



***ЛІНІЙНА АЛГЕБРА:
збірник задач
і контрольних запитань
для самостійної роботи
студентів
(частина 1)***

Укладачі: Руслана КОЛІСНИК, Віра СІКОРА

**Чернівці
2025**

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

***ЛІНІЙНА АЛГЕБРА:
збірник задач
і контрольних запитань
для самостійної роботи
студентів
(частина 1)***

Укладачі: Колісник Р.С., Сікора В.С.

Чернівці
2025

УДК 512.64 (072)

К – 651

Друкується за ухвалою
кафедри алгебри та інформатики
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича
(протокол № 7 від 10 грудня 2025 року)

Рецензенти: *Терлецька Інна Дмитрівна,*
консультант КУ "Міський центр професійного розвитку
педагогічних працівників" Чернівецької міської ради,
спеціаліст вищої категорії, учитель-методист;

Андрух Юлія Олександрівна,
керівник професійної спільноти вчителів математики
Чернівецької територіальної громади, вчитель математики
Чернівецького багатопрофільного ліцею № 4,
спеціаліст вищої категорії, учитель-методист.

К 651

Лінійна алгебра: збірник задач і контрольних запитань для
самостійної роботи студентів (частина 1) / Укл.: Р. С. Колісник, В. С.
Сікора.– Чернівці, 2025.– 58 с.

Збірник складено у відповідності до діючої програми курсу “Лінійна алгебра” для студентів 1 курсу спеціальностей 014.04 – «Середня освіта (Математика)» та 111 – «Математика» денної та заочної форм навчання факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

УДК 512.64 (072)
© Колісник Р.С., 2025
© Сікора В.С., 2025
© Чернівецький національний
університет, 2025

ВСТУП

Вища освіта забезпечується шляхом впровадження професійних освітніх програм, на основі яких формуються навчальні плани. Навчальні плани включають різноманітні форми організації освітнього процесу, такі як аудиторні заняття (лекції, семінари, практичні та лабораторні роботи) та позааудиторні заняття, включаючи самостійну роботу студентів.

Згідно з Законом України "Про вищу освіту" від 2014 року (зі змінами) та Державними стандартами вищої освіти, навчальні плани вищих навчальних закладів передбачають виділення часу для самостійної (позааудиторної) роботи студентів. Згідно з наказом Міністерства освіти і науки України від 24 квітня 2019 року № 363 «Про затвердження Порядку проведення самостійної роботи студентів вищих навчальних закладів України», час, відведений для самостійної роботи, визначається відповідно до програми навчального змісту кожного конкретного навчального закладу. Зокрема, у Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича час, відведений для самостійної роботи, повинен становити не менше третини та не більше двох третин загального навчального часу, відведеного для вивчення конкретної навчальної дисципліни.

У сучасних умовах самостійна робота студентів набуває все більшого значення через значний обсяг навчального матеріалу, який часто неможливо повністю охопити під час аудиторних занять. Таким чином, правильна організація самостійної роботи є ключовою умовою успішного навчання та ефективного засвоєння знань.

Самостійна робота студентів повинна включати:

- опрацювання інформації, отриманої на лекціях і практичних заняттях;
- вивчення окремих тем чи питань, передбачених для самостійного опрацювання;
- розв'язування завдань домашньої роботи та завдань підвищеної складності для закріплення отриманих знань;

- систематизацію вивченого теоретичного та практичного матеріалу перед кожним колоквіумом, контрольною та самостійною роботою, іспитом;
- виконання домашніх контрольних робіт;
- виконання завдань за допомогою комп'ютера тощо.

Самостійна робота студентів є ключовим методом засвоєння навчального матеріалу під час вільного від обов'язкових занять часу, без прямої участі викладача. Виконання такої роботи дозволяє студенту розвивати пізнавальні та виконавчі здібності, пам'ять, незалежне мислення, наполегливість і, головне, формувати навички самостійного отримання знань. Самостійна робота виявляє індивідуальні особливості студента, його здібності та схильності. Підтримка цієї роботи здійснюється через систему навчально-методичних засобів, необхідних для вивчення певної дисципліни або теми, включаючи підручники, навчальні та методичні посібники, конспекти лекцій викладача. Особливе місце серед цих засобів займають методичні матеріали, завдання та вказівки викладача, а також рекомендована спеціальна література.

Попри індивідуальний характер самостійної роботи, колективне обговорення та вивчення навчального матеріалу під час консультацій під керівництвом викладача також є корисним. Такі консультації, що проводяться за розкладом, мають на меті підвищення рівня підготовки студентів як з теоретичної, так і з практичної сторони, а також надання необхідної допомоги з боку викладача у формулюванні або доведенні певних тверджень і розв'язанні конкретних практичних завдань.

Перевірка виконання самостійної роботи проводиться викладачем та може виноситися на модульний контроль поруч з навчальним матеріалом, який опрацьовувався при проведенні аудиторних занять.

У Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича, відповідно до навчального плану, на вивчення обов'язкового для спеціальностей 014.04 – «Середня освіта (Математика)» та 111 – «Математика» курсу «Лінійна алгебра» відводиться 300 годин на два семестри, у тому числі на самостійну роботу, відповідно, 150 годин (для

спеціальності «Середня освіта (Математика)» та 165 годин (для спеціальності «Математика»).

Щосеместрово з лінійної алгебри заплановане проведення трьох модульних контролів, підготовка до яких здійснюється за рахунок часу, відведеного на самостійну роботу студента. Завершується ж вивчення навчальної дисципліни «Лінійна алгебра» в обох семестрах складанням іспиту, метою якого є комплексна перевірка ступеня засвоєння всього навчального матеріалу та його розуміння студентом.

Для успішного складання іспиту студентам необхідно опрацювати увесь програмний матеріал, у тому числі й конспект лекцій та рекомендовану літературу, вміти відповідати на контрольні запитання та розв'язувати типові завдання. Іспит проводиться в аудиторії університету у формі індивідуальної співбесіди через постановку викладачем питань, наведених у білеті, та відповідей на них студента. При цьому викладач, оцінюючи знання студента керується такими критеріями як: правильність відповіді на питання, повнота і конкретність, ступінь використання наукової термінології з даного предмету, вміння пов'язувати теорію з практикою, логічно й аргументовано висловлювати свої думки, культура мови.

Даний збірник покликаний забезпечити кожного студента першого курсу спеціальностей 014.04 – «Середня освіта (Математика)» та 111 – «Математика» індивідуальними завданнями для самостійної роботи при вивченні курсу лінійної алгебри в першому семестрі.

Кожен з дев'яти параграфів містить по декілька питань теоретичного характеру, на які варто звернути увагу при підготовці до відповідного практичного заняття, теоретичного опитування (колоквіуму) та самостійної чи контрольної роботи. Ці питання сформульовано так, щоб студент зміг нагадати необхідний для розв'язування задач теоретичний матеріал. Крім того, у кожному параграфі наведено умови задач з відповідної теми, кожна з яких містить по 20 варіантів завдань. Наведені приклади радимо використовувати при підготовці до самостійних та контрольних робіт, модульного контролю, а також як завдання для ІНДЗ студентів денної форми навчання та для домашніх контрольних робіт студентів заочної форми навчання.

§ 1. Метод Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь

1.1. Випишіть загальний вигляд лінійного рівняння (системи лінійних рівнянь) від змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$.

1.2. Сформулюйте означення розв'язку лінійного рівняння (системи лінійних рівнянь) від змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$.

1.3. Яку систему лінійних рівнянь (СЛР) називають сумісною, не-сумісною, означеною, неозначеною?

1.4. Які системи лінійних рівнянь називають еквівалентними (рівно-носильними)?

1.5. Які перетворення системи лінійних рівнянь називають елементарними? Що отримуємо в результаті виконання цих перетворень?

1.6. Опишіть основні кроки методу Гаусса для дослідження СЛР на сумісність. Як ще називають цей метод? Чому?

1.7. Які результати можна отримати в процесі виконання алгоритму методу Гаусса?

1.8. Випишіть матрицю та розширену матрицю системи лінійних рівнянь. Яка матриця називається квадратною (прямокутною)?

1.9. Як можна використовувати метод Гаусса для дослідження СЛР на сумісність за допомогою її розширеної матриці? Зробіть висновки про сумісність системи?

1.10. Що називають загальним розв'язком СЛР? Як його виписуємо? Які розв'язки називають частинними?

1.11. Сформулюйте означення однорідної системи лінійних рівнянь. Що можна сказати про її сумісність? Коли така система матиме безліч розв'язків?

1.12. За допомогою методу Гаусса дослідіть систему лінійних рівнянь на сумісність. Випишіть загальний та частинний розв'язки:

№ варіанта	Система:	№ варіанта	Система:
1	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$	11	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 1. \end{cases}$

2	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$	12	$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$
3	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$	13	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$	14	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$	15	$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$
6	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7, \\ 9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 = 25. \end{cases}$	16	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$
7	$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$	17	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 3, \\ x_1 + 15x_2 + 6x_3 - 19x_4 + 9x_5 = 1. \end{cases}$
8	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14. \end{cases}$	18	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$

9	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3. \end{cases}$	19	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$
10	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 1. \end{cases}$	20	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 1. \end{cases}$

§ 2. Визначники другого та третього порядків. Теорема Крамера для систем лінійних рівнянь з двома та трьома змінними

- 2.1. Сформулюйте означення визначника другого порядку.
- 2.2. Сформулюйте означення визначника третього порядку.
- 2.3. Що називають транспонуванням визначника? Як зміниться визначник після транспонування? Який висновок звідси отримуємо?
- 2.4. Опишіть основні властивості визначників другого та третього порядку.
- 2.5. Доведіть теорему Крамера для системи двох лінійних рівнянь з двома змінними. Сформулюйте і доведіть наслідки з неї.
- 2.6. Сформулюйте теорему Крамера для системи трьох лінійних рівнянь з трьома змінними. Сформулюйте наслідки з неї.
- 2.7. Обчисліть визначники:

№ варіанта	Визначники:		№ варіанта	Визначники:	
	а)	б)		а)	б)
1	$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$	11	$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$
2	$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$	12	$\begin{vmatrix} 9 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

3	$\begin{vmatrix} a & 3 \\ -a & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$	13	$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
4	$\begin{vmatrix} 3 & x \\ -x & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}$	14	$\begin{vmatrix} a & a \\ -2a & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$
5	$\begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$	15	$\begin{vmatrix} 4 & 5x \\ -5x & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$
6	$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$	16	$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$
7	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$	17	$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$
8	$\begin{vmatrix} 11 & 10 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$	18	$\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}$
9	$\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$	19	$\begin{vmatrix} 11 & 14 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$
10	$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$	20	$\begin{vmatrix} 21 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

2.8. Розв'яжіть систему рівнянь за допомогою теореми Крамера:

№ варіанта	а)	б)
1	$\begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ 4x - 5y = 10. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 10, \\ 3x + 7y + 4z = 3, \\ x + 2y + 2z = 3. \end{cases}$

2	$\begin{cases} -3x + 4y = 7, \\ 2x - 11y = 8. \end{cases}$	$\begin{cases} 14x + 4y + 6z = 30, \\ 5x - 3y + 2z = 15, \\ 10x - 11y + 5z = 36. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 5x + 2y = 4, \\ 7x + 4y = 8. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = -2, \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$
4	$\begin{cases} 5x - 7y = 1, \\ x - 2y = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} 5x - 6y + 4z = 3, \\ 3x - 3y + 2z = 2, \\ 4x - 5y + 2z = 1. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 3x - 7y = 12, \\ -x + 5y = 3. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + 4y + 7z + 1 = 0, \\ -2x + 5y - 3z - 1 = 0, \\ 5x - 6y + 11z + 3 = 0. \end{cases}$
6	$\begin{cases} x + 12y = 33, \\ 12x - 2y = 11. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 4y + 8z + 7 = 0, \\ 3x + 9y + 27z - 5 = 0, \\ 5x + 25y + 125z - 1 = 0. \end{cases}$
7	$\begin{cases} 5x + 12y = 13, \\ -2x + 3y = 16. \end{cases}$	$\begin{cases} 5x + 2y + 3z + 2 = 0, \\ 2x - 2y + 5z = 0, \\ 3x + 4y + 2z + 10 = 0. \end{cases}$
8	$\begin{cases} -x + 33y = 1, \\ 2x - 3y = 15. \end{cases}$	$\begin{cases} 5x - 6y + 4z = 3, \\ 3x - 3y + 2z = 2, \\ 4x - 5y + 2z = 1. \end{cases}$
9	$\begin{cases} 2x - 3y = 4, \\ 4x - 5y = 10. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 10, \\ 3x + 7y + 4z = 3, \\ x + 2y + 2z = 3. \end{cases}$
10	$\begin{cases} 5x + 2y = 4, \\ 7x + 4y = 8. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 3y + z = 1, \\ 3x + y + 2z = -3, \\ 2x - 2y + z = 1. \end{cases}$
11	$\begin{cases} 5x - 7y = 1, \\ x - 2y = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} 5x - 6y + 4z = 3, \\ 3x - 3y + 2z = 2, \\ 4x - 5y + 2z = 1. \end{cases}$

12	$\begin{cases} 3x - 7y = 12, \\ -x + 5y = 3. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + 4y + 7z + 1 = 0, \\ -2x + 5y - 3z - 1 = 0, \\ 5x - 6y + 11z + 3 = 0. \end{cases}$
13	$\begin{cases} x + 12y = 33, \\ 12x - 2y = 11. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 4y + 8z + 7 = 0, \\ 3x + 9y + 27z - 5 = 0, \\ 5x + 25y + 125z - 1 = 0; \end{cases}$
14	$\begin{cases} -x + 33y = 1, \\ 2x - 3y = 15; \end{cases}$	$\begin{cases} 5x - 6y + 4z = 3, \\ 3x - 3y + 2z = 2, \\ 4x - 5y + 2z = 1. \end{cases}$
15	$\begin{cases} 5x + 12y = 13, \\ -2x + 3y = 16. \end{cases}$	$\begin{cases} 5x + 2y + 3z + 2 = 0, \\ 2x - 2y + 5z = 0, \\ 3x + 4y + 2z + 10 = 0. \end{cases}$
16	$\begin{cases} 7x + 2y = 33, \\ 12x - 5y = 11. \end{cases}$	$\begin{cases} 15x - 2y + 4z = 1, \\ 3x - y + 12z = 1, \\ 11x - 2y - z = 1. \end{cases}$
17	$\begin{cases} 3x - 15y = 1, \\ 2x - 8y = 3. \end{cases}$	$\begin{cases} -x - 2y + 4z = 10, \\ -6x + 11y + 2z = -3, \\ 5x - 2y - 7z = -5. \end{cases}$
18	$\begin{cases} -6x - 11y = 3, \\ 2x + 15y = 1. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 1, \\ 6x - 2y + 2z = -2, \\ 12x - 7y + 2z = 3. \end{cases}$
19	$\begin{cases} 13x + 11y = -11, \\ -2x + 15y = -5. \end{cases}$	$\begin{cases} -5x - y + z = 3, \\ 2x - y + 12z = 6, \\ x - 15y + 11z = -1. \end{cases}$
20	$\begin{cases} 9x - 11y = -2, \\ -15x + 11y = 3. \end{cases}$	$\begin{cases} 10x + 2y - 3z = 0, \\ 11x - y + z = -2, \\ -4x - 2y + 3z = -1. \end{cases}$

2.9. Дослідіть систему (відносно змінних x, y, z) на сумісність в залежності від параметра (чи параметрів):

№ варіанта	Система:	№ варіанта	Система:
1	$\begin{cases} 2x + 2y = 2 - kx, \\ 7x + 5y = 1 + kx. \end{cases}$	11	$\begin{cases} ax + 4y = 2, \\ 9x + ay = 3. \end{cases}$
2	$\begin{cases} \lambda x + (\lambda + 10)y = -1, \\ (\lambda - 10)x + (\lambda + 1)y = 2. \end{cases}$	12	$\begin{cases} \lambda x + (\lambda + 1)y = 5, \\ 3x + 4y = 5. \end{cases}$
3	$\begin{cases} ax + ay + (a + 1)z = a, \\ ax + ay + (a - 1)z = a, \\ (a + 1)x + ay + (2a + 3)z = 1. \end{cases}$	13	$\begin{cases} ax + y + z = 4, \\ x + by + z = 3, \\ x + 2by + z = 4. \end{cases}$
4	$\begin{cases} ax - y + z = a, \\ 3x + ay + 2z = -a, \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$	14	$\begin{cases} ax + by + 2z = 1, \\ ax + (b - 1)y + 3z = 1, \\ ax + by + (b + 3)z = 2b - 1. \end{cases}$
5	$\begin{cases} \lambda x + y + z = 1, \\ x + \lambda y + z = \lambda, \\ x + y + \lambda z = \lambda^2. \end{cases}$	15	$\begin{cases} (a + 3)x + y + 2z = a, \\ ax + (a - 1)y + z = 2a, \\ 3(a + 1)x + ay + (a + 3)z = 5. \end{cases}$
6	$\begin{cases} (2 + \lambda)x - y = 1 - x, \\ x + (\lambda + 1)y = \lambda + y. \end{cases}$	16	$\begin{cases} (2 - a)x + 6y = 1, \\ 6x + (2 - a)y = 1. \end{cases}$
7	$\begin{cases} 5x + 5y = 4 + \lambda x, \\ 7x + 3y = 1 + \lambda y. \end{cases}$	17	$\begin{cases} (a - 1)x - ay = 4, \\ 4x - (a - 1)y = 10. \end{cases}$
8	$\begin{cases} 3x + 3y = 2 + kx, \\ 7x + 5y = 1 + ky. \end{cases}$	18	$\begin{cases} (1 - a)x + 4y = 2, \\ 4x + (1 - a)y = 2. \end{cases}$
9	$\begin{cases} ax + by + z = 1, \\ x + aby + z = b, \\ x + by + az = 1. \end{cases}$	19	$\begin{cases} 2ax + y = 4, \\ 8x + ay = 2. \end{cases}$
10	$\begin{cases} (a + 3)x + y = a, \\ ax + (a - 1)y = 2a. \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2x - y = a, \\ ax + (a - 1)y = 2 - a. \end{cases}$

§ 3. Перестановки. Підстановки

- 3.1. Сформулюйте означення перестановки з n символів.
- 3.2. Сформулюйте та доведіть теорему про кількість різних перестановок з n символів.
- 3.3. Що називають інверсією в перестановці. Сформулюйте означення парної та непарної перестановки.
- 3.4. Сформулюйте означення транспозиції в перестановці та опишіть наслідки її виконання.
- 3.5. Доведіть, що переставляючи послідовно сусідні числа, можна поміняти місцями довільні два елементи перестановки, зберігаючи при цьому розташування решти елементів.
- 3.6. Доведіть, що парність перестановки зміниться, якщо в ній поміняти місцями два елементи.
- 3.7. Доведіть, що переставляючи сусідні числа скінченну кількість разів, можна розташувати елементи перестановки в порядку зростання. Чи єдиним чином визначається кількість таких переставлень?
- 3.8. Сформулюйте означення підстановки n -го степеня.
- 3.9. Що називають інверсією в підстановці? Сформулюйте означення парної та означення непарної підстановок.
- 3.10. Сформулюйте твердження про кількість всіх підстановок n -го степеня, про кількість парних та кількість непарних підстановок.
- 3.11. Сформулюйте означення дії множення підстановок. Сформулюйте та доведіть властивості дії множення.
- 3.12. Сформулюйте означення підстановки-циклу та підстановки-транспозиції. Як підстановку можна розкласти на добуток циклів? Сформулюйте визначення декремента для підстановки. Який зв'язок між парністю підстановки та її декрементом?
- 3.13. Обчисліть кількість інверсій у перестановці та встановіть її парність в залежності від значення числа n :

№ варіанта	Перестановка:
1	$(2, 4, 6, \dots, 2n, 1, 3, 5, \dots, 2n-1)$
2	$(1, 5, \dots, 4n-3, 2, 6, \dots, 4n-2, 3, 7, \dots, 4n-1, 4, 8, \dots, 4n)$
3	$(2, 5, 8, \dots, 3n-4, 3n-1, 3, 6, 9, \dots, 3n-3, 3n, 1, 4, 7, \dots, 3n-5, 3n-2)$
4	$(2, 6, \dots, 4n-2, 3, 7, \dots, 4n-1, 4, 8, \dots, 4n, 1, 5, \dots, 4n-3)$
5	$(3, 6, 9, \dots, 3n-3, 3n, 2, 5, 8, \dots, 3n-4, 3n-1, 1, 4, 7, \dots, 3n-5, 3n-2)$
6	$(4, 8, \dots, 4n, 1, 5, \dots, 4n-3, 2, 6, \dots, 4n-2, 3, 7, \dots, 4n-1)$

7	$(4, 8, \dots, 4n, 2, 6, \dots, 4n - 2, 3, 7, \dots, 4n - 1, 1, 5, \dots, 4n - 3)$
8	$(2, 6, \dots, 4n - 2, 4, 8, \dots, 4n, 3, 7, \dots, 4n - 1, 1, 5, \dots, 4n - 3)$
9	$(3, 7, \dots, 4n - 1, 4, 8, \dots, 4n, 2, 6, \dots, 4n - 2, 1, 5, \dots, 4n - 3)$
10	$(1, 3, 5, \dots, 2n - 1, 2, 4, 6, \dots, 2n)$
11	$(4, 8, \dots, 4n, 2, 6, \dots, 4n - 2, 1, 5, \dots, 4n - 3, 3, 7, \dots, 4n - 1)$
12	$(2, 6, \dots, 4n - 2, 4, 8, \dots, 4n, 1, 5, \dots, 4n - 3, 3, 7, \dots, 4n - 1)$
13	$(2, 5, 8, \dots, 3n - 4, 3n - 1, 1, 4, 7, \dots, 3n - 5, 3n - 2, 3, 6, 9, \dots, 3n - 3, 3n)$
14	$(2, 5, 8, \dots, 3n - 4, 3n - 1, 3, 6, 9, \dots, 3n - 3, 3n, 1, 4, 7, \dots, 3n - 5, 3n - 2)$
15	$(1, 4, 7, \dots, 3n - 5, 3n - 2, 2, 5, 8, \dots, 3n - 4, 3n - 1, 3, 6, 9, \dots, 3n - 3, 3n)$
16	$(2, 4, 6, \dots, 4n, 1, 3, 5, \dots, 4n - 1)$
17	$(5, 10, \dots, 5n, 1, 6, \dots, 5n - 4, 2, 7, \dots, 5n - 3, 3, 8, \dots, 5n - 2, 4, 9, \dots, 5n - 1)$
18	$(1, 6, \dots, 5n - 4, 2, 7, \dots, 5n - 3, 5, 10, \dots, 5n, 3, 8, \dots, 5n - 2, 4, 9, \dots, 5n - 1)$
19	$(1, 6, \dots, 5n - 4, 3, 8, \dots, 5n - 2, 2, 7, \dots, 5n - 3, 5, 10, \dots, 5n, 4, 9, \dots, 5n - 1)$
20	$(1, 6, \dots, 5n - 4, 5, 10, \dots, 5n, 3, 8, \dots, 5n - 2, 2, 7, \dots, 5n - 3, 4, 9, \dots, 5n - 1)$

3.14. Обчисліть кількість інверсій у підстановці та встановити її парність в залежності від n :

№ варіанта	Підстановка:
1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-3 & 2n-2 & 2n-1 & 2n \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 2n-1 & 2n & 1 & 2 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-4 & 3n-3 & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & \dots & 3n-4 & 3n-5 & 3n & 3n-1 & 3n-2 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-4 & 3n-3 & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & \dots & 3n-5 & 3n-4 & 3n & 3n-2 & 3n-1 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-3 & 2n-2 & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \dots & 2n-2 & 2n-3 & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & 6 & \dots & 2n \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n & 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-4 & 3n-3 & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots & 3n-1 & 3n & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

8	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n & 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \\ 3 & 6 & 9 & \dots & 3n & 2 & 5 & 8 & \dots & 3n-1 & 1 & 4 & 7 & \dots & 3n-2 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n & 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \\ 1 & 4 & 7 & \dots & 3n-2 & 2 & 5 & 8 & \dots & 3n-1 & 3 & 6 & 9 & \dots & 3n \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n & 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \\ 2 & 5 & 8 & \dots & 3n-1 & 1 & 4 & 7 & \dots & 3n-2 & 3 & 6 & 9 & \dots & 3n \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n & 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \\ 3 & 6 & 9 & \dots & 3n & 1 & 4 & 7 & \dots & 3n-2 & 2 & 5 & 8 & \dots & 3n-1 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n & 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \\ 1 & 4 & 7 & \dots & 3n-2 & 3 & 6 & 9 & \dots & 3n & 2 & 5 & 8 & \dots & 3n-1 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n & 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \\ 2 & 5 & 8 & \dots & 3n-1 & 3 & 6 & 9 & \dots & 3n & 1 & 4 & 7 & \dots & 3n-2 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 & 2n & 2n-1 & \dots & n+2 & n+1 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2n & 2n-2 & \dots & 4 & 2 & 2n-1 & 2n-3 & \dots & 3 & 1 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-3 & 2n-2 & 2n-1 & 2n \\ 4 & 5 & 6 & 7 & \dots & 2n & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-3 & 2n-2 & 2n-1 & 2n \\ 4 & 5 & 6 & 7 & \dots & 2n & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-4 & 3n-3 & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots & 3n-1 & 3n & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-3 & 2n-2 & 2n-1 & 2n \\ 2n & 2n-1 & 2n-2 & 2n-3 & \dots & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-3 & 2n-2 & 2n-1 & 2n \\ 2n & 2 & 2n-2 & 4 & \dots & 2n-3 & 3 & 2n-1 & 1 \end{pmatrix}$

3.15. Обчисліть підстановку A та знайдіть в ній кількість інверсій, якщо:

№ варіанта	
1	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 9 & 7 & 1 & 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}^{1223}$
2	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 6 & 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{13} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}^{-15}$
3	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}^{2993}$
4	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}^{-12} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{33}$
5	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{206} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-205}$
6	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-27} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}^{101}$
7	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}^{31} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 3 & 6 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-200}$
8	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}^{-21} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}^{111}$
9	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 6 & 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}^{-333}$
10	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}^{-265} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-3}$
11	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}^{98} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}^{-89}$
12	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 8 & 2 & 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}^{34} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}^{-45}$

13	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}^{555} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}^{123}$
14	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}^{-456} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 3 & 6 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}^3$
15	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}^{-35} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{542}$
16	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-222} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}^{333}$
17	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{5555} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}^{-4444}$
18	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 6 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}^{-567} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}^{123}$
19	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}^{443} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}^{-234}$
20	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}^{1809} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-412}$

3.16. Знайдіть підстановку X у кожному з рівнянь:

а) $A \cdot X = C$, б) $X \cdot B = C$, в) $A \cdot X \cdot B = C$.

№ варіанта	Задані підстановки:
1	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$
2	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix},$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$
3	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 6 & 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix},$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 8 & 2 & 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$

4	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$
5	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix},$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$
6	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 8 & 2 & 3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix},$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 6 & 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$
7	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix},$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$
8	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 3 & 6 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$
9	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix},$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$
10	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix},$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$
11	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$

12	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 6 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & 1 & 5 & 2 & 7 & 4 & 8 \end{pmatrix},$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$
13	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix},$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$
14	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix},$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$
15	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$
16	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$
17	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix},$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 6 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$
18	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$
19	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

20	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix},$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$
----	---

§ 4. Визначники n -го порядку. Теорема Лапласа

- 4.1. Сформулюйте означення визначника n -го порядку ($n \in \mathbb{N}$).
- 4.2. Що називають загальним членом визначника?
- 4.3. Сформулюйте та доведіть ті властивості визначника, коли він дорівнює нулю.
- 4.4. Які перетворення не змінюють значення визначника n -го порядку?
- 4.5. Після яких перетворень визначника його значення змінює знак на протилежний?
- 4.6. Як змінюється визначник після транспонування?
- 4.7. Сформулюйте означення трикутного визначника. Виведіть формули для його обчислення.
- 4.8. Сформулюйте означення кососиметричного визначника. Чому дорівнює кососиметричний визначник непарного порядку? парного порядку?
- 4.9. Сформулюйте означення мінора, доповняльного мінора, алгебраїчного доповнення.
- 4.10. Сформулюйте та доведіть теорему про добуток мінора та відповідного йому алгебраїчного доповнення.
- 4.11. Сформулюйте та доведіть теорему Лапласа.
- 4.12. Сформулюйте наслідки з теореми Лапласа про розклад визначника за елементами деякого рядка чи стовпця.
- 4.13. Сформулюйте і доведіть теорему про "фальшивий" розклад визначника.
- 4.14. Сформулюйте означення та виведіть формули для обчислення прямого та зворотнього визначників Вандермонда.

4.15. Обчисліть визначники¹:

№ варіанта	а) за допомогою теорема Лапласа або наслідків з неї:	б) за допомогою зведення до трикутного вигляду:
1	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2+a_1 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2+a_2 & 2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2+a_n & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
2	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 4 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 3 & 6 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 2n \end{vmatrix}$
3	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	$d_{n+1} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & x \\ -1 & -1 & \dots & -1 & x & -1 \\ -1 & -1 & \dots & x & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & x & \dots & -1 & -1 & -1 \\ x & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$
4	$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	$d_{n+1} = \begin{vmatrix} -2 & \dots & -2 & -2 & 3 \\ -2 & \dots & -2 & 3 & -2 \\ -2 & \dots & 3 & -2 & -2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & \dots & -2 & -2 & -2 \end{vmatrix}$

¹ Символом d_s домовимося позначати визначник s -того порядку ($s \in \mathbb{N}$, $s \geq 3$). Якщо не вказано розмірність визначника, то це означає, що її легко визначити, врахувавши закономірність розташування елементів у визначнику.

5	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} n & n-1 & \dots & 3 & 2 & a_1 \\ n & n-1 & \dots & 3 & a_2 & a_1 \\ n & n-1 & \dots & a_3 & a_2 & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & a_{n-1} & \dots & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$
6	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a & a & \dots & a & a & 1 \\ a & a & \dots & a & 2 & a \\ a & a & \dots & 3 & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & n & \dots & a & a & a \\ a & a & \dots & a & a & a \end{vmatrix}$
7	$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1+a_1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1+a_2 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+a_n & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
8	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -6 & 3 & 1 \end{vmatrix}$	$d_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
9	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 1 & 0 & 12 \end{vmatrix}$	$d_{n+1} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & \dots & 0 & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

10	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	$d_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 0 \end{vmatrix}$
11	$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n \end{vmatrix}$
12	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & a_2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & a_3 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & a_{n-1} & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & a_n \end{vmatrix}$
13	$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \\ 8 & 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \dots & n-1 & 0 \end{vmatrix}$
14	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$

15	$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & x \end{vmatrix}$
16	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 4 & 7 \\ -3 & 5 & 2 & 1 & 5 & -7 \\ 4 & 6 & 4 & 7 & -6 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$	$d_{n+1} = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$
17	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} n & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$
18	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 3 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$
19	$\begin{vmatrix} 8 & 5 & 3 & 7 & 1 \\ 4 & 6 & 7 & 9 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$	$d_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$

20	$\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$	$d_{n+1} = \begin{vmatrix} x & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -2 & x & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & x & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & x \end{vmatrix}$
----	--	---

§ 5. Теорема Крамера

- 5.1.** Сформулюйте теорему Крамера для системи n лінійних рівнянь з n змінними ($n \in \mathbb{N}$).
- 5.2.** Сформулюйте наслідки з теореми Крамера (про неозначену та не-сумісну системи; про однорідну систему лінійних рівнянь).
- 5.3.** Доведіть, що перестановка місцями двох рівнянь у означеній системі n лінійних рівнянь з n змінними не змінює її розв'язку.
- 5.4.** Розв'яжіть систему лінійних рівнянь за допомогою теореми Крамера:

№ варіанта	Система	№ варіанта	Система
1	$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 9, \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 18, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = -5, \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2. \end{cases}$	11	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4. \end{cases}$	12	$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$	13	$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$

4	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37. \end{cases}$	15	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$
6	$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 12, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 27, \\ 7x_1 + 8x_2 - x_3 + 5x_4 = 40, \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 41. \end{cases}$	16	$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$
7	$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 6, \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 8. \end{cases}$	17	$\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$
8	$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -4, \\ 9x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 13, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - 9x_2 + 2x_4 = 11. \end{cases}$	18	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = -1, \\ 7x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 15x_4 = -32, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -8. \end{cases}$
9	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 8x_4 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$	19	$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = -1, \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 7, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$
10	$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3. \end{cases}$	20	$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7. \end{cases}$

§ 6. Скінченновимірний векторний простір. Лінійна залежність та незалежність n -вимірних векторів. Базис та розмірність простору

- 6.1. Сформулюйте означення n -вимірного вектора, нульового вектора, протилежного вектора.
- 6.2. Випишіть правила додавання n -вимірних векторів та множення n -вимірного вектора на дійсне число.
- 6.3. Опишіть властивості дій над n -вимірними векторами.
- 6.4. Наведіть означення скінченновимірного векторного простору (випишіть аксіоми простору).
- 6.5. Сформулюйте означення пропорційних векторів, лінійної комбінації векторів.
- 6.6. Сформулюйте два рівносильні означення лінійної залежності векторів скінченновимірного простору.
- 6.7. Сформулюйте означення лінійно незалежної системи векторів скінченновимірного простору.
- 6.8. Сформулюйте основні властивості лінійно залежних та незалежних систем векторів, їх наслідки.
- 6.9. Доведіть, що коли система векторів містить нульовий вектор або пропорційні вектори, то вона лінійно залежна.
- 6.10. Доведіть, що одиничні вектори $\bar{\varepsilon}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\bar{\varepsilon}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $\bar{\varepsilon}_n = (0, \dots, 0, 1)$ утворюють максимальну лінійно незалежну систему векторів n -вимірного простору.
- 6.11. Доведіть, що довільна система n -вимірних векторів, у якій векторів є більше ніж координат, є лінійно залежною.
- 6.12. Сформулюйте означення максимальної лінійно незалежної системи векторів, її властивості.
- 6.13. Скільки векторів містить довільна максимальна лінійно незалежна система n -вимірних векторів? Відповідь поясніть.
- 6.14. Сформулюйте основну теорему про дві системи векторів.
- 6.15. Які системи векторів називають еквівалентними? Сформулюйте наслідки з основної теореми про дві еквівалентні системи векторів.
- 6.16. Сформулюйте означення максимальної лінійно незалежної підсистеми заданої системи n -вимірних векторів.
- 6.17. Сформулюйте визначення рангу системи векторів.

6.18. Сформулюйте означення базису простору, розмірності простору.

6.19. З'ясуйте, чи утворює скінченновимірний векторний простір задана множина відносно звичайних дій додавання своїх елементів та множення елемента на дійсне число:

№ варіанта	Множина
1	Множина всіх векторів тривимірного простору, координатами яких є цілі числа.
2	Множина всіх n -вимірних векторів ($n \in \mathbb{N}$), які є лінійними комбінаціями заданих векторів $a_1, a_2, \dots, a_k$ ($1 \leq k \leq n$).
3	Множина всіх векторів тривимірного простору, котрі паралельні до деякої прямої.
4	Множина всіх векторів тривимірного простору відносно дій векторного множення векторів та множення вектора на дійсне число.
5	Множина всіх векторів тривимірного простору, котрі лежать на одній прямій.
6	Множина всіх векторів тривимірного простору, які є лінійними комбінаціями векторів $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.
7	Множина всіх n -вимірних векторів ($n \in \mathbb{N}$), сума всіх координат яких дорівнює нулю.
8	Множина всіх n -вимірних векторів ($n \in \mathbb{N}$), у яких координати з парними номерами дорівнюють нулю.
9	Множина всіх n -вимірних векторів ($n \in \mathbb{N}$), у яких координати з непарними номерами дорівнюють нулю.
10	Множина всіх n -вимірних векторів ($n \in \mathbb{N}$), у яких сума координат з парними номерами дорівнює нулю.
11	Множина всіх n -вимірних векторів ($n \in \mathbb{N}$), у яких сума координат з непарними номерами дорівнює нулю.
12	Множина всіх n -вимірних векторів ($n \in \mathbb{N}$), у яких сума координат з парними номерами дорівнює сумі координат з непарними номерами.
13	Множина всіх векторів з п'ятьма координатами, у яких перша координата втричі більша за останню.
14	Множина всіх векторів з п'ятьма координатами, у яких остання координата у чотири рази більша за третю.
15	Множина всіх 6-вимірних векторів, у яких сума координат з непарними номерами дорівнює нулю.

16	Множина всіх 4-вимірних векторів, у яких сума координат з парними номерами дорівнює нулю.
17	Множина всіх 5-вимірних векторів, у яких сума другої та четвертої координат дорівнює сумі першої та останньої координати.
18	Множина всіх чотиривимірних векторів, у яких сума координат з парними номерами дорівнює сумі координат з непарними номерами.
19	Множина всіх векторів з п'ятьма координатами, у яких остання координата у чотири рази більша за третю.
20	Множина всіх векторів площини, кожен з яких лежить на одній з двох вісей координат.

6.20. Якщо задана у прикладі 6.19 множина векторів утворює лінійний простір, то навести приклад базису в цьому просторі та вказати розмірність простору.

6.21. Обчислити вектор $\vec{\beta} = 2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 - \vec{a}_3$, якщо

№ варіанта	Вектори
1	$\vec{a}_1 = (1, 4, 6), \vec{a}_2 = (1, -1, 1), \vec{a}_3 = (1, 1, 3).$
2	$\vec{a}_1 = (0, 1, 2, -2), \vec{a}_2 = (1, 0, 1, 3), \vec{a}_3 = (-1, 2, 4, 1).$
3	$\vec{a}_1 = (7, 2, -1, -2), \vec{a}_2 = (1, -3, 1, -4), \vec{a}_3 = (2, 5, 2, 1).$
4	$\vec{a}_1 = (6, -9, 21, -3), \vec{a}_2 = (-4, 6, -14), \vec{a}_3 = (2, -3, 7, -1).$
5	$\vec{a}_1 = (2, -3, 1), \vec{a}_2 = (3, -1, 5), \vec{a}_3 = (1, -4, 3).$
6	$\vec{a}_1 = (5, -2, 3, -4), \vec{a}_2 = (1, 4, -3, 2), \vec{a}_3 = (6, 2, 0, -2).$
7	$\vec{a}_1 = (1, -1, 2), \vec{a}_2 = (-1, 1, -1), \vec{a}_3 = (2, -1, 1).$
8	$\vec{a}_1 = (1, 2, 1, 4), \vec{a}_2 = (2, -1, 3, 1), \vec{a}_3 = (1, 3, -1, -6).$
9	$\vec{a}_1 = (3, 4, -5), \vec{a}_2 = (4, 1, -2), \vec{a}_3 = (5, 2, -3).$
10	$\vec{a}_1 = (7, 1, -3), \vec{a}_2 = (2, 2, -4), \vec{a}_3 = (3, -3, 5).$
11	$\vec{a}_1 = (1, 1, -1, 2), \vec{a}_2 = (-3, -2, 1, -3), \vec{a}_3 = (4, 3, -2, 5).$
12	$\vec{a}_1 = (7, -14, 3, -1), \vec{a}_2 = (1, -2, 1, -3), \vec{a}_3 = (5, -10, 1, 5).$
13	$\vec{a}_1 = (1, 2, 3), \vec{a}_2 = (4, 5, 6), \vec{a}_3 = (7, 8, 9).$
14	$\vec{a}_1 = (1, 1, 1, -1), \vec{a}_2 = (2, 1, -2, -1), \vec{a}_3 = (1, 2, 5, -2).$
15	$\vec{a}_1 = (1, 2, -3, -1), \vec{a}_2 = (1, -2, 3, 1), \vec{a}_3 = (1, 6, -9, -3).$

16	$\bar{a}_1 = (1,1,1), \bar{a}_2 = (1,2,3), \bar{a}_3 = (1,3,6).$
17	$\bar{a}_1 = (2,0,2), \bar{a}_2 = (1,-1,0), \bar{a}_3 = (0,-1,-2).$
18	$\bar{a}_1 = (2,-2,-3,-7), \bar{a}_2 = (1,11,-2,3), \bar{a}_3 = (1,-5,2,-16).$
19	$\bar{a}_1 = (-2,1,5), \bar{a}_2 = (4,-3,0), \bar{a}_3 = (0,-1,10).$
20	$\bar{a}_1 = (5,4,3), \bar{a}_2 = (3,3,2), \bar{a}_3 = (8,1,3).$

6.22. Дослідіть на лінійну залежність вектори, задані в прикладі 6.21.

6.23. Чому дорівнює ранг системи векторів із прикладу 6.21? Вкажіть приклад її максимальної лінійно незалежної підсистеми.

§ 7. Ранг матриці. Теорема Кронекера-Капеллі

7.1. Сформулюйте означення рангу матриці.

7.2. Сформулюйте теорему про ранг матриці.

7.3. Сформулюйте наслідок про кількість лінійно незалежних рядків матриці.

7.4. Опишіть метод охоплення мінорів обчислення рангу матриці.

7.5. Опишіть метод елементарних перетворень обчислення рангу матриці.

7.6. Сформулюйте теорему Кронекера-Капеллі.

7.7. Опишіть алгоритм застосування теореми Кронекера-Капеллі до розв'язування систем лінійних рівнянь.

7.8. Сформулюйте наслідок про однорідні системи лінійних рівнянь.

7.9. Нехай система m лінійних рівнянь з n змінними несутимісна, а її матриця має ранг n . До якого найпростішого вигляду можна привести цю систему рівнянь, застосовуючи до рядків розширеної матриці алгоритм Гаусса?

7.10. Обчисліть ранг матриці методом охоплення мінорів:

№ варіанта	Матриця	№ варіанта	Матриця
1	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 & 0 & 4 \\ -2 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 9 & 1 & 4 \\ -5 & 12 & 18 & 2 & 8 \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

2	$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 7 & 10 & 12 & 13 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -6 & 10 & -11 \\ 2 & 1 & 9 & -11 & 16 \\ 10 & 5 & 10 & -6 & 17 \end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 7 & 8 & -7 \\ -6 & 4 & -9 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -6 & 10 & -11 \\ 2 & 1 & 9 & -11 & 16 \\ 10 & 5 & 10 & -6 & 17 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 4 & -5 & 1 \\ 3 & 4 & -5 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 7 & 8 & -7 \\ -6 & 4 & -9 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

8	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 7 & 10 & 12 & 13 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 33 & 44 & 11 & 22 \\ -1 & -24 & -28 & 33 \\ 1 & 46 & 22 & -29 \\ 23 & -11 & -2 & 56 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} 15 & 31 & -47 & 17 \\ 27 & 42 & 33 & 23 \\ 4 & 6 & 27 & -110 \\ 3 & 18 & 23 & 48 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ -2 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 2011 & 2012 & 2013 & 2014 \\ 2012 & 2013 & 2011 & 2012 \\ 2011 & 2011 & 2011 & 2009 \\ 2011 & 2010 & 2008 & 2009 \end{pmatrix}$

7.11. Обчисліть ранг матриці із прикладу 7.10 за допомогою методу елементарних перетворень.

7.12. Дослідіть на сумісність та знайдіть розв'язки системи лінійних рівнянь за допомогою теореми Кронекера-Капеллі:

№ варіанта	Система:	№ варіанта	Система:
1	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 1. \end{cases}$	11	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$
2	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 1. \end{cases}$	12	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$	13	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$

4	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7, \\ 9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 = 25. \end{cases}$	14	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$	15	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$
6	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 2. \end{cases}$	16	$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7. \end{cases}$
7	$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$	17	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 3x_5 = 3, \\ x_1 + 15x_2 + 6x_3 - 19x_4 + 9x_5 = 1. \end{cases}$
8	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$	18	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14. \end{cases}$
9	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$	19	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3. \end{cases}$
10	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 1. \end{cases}$	20	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$

§ 8. Системи лінійних однорідних рівнянь. Фундаментальна система розв'язків СЛОР

- 8.1. Однорідна система лінійних рівнянь (СЛОР), її сумісність. Сформулюйте означення та властивості розв'язків лінійної однорідної системи.
- 8.2. Доведіть, що: **1)** сума розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь є розв'язком цієї системи; **2)** добуток довільного розв'язку однорідної системи лінійних рівнянь на дійсне число — розв'язок цієї ж системи. Зробіть висновок про лінійну комбінацію розв'язків СЛОР.
- 8.3. Сформулюйте означення фундаментальної системи розв'язків. Сформулюйте та доведіть теорему про кількість розв'язків у фундаментальній системі однорідної системи лінійних рівнянь.
- 8.4. Випишіть співвідношення, котрі описують зв'язок між розв'язками неоднорідної та приєднаної однорідної систем лінійних рівнянь.
- 8.5. Нехай k — максимальна кількість лінійно незалежних розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь. Виразіть k через розміри та ранг матриці системи. У якому випадку $k = 0$?
- 8.6. Скільки лінійно незалежних розв'язків має однорідна система лінійних рівнянь, якщо її матриця невиврождена?
- 8.7. Чи може однорідна система лінійних рівнянь виявитися несумісною?
- 8.8. Сформулюйте умови (та перевірте їх необхідність та достатність), при яких однорідна система лінійних рівнянь має: **1)** єдиний розв'язок; **2)** нескінченно багато розв'язків.
- 8.9. Розв'яжіть наступні системи лінійних однорідних рівнянь. Випишіть фундаментальну систему розв'язків та загальний розв'язок системи:

№ варіанта	Система:
1	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

2	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$
6	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$
7	$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$
8	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 7x_5 = 0. \end{cases}$
9	$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$
10	$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$

11	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$
12	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 6x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$
13	$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$
14	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 16x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$
15	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$
16	$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$
17	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 0. \end{cases}$
18	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$
19	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$

20	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$
-----------	---

8.10. Використовуючи зв'язок між розв'язками однорідної та неоднорідної систем лінійних рівнянь, знайдіть загальний розв'язок заданої системи:

№ варіанта	Система:
1	$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 4, \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 2. \end{cases}$
2	$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 7x_3 - 5x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 3. \end{cases}$
3	$\begin{cases} 8x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 9x_5 = -4, \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_5 = -2, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 2. \end{cases}$
4	$\begin{cases} -6x_1 + 4x_2 + 8x_3 - x_4 + 6x_5 = -1, \\ -5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 7x_4 + 6x_5 = 1. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 + 2x_5 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$
6	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 9x_5 = 5. \end{cases}$
7	$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 4x_5 = 3, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

8	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = -2. \end{cases}$
9	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 13, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 11. \end{cases}$
10	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 8, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$
11	$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -2, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -3, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 8. \end{cases}$
12	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_5 = -2, \\ -2x_1 - 5x_2 + 8x_3 - 4x_4 + 3x_5 = -1. \end{cases}$
13	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$
14	$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1. \end{cases}$
15	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3. \end{cases}$
16	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 1, \\ 9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 = -3. \end{cases}$

17	$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$
18	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 2. \end{cases}$
19	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 16x_3 + x_4 + 6x_5 = -1. \end{cases}$
20	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = -2, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = -1, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -3. \end{cases}$

§ 9. Дії над матрицями, їх властивості. Обернена матриця. Матричні рівняння

- 9.1.** Як вводиться дія множення квадратних матриць за допомогою послідовного виконання лінійних перетворень? Випишіть правило множення прямокутних (квадратних) матриць.
- 9.2.** Сформулюйте та доведіть властивості дії множення матриць (некомутативність, асоціативність). Випишіть висновки про правило обчислення натурального степеня квадратної матриці, про множення діагональних матриць.
- 9.3.** Як називають матриці, які задовольняють комутативний закон множення? Наведіть приклади таких матриць.
- 9.4.** Сформулюйте теорему про визначник добутку квадратних матриць.
- 9.5.** Яку матрицю називають невинродженою? Сформулюйте основні властивості невинроджених матриць.
- 9.6.** Яку матрицю називають одиничною? Сформулюйте основну властивість одиничної матриці.
- 9.7.** Сформулюйте означення оберненої матриці. Випишіть формулу для її обчислення. Які умови повинна задовольняти матриця, щоб для неї існувала обернена матриця? Скільки таких обернених матриць може існувати?

9.8. Опишіть алгоритм обчислення оберненої матриці за допомогою елементарних перетворень.

9.9. Сформулюйте теорему про ранг добутку матриць.

9.10. Сформулюйте правила додавання матриць та множення довільної матриці на число. Випишіть основні властивості цих дій.

9.11. Обчислити:

№ варіанта	
1	$f(A)$, якщо $f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 1$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.
2	Добуток матриці $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ на транспоновану до неї.
3	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
4	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ 4 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.
5	$f(A)$, якщо $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
6	$A \cdot B - B \cdot A^T \cdot B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.
7	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.
8	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 27 & -18 & 10 \\ -46 & 31 & -17 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

9	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{pmatrix}.$
10	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$, якщо $n \in \mathbb{N}$.
11	$f(A)$, якщо $f(x) = x^2 - x - 1$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$
12	$f(A)$, якщо $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$
13	$2 \cdot A^T \cdot B - 3 \cdot B^T \cdot A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$
14	$f(A)$, якщо $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$
15	$A \cdot B - B \cdot A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$
16	$A + 2B - 3A \cdot B^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$
17	$f(A)$, якщо $f(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 5$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$
18	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (-2 \ 1).$

19	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & -4 & 4 \\ 5 & 1 & 4 & -3 \\ -16 & -11 & -15 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & 4 \\ 11 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \\ 22 & 2 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$
20	$f(A), \text{ якщо } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{2x + 1}.$

9.12. Знайти обернену до матриці A :

- а) за допомогою алгебраїчних доповнень;
- б) за допомогою елементарних перетворень над рядками матриці;
- в) за допомогою елементарних перетворень над стовпцями матриці.

№ варіанта	Матриця	№ варіанта	Матриця
1	$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$	11	$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
2	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	12	$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
3	$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	13	$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
4	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	14	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
5	$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$	15	$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$
6	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	16	$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

7	$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	17	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
8	$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	18	$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
9	$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	19	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
10	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	20	$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

9.13. Розв'яжіть матричне рівняння:

№ варіанта	
1	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$
2	$X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & -9 & 1 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$
4	$X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$
5	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$

6	$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$
7	$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$
8	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$
9	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$
10	$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$
11	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$
12	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$
13	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$
14	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$
15	$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
16	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

17	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$
18	$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
19	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -5 & 11 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$
20	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

9.14. Розв'яжіть систему рівнянь із прикладу 2.8 матричним способом.

§ 10. Алгебраїчна форма запису комплексного числа. Дії над комплексними числами, заданими в алгебраїчній формі

- 10.1.** Для чого вводиться поняття комплексного числа?
- 10.2.** Уявна одиниця – сформулюйте означення та основну властивість.
- 10.3.** Сформулюйте означення комплексного числа в алгебраїчній формі.
- 10.4.** Випишіть правила дій над комплексними числами в такому вигляді.
- 10.5.** Сформулюйте властивості дій над комплексними числами в алгебраїчній формі.
- 10.6.** Комплексне число, спряжене до даного — сформулюйте означення та основні властивості. Опишіть застосування спряжених чисел.
- 10.7.** Як можна зобразити комплексне число, подане в алгебраїчній формі? Яка відмінність (подібність) до зображення дійсного числа?
- 10.8.** Геометричний зміст комплексного числа, спряженого до даного.

10.9. Спростіть вирази:

№ варіанта	а)	б)	в)
1	$(5 - 7i) + (4 + 5i)$	$(2 - 9i) \cdot (1 + 2i)$	$\frac{(1 - 2i)(3 + 4i) - (7 + 5i)}{2 - 3i}$
2	$(3 + 7i) - (1 + 8i)$	$(1 + 3i) \cdot (-5 + 2i)$	$\frac{(5 + i)(7 - 6i)}{3 + i} + (1 + i)$
3	$(1 - 5i) + (2 + 3i)$	$(4 - 8i) \cdot (2 + 3i)$	$\frac{(5 + i)(3 - 5i)}{2i} - 6i$
4	$(15 - 9i) - (2 + 14i)$	$(-3 + 8i) \cdot (2 - 6i)$	$\frac{(1 + 3i)(8 - i)}{(2 + i)^2} + (2 + 3i)$
5	$(-1 - 7i) - (3 - 6i)$	$(4 - 2i) \cdot (5 - i)$	$\frac{(4 + i)(5 + 3i) - (3 + i)(3 - i)}{1 + 2i}$
6	$(2 + 11i) + (6 - 5i)$	$(3 + i) \cdot (-4 + 6i)$	$\frac{(1 - 2i)(-2 + i) + (i - 2)(4 + i)}{2 - i}$
7	$(4 + 8i) + (3 - i)$	$(8 + 3i) \cdot (-2 - 4i)$	$\frac{(5 + i)(3 - 2i)}{2i - 1} + (3i + 1)$
8	$(9 - 5i) + (2 - 3i)$	$(7 + 2i) \cdot (-9 - i)$	$\frac{(2 + i)(3 - i) + (3i - 2)(4 + i)}{2 - 3i}$
9	$(2 + i) - (9 + 7i)$	$(4 + 7i) \cdot (6 - i)$	$\frac{(-2 + 3i)(1 + 2i)}{(-3 + 2i)^2} - (1 + 5i)$
10	$(4 - 3i) + (4 + 3i)$	$(7 + 3i) \cdot (2 + 4i)$	$\frac{(4 - i)(-2 - i) - (i - 5)(-2 + 5i)}{4 + i}$
11	$(5 - 7i) + (11 - 2i)$	$(12 - i) \cdot (2 + 5i)$	$\frac{(-2 + i)(4 + 5i)}{7i - 2} + (2 - 3i)$
12	$(2 - 16i) + (-12 + 6i)$	$(7 + 2i) \cdot (4 - 3i)$	$\frac{(-7 + 2i)(-8i)}{3 + 2i} - 12$
13	$(15 - 6i) + (3 + 5i)$	$(1 + i) \cdot (15 - 7i)$	$\frac{(3 + 5i)(-3 - 6i) - (1 + 8i)}{4 + 2i}$
14	$(7 + i) - (2 + 2i)$	$(2 - 9i) \cdot (11 - i)$	$\frac{(7 + 3i)(-2 + 5i)}{-2 + 3i} - (2 + 3i)$
15	$(3 - 7i) - (3 + 7i)$	$(7 - 5i) \cdot (1 + 2i)$	$\frac{(-2 + 6i)(7 - 4i)}{-2 + 5i} - (3 + 5i)$
16	$(6 + 2i) - (3 + 9i)$	$(4 + 5i) \cdot (-3 + 7i)$	$\frac{(2 + i)(2 - 7i) + (2 - 5i)(-3 + 8i)}{-4 + 3i}$

17	$(2 - 4i) - (4 - 8i)$	$(-3 - 8i) \cdot (2 - 7i)$	$\frac{(3 + 4i)(6 - 8i)}{8 + i} - 11i$
18	$(10 - 2i) - (1 + 5i)$	$(9 - 7i) \cdot (-3 + 2i)$	$\frac{(2 - 5i)(4 + 3i) - (7 + 2i)(3 + 9i)}{3 + 2i}$
19	$(9 + 3i) - (8 + i)$	$(-8 + 4i) \cdot (3 - 6i)$	$\frac{(-2 + i)(-3 - 7i)}{3 + 4i} - (12 - 5i)$
20	$(11 + 9i) + (-17 + 5i)$	$(6 - 7i) \cdot (-5 - 8i)$	$\frac{(4 + 2i)(5 - 7i)}{3 - 2i} - (6 + 7i)$

10.10. Обчисліть вирази:

№ варіанта	а)	б)
1	$(2 + i)^3 + (2 - i)^3$	$\sqrt{4 - 3i}$
2	$(5 + i)^3 - (5 - i)^3$	$\sqrt{-1 + 3i}$
3	$\frac{(2 + i)^5}{(2 - i)^3}$	$\sqrt{2 - 4i}$
4	$\frac{(3 - 4i)^6}{(3 + 4i)^4}$	$\sqrt{5 + 2i}$
5	$\frac{(2 - 3i)^3 - (1 + i)^2(5 - i)}{(4 - 3i)^2 - i(1 + 2i)^3}$	$\sqrt{2 - i}$
6	$\frac{(1 + 2i)^2 - (1 - i)^3}{(3 + 2i)^3 - (2 + i)^2}$	$\sqrt{4 + 3i}$
7	$\frac{(2 + i)^3 - (4 - 3i)^2}{(3 - i)^2 - (5 + 7i)^3}$	$\sqrt{5 - 2i}$
8	$\left(\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}i\right)^3$	$\sqrt{3 - 4i}$
9	$\frac{(-3 + 4i)^2}{(-3 - 4i)^3}$	$\sqrt{-5 + 4i}$
10	$\frac{(-2 + 2i)^2 + (1 + i)^3}{(1 - 5i)^3 - (4 + i)^2}$	$\sqrt{1 + 6i}$

11	$\frac{(2-3i)^3 - (2+i)^2}{(3-i)^2 + (-3+4i)^2}$	$\sqrt{7-3i}$
12	$\frac{(5-2i)^5}{(5+2i)^3}$	$\sqrt{4+7i}$
13	$\frac{(4-3i)^6}{(4+3i)^3} - 2i$	$\sqrt{-3+2i}$
14	$\frac{(-3+2i)^2 + (2-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$	$\sqrt{6-i}$
15	$\left(\frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}i\right)^3$	$\sqrt{-8-2i}$
16	$\frac{(2+i)^5}{(2-i)^3} + (-4+3i)$	$\sqrt{3+9i}$
17	$\frac{(3+i)^3 - (2-4i)^2}{(2-i)^2 + (2-5i)^3}$	$\sqrt{-7-2i}$
18	$\left(\frac{(-4+2i)^2 - (5-2i)^3}{(-2+2i)^3 - (2-i)^2}\right)^2$	$\sqrt{2+7i}$
19	$\frac{(5-i)^3}{(5+i)^4} - (3+2i)$	$\sqrt{3+8i}$
20	$\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{3}i\right)^3 + (1-4i)^3$	$\sqrt{4-2i}$

10.11. Розв'яжіть рівняння, вважаючи x та y дійсними числами:

№ варіанта	Рівняння:	№ варіанта	Рівняння:
1	$(2+3i)x + (4-5i)y = 1+6i$	11	$(2+i)x + (1+2i)y = 1-4i$
2	$(3+2i)x + (1+3i)y = 4-9i$	12	$(5+i)x + (-4+3i)y = -2+7i$
3	$(3-2i)x + (5+i)y = -7+4i$	13	$(-4+3i)x - (4+7i)y = 6i$
4	$(1-5i)x - (4+2i)y = 13-i$	14	$(8+3i)x - (1-5i)y = 1$
5	$(7+i)x - (1+i)y = -4+3i$	15	$(4-i)x - (4+8i)y = 1-3i$
6	$(-2+3i)x - (1-7i)y = 5-11i$	16	$(-4+7i)x - (9+4i)y = -6+5i$

7	$(3+8i)x + (9-4i)y = -6+8i$	17	$3ix + (9-2i)y = -4+12i$
8	$(10-i)x + (9+5i)y = -9i$	18	$(7-5i)x - 5iy = -6-4i$
9	$(5+7i)x + (-4+5i)y = -12+i$	19	$(9-i)x + (3-2i)y = 5-11i$
10	$(3-2i)x - (-9+8i)y = 12-5i$	20	$4ix - (3-8i)y = -5+14i$

10.12. Розв'яжіть рівняння, вважаючи z комплексним числом:

№ варіанта	Рівняння:	№ варіанта	Рівняння:
1	$z^2 = 5-12i$	11	$z^2 - 3 + 4i = 0$
2	$z^2 + 5z + 5 - 3i = 0$	12	$z^2 - (3-2i)z + (5-5i) = 0$
3	$z^2 + (2+i)z - 1 + 7i = 0$	13	$(1+i)z^2 - z + 1 + 2i = 0$
4	$(1+i)z^2 + iz + 2 + 4i = 0$	14	$ z - z = 1 + 2i$
5	$z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$	15	$2z^2 - 3z + 2 + i = 0$
6	$\bar{z} = 5 - z$	16	$ z + 3z = -4 + 6i$
7	$\bar{z} = -3z - 1 + 2i$	17	$3z^2 - 4z + 2 - 7i = 0$
8	$z^2 + \bar{z} = 1$	18	$z^2 - \bar{z} = 5$
9	$z^2 - 2z\bar{z} - 3 = 3i$	19	$(3-4i)z^2 - iz + 3 - 5i = 0$
10	$ z + z = 8 + 4i$	20	$3z^2 + 5z\bar{z} - 7 = 3i$

10.13. Розв'яжіть системи рівнянь, вважаючи z_1 та z_2 комплексними числами:

№ варіанта	Система:
1	$\begin{cases} (1-2i)z_1 + (2-i)z_2 = 1-3i, \\ (-i+1)z_1 - (i+2)z_2 = -1-i \end{cases}$
2	$\begin{cases} (3-i)z_1 + (4+2i)z_2 = 2+6i, \\ (4+2i)z_1 - (2+3i)z_2 = 5+4i \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2z_1 - (2+i)z_2 = -i, \\ (4-2i)z_1 - 5z_2 = -1-2i \end{cases}$
4	$\begin{cases} (2-4i)z_1 + (3-i)z_2 = 2+i, \\ (1+3i)z_1 + (2+2i)z_2 = -1-3i \end{cases}$
5	$\begin{cases} (5+i)z_1 + (3+6i)z_2 = 6i, \\ (-2+2i)z_1 - (5+i)z_2 = 5-7i \end{cases}$

6	$\begin{cases} 2iz_1 - (3+5i)z_2 = -4i, \\ (3+i)z_1 + 7z_2 = -3+i \end{cases}$
7	$\begin{cases} (1+2i)z_1 - iz_2 = 5-i, \\ -iz_1 - (7+2i)z_2 = -3-4i \end{cases}$
8	$\begin{cases} (5+i)z_1 + (3-i)z_2 = -3i, \\ (4-i)z_1 - (3+5i)z_2 = -7 \end{cases}$
9	$\begin{cases} (3+i)z_1 - (4+2i)z_2 = 1+2i, \\ (1-4i)z_1 + (5+2i)z_2 = -7+2i \end{cases}$
10	$\begin{cases} (4-6i)z_1 - 7iz_2 = -5i, \\ 7z_1 - (2+5i)z_2 = 2-3i \end{cases}$
11	$\begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1+i, \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i \end{cases}$
12	$\begin{cases} iz_1 + (1+i)z_2 = 2+2i, \\ 2iz_1 + (3+2i)z_2 = 5+3i \end{cases}$
13	$\begin{cases} (1-i)z_1 - 3z_2 = -i, \\ 2z_1 - (3+3i)z_2 = 3-i \end{cases}$
14	$\begin{cases} (4+3i)z_1 - (1-3i)z_2 = 5+3i, \\ (1-i)z_1 + (4+3i)z_2 = 7i \end{cases}$
15	$\begin{cases} -4iz_1 + (2+i)z_2 = 3-5i, \\ 2z_1 + (-1+6i)z_2 = 3i \end{cases}$
16	$\begin{cases} (1-5i)z_1 - (4+12i)z_2 = -7i, \\ 6iz_1 - (3+3i)z_2 = 3 \end{cases}$
17	$\begin{cases} (4+i)z_1 - (1-i)z_2 = 1+i, \\ (1-i)z_1 + (4+i)z_2 = 7-3i \end{cases}$
18	$\begin{cases} (3+i)z_1 - (2-5i)z_2 = -12+i, \\ (2-i)z_1 + (7-2i)z_2 = 1-6i \end{cases}$
19	$\begin{cases} (2+i)z_1 - 8iz_2 = 5-2i, \\ 7iz_1 - (2+3i)z_2 = 6-3i \end{cases}$

20	$\begin{cases} (4-2i)z_1 - (1-i)z_2 = -3+2i, \\ (8-i)z_1 + 2iz_2 = -4+3i \end{cases}$
----	---

10.14. Зобразіть на площині точки, які відповідають коефіцієнтам біля змінних кожного з рівнянь системи в прикладі 10.13.

§ 11. Тригонометрична форма запису комплексного числа. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі

- 11.1.** Для чого вводять тригонометричну форму запису комплексного числа?
- 11.2.** Опишіть геометричний зміст комплексного числа (зображення у прямокутній декартовій та полярній системах координат).
- 11.3.** Виведіть формули зв'язку між алгебраїчною та тригонометричною формами запису комплексного числа.
- 11.4.** Випишіть правила дій над комплексними числами в тригонометричному вигляді.
- 11.5.** Сформулюйте теорему про піднесення комплексного числа до цілого степеня (формула Муавра).
- 11.6.** Опишіть застосування формули Муавра до вираження тригонометричних функцій кратних кутів та до пониження степеня тригонометричної функції.
- 11.7.** Сформулюйте означення кореня натурального степеня з комплексного числа.
- 11.8.** Сформулюйте теорему про обчислення кореня натурального степеня з натурального числа. Скільки є різних значень такого кореня?
- 11.9.** Сформулюйте означення та основні властивості коренів з одиниці.
- 11.10.** Первісні корені з одиниці — сформулюйте означення, властивості, критерій.
- 11.11.** Випишіть формулу для обчислення кількості первісних коренів n -го степеня з одиниці ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$).
- 11.12.** Зобразіть задані числа на площині:

№ варіанта	а)	б)	№ варіанта	а)	б)
1	$-5i$	$1+i$	11	$-i$	$-1-i$
2	6	$1+\sqrt{3}i$	12	$-27i$	$1-\sqrt{3}i$

3	$-12i$	$-1 - \sqrt{3}i$	13	$7i$	$-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$
4	$3i$	$2 + \sqrt{2}i$	14	-2	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
5	$-4i$	$\sqrt{3} - i$	15	25	$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$
6	-27	$2 + 2i$	16	$37i$	$\sqrt{3} + i$
7	$-6i$	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	17	$-24i$	$\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$
8	8	$\sqrt{3} + i$	18	16	$1 - \sqrt{3}i$
9	$-15i$	$1 - \sqrt{3}i$	19	$-25i$	$-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$
10	$2i$	$2 - 2i$	20	$5i$	$1 + \sqrt{3}i$

11.13. Подайте комплексні числа, наведені в прикладі 11.12, у тригонометричній формі.

11.14. Обчисліть вираз:

№ варіанта	Вираз:	№ варіанта	Вираз:
1	$(1+i)^9$	11	$(1+\sqrt{3}i)^{14}$
2	$(\sqrt{3}-i)^{122}$	12	$(1-i)^{97}$
3	$(1-i\sqrt{3})^{102}$	13	$(\sqrt{3}+i)^{30}$
4	$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{111}$	14	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{24}$
5	$(2 - \sqrt{2} + i)^{12}$	15	$\frac{(-1+i\sqrt{3})^{25}}{(1-i)^{12}}$
6	$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2025}$	16	$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{33}$
7	$\left(\frac{-1-i}{-1+i\sqrt{3}}\right)^{20}$	17	$\frac{(1-i)^{17}}{(-i+\sqrt{3})^{25}}$
8	$\frac{(-1-i)^{12}}{(i+\sqrt{3})^{15}}$	18	$\left(\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{205}$

9	$\frac{(1-i)^{10}}{(i-\sqrt{3})^9}$	19	$\left(\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{15}$
10	$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$	20	$\frac{(-1-i\sqrt{3})^{20}}{(1+i)^{15}}$

11.15. Побудувати геометричні місця точок z комплексної площини, які задовольняють умови:

№ варіанта		№ варіанта	
1	$ z + 3 + 4i \geq 2$	11	$ z - 1 - i < 1$
2	$1 \leq z - 1 - i < 2$	12	$2 \leq z \leq 4$
3	$1 \leq z - 3i \leq 2$	13	$2 \leq z - 2i \leq 4$
4	$-\frac{\pi}{6} \leq \arg z < \frac{\pi}{2}$	14	$\frac{\pi}{3} < \arg z \leq \frac{3\pi}{4}$
5	$\begin{cases} 1 \leq z - 1 + 2i \leq 2, \\ \frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{7\pi}{4} \end{cases}$	15	$\begin{cases} z \leq 2, \\ \frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{2\pi}{3} \end{cases}$
6	$2(\operatorname{Re} z)^2 - \operatorname{Im} z = 0$	16	$\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z - 3$
7	$\begin{cases} 1 \leq z + 2 + 3i < 3, \\ \operatorname{Im} z > 1. \end{cases}$	17	$\begin{cases} \operatorname{Re} z > 2, \\ 1 \leq z - 3i \leq 2 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 2 \leq z + 2i \leq 4, \\ \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$	18	$\begin{cases} 2 \leq z - 1 \leq 4, \\ \frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3} \end{cases}$
9	$\begin{cases} z - 2 + 4i \leq 5, \\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{7\pi}{4} \end{cases}$	19	$\begin{cases} 2 \leq z - 1 + 2i , \\ \frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{7\pi}{4} \end{cases}$
10	$4(\operatorname{Re} z)^2 + \operatorname{Im} z = 0$	20	$3\operatorname{Re} z = 2\operatorname{Im} z - 1$

11.16. Використовуючи комплексні числа, зобразіть у вигляді многочлена від $\sin x$ та $\cos x$ функції:

№ варіанта		№ варіанта		№ варіанта	
1	$\sin 4x$	8	$\cos 4x$	15	$\cos 11x$
2	$\cos 7x$	9	$\sin 7x$	16	$\sin 8x$
3	$\sin 9x$	10	$\cos 10x$	17	$\cos 12x$
4	$\cos 8x$	11	$\cos 6x$	18	$\sin 11x$
5	$\sin 3x$	12	$\sin 5x$	19	$\cos 3x$
6	$\cos 5x$	13	$\cos 9x$	20	$\sin 12x$
7	$\sin 6x$	14	$\sin 10x$		

11.17. Виразіть у вигляді суми синусів та косинусів кратних до x кутів наступні функції:

№ варіанта		№ варіанта		№ варіанта	
1	$\sin^3 x$	8	$\cos^7 x$	15	$\sin^{10} x$
2	$\cos^9 x$	9	$\sin^5 x$	16	$\cos^4 x$
3	$\sin^4 x$	10	$\cos^{12} x$	17	$\sin^8 x$
4	$\cos^{11} x$	11	$\sin^6 x$	18	$\cos^6 x$
5	$\sin^7 x$	12	$\cos^5 x$	19	$\sin^{11} x$
6	$\cos^{10} x$	13	$\sin^9 x$	20	$\cos^3 x$
7	$\sin^{12} x$	14	$\cos^8 x$		

11.18. Обчисліть всі значення кореня:

№ варіанта		№ варіанта		№ варіанта	
1	$\sqrt[3]{4-3i}$	8	$\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$	15	$\sqrt[4]{\frac{1-i}{2}}$
2	$\sqrt[4]{-2-i}$	9	$\sqrt[4]{-1+i}$	16	$\sqrt[6]{-27}$
3	$\sqrt[3]{3-3i}$	10	$\sqrt[4]{\frac{-1+i}{-1+i\sqrt{3}}}$	17	$\sqrt[6]{i-\sqrt{3}}$
4	$\sqrt[4]{1+i}$	11	$\sqrt[4]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$	18	$\sqrt[8]{-32}$
5	$\sqrt[6]{-64}$	12	$\sqrt{-11+20i}$	19	$\sqrt[4]{\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}}$

6	$\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}$	13	$\sqrt[4]{-8+6i}$	20	$\sqrt[5]{-1-i}$
7	$\sqrt{3-4i}$	14	$\sqrt[6]{1-\sqrt{3}i}$		

11.19. Випишіть значення всіх первісних коренів n -го степеня з одиниці при заданих значеннях n :

№ варіанта	n	№ варіанта	n	№ варіанта	n	№ варіанта	n	№ варіанта	n
1	12	5	22	9	26	13	18	17	54
2	10	6	14	10	30	14	15	18	40
3	8	7	24	11	34	15	25	19	9
4	32	8	16	12	28	16	36	20	38

§ 12. Числові кільця та поля

12.1. Сформулюйте означення числового кільця.

12.2. Яке кільце називають асоціативним (комутативним, асоціативно-комутативним, кільцем з одиницею)?

12.3. Сформулюйте означення дільників нуля в кільці.

12.4. Яке кільце називають кільцем з одиницею? Сформулюйте означення дільників одиниці в такому кільці.

12.5. Сформулюйте означення числового поля.

12.6. Сформулюйте загальні означення (абстрактного) кільця та (абстрактного) поля.

12.7. Перевірте, чи утворює числове кільце щодо звичайних дій додавання та множення чисел множина K . Якщо відповідь позитивна, то з'ясуйте, чи є це кільце полем.

№ варіанта	Множина:
1	$K = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}, i^2 = -1\}.$
2	$K = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$
3	$K = n\mathbb{Z}$ — цілі числа, кратні n ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$).
4	$K = \{a + b\sqrt[3]{5} + c\sqrt[3]{25} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}.$
5	$K = \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$
6	$K = \{a + bi\sqrt{10} \mid a, b \in \mathbb{Q}, i^2 = -1\}.$

7	$K = 2\mathbb{Z}$ — парні цілі числа.
8	$K = \{a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}.$
9	$K = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}.$
10	$K = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$
11	$K = 6\mathbb{Z}$ — цілі числа, кратні 6.
12	$K = \{a + bi\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}, i^2 = -1\}.$
13	$K = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}.$
14	$K = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}.$
15	$K = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$
16	$K = \{a + bi\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}, i^2 = -1\}.$
17	$K = \{a + bi\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\}.$
18	$K = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\}.$
19	$K = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}.$
20	$K = 10\mathbb{Z}$ — цілі числа, кратні 10.

12.8. Для кожної із множин K із прикладу 12.7 з'ясуйте:

а) Чи є вказана множина K кільцем з одиницею? Якщо так, то опишіть дільники одиниці в K .

б) Опишіть дільники нуля у вказаній множині K .

Рекомендована література

1. Завало С.Т. Курс алгебри.— К.: Вища школа, 1985.— 504 с.
2. Костарчук В.М., Хацет Б.І. Курс вищої алгебри.— К.: Рад. шк., 1964.— 511с.
3. Фаддєєв Д.К., Сомінський І.С. Збірник задач з вищої алгебри.— К.: Вища школа, 1971.— 316 с.
4. Городецький В.В., Колісник Р.С., Сікора В.С. Курс лінійної алгебри в теоремах і задачах. Частина перша. Видання друге, стереотипне: Навчальний посібник.— Чернівці, 2016.— 336 с.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
§ 1. Метод Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь.....	6
§ 2. Визначники другого та третього порядків. Теорема Крамера для систем лінійних рівнянь з двома та трьома змінними.....	8
§ 3. Перестановки. Підстановки	13
§ 4. Визначники n -го порядку. Теорема Лапласа	20
§ 5. Теорема Крамера	25
§ 6. Скінченновимірний векторний простір. Лінійна залежність та незалежність n -вимірних векторів. Базис та розмірність простору	27
§ 7. Ранг матриці. Теорема Кронекера-Капеллі	30
§ 8. Системи лінійних однорідних рівнянь. Фундаментальна система розв'язків СЛОП	34
§ 9. Дії над матрицями, їх властивості. Обернена матриця. Матричні рівняння	39
§ 10. Алгебраїчна форма запису комплексного числа. Дії над комплексними числами, заданими в алгебраїчній формі.....	45
§ 11. Тригонометрична форма запису комплексного числа. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі.....	51
§ 12. Числові кільця та поля.....	55
Рекомендована література.....	56

Навчальне видання

***ЛІНІЙНА АЛГЕБРА:
збірник задач і контрольних
запитань для самостійної
роботи студентів***

(частина 1)

Укладачі: ***Колісник Руслана Степанівна,
Сікора Віра Степанівна***