

ISSN 2219-5378

Україна

ПВНЗ “БУКОВИНСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ”

З Б І Р Н И К НАУКОВИХ ПРАЦЬ

Економічні науки

Випуск 16

Чернівці
Книги-XXI
2020

ББК 65.0
УДК 339.5.012

*Друкується за ухвалою Вченої ради Буковинського університету
(протокол № 4 від 6 лютого 2020 р.)*

Наказом МОН України від 07 жовтня 2015 р. №1021
“Збірник наукових праць. Економічні науки”
затверджено як фахове видання

Колектив авторів

Збірник наукових праць. Економічні науки. – Чернівці: Книги-XXI, 2020.
– 196 с., 10 табл., 29 рис.

У збірнику наукових праць висвітлюються результати наукових досліджень вчених та провідних наукових установ з питань розробки теоретичних основ дослідження регіону як структурної ланки суспільного відтворення в умовах глобалізації та шляхів удосконалення відтворювальних процесів в регіоні.

The results of scientific investigations of scientists and main scientific establishments considering the questions of the elaboration of theoretical basis research of the region as the structural link of social reflection in condition of globalization and the ways of improving of the reproductive processes in the region are elucidated in the proceeding of scientific works.

ББК 65.0

**Свідоцтво Міністерства юстиції України про державну реєстрацію
друкованого засобу масової інформації серія КВ №11256-136ПР**

від 24 травня 2006 року

Загальнодержавне видання

Статті друкуються

мовою авторського оригіналу

© ПВНЗ “Буковинський університет”, 2020

ISSN 2219-5378

Ukraine

PHEI “BUCOVINIAN UNIVERSITY”

COLLECTION OF SCIENTIFIC ARTICLES

Economic sciences

Issue 16

Chernivtsi
Books-XXI
2020

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ

Маниліч Михайло Іванович – кандидат економічних наук, професор;
Євдокименко Валерій Кирилович – доктор економічних наук, професор;
Виклюк Ярослав Ігорович – доктор технічних наук, професор;
Войцеховський Віктор Богданович – доктор економічних наук, професор;
Дейнеко Людмила Вікторівна – доктор економічних наук, професор;
Доманчук Дмитро Потапович – доктор економічних наук, професор;
Живанович Нада – PhD, професор, Республіка Сербія;
Камінський Роман Миколайович – доктор технічних наук, професор;
Котлінська Жаніна – PhD, доцент, Республіка Польща;
Матушак Анна – PhD, доцент, Республіка Польща;
Нікіфоров Петро Опанасович – доктор економічних наук, професор;
Новак Ладіслав – PhD, доцент, Республіка Словаччина;
Савицький Андрій Васильович – доктор фізико-математичних наук, професор;
Сасс Роман – PhD, доцент, Республіка Польща;
Столяров Василь Федосійович – доктор економічних наук, професор;
Чекеревац Зоран – PhD, доцент, Республіка Сербія;
Щурик Михайло Васильович – доктор економічних наук, професор.

УДК 519.866:332.7

Бойчук М.В.

Скращук Л.В.

Чернівецький національний університет ім.Ю.Федьковича, м.Чернівці

СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДИНАМІКОЮ ВИПУСКУ АГРЕГОВАНОЇ ЕКОЛОГО- ЕКОНОМІЧНОЇ ПРОДУКЦІЇ ПРИ ОБМЕЖЕННІ НА МІНІМАЛЬНУ ВЕЛИЧИНУ НЕЗВОРОТНОСТІ КАПІТАЛОВКЛАДЕНЬ

Анотація: Розроблено стохастичну модель оптимального керування динамікою випуску агрегованої еколого-економічної кінцевої продукції у випадку обмеження на мінімальну величину незворотності капіталовкладень використовуючи вінерівські й пуассонівські процеси. Проведено дослідження запропонованої моделі використовуючи достатні умови оптимальності стохастичного типу. Описано структуру оптимальних процесів стохастичної моделі оптимального керування динамікою агрегованої еколого-економічної продукції. Встановлено, що запропонована стохастична модель має багаторушні еколого-економічні режими для вибору пріоритетного оптимального режиму. Для оптимальних траєкторій запропонованої стохастичної моделі визначено довірчі проміжки за заданою ймовірністю для реальних оптимальних траєкторій. Встановлено, що запропонована стохастична модель має два керування (два оптимальні еколого-економічні режими), які разом із моментами перемикання керувань є детермінованими величинами та не залежать від коефіцієнта при вінерівському процесі в стохастичній динаміці руху.

Ключові слова: стохастична модель, оптимальне керування, динаміка агрегованої еколого-економічної продукції, оптимальний процес.

Summary: A stochastic model of optimal control of the production dynamics of aggregated ecological and economic final products is constructed in case of limitation of the minimum admeasurement of capital investment using Wiener and Poisson processes. The study of the proposed model has been carried out using sufficient optimality conditions of stochastic type. The structure of optimal processes of stochastic model of optimal control of the dynamics of aggregated ecological and economic products has been described. It has been established that the proposed stochastic model has layers of ecological and economic modes for selecting the priority optimal mode. For the optimal trajectories of the proposed stochastic model, intervals have been determined due to a given probability for the real optimal trajectories. It is established that the proposed stochastic model has two controls (two optimal ecological and economic modes), which together with the switching controls are deterministic admeasurements and do not depend on the coefficient of the Wiener process in stochastic dynamics of motion.

Keywords: stochastic model, optimal control, dynamics of aggregated ecological and economic production, optimal process.

Постановка проблеми. Кризовий стан техніко-екологічних та еколого-економічних умов функціонування національного господарства змушує переглянути передумови забезпечення сталого економічного росту, існує необхідність переосмислення та вдосконалення підходів щодо економічного

розвитку та впровадження у життя економічних реформ екологічної спрямованості.

Аналізуючи наявну ситуацію приходимо до висновку, що функціонуючий економічний механізм щодо розв'язання проблеми збереження навколишнього природного середовища є неефективним та неспроможним забезпечити екологічно сприятливі умови господарювання, а тому її вирішення неможливе без розробки та впровадження програм по зменшенню відходів, а також можливості керування процесом виникнення та знищення техногенних забруднень.

Тому одним із актуальних напрямків дослідження сьогодні є моделювання оптимальних траєкторій динаміки виробничих еколого-економічних систем, які і стали предметом дослідження.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Впродовж багатьох десятирічь науковці проводили активну діяльність у галузі дослідження еколого-економічних систем, розробили нові методи оцінювання корисності від покращення навколишнього середовища, обґрунтували переваги та недоліки існуючих та нових екологічних програм, побудували вдосконалені моделі розвитку економіки з урахуванням специфіки еколого-економічних систем.

На сьогодні математичне моделювання еколого-економічних систем характеризується високим рівнем розвитку. Розроблено та апробовано чимало моделей еколого-економічної взаємодії. Усю сукупність моделей еколого-економічних систем можна розбити на дві групи: моделі статичної еколого-економічної взаємодії та моделі еколого-економічної динаміки. Динамічні еколого-економічні моделі у свою чергу поділяються на три типи: балансові, оптимізаційні та імітаційні. Якщо звернутися до історії розвитку балансових еколого-економічних моделей, то класичним представником даного типу моделей є детермінована динамічна міжгалузева модель Леонтьєва-Форда [1], мета якої полягає у визначенні розмірів реального небажаного впливу на навколишнє середовище та неконтрольованого економічного зростання, а більшість наступних детермінованих моделей, побудованих наприклад Х. Дейлі [2], У. Айзаром [3], Р. Айресом [4], Р. Раяцкасом [5], В. Григорківим [6], а також багатьма іншими ученими стали у певному сенсі її узагальненням.

У роботі [7] детерміновану класичну динамічну модель Леонтьєва-Форда за допомогою вектора рівноважних цін на основну продукцію та вектора рівноважних тарифів (вартостей) знищення (утилізації) забруднювачів зведено до агрегованої моделі, яка описується одним рівнянням. На основі цього рівняння побудовано та досліджено модель оптимального керування еколого-економічною динамікою. Дослідження моделі здійснювалося за допомогою необхідних умов оптимальності (принципу максимуму Понтрягіна).

Далеко не завжди висновки, зроблені на основі детермінованих моделей, у тому числі і детермінованої моделі Леонтьєва-Форда, є адекватними, оскільки реальні еколого-економічні показники зазвичай є випадковими величинами. Урахування цього факту, а також неврахування деяких суттєвих еколого-

економічних факторів у математичних моделях еколого-економічних систем приводить до розгляду випадкових процесів та їх дослідження. Тому актуальним як у теоретичному, так і практичному плані є дослідження стохастичних динамічних міжгалузевих моделей. Дана робота є логічним продовженням результатів [8] на випадок стохастичних моделей Леонтьєва-Форда.

Постановка завдання. Розробити стохастичну оптимальну динамічну модель міжгалузевої еколого-економічної взаємодії, побудувати її агрегований еквівалент за допомогою вінерівських і пуассонівських процесів та провести її дослідження. Для дослідження запропонованої оптимальної стохастичної еколого-економічної міжгалузевої моделі необхідно використати достатні умови оптимальності стохастичного типу.

Зауважимо, що в роботі [9] наведено економічне обґрунтування використання вінерівських процесів у стохастичному моделюванні. Закон розподілу ймовірностей для вінерівського процесу невідомий, зате приріст вінерівського процесу підпорядкований нормальному (гауссівському) закону розподілу [10, с. 7-8], а пуассонівський процес підпорядкований пуассонівському закону розподілу [10, с. 7]. Крім того, пуассонівський закон розподілу є нормальним законом розподілу при малих ймовірностях (рідкісні події).

Викладення основного матеріалу. Нагадаємо, що детермінована модель міжгалузевого еколого-економічного балансу або так звана модель Леонтьєва-Форда формалізується у вигляді системи [1]:

$$\begin{cases} \dot{x}^{(1)}(t) = A_{11}x^{(1)}(t) + A_{12}x^{(2)}(t) + B_{11}\dot{x}^{(1)}(t) + B_{12}\dot{x}^{(2)}(t) + y^{(1)}(t) \\ \dot{x}^{(2)}(t) = A_{21}x^{(1)}(t) + A_{22}x^{(2)}(t) - y^{(1)}(t) \end{cases}$$

де $t \in [t_0, T]$ – змінна часу ($T > t_0 \geq 0$); $x^{(1)} \in \mathbb{R}_+^n$ – вектор валового (основного) виробництва; $x^{(2)} \in \mathbb{R}_+^n$ – вектор знищених забруднювачів; $y^{(1)} \in \mathbb{R}_+^n$ – вектор кінцевої продукції; $y^{(2)} \in \mathbb{R}_+^n$ – вектор незнищених забруднювачів, тобто вектор обсягів забруднення, які у даний час не можуть бути ліквідовані, наприклад із-за відсутності ресурсів; $A_{11} = (a_{ij}^{(11)})_{i,j=1}^n$ – квадратна матриця витрат продукції i на випуск одиниці продукції j ; $A_{12} = (a_{il}^{(12)})_{i,l=1}^{n,m}$ – прямокутна матриця витрат продукції i на знищення одиниці забруднювача l ; $A_{21} = (a_{lj}^{(21)})_{l,j=1}^{m,n}$ – прямокутна матриця випуску забруднювача l під час випуску одиниці продукції j ; $A_{22} = (a_{ls}^{(22)})_{l,s=1}^m$ – квадратна матриця випуску забруднювача l під час знищення одиниці забруднювача s ; $\dot{x}^{(1)}(t) = (\dot{x}^{(1)}(t), \dots, \dot{x}_n^{(1)}(t))'$ – вектор абсолютних приростів основного виробництва;

$\dot{x}^{(2)}(t) = (\dot{x}^{(2)}(t), \dots, \dot{x}_m^{(2)}(t))'$ – вектор абсолютних приростів знищення забруднювачів; $B_{11} = (b_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^n$ – квадратна матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів основного виробництва (випуску продукції); $B_{12} = (b_{il}^{(12)})_{i,l=1}^{n,m}$ – прямокутна матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів допоміжного виробництва (знищення забруднювачів), $\mathbb{R}^k$ – k -вимірний точковий або векторний простір, $\mathbb{R}_+^k$ – невід’ємний ортант простору $\mathbb{R}^k$, «'» – операція транспонування.

Елементи наведених матриць A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} , B_{11} , B_{12} та компоненти вектор-функцій $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $y^{(1)}$, $y^{(2)}$ є невід’ємними за визначенням. Формалізуємо стохастичну модель, базуючись на вищенаведених співвідношеннях.

Нехай $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$ – ймовірнісний простір із σ – алгеброю $\mathfrak{F}_t \subset \sigma$, $t \in [t_0, T]$, із множиною елементарних подій Ω та мірою (ймовірністю) P ; вектор $\xi(t) \equiv \xi(t, \omega) \in \mathbb{R}^n$ – $\mathfrak{F}_t$ -вимірний вектор стандартних вінерівських процесів: закон розподілу ймовірностей для самих вінерівських процесів невідомий, а відомо, що приріст (диференціал $d\xi(t)$) вінерівського процесу підпорядкований нормальному (гауссівському) закону розподілу з нульовим математичним сподіванням приросту $Md\xi(t) = 0$ та одиничною дисперсією приросту вінерівського процесу $M(d\xi(t))^2 = 1$, $t \in [t_0, T]$, $\omega \in \Omega$ [10, с.7-8]; вектор $\eta(t) \equiv \eta(t, \omega) \in \mathbb{R}^n$ – вектор пуассонівських процесів із математичним сподівання $M\eta(t) = \rho(t - t_0)$, $t \in [t_0, T]$, $\omega \in \Omega$ [10, с. 7], ρ – постійний вектор; вектори випадкових процесів $\xi(t)$ і $\eta(t)$ – незалежні.

На ймовірнісному просторі $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$ задані вектори випадкових процесів $X^{(1)}(t) \equiv X^{(1)}(t, \omega)$ та $X^{(2)}(t) \equiv X^{(2)}(t, \omega)$, $\omega \in \Omega$, $t \in [t_0, T]$, які задовольняють:

- диференціальну модель у формі Іто [10]

$$\begin{aligned} X^{(1)}(t)dt &= [A_{11}X^{(1)}(t) + A_{12}X^{(2)}(t)]dt + B_{11}dX^{(1)}(t) + B_{12}dX^{(2)}(t) + \\ &\quad + Y^{(1)}(t)dt + \Gamma_{11}d\xi(t) + \Gamma_{12}d\eta(t), \\ X^{(2)}(t) &= A_{21}X^{(1)}(t) + A_{22}X^{(2)}(t) - Y^{(2)}(t), \\ X^{(1)}(t) &\geq 0, X^{(2)}(t) \geq 0, t \in [t_0, T] \end{aligned} \quad (1)$$

- стохастичні початкові умови

$$X^{(1)}(t_0) = X_0^{(1)} \in \mathfrak{F}_{t_0}, X^{(2)}(t_0) = X_0^{(2)} \in \mathfrak{F}_{t_0}. \quad (2)$$

Модель (1) запишемо в векторно-матричній формі

$$\begin{pmatrix} X^{(1)}(t) \\ X^{(2)}(t) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(1)}(t) \\ X^{(2)}(t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX^{(1)}(t) \\ dX^{(2)}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y^{(1)}(t) \\ -Y^{(2)}(t) \end{pmatrix} dt + \\ + \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Gamma_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\eta(t) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Тут у

- матриці $\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ в другому рядку перший 0 є нульова матриця розмірності $(m \times n)$, а другий нуль – нульова матриця розмірності $(m \times m)$;
- матриці $\begin{pmatrix} \Gamma_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ в першому рядку 0 – нульова матриця розмірності $(n \times m)$, в другому рядку перший нуль – нульова матриця розмірності $(m \times n)$, а другий нуль – нульова матриця розмірності $(m \times m)$;
- матриці $\begin{pmatrix} \Gamma_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ в першому рядку 0 – нульова матриця розмірності $(n \times m)$, а в другому рядку перший нуль – нульова матриця розмірності $(m \times n)$, а другий нуль – нульова матриця розмірності $(m \times m)$;
- вектора $\begin{pmatrix} d\xi(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ – нуль нульовий вектор розмірності m ;
- вектора $\begin{pmatrix} d\eta(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ – нуль нульовий вектор розмірності m .

Агрегуємо модель (3) цінами з $(n + m)$ еколого-економічних продуктів у один об'єднаний агрегований економіко-екологічний продукт [8].

Нехай $q^{(1)} = (q_1^{(1)}, \dots, q_n^{(1)})'$ – вектор цін на основну продукцію, а $q^{(2)} = (q_1^{(2)}, \dots, q_m^{(2)})'$ – вектор тарифів (вартостей) знищення одиниць забруднювачів. Агрегуючий вектор рядок цін $q' = (q_1^{(1)}, \dots, q_n^{(1)}, q_1^{(2)}, \dots, q_m^{(2)})$ помножимо зліва на ліву та праву частини (3), після чого матимемо рівність

$$q' \begin{pmatrix} X^{(1)}(t) \\ X^{(2)}(t) \end{pmatrix} dt = q' \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^{(1)}(t) \\ X^{(2)}(t) \end{pmatrix} dt + q' \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX^{(1)}(t) \\ dX^{(2)}(t) \end{pmatrix} + q' \begin{pmatrix} Y^{(1)}(t) \\ -Y^{(2)}(t) \end{pmatrix} dt + \\ + q' \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi(t) \\ 0 \end{pmatrix} + q' \begin{pmatrix} \Gamma_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\eta(t) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Легко переконатися, що агрегована модель (4) запишеться в формі Іто

$$x(t)dt = \alpha x(t)dt + \beta dx(t) + \gamma dt + \gamma d\xi^*(t) + \mu d\eta^*(t), \quad (5)$$

де $x = q' \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ X^{(2)} \end{pmatrix}$ – агрегована еколого-економічна величина валового випуску, $y = q' \begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ -Y^{(2)} \end{pmatrix}$ – агрегована величина кінцевої еколого-економічної продукції, α – коефіцієнт прямих матеріальних витрат, β – коефіцієнт фондомісткості, γ – коефіцієнт при вінерівському процесі ($\xi^*(t) = \begin{pmatrix} \xi(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ – вінерівський процес), μ – коефіцієнт при пуассонівському процесі ($\eta^*(t) = \begin{pmatrix} \eta(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ – пуассонівський процес).

Порівняння рівнянь (4) і (5) дозволяє уточнити умови точного агрегування цінами

$$\begin{aligned} q' \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} &= \alpha q', \quad q' \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \beta q', \\ q' \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \gamma q', \quad q' \begin{pmatrix} \Gamma_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mu q' \end{aligned} \quad (6)$$

або

$$q' \left[\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} - \alpha E_{n+m} \right] = 0, \quad q' \left[\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \beta E_{n+m} \right] = 0, \quad (7)$$

E_{n+m} – одинична матриця розмірності $(n+m) \times (n+m)$,

$$q' \left[\begin{pmatrix} \Gamma_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \gamma E_n \right] = 0, \quad q' \left[\begin{pmatrix} \Gamma_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \mu E_n \right] = 0, \quad (8)$$

E_n – одинична матриця розмірності $(n \times n)$.

Аналіз (6), (7), (8) підтверджує, що умова рівності лівих векторів Фробеніуса $(q'_A = q'_B = q'_{\Gamma_1} = q'_{\Gamma_2})$ матриць $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\Gamma_2 = \begin{pmatrix} \Gamma_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ є умовою точного агрегування цінами моделі (1).

Відзначимо, що α , β , γ , μ – корені Фробеніуса матриць A , B , Γ_1 , Γ_2 . Шукані ліві вектори Фробеніуса q_A , q_B , q_{Γ_1} , q_{Γ_2} є власними векторами, що відповідають власним значенням $\lambda_A = \alpha > 0$, $\lambda_B = \beta > 0$, $\lambda_{\Gamma_1} = \gamma \in \mathbb{R}$, $\lambda_{\Gamma_2} = \mu \in \mathbb{R}$ для транспонованих матриць A , B , Γ_1 , Γ_2 . Таким чином, модель (5) є найпростішою агрегованою стохастичною моделлю відтворення суспільного продукту з урахуванням процесів знищення (утилізації) забруднення.

До агрегованого рівняння (5) запишемо стохастичну початкову умову

$$x(t_0) = x^{(0)} \in \mathfrak{Z}_{t_0} \quad (x_0 \geq 0). \quad (9)$$

За керування візьмемо відносний обсяг виробничого нагромадження

$$u(t) = \frac{\beta dx(t)}{\beta dx(t) + y(t)dt}, \quad t \in [t_0, T] \quad (10)$$

із обмеженням

$$0 \leq u_1 \leq u(t) \leq u_2 < 1, \quad t \in [t_0, T]. \quad (11)$$

Із урахуванням (10) диференціальна модель (5) набуває вигляду

$$dx(t) = \beta^{-1}(1-\alpha)ux(t)dt - \gamma\beta^{-1}ud\xi^*(t) - \mu\beta^{-1}ud\eta^*(t), \quad t \in [t_0, T]. \quad (12)$$

При цьому, повинна виконуватись умова $dx(t) \geq 0$, яка означає незворотність капіталовкладень на виробництво агрегованого еколого-економічного продукту.

На мінімальну величину незворотності капіталовкладень накладемо обмеження

$$dx(t) \geq vdt \equiv \text{const} > 0. \quad (13)$$

За критерій мети візьмемо максимізацію середньої інтегральної дисконтированої агрегованої кінцевої продукції $y(t)$ на відрізку часу $[t_0, T]$

$$M \int_{t_0}^T e^{-\delta(t-t_0)} y(t) dt = M \int_{t_0}^T e^{-\delta(t-t_0)} \frac{1-u(t)}{u(t)} \beta dx(t) \rightarrow \max_u, \quad (14)$$

де M – математичне сподівання, δ – норма дисконту.

Визначимо $Mdx(t)$. Для цього використаємо властивості вінерівського та пуассонівського процесів

$$Md\xi(t) = 0, \quad Md\eta(t) = d(M\eta(t)) = d(\rho(t-t_0)) = \rho. \quad (15)$$

Застосуємо до лівої та правої частини моделі (12) математичне сподівання M та використаємо властивості (15), одержимо усереднену агреговану модель

$$\beta Mdx(t) = (1-\alpha)u(t)Mx(t)dt - \mu\rho u(t)dt. \quad (16)$$

Підставимо (16) у критерій мети (14), одержимо:

$$\begin{aligned} M \int_{t_0}^T e^{-\delta(t-t_0)} \frac{1-u(t)}{u(t)} \beta dx(t) &= M \int_{t_0}^T e^{-\delta(t-t_0)} (1-u(t)) \times \\ &\times [(1-\alpha)x(t) - \mu\rho] dt \rightarrow \max_u. \end{aligned} \quad (17)$$

Із використанням (16) нерівність (13) набуває детермінованого вигляду

$$x(t) \geq u^{-1}(1-\alpha)^{-1}(\nu\beta + \mu\rho) \equiv \tilde{x}, \quad (18)$$

звідки

$$\nu = \beta^{-1}u(1-\alpha) \left[\tilde{x} - (1-\alpha)^{-1} \mu\rho \right].$$

Це означає, що обмеженість на мінімальну величину незворотності капіталовкладень рівносильне обмеженню на мінімальну величину

агрегованого еколого-економічного валового випуску $\tilde{x}$. Більше того, із співвідношення (10)

$$y(t) = u^{-1}\beta(1-u)dx(t) \geq u^{-1}\beta(1-u)v = y_0$$

маємо

$$v = y_0 u \beta^{-1} (1-u)^{-1}, \quad y_0 = u^{-1} \beta (1-u) v,$$

що обмеженість на мінімальну величину незворотності капіталовкладень рівносила обмеженню на мінімальну величину агрегованої кінцевої еколого-економічної продукції (y_0).

Нижче будемо користуватись обмеженням (18).

Задача (9), (11)-(12), (16)-(18) у математичному плані є задачею стохастичного оптимального керування, в якій керуванням виступає відносний обсяг виробничого нагромадження u , а фазовою траєкторією – агрегована величина валового випуску продукції x . Для її дослідження використаємо стохастичні достатні умови оптимальності [11, с. 117-119, с. 162-163].

Дослідження стохастичної моделі

Для дослідження стохастичної задачі (9), (11), (12), (17) використаємо стохастичні достатні умови оптимальності, а для врахування обмеження (18) метод Лагранжа (зведення задачі умовної оптимізації до задачі безумовної оптимізації) у результаті чого отримаємо рівняння Беллмана із крайовою умовою:

- рівняння Беллмана

$$\begin{aligned} \inf_u R(t, x, u, V, \chi) \equiv \inf_u \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} (1-\alpha) \beta^{-1} u x + 0,5 \gamma^2 \beta^{-2} u^2 \frac{\partial V^2}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \rho \left[V(t, x - \beta^{-1} u \mu) - V(t, x) \right] - e^{-\delta(t-t_0)} (1-u) [(1-\alpha)x - \mu \rho] + \right. \\ \left. + \chi \left\{ u^{-1} (1-\alpha)^{-1} (v\beta + \mu \rho u) - \tilde{x} \right\} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

- крайова умова

$$V(T, x(T)) = 0, \quad (20)$$

де χ – множник Лагранжа, невідома функція V – неперервно-диференційована один раз по t та двічі по x на декартовому добутку $[t_0, T] \times \{x \geq 0\}$ та яку будемо шукати у вигляді

$$V(t, x) = e^{-\delta(t-t_0)} l x(t) - e^{-\delta(T-t_0)} l x(T), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (21)$$

Тут l – постійна та яка підлягає визначенню. Підставимо (21) у рівняння Беллмана (19).

Запишемо необхідну умову оптимальності функції R за χ – рівність нулеві частинної похідної першого порядку, отримаємо рівняння, яке буде використовуватись у дальнішому для визначення моментів перемикавання керування

$$\frac{\partial R}{\partial \chi} = u^{-1}(t)(1-\alpha)^{-1}(v\beta + \rho u(t)) - x(t) = 0. \quad (22)$$

Функція R лінійно залежить від керування u , а тому R найменшого значення по u на відрізку $[u_1, u_2]$ приймає при

$$u^* = \begin{cases} u_1, & l(1-\alpha)\beta^{-1}x - l\rho\beta^{-1}\mu + [(1-\alpha)x - \mu\rho] > 0, \\ u_2, & l(1-\alpha)\beta^{-1}x - l\rho\beta^{-1}\mu + [(1-\alpha)x - \mu\rho] < 0, \\ \text{довільне із } [u_1, u_2], & l(1-\alpha)\beta^{-1}x - l\rho\beta^{-1}\mu + [(1-\alpha)x - \mu\rho] = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Розглянемо випадок – це необхідна умова оптимальності R по u

$$l(1-\alpha)\beta^{-1}x - l\rho\beta^{-1}\mu + [(1-\alpha)x - \mu\rho] = 0, \quad (24)$$

звідки знаходимо постійну l

$$l = -\beta. \quad (25)$$

Запишемо рівняння Беллмана (19) із використанням (24) та (25)

$$\delta\beta x - [(1-\alpha)x - \mu\rho] = 0,$$

звідки знаходимо оптимізаційну величину

$$x = (1-\alpha - \delta\beta)^{-1} \mu\rho. \quad (26)$$

Відповідне керування визначаємо із усередненого рівняння руху (16), одержимо

$$0 = (1-\alpha)u[(1-\alpha)\beta\delta]^{-1} \mu\rho - \mu\rho u$$

та при $(1-\alpha) - \delta\beta > 0$ керування $u = 0$.

Але керування $u = 0$ не належить відрізку $[u_1, u_2]$ ($u_1 > 0$), а тому магістрального (усередненого) керування не має.

Тоді співвідношення (23) набуває вигляду

$$u^* = \begin{cases} u_1, & (l\beta^{-1} + 1) + [(1-\alpha)x - \mu\rho] > 0, \\ u_2, & (l\beta^{-1} + 1) + [(1-\alpha)x - \mu\rho] < 0. \end{cases}$$

Таким чином, отримали два керування – два еколого-економічні режими:

- $u^* = u_1$ – режим мінімального обсягу виробничого нагромадження (режим «*min*»),
- $u^* = u_2$ – режим максимального відносного обсягу виробничого нагромадження (режим «*max*»).

По цим знайденим двом керуванням можна формувати багатоярусні режими:

- двоярусні еколого-економічні режими: «*max + min*» та «*min + max*»;
- багатоярусні режими:
 - триярусні: «*max + min + max*» та «*min + max + min*»,
 - чотириярусні: «*max + min + max + min*» та «*min + max + min + max*», та інші.

Для двоярусних режимів поставимо у відповідність першому режиму лівий процес, а другому – правий процес. А для триярусних – першому – лівий

процес, другому – серединний процес, а третьому – правий процес. Аналогічно для багатоярусних режимів ($q > 3$).

Наведені багатоярусні еколого-економічні режими призначені для побудови багатоярусних оптимальних процесів на заданому часовому проміжку $[t_0, T]$, серед яких є можливість вибору пріоритетного (більш реалістичного) багатоярусного оптимального режиму.

А саме, для двоярусних режимів склейки (стики) у моментах перемикавання керувань лівих процесів із правими процесами дають двоярусні оптимальні процеси, а для тріярусних – склейки лівих із серединними та серединних із правими процесами дають тріярусні оптимальні процеси.

Побудуємо двоярусний оптимальний процес для двоярусного еколого-економічного режиму «max+min», а для всіх інших двоярусних побудова проводиться аналогічно. Спершу побудуємо середній оптимальний процес. Перший режим «max» в цьому вибраному двоярусному режимі буде відповідати ліве керування $u = u_2$ (а праве керування $u = u_1$). Відповідна ліва траєкторія визначається із усередненої задачі Коші

$$\dot{x}(t) = \beta^{-1}(1 - \alpha)u_2x(t) - \mu\beta^{-1}u_2\rho, \quad x(t_0) = Mx^{(0)}$$

та набуває вигляду:

$$\begin{aligned} x_{\text{лів}}^{(c)}(t) &= Mx^{(0)}e^{\beta^{-1}(1-\alpha)u_2(t-t_0)} - \int_{t_0}^t \mu\beta^{-1}\rho u_2 e^{\beta^{-1}(1-\alpha)u_2(t-z)} dz = Mx^{(0)}e^{\beta^{-1}(1-\alpha)u_2(t-t_0)} + \\ &+ \frac{\mu\rho}{1-\alpha} \left(1 - e^{\beta^{-1}(1-\alpha)u_2(t-t_0)}\right) = \left(Mx^{(0)} - \frac{\mu\rho}{1-\alpha}\right) e^{\beta^{-1}(1-\alpha)u_2(t-t_0)} + \frac{\mu\rho}{1-\alpha}. \end{aligned} \quad (27)$$

Оскільки $x^{(0)}$, v та ρ є векторам розмірності $(n+m)$ (n – кількість галузей виробництва, m – кількість забруднювачів), то момент перемикавання керування ζ визначається із сумарного рівняння (22) при правому керуванні $u = u_1$ та середній лівій траєкторії $x = x_{\text{лів}}^{(c)}$ із (27), тобто із такого рівняння

$$\sum_{i=1}^{n+m} \left(Mx_i^{(0)} - \frac{\mu\rho_i}{1-\alpha} \right) e^{\beta^{-1}(1-\alpha)u_2(\zeta-t_0)} = \sum_{i=1}^{n+m} \left[u_1^{-1}(1-\alpha)^{-1} (v_i\beta + u_1\mu\rho_i) - \frac{\mu\rho_i}{1-\alpha} \right]$$

та після логарифмування лівої та правої частин цього рівняння, отримаємо

$$\zeta = t_0 + \beta(1-\alpha)^{-1} u_2^{-1} \ln \frac{\sum_{i=1}^{n+m} \left[u_1^{-1}(1-\alpha)^{-1} (v_i\beta + u_1\mu\rho_i) - \frac{\mu\rho_i}{1-\alpha} \right]}{\sum_{i=1}^{n+m} \left(Mx_i^{(0)} - \frac{\mu\rho_i}{1-\alpha} \right)} \quad (28)$$

при виконанні нерівності

$$\sum_{i=1}^{n+m} \left[u_1^{-1}(1-\alpha)^{-1} (\beta v_i + u_1\mu\rho_i) - \frac{\mu\rho_i}{1-\alpha} \right] > \sum_{i=1}^{n+m} \left(Mx_i^{(0)} - \frac{\mu\rho_i}{1-\alpha} \right), \quad (29)$$

$$\left(x^{(0)}\right)' = \left(x_1^{(0)}, \dots, x_{n+m}^{(0)}\right), \quad v' = (v_1, \dots, v_{n+m}), \quad \rho' = (\rho_1, \dots, \rho_{n+m}).$$

У випадку не виконання нерівності (29) ($\leq$) момент $\zeta \leq t_0$.

Слід зауважити, що момент перемикавання керування ζ є детермінованою величиною та не залежить від коефіцієнта γ при вінерівському процесі в стохастичному рівнянні руху (5).

За знайденим моментом перемикавання керувань ξ визначимо середню праву траєкторію $x_{PP}^{(c)}$ (режим «min», що відповідає керуванню $u^* = u_1$) із усередненої задачі Коші при $u^* = u^{(1)}$:

$$\dot{x}(t) = \beta^{-1}(1-\alpha)u_1x(t) - \mu\beta^{-1}\rho u_1, \quad x(\zeta) = x_{\text{лів}}^{(c)}(\zeta),$$

розв'язком якої є

$$x_{np}^{(c)}(t) = \left(x_{\text{лів}}^{(c)}(\zeta) - \frac{\mu\rho}{1-\alpha} \right) e^{\beta^{-1}(1-\alpha)u_1(t-\zeta)} + \frac{\mu\rho}{1-\alpha}. \quad (30)$$

Із (24) і (26) як склейку в момент ζ сформуємо середній оптимальний процес $\{x_{OP}^{(c)}(t), u_{OP}(t), t \in [t_0, T]\}$

$$x_{OP}^{(c)}(t) = \begin{cases} x_{\text{лів}}^{(c)}(t), & t \in [t_0, \zeta], \\ x_{PP}^{(c)}(t), & t \in [\zeta, T], \end{cases} \quad u_{OP}(t) = \begin{cases} u_2, & t \in [t_0, \zeta], \\ u_1, & t \in [\zeta, T]. \end{cases}$$

Стохастичний оптимальний процес має вигляд $\{x_{OP}(t), u_{OP}(t), t \in [t_0, T]\}$

$$x_{OP}(t) = \begin{cases} x_{\text{лів}}(t), & t \in [t_0, \zeta], \\ x_{PP}(t), & t \in [\zeta, T], \end{cases} \quad u_{OP}(t) = \begin{cases} u_2, & t \in [t_0, \zeta], \\ u_1, & t \in [\zeta, T], \end{cases}$$

де стохастична ліва траєкторія $x_{\text{лів}}$ є розв'язком стохастичної задачі Коші при $u = u_2$

$$dx(t) = \beta^{-1}(1-\alpha)u_2x(t)dt - \gamma\beta^{-1}u_2d\xi - \mu\beta^{-1}u_2d\eta, \quad t \in [t_0, \zeta], \quad x(t_0) = x^{(0)}, \quad (31)$$

а стохастична права траєкторія x_{PP} є розв'язком стохастичної задачі Коші при $u = u^* = u_1$

$$dx(t) = \beta^{-1}(1-\alpha)u_1x(t)dt - \gamma\beta^{-1}u_1d\xi^*(t) - \mu\beta^{-1}u_1d\eta^*(t), \quad t \in [\zeta, T], \\ x(\zeta) = x_{\text{лів}}(\zeta). \quad (32)$$

Стохастичні початкові задачі (31) та (32) можна розв'язати одним із чисельних методів [12, 13]. Зауважимо, що стохастичні початкові задачі вигляду (27) та (28) звичайними детермінованими методами не інтегруються.

Таким чином, одержали середній і стохастичний двоярусний оптимальний процес для двоярусного ($q = 2$) еколого-економічного режиму «max + min». Слід зауважити, що при побудові оптимальних процесів для триярусних еколого-економічних режимів треба визначати лівий, серединний та правий процеси. На стиці цих процесів лівого та серединного треба

визначати момент перемикавання керувань ζ_1 , а на стиці серединного та правого – момент перемикавання керувань ζ_2 , які визначаються із сумарного рівняння (23) аналогічно як для двоярусних режимів. Ліві, серединні та праві траєкторії визначаються із задачі Коші (середньої та стохастичної) при відповідних керуваннях ($u^* = u_2$, $u^* = u_1$).

Аналогічна ситуація має місце для багатоярусних режимів ($q > 3$) при побудові оптимальних процесів. Тільки кількість серединних процесів буде $(q - 2)$, а кількість моментів перемикавання керувань $(q - 1)$.

Якщо за цикл позначити (вважати) двоярусний режим ($q = 2$), наприклад, «max + min», то для виконання q циклів треба знати часовий термін виконання цього циклу. Для цього треба визначити ще один момент перемикавання ζ_1 (крім ζ). Це можна провести так. Знайдені керування $u = u_2$ та відповідну праву траєкторію $x_{np}^{(c)}$ із (30) підставимо в сумарне рівняння (22), аналогічно як для визначення ζ , та визначити ζ_1 (аналогічно із (28) і (29))

$$\zeta_1 = \zeta + \beta(1 - \alpha)^{-1} u_1^{-1} \ln \frac{\sum_{i=1}^{n+m} \left[u_2^{-1} (1 - \alpha)^{-1} (\beta v_i + u_2 \mu \rho_i) - \mu \rho_i (1 - \alpha)^{-1} \right]}{\sum_{i=1}^{n+m} \left[x_{либ}^{(c)}(\zeta) - \mu (1 - \alpha)^{-1} \rho_i \right]}$$

при виконанні нерівності

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+m} \left[u_2^{-1} (1 - \alpha)^{-1} (\beta v_i + u_2 \mu \rho_i) - \mu (1 - \alpha)^{-1} \rho_i \right] > \\ > \sum_{i=1}^{n+m} \left[x_{либ}^{(c)}(\zeta) - \mu (1 - \alpha)^{-1} \rho_i \right] > 0. \end{aligned}$$

Тоді часовим терміном виконання циклу «max + min» буде $\zeta_1 - t_0$, а термін необхідної кількості r циклів складає $r(\zeta_1 - t_0)$. Відповідно $T - t_0 \geq r(\zeta_1 - t_0)$ і терміном горизонту планування буде складати $T \geq t_0 + r(\zeta_1 - t_0)$. Багатоярусному циклічному режиму буде відповідати необхідний багатоярусний оптимальний процес.

Отже, отримали середні та стохастичні багатоярусні оптимальні процеси, серед яких є можливість вибору пріоритетного багатоярусного (більш реалістичного) оптимального процесу та в якого багатоярусне оптимальне керування є кусково-неперервною функцією, а оптимальні траєкторії – неперервні та кусково-диференційовані функції на $[t_0, T]$ у вигляді оптимальних еколого-економічних режимів середніх та стохастичних, та які призначені для вибору пріоритетного оптимального еколого-економічного режиму.

При стохастичному моделюванні необхідно знати довірчі проміжки реальних значень оптимальних траєкторій за заданою ймовірністю (довірчим рівнем).

Нехай проведено обчислювальний експеримент по визначенню оптимальної траєкторії та одержано N ансамблів оптимальної траєкторії $x_{оп}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, N}$, $t \in [t_0, T]$.

Обчислимо вибіркві статистики для нормальної генеральної сукупності $x_{он}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, N}$, $t \in [t_0, T]$ [14, с. 213, 15]:

- вибіркова середня

$$\bar{x}_{оп}(t) = N^{-1} \sum_{j=1}^N x_{оп}^{(j)}(t), \quad t \in [t_0, T],$$

- вибіркова дисперсія

$$S_{x_{оп}}^2(t) = (N-1)^{-1} \sum_{j=1}^N (x_{оп}^{(j)}(t) - \bar{x}_{оп}(t))^2, \quad t \in [t_0, T].$$

Слід зауважити, що вибіркова середня $\bar{x}_{оп}$ збігається з середньою оптимальною траєкторією $x_{оп}^{(c)}$.

Довірчим проміжком для дисперсії нормальної генеральної сукупності оптимальної траєкторії за заданою ймовірністю $\theta \in (0; 1)$ є

$$\frac{(N-1)S_{x_{оп}}^2(t)}{\chi_{1-\theta}^2(N-1)} - \text{нижня межа}, \quad \frac{(N-1)S_{x_{оп}}^2(t)}{\chi_{\theta}^2(N-1)} - \text{верхня межа}, \quad t \in [t_0, T],$$

де $\chi_{1-\theta}^2(N-1)$ і $\chi_{\theta}^2(N-1) - (1-\theta)$ і θ – квантилі розподілу Пірсона із $(N-1)$ ступенем вільності та відповідно довірчим рівнем $(1-\theta)$ і θ (таблиця, с. 238-239, [14]).

Тоді довірчим проміжком для реального значення оптимальної траєкторії за заданою ймовірністю $\theta \in (0; 1)$ є

$$\bar{x}_{оп}(t) - \frac{S_{x_{он}}(t)t_{\theta}(N-1)}{\sqrt{N}} - \text{нижня межа}, \quad \bar{x}_{оп}(t) + \frac{S_{x_{он}}(t)t_{\theta}(N-1)}{\sqrt{N}} - \text{верхня}$$

межа, $t \in [t_0, T]$,

де $t_{\theta}(N-1) - \theta$ – квантиль двостороннього розподілу Ст'юдента з $(N-1)$ ступенями вільності при довірчому рівні θ (таблиця, с. 236-237, [14]).

Таким чином, визначено довірчий проміжок оптимальної траєкторії за заданою ймовірністю.

Зауваження. Вище описана методика справедлива для стохастичної моделі, яку отримуємо, провівши перетворення [8] у моделі (5):

$$v(t) = \beta \dot{x}(t) + y(t), \quad u = \beta \dot{x}(t) - \text{керування}.$$

Тоді $\dot{v}(t) = (1-\alpha)\dot{x}(t) = \beta^{-1}(1-\alpha)u(t)$, $\dot{x}(t) = (1-\alpha)^{-1}\dot{v}(t)$, оскільки $x(t) = \alpha x(t) + v(t)$. Детермінована модель набуває вигляду:

$$\dot{v}(t) = \beta^{-1}(1-\alpha)u(t), \quad 0 \leq u(t) \leq v(t), \quad t \in [t_0, T], \quad v(t_0) = v^{(0)},$$

а стохастична модель є такою:

$$dv(t) = \beta^{-1}(1-\alpha)u(t)dt + \gamma d\xi(t) + \mu d\eta(t),$$

$$0 \leq u(t) \leq v(t), \quad t \in [t_0, T], \quad v(t_0) = v^{(0)} \in \mathfrak{V}_{t_0}.$$

А критерієм мети буде слугувати максимізація середньої інтегральної агрегованої кінцевої продукції y за відрізок часу $[t_0, T]$

$$M \int_{t_0}^T y(t) dt = M \int_{t_0}^T k [v(t) dt - \beta dx(t)] = M \int_{t_0}^T \left[v(t) dt - \frac{\beta}{1-\alpha} dv(t) \right] = \\ M \int_{t_0}^T \left\{ v(t) - \frac{\beta}{1-\alpha} [\beta^{-1}(1-\alpha)u(t) + \mu\rho] \right\} dt \rightarrow \max_u$$

із обмеженням на мінімальну величину агрегованої кінцевої продукції $v(t) - \beta(1-\alpha)^{-1} [\beta^{-1}(1-\alpha)u(t) + \mu\rho] \geq y_0$.

Модельний приклад. Вхідна інформація

- вектори

$$x^{(0)} = (60.345, 65.009, 56.502, 68.671, 18.286, 18.729)', \quad t_0 = 0, \quad T = 6,$$

$$u_1 = 0,2, \quad u_2 = 0,8, \quad \delta = 0,108,$$

$$\rho' = (2, 4, 6, 8, 0, 0)';$$

- матриці $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_{11}, B_{12}$ визначено аналогічно роботі

[8],

$$\Gamma_{11} = \begin{pmatrix} 0.2501 & 0.1201 & 0.0902 & 0.1501 \\ 0.0902 & 0.1601 & 0.2901 & 0.0803 \\ 0.1102 & 0.1801 & 0.1203 & 0.1701 \\ 0.6253 & 0.5308 & 0.5083 & 0.6235 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_{12} = \begin{pmatrix} 0.9031 & 0.6312 & 0.5241 & -0.3242 \\ 1.03103 & 0.8562 & 0.7343 & 0.8562 \\ -0.5043 & -0.2432 & 0.1341 & 0.2033 \\ -0.5744 & -0.4512 & -0.5883 & 0.1539 \end{pmatrix},$$

Тоді матриці

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.14 & 0.17 & 0.11 & 0.15 & 0.04 & 0.03 \\ 0.20 & 0.18 & 0.16 & 0.14 & 0.04 & 0.02 \\ 0.14 & 0.12 & 0.17 & 0.17 & 0.03 & 0.02 \\ 0.16 & 0.11 & 0.15 & 0.14 & 0.03 & 0.01 \\ 0.14 & 0.16 & 0.17 & 0.17 & 0.14 & 0.16 \\ 0.20 & 0.14 & 0.13 & 0.15 & 0.21 & 0.10 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.72 & 0.82 & 0.511 & 0.774 & 0.264 & 0.111 \\ 1.015 & 0.956 & 0.842 & 0.708 & 0.29 & 0.124 \\ 0.688 & 0.621 & 0.81 & 0.872 & 0.267 & 0.178 \\ 0.789 & 0.521 & 0.81 & 0.676 & 0.213 & 0.28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2501 & 0.1201 & 0.0902 & 0.1501 & 0 & 0 \\ 0.0902 & 0.1601 & 0.2901 & 0.0803 & 0 & 0 \\ 0.1102 & 0.1801 & 0.1203 & 0.1701 & 0 & 0 \\ 0.6253 & 0.5308 & 0.5083 & 0.6235 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} \Gamma_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9031 & 0.6312 & 0.5241 & -0.3242 & 0 & 0 \\ 1.03103 & 0.8562 & 0.7343 & 0.8562 & 0 & 0 \\ -0.5043 & -0.2432 & 0.1341 & 0.2033 & 0 & 0 \\ 0.5743 & -0.4512 & -0.5883 & 0.1539 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Виберемо еколого-економічний режим «max-min».

Обчислення. Коренями Фробеніуса матриць A , B , Γ_1 та $\Gamma_2 \in \alpha = 0.691$, $\beta = 3.026$, $\gamma = 0.546$, $\mu = 1.321$, лівими векторами Фробеніуса матриць A , B , Γ_1 та $\Gamma_2 \in q'_A = q'_B = q'_{\Gamma_1} = q'_{\Gamma_2} = q' = (0.518, 0.472, 0.478, 0.49, 0.167, 0.112)'$, момент перемикання керувань $\zeta = 2,491958$,

оптимальні керування: $u_{оп} = \begin{cases} u_2, & t \in [0, \zeta = 2,491958], \\ u_1, & t \in [\zeta = 2,491958, 6]. \end{cases}$

Таблиця довірчих проміжків реальних значень оптимальних траєкторій за довірчим рівнем $\theta = 0.90$ та за $N = 20$ ансамблями наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

Довірчі проміжки оптимальних траєкторій

t	$x1$	$x2$	$x3$	$x4$	$x5$	$x6$
0	60,345	65,009	56,502	68,671	18,286	18,729
1	$65,34 \pm 6,366$	$70,45 \pm 6,872$	$61,13 \pm 5,949$	$74,46 \pm 7,268$	$19,27 \pm 1,805$	$19,75 \pm 1,854$
2	$70,81 \pm 6,731$	$76,41 \pm 7,271$	$66,20 \pm 6,275$	$80,81 \pm 8,173$	$20,33 \pm 1,785$	$20,86 \pm 1,836$
2,492	$73,70 \pm 6,892$	$79,55 \pm 7,543$	$68,87 \pm 6,394$	$84,15 \pm 7,957$	$20,89 \pm 1,408$	$21,45 \pm 1,498$
3	$74,03 \pm 6,923$	$79,92 \pm 8,456$	$69,18 \pm 6,467$	$84,55 \pm 8,145$	$20,96 \pm 1,287$	$21,52 \pm 1,295$

4	$74,71 \pm 7,283$	$80,65 \pm 8,543$	$69,81 \pm 6,636$	$85,32 \pm 8,243$	$21,09 \pm 1,245$	$21,65 \pm 1,276$
5	$75,39 \pm 6,388$	$81,39 \pm 6,683$	$70,44 \pm 5,692$	$86,11 \pm 7,692$	$21,22 \pm 1,208$	$21,79 \pm 1,253$
6	$76,07 \pm 6,567$	$82,14 \pm 6,857$	$71,07 \pm 5,856$	$86,90 \pm 7,873$	$21,35 \pm 1,187$	$21,93 \pm 1,198$

Отже, в процесі дослідження знайдено момент перемикавання керувань, оптимальні керування та оптимальні траєкторії, за допомогою яких визначено стохастичний оптимальний процес.

Висновки

1. Запропонована стохастична модель оптимального керування динамікою агрегованої еколого-економічної продукції при обмеженні на мінімальну величину незворотності капіталовкладень із використанням вінерівських та пуассонівських процесів та проведено її дослідження.
2. Описана структура оптимальних процесів стохастичної моделі оптимального керування динамікою агрегованої еколого-економічної продукції.
3. Встановлено, що запропонована стохастична модель має багаторівні оптимальні еколого-економічні режими для вибору пріоритетного оптимального режиму.
4. Запропонована стохастична модель як система рівнянь образно зведена до одного стохастичного рівняння (агрегована модель), для якого проведено дослідження.
5. Для оптимальних траєкторій запропонованої стохастичної моделі визначені довірчі проміжки за заданою ймовірністю для реальних оптимальних траєкторій.
6. Встановлено, що запропонована стохастична модель має два керування (два оптимальні еколого-економічні режими), які разом із моментами перемикавання керувань є детермінованими величинами та не залежать від коефіцієнта при вінерівському процесі в стохастичній динаміці руху.
7. Встановлено, що між обмеженням на мінімальну величину незворотності капіталовкладень і мінімальною величиною агрегованого еколого-економічного валового випуску та мінімальною агрегованою еколого-економічною кінцевою продукцією є залежність, а самі ці поняття є рівносильними.

Література:

1. Григорків В.С. Моделювання економіки: Навчальний посібник. – Чернівці: ЧНУ, 2009. – 320 с.
2. Daly H. On Economics as a life Science / H/ Daly // The Journal of Political Economy. – 1968. – vol. 76. – №3.
3. Ecologic-economic analyses for Regional development / Isard W., Charles L., Choguil, J. Kissin, R. Searth, R. Tatlock]. – New York, 1972.
4. Ayres R. Production, Consumption and Externalities / R/ Ayres, A. Kneese // The American Economic Review. – 1969. – vol. 59. – №3.

5. Раяцкас Р.Л. Окружающая среда и проблемы планирования / Р.Л. Раяцкас, В.П. Суткайтис. – Москва : Наука, 1981. – 272 с.
6. Vasyl Hryhorkiv, Andrii Verstiak, Oksana Verstiak, Mariia Hryhorkiv. Regional Economic Growth Disparities in Ukraine: Input-Output Analysis Approach // Scientific Annals of Economics and Business. 64 (4) – 2017 – С. 447-457.
7. Рюмина Е.В. Экологический фактор в экономико-математических моделях / Е.В. Ромина. – Москва. : Наука, 1980. – 166 с.
8. Скращук Л.В. Агрегована модель оптимального керування динамікою кінцевої продукції в екологічно збалансованій економіці / Науковий вісник Чернівецького університету : Економіка : зб. наук. пр. – Вип. 789. – Чернівці, Чернівецький національний університет 2017. – С. 77-86.
9. Бойчук М.В. Стохастическая модель полного цикла оптимальной эколого-экономической динамики / М.В. Бойчук, А.Р. Семчук // Проблемы управления и информатики. – 2013, №2. – С. 125-139.
10. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів / А.В. Скороход. – К. : Либідь, 1990. – 168 с.
11. Андреева Е.А. Управление системы с последствием / Е.А. Андреева, В.Б. Колмановский, Л.Е. Шайхет. – Москва : Наука, 1992. – 336 с.
12. Юрченко І.В. Методи стохастичного моделювання систем / І.В. Юрченко, Л.І. Ясинська, В.К. Ясинський. – Чернівці : «Прут», 2002. – 416 с.
13. Никитин Н.Н. Методы цифрового моделирования стохастических дифференциальных уравнений и оценки их погрешности / Н.Н. Никитин, В.Д. Разевич // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1978. – 18, №1. – С. 106-117.
14. Магнус Я.Р. Эконометрика. Навчальний курс. Учебное пособие. 2-е изд., испр. – Москва : Дело, 1998. – 248 с.
15. Григорків В.С. Економетрика : Лінійні моделі парної та множинної регресії : навчальний посібник. – Чернівці : ЧНУ, 2009. – 224 с.

ЗМІСТ

Маниліч М.І., Звірід Н.В. Оптимізація оподаткування як рушійний фактор економічного розвитку країни.....	5
Milanka Bogavac, Zoran Ćekerevac Influence of SME's size on Internet connectivity	11
Євдокименко В.К. Креативні підвалини соціально-економічного розвитку регіонів країни на сучасному етапі	18
Marius Cătălin Zgăbaia, Adriana Tudorache Measures to increase economic efficiency of the energy system from Romania	28
Дугінець Г.В. Дослідження змісту гібридної війни у світовій науці.....	35
Бантишев О.Ф., Величко М.В., Гончарук Я.М. Криміналізація незаконного видобутку бурштину: правовий засіб протидії загрозам економічного та екологічного характеру національній безпеці України.....	44
Rashchenko A. Prospects for urban green tourism development in the city of Zhytomyr.....	55
Миронюк О.В. Управлінський аспект формування облікової політики	62
Григорків М.В. Моделі динамічних функцій забруднення: концепція побудови	70
Бойчук М.В., Скращук Л.В. Стохастична модель оптимального керування динамікою випуску агрегованої еколого-економічної продукції при обмеженні на мінімальну величину незворотності капіталовкладень	81
Бурдейна Л.В. Удосконалення інформаційної бази для управлінських рішень.....	98
Артеменко О.І., Морараш Г.В. Інформаційні технології туристичного спрямування: стан і перспективи розвитку	108
Бойчук М.В., Ярошенко О.І. Моделювання багатопродуктових товарних потоків дистриб'юторських компаній з урахуванням оптимальних кредитних платежів.....	118
Вершигора В.Г., Вершигора Ю.З. Деякі дослідження транспортної мережі міста.....	125
Ількова Н.В. До питання зловживання інститутом банкрутства в українській економіці	135
Утехін І.Б. Психологічна рівновага викладача: чинники, які на неї впливають	147
Величко М.В., Гончарук Я.М., Гергалова Г.Л. Генеза системи біологічної безпеки та біологічного захисту Південно-Африканської Республіки	153
Верстяк А.В., Верстяк О.М. Соціально-економічна конвергенція регіонів України.....	159
Биндю В.А., Попель Л.А. Основи фінансового забезпечення видаткових повноважень органів місцевого самоврядування	168
Антонюк К.І., Мокій А.І., Антонюк Д.А. Структурно-компонентний аналіз безпеки споживання в Україні в глобальному вимірі.....	176
Боднар О.В., Сливінська О.Б. Організація внутрішнього контролю якості продукції	188

Наукове фахове видання
Науковий збірник

**ЗБІРНИК
НАУКОВИХ ПРАЦЬ**
Економічні науки
(ПВНЗ «Буковинський університет»)

Випуск 16

*Науковий редактор та відповідальний за випуск - доктор технічних наук,
професор Вихлюк Я.І.*

Комп'ютерний набір – Я.І. Вихлюк

Буковинський університет:
вул. Дарвіна, 2-а, м.Чернівці, 58000
Тел. (0372) 55-32-07; 55-38-03