обчислити такі потрібні інтеграли:

7. $\iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, якщо тіло T обмежене площинами $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2, z = 0$ і $z = 3$;
8. $\iiint_T z e^x \sin y dx dy dz$, якщо тіло T обмежене площинами $x = 0, x = 2, y = 0, y = \pi, z = 0$ і $z = 1$;
9. $\iiint_T (x + y) e^{x-y} dx dy dz$, якщо тіло T обмежене площинами $x = -1, x = 1, y = -1, y = 1, z = 0$ і $z = 5$;
10. $\iiint_T xyz dx dy dz$, якщо тіло T обмежене площинами $x = 0, x = 1, y = -1, y = 1, z = 0$ і $z = 1$;
11. $\iiint_T \sin(x + y) \sin z dx dy dz$, якщо тіло T обмежене площинами $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = 0, y = \frac{\pi}{2}, z = x - y$ і $z = x + y$;
12. $\iiint_T (x + 2y + 3z) dx dy dz$, якщо тіло T обмежене площинами $y = 0, x + y = 2, 2x - y + 2 = 0, z = 0$ і $z = 2$;
13. $\iiint_T x^2 y^2 dx dy dz$, якщо тіло T визначається нерівністю $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$;
14. $\iiint_T y dx dy dz$, якщо тіло T обмежене площинами $x = 0, y = 0, z = 0$ і $2x + y + z = 4$.

Перейшовши до сферичних координат, обчислити потрійний інтеграл $\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz$, якщо:

$$15. f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad T = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\};$$

$$16. f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad T = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16\};$$

$$17. f(x, y, z) = \frac{x}{R^4 + (x^2 + y^2 + z^2)^2}, \quad T = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0\};$$

$$18. f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2, \quad T = \{(x, y, z) : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Перейшовши до циліндричних координат, обчислити потрійний інтеграл $\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz$, якщо:

$$19. f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \text{ а тіло } T \text{ обмежене поверхнями } x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0 \text{ і } 0 \leq z \leq 1;$$

$$20. f(x, y, z) = x + y + z, \text{ а тіло } T \text{ обмежене поверхнями } x^2 + y^2 = 1, z = 0 \text{ і } x + y + z = 2;$$

$$21. f(x, y, z) = x^2 + y^2, \quad T = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2 + y^2}{2} \leq z \leq 2 \right\};$$

$$22. f(x, y, z) = z - x + y, \text{ а тіло } T \text{ обмежене поверхнями } y = x^2 + z^2 \text{ і } y^2 = x^2 + z^2.$$

Зробивши відповідну заміну змінних, обчислити потрійний інтеграл $\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz$, якщо:

$$23. f(x, y, z) = \frac{1}{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad T = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0\};$$

$$24. f(x, y, z) = z, \text{ тіло } T \text{ обмежене поверхнями } z^2 = x^2 + y^2 \text{ і } z = 1;$$

$$25. f(x, y, z) = \frac{1}{(x+y)(x+y+z)}, \quad T = \{(x, y, z) : 1 \leq x \leq 2, 1 \leq x + y \leq 3, 1 \leq x + y + z \leq 5\};$$

$$26. f(x, y, z) = (x^2 - y^2)(z + x^2 - y^2), \quad T = \{(x, y, z) : x - 1 \leq y \leq x, 1 - x \leq y \leq 2 - x, 1 - x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 + y^2\}.$$

10.6. Поверхневі інтеграли I роду

Означення поверхневого інтеграла I роду

Нехай P – деяка квадровна поверхня, обмежена кусково гладким контуром, і $f(x, y, z)$ – функція, визначена на P . Розіб'ємо поверхню P кусково гладкими кривими на n частин $P_1, \dots, P_n$ і виберемо довільні точки $M_i(x_i; y_i; z_i) \in P_i$ для кожного $i = 1, \dots, n$. Нехай $S(P_i)$ – це площа поверхні P_i для $i = 1, 2, \dots, n$ і

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \text{diam } P_i.$$

Розглянемо відповідну *інтегральну суму*

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) S(P_i).$$

Якщо існує скінченна границя інтегральних сум σ при $\lambda \rightarrow 0$, яка не залежить від способу розбиття поверхні P і вибору набору $(M_i)_{i=1}^n$ відмічених точок, то вона називається *поверхневим інтегралом I роду від функції $f(x, y, z)$ по поверхні P* і позначається

$$\iint_P f(x, y, z) dS.$$

Зауважимо, що

$$\iint_P dS = S(P)$$

для довільної квадровної поверхні P .

Дотична площина і нормальний вектор до поверхні, напрямні косинуси

Нехай s – деяка поверхня у просторі і M_0 – точка на цій поверхні. Площина τ називається *дотичною до поверхні s у точці M_0* , якщо

$$\lim_{d(M, M_0) \rightarrow 0} \frac{d(P, M)}{d(M, M_0)} = 0,$$

де M – довільна точка поверхні s , P – проєкція точки M на площину τ і d – евклідова відстань у просторі.

Нехай поверхня s задана параметрично рівняннями

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

де функції x, y і z неперервно диференційовні на області $D \subseteq \mathbb{R}^2$, тобто мають у цій області неперервні частинні похідні першого порядку, і точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in s$ відповідає точці $(u_0, v_0) \in D$. Тоді рівняння дотичної площини до поверхні s у точці M_0 має вигляд

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad (6)$$

де

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}, \quad (7)$$

причому всі визначники обчислюються в точці (u_0, v_0) .

Пряма, яка перпендикулярна до дотичної площини і проходить через точку дотику, називається *нормаллю*. Напрямний вектор нормалі одиничної довжини $\vec{n}$ називається *одиничним вектором нормалі*. Враховуючи (6), маємо, що

$$\vec{n} = \pm \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right).$$

Нехай α, β і γ – кути між вектором $\vec{n}$ і додатними напрямками осей OX, OY і OZ відповідно. Тоді $\cos \alpha, \cos \beta$ і $\cos \gamma$ називаються *напрямними косинусами нормалі* й

$$\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

Квадровна поверхня, площа квадратної поверхні

Нехай s – гладка поверхня, тобто поверхня, яка в кожній точці має дотичну площину. Розіб'ємо поверхню s кусково гладкими кривими на n частин $s_1, \dots, s_n$ і на кожній поверхні s_i виберемо точку M_i . Для кожного $i = 1, \dots, n$ позначимо через τ_i площину, дотичну до s у точці M_i , через Δ_i – ортогональну проєкцію поверхні s_i на площину τ_i , а через $S(\Delta_i)$ – площу проєкції Δ_i . Якщо існує скінченна границя

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n S(\Delta_i),$$

де $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \text{diam } s_i$, яка не залежить від способу розбиття поверхні

s і вибору набору $(M_i)_{i=1}^n$, то поверхня s називається *квадровною*, а число I – площею поверхні s .

Нехай функція $f(x, y)$ неперервно диференційовна на квадратній області $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Тоді площа S поверхні $z = f(x, y)$ обчислюється за формулою

$$S = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy.$$

Якщо поверхня задана параметрично рівняннями

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

де функції x, y і z неперервно диференційовні на області $D \subseteq \mathbb{R}^2$, то її площа S обчислюється за формулою

$$S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

де

$$E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2, \quad G = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2, \\ F = x'_u \cdot x'_v + y'_u \cdot y'_v + z'_u \cdot z'_v. \quad (8)$$

Зауважимо, що $EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2$, де A , B і C обчислюються згідно з (7).

Зведення поверхневих інтегралів I роду до подвійних

Якщо поверхня P задана рівнянням $z = z(x, y)$, де $(x, y) \in D$ і $z(x, y)$ – неперервно диференційовна функція на D , то

$$\iint_P f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy.$$

У випадку, коли поверхня P задана параметрично рівняннями $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, причому $(u, v) \in D$ і функції $x(u, v)$, $y(u, v)$ та $z(u, v)$ неперервно диференційовні на D , то

$$\iint_P f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

де E , G і F обчислюються за формулами (8).

Фізичні застосування поверхневих інтегралів I роду

Нехай задана поверхня P із поверхневою густиною $\rho(x, y, z)$. Тоді маса m поверхні P обчислюється за формулою

$$m = \iint_P \rho(x, y, z) dS.$$

Статичні моменти M_{yz} , M_{zx} і M_{xy} поверхні P відносно площин OYZ , OZX і OXY відповідно знаходяться так:

$$M_{yz} = \iint_P x \rho(x, y, z) dS, \quad M_{zx} = \iint_P y \rho(x, y, z) dS$$

і

$$M_{xy} = \iint_P z \rho(x, y, z) dS.$$

Отже, координати x_0 , y_0 і z_0 центра ваги поверхні P вираховують за формулами

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_0 = \frac{M_{zx}}{m} \quad \text{і} \quad z_0 = \frac{M_{xy}}{m}.$$

1. Обчислити поверхневий інтеграл I роду $\iint_P (x + y) dS$, де P – це частина площини $z = 1$, яка визначається нерівностями $0 \leq x \leq 1$ і $0 \leq y \leq \sqrt{x}$.
2. Обчислити поверхневий інтеграл I роду $\iint_P (y^2 - z^2) dS$, де P – це частина площини $x = -2$, яка визначається нерівностями $0 \leq y \leq 2$ і $0 \leq z \leq y^2$.

Обчислити поверхневий інтеграл I роду $\iint_P dS$, якщо:

3. P – трикутник із вершинами в точках $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $C(0, 3, 0)$;
4. P – трикутник із вершинами в точках $A(-2, 1, 1)$, $B(-2, 5, 1)$ і $C(-2, 1, -1)$;
5. P – чотирикутник із вершинами в точках $A(1, 0, -1)$, $B(3, 0, -1)$, $C(3, -2, -1)$ і $D(1, -2, -1)$;
6. P – півсфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, що визначається нерівністю $x \geq 0$;
7. P – частина сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, що визначається нерівностями $y \geq 0$, $z \leq 0$;
8. P – частина конічної поверхні $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, що визначається нерівністю $z \leq 1$;
9. P – частина конічної поверхні $y = -\sqrt{x^2 + z^2}$, що визначається нерівністю $y \geq -2$.

Обчислити такі поверхневі інтеграли I роду:

10. $\iint_P (x + y + z) dS$, якщо P – частина площини $x + 2y + 4z = 4$ при $x \geq 0$, $y \geq 0$ і $z \geq 0$;
11. $\iint_P (x - y + 2z) dS$, якщо P – частина площини $x + y - 2z = 1$ при $x \geq 0$, $y \geq 0$ і $z \leq 0$;
12. $\iint_P (x^2 + z^2) dS$, де P – частина поверхні октаедра $|x| + |y| + |z| = 1$ при $x \geq 0$ і $z \geq 0$;
13. $\iint_P (x^2 - y^2) dS$, якщо P – поверхня куба $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $|z| \leq 1$;

14. $\iint_P xy \, dS$, якщо P – частина сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ при $z \geq 0$;
15. $\iint_P (x + y) \, dS$, якщо P – частина сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ при $x \geq 0, y \geq 0$ і $z \geq 0$;
16. $\iint_P x \, dS$, якщо P – повна поверхня циліндра $x^2 + y^2 = 4, 0 \leq z \leq 3$;
17. $\iint_P (x^2 + y^2) \, dS$, якщо P – повна поверхня циліндра $x^2 + y^2 = 2x, -2 \leq z \leq 2$;
18. $\iint_P (2x^2 + 2y^2 + z^2) \, dS$, якщо P – поверхня конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ при $z \leq 2$;
19. $\iint_P (z^2 - x^2 + 2x) \, dS$, якщо P – поверхня конуса $z = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ при $z \leq 1$;
20. $\iint_P y \, dS$, якщо P – повна поверхня конуса $\sqrt{x^2 + (y+1)^2} \leq z \leq 3$;
21. Знайти масу поверхні куба, що описується нерівностями $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$, з поверхневою густиною $\rho(x, y, z) = xyz$.
22. Знайти масу поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ з поверхневою густиною:
- а) $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$; б) $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Визначити координати центрів ваги таких однорідних поверхонь:

23. $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$;
24. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$.

10.7. Поверхневі інтеграли II роду

Односторонні та двосторонні поверхні, орієнтація поверхні

Нехай H – диференційовна поверхня. Поверхня H називається *двосторонньою*, якщо при проходженні довільної замкненої кривої γ , яка лежить на поверхні H , одиничний вектор нормалі $\vec{n}$ до поверхні H у точці $M \in \gamma$, неперервно змінюючись, повертається до свого початкового значення. Якщо ж на поверхні H існує замкнена крива γ , при проходженні якої одиничний вектор нормалі $\vec{n}$ до поверхні H у точці $M \in \gamma$, неперервно змінюючись, переходить від початкового значення до протилежного, то така поверхня H називається *односторонньою*.

Зауважимо, що поверхні, які задаються рівнянням виду $z = f(x, y)$, двосторонні. Класичним прикладом односторонньої поверхні є *стрічка Мебіуса*.

Нехай H – двостороння поверхня і γ – замкнена крива на поверхні H . Зафіксуємо сторону поверхні H , вибравши один із двох напрямків нормалі $\vec{n}$ до поверхні H у деякій точці $M \in H$. Напрямок проходження кривої γ називається *додатним*, якщо з точки зору зафіксованого напрямку нормалі рух уздовж кривої γ є рухом проти годинникової стрілки (тобто частина поверхні H , обмежена контуром γ , знаходиться зліва від контура γ). Протилежний напрямок проходження замкненої кривої γ називається *від'ємним*.

Зауважимо, що додатний напрямок проходження замкненої кривої, яка лежить у площині OXY , відповідає додатному напрямку проходження цієї кривої, яка лежить на верхній стороні двосторонньої поверхні OXY .

Означення поверхневого інтеграла II роду

Нехай H – деяка двостороння поверхня з фіксованою стороною і $f(x, y, z)$ – функція, визначена на H . Розіб'ємо поверхню H кусково-гладкими кривими на n частин $H_1, \dots, H_n$, позначимо через $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ проєкції $H_1, \dots, H_n$ на площину XOY і виберемо довільні точки $M_i(x_i; y_i; z_i) \in H_i$ для кожного $i = 1, \dots, n$. Крім того, для кожного $i = 1, \dots, n$ покладемо або

$$d_i = S(\Delta_i),$$

якщо додатний напрямок проходження межі поверхні H_i відповідає додатному напрямку проходження межі проєкції Δ_i , або

$$d_i = -S(\Delta_i)$$

в іншому випадку.

Позначимо

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \text{diam } H_i$$

і розглянемо відповідну *інтегральну суму*

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) d_i.$$

Якщо існує скінченна границя інтегральних сум σ при $\lambda \rightarrow 0$, яка не залежить від способу розбиття поверхні H і вибору набору $(M_i)_{i=1}^n$ відмічених точок, то вона називається *поверхневим інтегралом II роду від функції $f(x, y, z)$ по поверхні H* і позначається

$$\iint_H f(x, y, z) dx dy.$$

Аналогічно вводяться такі поверхневі інтеграли другого роду:

$$\iint_H f(x, y, z) dy dz \quad \text{і} \quad \iint_H f(x, y, z) dz dx.$$

Якщо на поверхні H визначені три функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ та $R(x, y, z)$, то загальний вигляд поверхневого інтеграла другого роду такий:

$$\iint_H P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy.$$

Зведення поверхневих інтегралів II роду до поверхневих інтегралів I роду і до подвійних інтегралів

1) Нехай поверхня H з фіксованою стороною поверхні задається явним рівнянням $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$. Тоді

$$\iint_H R(x, y, z) dx dy = \iint_D R(x, y, g(x, y)) dx dy,$$

якщо поверхня H проєктується на поверхню D , яка лежить на верхній стороні площини OXY , і

$$\iint_H R(x, y, z) dx dy = - \iint_D R(x, y, g(x, y)) dx dy,$$

якщо поверхня H проєктується на поверхню D , яка лежить на нижній стороні площини OXY .

2) Нехай двостороння поверхня H задана параметрично рівняннями $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, де $(u, v) \in D$ і функції $x(u, v)$, $y(u, v)$ та $z(u, v)$ неперервно диференційовні на

D. При цьому координати одиничного вектора нормалі $\vec{n} = \pm(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ до зафіксованої сторони поверхні обчислюються за формулами

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

де числа A , B та C визначаються згідно з (7). Тоді

$$\begin{aligned} \iint_H P \, dydz + Q \, dzdx + R \, dxdy &= \pm \iint_H (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \, dS = \\ &= \pm \iint_D (PA + QB + RC) \, dudv. \end{aligned}$$

Обчислити такі поверхневі інтеграли II роду:

1. $\iint_H x \, dydz + y \, dzdx + z \, dxdy$, де H – зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;
2. $\iint_H z \, dxdy$, де H – нижня сторона частини конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ при $z \leq 1$;
3. $\iint_H (x^2 + y^2) \, dxdy$, де H – нижня сторона круга $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 4$;
4. $\iint_H (2z - x) \, dydz + (x + 2z) \, dzdx + 3z \, dxdy$, де H – верхня сторона трикутника $x + 4y + z = 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$;
5. $\iint_H xz \, dxdy$, де H – внутрішня сторона поверхні тетраедра $x + y + z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$;
6. $\iint_H yz \, dydz + zx \, dzdx + xy \, dxdy$, де H – зовнішня сторона поверхні тетраедра $x + y + z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$;

7. $\iint_H y \, dzdx$, де H – зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;
8. $\iint_H x^2 \, dydz$, де H – внутрішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;
9. $\iint_H x^2 \, dydz + z^2 \, dxdy$, де H – зовнішня сторона частини сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \leq 0$, $y \geq 0$;
10. $\iint_H (x-1)^3 \, dydz$, де H – зовнішня сторона півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$, $z \leq 0$;
11. $\iint_H dzdx$, де H – внутрішня сторона еліпсоїда $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$;
12. $\iint_H x \, dydz$, де H – зовнішня сторона еліпсоїда $\frac{x^2}{9} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$;
13. $\iint_H z^2 \, dxdy$, де H – внутрішня сторона еліпсоїда $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$;
14. $\iint_H \frac{dxdy}{z}$, де H – зовнішня сторона еліпсоїда $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$;
15. $\iint_H (2x^2 + y^2 + z^2) \, dydz$, де H – зовнішня сторона бічної поверхні конуса $\sqrt{y^2 + z^2} \leq x \leq 1$;
16. $\iint_H (y-z) \, dydz + (z-x) \, dzdx + (x-y) \, dxdy$, де H – внутрішня сторона бічної поверхні конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$.

10.8. Формули Стокса і Гаусса–Остроградського

Формула Стокса

Нехай двостороння гладка поверхня H обмежена кусково гладкою замкненою кривою L і на деякій області G , що містить поверхню H , задані функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ і $R(x, y, z)$, неперервні на G разом зі всіма своїми частинними похідними першого порядку. Тоді

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \\ = \iint_H (R'_y - Q'_z) dydz + (P'_z - R'_x) dzdx + (Q'_x - P'_y) dxdy,$$

де сторона поверхні H узгоджена з напрямком проходження кривої L , тобто з боку одиничного вектора нормалі $\vec{n}$ до поверхні H напрямком проходження кривої L додатний.

Ця формула називається *формулою Стокса*. Вона може бути записана також і в такому вигляді:

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \\ = \iint_H ((R'_y - Q'_z) \cos \alpha + (P'_z - R'_x) \cos \beta + (Q'_x - P'_y) \cos \gamma) dS,$$

де $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ – одиничний вектор нормалі до сторони поверхні H , узгодженої з напрямком проходження L . Цю формулу записують у такому символічному вигляді:

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_H \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS.$$

Формула Гаусса–Остроградського

Нехай область T обмежена двосторонньою кусково-гладкою поверхнею H і на множині $\overline{T}$ задані функції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ та $R(x, y, z)$, які неперервні на $\overline{T}$ разом зі всіма своїми частинними похідними першого порядку. Тоді

$$\iint_H P dydz + Q dzdx + R dxdy = \iiint_T (P'_x + Q'_y + R'_z) dxdydz,$$

де H – зовнішня сторона поверхні, що обмежує T .

Ця формула називається *формулою Гаусса–Остроградського*. Вона може бути записана також і в такому вигляді:

$$\iiint_T (P'_x + Q'_y + R'_z) dx dy dz = \iint_H (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS,$$

де $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ – одиничний вектор нормалі до відповідної сторони поверхні H .

За допомогою формули Стокса обчислити такі криволінійні інтеграли:

1. $\int_L (x+z) dx + (x-y) dy + x dz$, де L – це еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = c$, орієнтований від'ємно відносно вектора $(0, 0, 1)$;

2. $\int_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, де L – це межа трикутника з вершинами в точках $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ та $C(0, 0, 1)$, орієнтована додатно відносно вектора $(1, 1, 1)$;

3. $\int_L (y-z) dx + (z-x) dy + (x-y) dz$, де:

а) L – це коло $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = \sqrt{3}x$, орієнтоване додатно відносно вектора $(1, 0, 0)$;

б) L – це еліпс $x^2 + y^2 = a^2$, $x + z = a$, орієнтований від'ємно відносно вектора $(1, 0, 0)$;

4. $\int_L y dx - z dy + x dz$, де L – це лінія $x^2 + y^2 + 2z^2 = 2a^2$, $x = y$, орієнтована додатно відносно вектора $(1, 0, 0)$.

За допомогою формули Гаусса–Остроградського обчислити такі поверхневі інтеграли:

5. $\iint_H (5x + y) dy dz + z dx dy$, якщо:

а) H – зовнішня сторона повної поверхні конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 4$;

б) H – внутрішня сторона поверхні еліпсоїда $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$;

- в) H – зовнішня сторона межі тіла $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$;
6. $\iint_H (1 + 2x) dydz + (2x + 3y) dzdx + (3y + 4z) dxdy$, якщо:
- а) H – внутрішня сторона поверхні піраміди $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$;
- б) H – зовнішня сторона повної поверхні циліндра $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2$;
7. $\iint_H x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, якщо:
- а) H – внутрішня сторона поверхні паралелепіпеда $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$;
- б) H – зовнішня сторона повної поверхні конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 3$;
8. $\iint_H x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, якщо:
- а) H – внутрішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;
- б) H – зовнішня сторона поверхні тетраедра $x + y + z \leq a, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$;
- в) H – зовнішня сторона бічної поверхні конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$;
9. $\iint_H x^4 dydz + y^4 dzdx + z^4 dxdy$, якщо:
- а) H – зовнішня сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;
- б) H – внутрішня сторона повної поверхні півкулі $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$;
10. $\iint_H (x - y + z) dydz + (y - z + x) dzdx + (z - x + y) dxdy$, якщо H – зовнішня сторона поверхні $|x + y - z| + |y + z - x| + |z + x - y| = 1$.

Література

- [1] Дзядик В. К. *Математичний аналіз*. Т. 1. Київ : Вища школа, 1995. 495 с.
- [2] Дороговцев А. Я. *Математичний аналіз : у 2 ч. Ч. 1*. Київ : Либідь, 1993. 319 с.
- [3] Дороговцев А. Я. *Математичний аналіз: у 2 ч. Ч. 2*. Київ : Либідь, 1994. 302 с.
- [4] Звоздецький Т. І., Карлова О. О., Михайлюк В. В. *Завдання для практичних занять з математичного аналізу. Частина 1*. Чернівці : Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 2010. 92 с.
- [5] Звоздецький Т. І., Карлова О. О., Михайлюк В. В. *Завдання для практичних занять з математичного аналізу. Частина 2*. Чернівці : Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 2012. 136 с.
- [6] Звоздецький Т. І., Карлова О. О., Михайлюк В. В. *Завдання для практичних занять з математичного аналізу. Частина 3*. Чернівці : Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 2012. 136 с.
- [7] Михайлюк В. В. *Дійсні числа та послідовності (завдання для практичних занять з математичного аналізу)* : навчальне видання. Чернівці : Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 2003. 32 с.
- [8] Михайлюк В. В. *Функції та їх властивості (завдання для практичних занять з математичного аналізу)* : навчальне видання. Чернівці : Видавництво Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 2003. 36 с.
- [9] Нагнибіда М. І., Настасієв П. П. *Математичний аналіз. Завдання для самостійної роботи*. Київ : Вища школа, 1981. 222 с.

Навчальне видання

**МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ:
ОЗНАЧЕННЯ, ТЕОРЕМИ ТА ПРАКТИКА**

Навчальний посібник

Укладачі: Звоздецький Т.І.,
Карлова О.О.,
Михайлюк В.В.,
Онипа Д.П.,
Фотій О.Г.

Відповідальний за випуск *Михайлюк В.В.*

Літературне редагування *Колодій О.В.*

Видавництво Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича

58002, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2
e-mail: ruta@chnu.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №891 від 08.04.2002 р.