Міністерство освіти та науки України
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського
Луганський національний університет імені Тараса Шевченка
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
Mathematical Institute SAS (Slovakia)
Technical University of Munich (Germany)
Anhalt University of Applied Sciences (Germany)
Northwestern University (USA)



МАТЕРІАЛИ
І Міжнародної науково-практичної конференції
«Сучасні тенденції розвитку математики: наука та освіта»

8–9 жовтня 2026 р.

м. Тернопіль

Усі матеріали подаються в авторській редакції

Рекомендовано до друку вченою радою Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка (протокол № 3 від 27 жовтня 2026 року)

Рецензенти:

Роксолана МІЛЯН – Ph. D. в галузі «Середня освіта (Математика)», маркетинг-аналітик, Relish Labs LLC (Home CHEF), США.

Надія ХОМА – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри економічної кібернетики та цифрових технологій Західноукраїнського національного університету.

Ольга ФЕДЧИШИН – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри фізики та методики її навчання Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка.

Сучасні тенденції розвитку математики: наука та освіта: матеріали Міжнародної науково-практичної конференції, м. Тернопіль, 8–9 жовтня 2026 р. Тернопіль: ТНПУ ім. Володимира Гнатюка, 2026.

У збірнику представлено матеріали І Міжнародної науково-практичної конференції «Сучасні тенденції розвитку математики: наука та освіта», у яких висвітлено актуальні результати наукових досліджень у галузі математики, сучасні підходи до викладання математичних дисциплін, а також досвід упровадження цифрових технологій та інноваційних методик навчання. Особливу увагу приділено питанням математичного моделювання, дослідженню диференціальних рівнянь і динамічних систем, формуванню математичної компетентності здобувачів освіти, розвитку критичного й логічного мислення, використанню штучного інтелекту, програмування та STEM-технологій в освітньому процесі.

Матеріали збірника відображають сучасні тенденції розвитку математичної науки й освіти, поєднують теоретичні напрацювання з практичним досвідом науковців і педагогів та окреслюють перспективи подальшого вдосконалення математичної освіти. Видання буде корисним для науковців, викладачів закладів вищої освіти, учителів математики, аспірантів, студентів та всіх, хто цікавиться проблемами розвитку математичної науки, методики навчання математики й упровадження інноваційних освітніх технологій.

Збірник укладено на основі матеріалів, поданих авторами. Відповідальність за наукову обґрунтованість, оригінальність, достовірність і повноту викладених результатів, точність наведених фактів, цитат і статистичних даних, а також за дотримання академічної доброчесності несуть автори публікацій.

РЕДАКЦІЙНИЙ КОМІТЕТ

Ганна ГОМЕНЮК – кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри математики та методики її навчання, голова оргкомітету (м. Тернопіль, Україна).

Іван ГРОД – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математики та методики її навчання (м. Тернопіль, Україна).

Ірина БІЛАНИК – доктор філософії зі спеціальності 111 Математика, доцент кафедри математики та методики її навчання (м. Тернопіль, Україна).

ВЕРСТКА

Оксана ГЕТМАНЮК – асистент кафедри математики та методики її навчання (м. Тернопіль, Україна).

Надія ПРОЦИК – асистент кафедри математики та методики її навчання (м. Тернопіль, Україна).

ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ КОМІТЕТ КОНФЕРЕНЦІЇ:

Борис ЦИГАН – професор математики Північно-Західного університету (USA)

Наталія ДІЛЬНА – науковий співробітник Математичного інституту Словацької академії наук (Slovakia)

Анна ВЕСЕЛОВСЬКА – кандидат фізико-математичних наук, науковий співробітник/академічний радник Факультету математики Школи обчислювальної техніки, інформаційних технологій Технічного університету Мюнхена (Germany)

Оксана ВАСИЛЕНКО – доктор Університету Прикладних Наук Анхальту (Germany)

Ігор ЧЕРЕВКО – доктор фізико-математичних наук, професор, Соросівський доцент, завідувач кафедри математичного моделювання Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

Катерина ГЕСЕЛЕВА – кандидат фізико-математичних наук, декан фізико-математичного факультету Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка

Юрій КОЗУБ – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри математики та інформатики Луганського національного університету імені Тараса Шевченка

Олена БЕСПАРТОЧНА – кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри освітніх, математичних наук та інформатики Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського

Ганна ГОМЕНЮК – кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри математики та методики її навчання Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка

Іван ГРОД – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математики та методики її навчання Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка

Ірина БІЛАНИК – доктор філософії зі спеціальності 111 «Математика», доцент, доцент кафедри математики та методики її навчання Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка

Міжнародна науково-практична конференція «Сучасні тенденції розвитку математики: наука та освіта» відбудеться 8 жовтня в Тернопільському національному педагогічному університеті імені Володимира Гнатюка за адресою 46027, м.Тернопіль, вул М.Кривоноса 2, телефон для довідок 0989234094.

ЗМІСТ

СЕКЦІЯ І АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ СУЧАСНОЇ МАТЕМАТИКИ

КОЛЕКТИВНА ДИНАМІКА ТА БІФУРКАЦІЇ У ФРУСТРОВАНІЙ СИСТЕМІ СПІНІВ

Олександр БУРИЛКО, Анастасія ГРАБОВЕЦЬ 11

УМОВИ ІСНУВАННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНОГО ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ ФЕРМА-ВЕБЕР

Уляна ГУДИМА 11

ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ ПРОЄКЦІЙНО-ІТЕРАТИВНОГО МЕТОДУ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕКОРЕКТНИХ ІНТЕГРО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Катерина ГЕСЕЛЕВА 14

ДРОБОВЕ ЧИСЛЕННЯ ТА ПОНЯТТЯ ДРОБОВОЇ ПОХІДНОЇ

Оксана ГЕТМАНЮК 16

ЗНАКОЗМІННІ ФУНКЦІЇ ЛЯПУНОВА ТА РЕГУЛЯРНІСТЬ ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕНЬ НА МНОГОВИДАХ

Іван ГРОД 19

ЗАСТОСУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ДО АНАЛІЗУ ДАНИХ

Олександр КРАЙЧУК, Сергій КРАЙЧУК 20

ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ МОНО ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ КІНЕТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ .....

Ірина КОВАЛЬСЬКА, Олена РАДЗІЄВСЬКА 21

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В ІНФОРМАЦІЙНО-АНАЛІТИЧНОМУ ЗАБЕЗПЕЧЕННІ ОРГАНІВ ДЕРЖАВНОЇ ВЛАДИ

Ольга МИРОНЕНКО, Тетяна СОЛОВЙОВА 24

ДРОБОВА ПОХІДНА СТЕПЕНЕВОЇ ФУНКЦІЇ: ОБЧИСЛЕННЯ ТА ГРАФІЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ

Оксана ГЕТМАНЮК, Лариса ХОХЛОВА 25

MATHEMATICAL AND STATISTICAL METHODS FOR MODELLING WATER QUALITY IN RIVER-BASIN SYSTEMS

Iryna BILANYK 27

DIGITAL HALFTONING VIA 3D WEIGHTED SIGMA DELTA SCHEMES

Anna VESELOVSKA 29

ULAM–HYERS STABILITY OF AN INITIAL-VALUE PROBLEM FOR A FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH DEVIATING ARGUMENTS

Natalia DILNA 33

СЕКЦІЯ ІІ АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

ОКРЕМІ ШЛЯХИ РОЗВИТКУ КРЕАТИВНОГО МИСЛЕННЯ УЧНІВ СЬОМИХ КЛАСІВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Надія КОРНІЄНКО, Віталій АЧКАН 38

ПІДГОТОВКА МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ ДО ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ УЧНІВ ЗАСОБАМИ КОМПЕТЕНТНІСНИХ ЗАВДАНЬ

Ольга БАРНА 39

ПРЕДМЕТНО-ПРАКТИЧНА ДІЯЛЬНІСТЬ ЯК ОСНОВА ФОРМУВАННЯ БАЗОВИХ МАТЕМАТИЧНИХ УЯВЛЕНЬ УЧНІВ 5-6 КЛАСІВ З ООП

Маріан БИРКА, Олеся ПРИУТЕСКУ 43

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ЯК ЗАСІБ ФОРМУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНО-ГЕОМЕТРИЧНОГО МИСЛЕННЯ УЧНІВ

Володимир БОНДАРЧУК, Ірина БІЛАНИК 45

НАСТУПНІСТЬ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «КООРДИНАТИ ТА ВЕКТОРИ» У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ

Юлія БОТУЗОВА, Сергій ДЕМ'ЯНЕНКО 48

ВИКОРИСТАННЯ ДИНАМІЧНИХ МАТЕМАТИЧНИХ СЕРЕДОВИЩ (GEOGEBRA, GRAN) ЯК ІНСТРУМЕНТУ МОДЕЛЮВАННЯ У STEM-ПРОЄКТАХ

Вікторія ВЛАДИЧУК 50

НАВЧАЛЬНІ ЗАВДАННЯ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ В УМОВАХ ГЕНЕРАТИВНОГО ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Світлана ГАДЕЦЬКА, Наталя СТЯГЛИК, Любов ФІЛАТОВА 53

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ЯК ЗАСІБ АКТИВІЗАЦІЇ ПІЗНАВАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ УЧНІВ

Максим ДЕМИДАСЬ, Мирон ГРОМЯК 56

ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ: КОМПЛЕКСНИЙ ПІДХІД ДО ВИВЧЕННЯ Й ФОРМУВАННЯ СТІЙКИХ ЗНАНЬ

Уляна ГУДИМА, Тетяна ДУМАНСЬКА 59

ГОТОВНІСТЬ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ ДО ВИКОРИСТАННЯ ГЕНЕРАТИВНОГО ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Оксана ЖЕРНОВНИКОВА 62

РЕАЛІЗАЦІЯ КОМПЕТЕНТНІСНОГО ПІДХОДУ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В КОНТЕКСТІ ВИМОГ НОВОЇ УКРАЇНСЬКОЇ ШКОЛИ ЗАСОБАМИ STEM-ОСВІТИ

Христина КЛУБУК 64

ФОРМУВАЛЬНЕ ОЦІНЮВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ СКЛАДОВОЇ У КОМПЛЕКСНИХ STEAM – ПРОЄКТАХ ЯК ІНСТРУМЕНТ ВИМІРЮВАННЯ КЛЮЧОВИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ

Марія КОВАЛЕЦЬ 66

НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ БЕЗ ВІКОВИХ МЕЖ: ОСОБЛИВОСТІ РОБОТИ ЗІ СТУДЕНТАМИ РІЗНОГО ВІКУВ УМОВАХ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ

Ольга КИЄНКО, Михайло ГЕРМАН 68

ФОРМУВАННЯ КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ УЧНІВ ЧЕРЕЗ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕСТАНДАРТНИХ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ У STEM-СЕРЕДОВИЩІ

Марія КОЗАЧЕНКО 69

ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ТА ІНТЕГРАЛА В ПРОЦЕСІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

Зоя КРАВЧЕНКО 72

SMART-ОСВІТА ЯК ЕКОСИСТЕМА: ВІД ЦИФРОВІЗАЦІЇ ПРОФЕСІЙНОЇ ПІДГОТОВКИ ДО ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОЇ ТРАНСФОРМАЦІЇ ОСВІТНЬОГО СЕРЕДОВИЩА

Микола КУДІНОВ 74

КОНТЕКСТНЕ ПОРТФОЛІО ЯК ІНСТРУМЕНТ МОДЕРНІЗАЦІЇ ПРАКТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

Світлана ЛУК'ЯНОВА, Ірина ДРЕМОВА 76

СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ В ЗМІСТОВІЙ ЛІНІЇ «ТРИКУТНИКИ»

Віктор ЛЯШЕНКО, Людмила СКОТНІКОВА 78

ІНТЕГРОВАНЕ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ У БАЗОВІЙ ШКОЛІ

Вікторія ЛУЧКО, Іван ЖИТАРЮК 82

НЕПЕРЕРВНЕ ФОРМУВАННЯ ЛОГІЧНОГО СКЛАДНИКА МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ: ВІД 5 ДО 9 КЛАСУ

Роксолана МІЛЯН, Марта ЮРЧАК 85

ВИКЛИКИ ДЕРЖАВНОГО СТАНДАРТУ ПРОФІЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ ДО НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Євген НЕЛІН 88

ВИКОРИСТАННЯ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ MATHIGONPOLYPAD ДЛЯ ПОДОЛАННЯ ФОРМАЛІЗМУ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ФОРМУЛ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

ДіанаПАВЛОВИЧ, Руслана КОЛІСНИК 90

НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ УЧНІВ 5 КЛАСУ НУШ: АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ ТА СУЧАСТНІ МЕТОДИЧНІ ПІДХОДИ

Ольга ПЕРЕЙМИБІДА 92

ОКРЕМІ ЗАСОБИ ФОРМУВАННЯ КЛЮЧОВИХ КОМПЕТЕТНОСТЕЙ УЧНІВ СТАРШОЇ ШКОЛИ

Констянтин ПОПЕК, Віталій АЧКАН 94

ЗАСТОСУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ГЕЙМІФІКАЦІЇ ТА МІКРОФОРМАТІВ У НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ

Наталія ПРАВІЦКА, Софія ЛЕМІШЕВСЬКА 96

ЗАСОБИ РЕАЛІЗАЦІЇ ПРОФЕСІЙНО-ПРИКЛАДНОЇ СПРЯМОВАНОСТІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ У ПРОФЕСІЙНОМУ КОЛЕДЖІ

Надія ПРОЦИК 97

МАТЕМАТИКА, КУЛЬТУРА ТА ІСТОРІЯ: МІЖДИСЦИПЛІНАРНИЙ ВИМІР МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ

ІринаСІРА 99

ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ФОРМУВАННЯ ПРОСТОРОВОГО МИСЛЕННЯ СТАРШОКЛАСНИКІВ

Валентин СІЧКАР, Катерина ПОЛЬГУН 102

РОЛЬ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ «ІНТЕГРАЦІЯ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ» У ПІДГОТОВЦІ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ СПЕЦІАЛЬНОСТІ СЕРЕДНЯ ОСВІТА (МАТЕМАТИКА)

Лілія СОКОЛЕНКО 104

ІНТЕГРАЦІЯ ГРАФІЧНИХ ПЛАНШЕТІВ ТА ІНТЕРАКТИВНИХ ПЛАТФОРМ (CLEVERMATH) У ПРОЦЕС ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ ПІД ЧАС ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ

Анастасія СОКОЛЮК, Наталія ГЕНСІЦЬКА-АНТОНЮК 108

ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ УЗАГАЛЬНЕННЯ Й СИСТЕМАТИЗАЦІЇ МАТЕМАТИЧНИХ ЗНАНЬ І ДОСВІДУ УЧНІВСТВА НА ЗАКЛЮЧНОМУ ЕТАПІ БАЗОВОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

НінаТАРАСЕНКОВА, Ірина АКУЛЕНКО 112

АЛГОРИТМІЧНЕ МИСЛЕННЯ ЯК КАТАЛІЗАТОР СТАЛОГО РОЗВИТКУ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ В СЕРЕДНІЙ ШКОЛІ

Маріан БИРКА, Олеся ЧЕПИШКО 114

ВИКОРИСТАННЯ НАВЧАЛЬНИХ КВЕСТІВ ДЛЯ ПІДВИЩЕННЯ МОТИВАЦІЇ УЧНІВ 5-6 КЛАСІВ ДО ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИКИ

Лариса ХОХЛОВА, Тетяна КОМАРЕЦЬКА 115

ЗАСТОСУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ЦІКАВОЇ МАТЕМАТИКИ В ПОЗАУРОЧНІЙ РОБОТІ ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

Володимир ЧОРНОКОЖА 117

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО НМТ З МАТЕМАТИКИ: ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ

Олександр ШКОЛЬНИЙ 120

ФОРМУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ УЯВЛЕНЬ ПРО ПЕРЕРІЗИ ФІГУР В УЧНІВ З ОСОБЛИВИМИ ОСВІТНІМИ ПОТРЕБАМИ

Світлана ЯЦЕНКО 122

MATHEMATICAL COMPETENCE AS A FOUNDATION OF DATA LITERACY: CONTINUITY OF DEVELOPMENT FROM SCHOOL TO ADULT LEARNING

Roksolana MILIAN 125

СЕКЦІЯ ІІІ ІННОВАЦІЙНІ ІНСТРУМЕНТИ НАВЧАННЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

ДОСВІД ВПРОВАДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ДЛЯ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ З КУРСУ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»

АндрійАЛІЛУЙКО 130

ІННОВАЦІЙНІ ЦИФРОВІ ІНСТРУМЕНТИ НАВЧАННЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН У ПРОФЕСІЙНІЙ ПІДГОТОВЦІ МАЙБУТНІХ ПЕДАГОГІВ ЄС ТА УКРАЇНИ: КОМПАРАТИВНИЙ АНАЛІЗ

Олена БЕСПАРТОЧНА 131

ВИКОРИСТАННЯ ІНСТРУМЕНТІВ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Андрій БОЙКО 135

ПРИКЛАДНА СПРЯМОВАНІСТЬ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ ЯК ЗАСІБ ПІДВИЩЕННЯ МОТИВАЦІЇ

Марта ВИННИЦЬКА 137

ВИКОРИСТАННЯ ГЕНЕРАТИВНОГО ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ В НАУКОВО-ДОСЛІДНИЦЬКІЙ ДІЯЛЬНОСТІ СТУДЕНТІВ

Галина ГЕНСЕРУК, Сергій МАРТИНЮК 138

ВИКОРИСТАННЯ STEM-ПРОЄКТІВ ПРИ ВИВЧЕННІ ТЕМИ «ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ»

ВікторіяГИКАВА 140

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В КОМПЕТЕНТНІСНО-ОРІЄНТОВАНИХ ЗАВДАННЯХ З АСТРОНОМІЇ ЯК ЗАСІБ ІНТЕГРАЦІЇ ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ

Олександр ГОРОШКЕВИЧ 144

МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ: МЕТОДОЛОГІЯ ІНТЕГРОВАНОГО НАВЧАННЯ ТА ІСТОРИКО-ФІЗИЧНИЙ КОНТЕКСТ

Юрій ДРОГОБИЦЬКИЙ..... 145

ЦИФРОВІ ІНСТРУМЕНТИ ЯК ЗАСІБ ОРГАНІЗАЦІЇ МАТЕМАТИЧНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ УЧНІВ

Юлія ЗАЯЦЬ..... 147

ІНТЕГРАЦІЯ МАТЕМАТИКИ ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ У МІЖДИСЦИПЛІНАРНІЙ ПРОЄКТНІЙ ДІЯЛЬНОСТІ

Оксана КВАС..... 149

ВІД ВІЗУАЛІЗАЦІЇ ДО АНАЛІЗУ: ФОРМУВАННЯ КОМПЕТЕНТНОСТІ РОБОТИ З ДАНИМИ У МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ ІНФОРМАТИКИ

Наталія КИРИЛАХА..... 153

МОДЕЛЮВАННЯ НАВЧАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ІНТЕРАКТИВНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ІНСТРУМЕНТІВ

Оксана КОХАНОВСЬКА..... 157

МЕТОДОЛОГІЧНІ ПРОБЛЕМИ ПРИ ВИВЧЕННІ ГРАФІВ

Юлія КРЕХОВЕЦЬКА, Інна ГРОД..... 159

МАТЕМАТИЧНИЙ ЗМІСТ АСТРОНОМІЧНИХ ЗАВДАНЬ ЯК РЕСУРС ФОРМУВАННЯ ЦИФРОВОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ

Роман КУЛЬЧИЦЬКИЙ..... 160

МАТЕМАТИЧНЕ ОПРАЦЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ЯК ЗАСІБ ІНТЕГРАЦІЇ РЕАЛЬНОГО ТА ВІРТУАЛЬНОГО ФІЗИЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ У ЗАКЛАДАХ ФАХОВОЇ ПЕРЕДВИЩОЇ ОСВІТИ

Дмитро ЛЯЩУК..... 162

ШТУЧНИЙ ІНТЕЛЕКТ У ПРОЄКТУВАННІ ПРОФЕСІЙНО-ОРІЄНТОВАНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ

Богдана МАЙКА, Надія ПРОЦИК..... 164

ВИКОРИСТАННЯ ФРЕЙМВОРКУ GOOGLE CIRQ ЯК ІННОВАЦІЙНОГО ІНСТРУМЕНТУ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ОСНОВ КВАНТОВОЇ КРИПТОГРАФІЇ

Віталій МАСИЧ, Богдан КОСТЮК..... 166

РОЗВИТОК КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ НА УРОКАХ ФІЗИКИ В 9 КЛАСІ НУШ ЧЕРЕЗ РЕАЛІЗАЦІЮ МІЖПРЕДМЕТНИХ ЗВ'ЯЗКІВ З МАТЕМАТИКОЮ

Віктор МАЦЮК..... 170

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЦИФРОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ ЯК ЗАСІБ ФОРМУВАННЯ ПРИРОДНИЧО-НАУКОВОЇ КАРТИНИ СВІТУ ЗДОБУВАЧІВ ФАХОВОЇ ПЕРЕДВИЩОЇ ОСВІТИ

Максим МОХУН..... 171

ШІ-ТЬЮТОР ІЗ «ЗАПОБІЖНИКАМИ» У НАВЧАННІ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН: ВІД ГОТОВОЇ ВІДПОВІДІ ДО КЕРОВАНОГО ДІАЛОГУ

Ростислав МОЦИК, Юрій СМОРЖЕВСЬКИЙ..... 173

ЦИФРОВІ ТЕХНОЛОГІЇ ЯК ІНСТРУМЕНТ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ СТУДЕНТІВ

Тетяна НАБОК, Анна ЗАМША..... 174

ВИКОРИСТАННЯ PYTHON ДЛЯ ФОРМУВАННЯ ПРАКТИЧНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ ПІД ЧАС НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Тетяна ПИЛИПЮК..... 178

ФІЗИЧНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ НАВПАКИ ЯК ІНСТРУМЕНТ ФОРМУВАННЯ ВМІНЬ ПРОЄКТУВАТИ ДОСЛІДНИЦЬКУ УСТАНОВКУ
Наталія РАПІНДА 180
ГЕЙМІФІКАЦІЯ ПРИ НАВЧАННІ ПРОГРАМУВАННЯ
Оксана РОМАНИШИНА..... 183
МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ ЦИФРОВИХ ІНСТРУМЕНТІВ ДЛЯ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ ГРАФІКІВ ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСІВ У НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ
Аліна РОМАШУК 185
ГЕЙМІФІКАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ НА ОСНОВІ ШІ
Олександр РУДЮК, Інна ГРОД 186
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЯК ЗАСІБ ФОРМУВАННЯ STEM-КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ У НАВЧАННІ ФІЗИКИ
Віталій РУЧАКОВСЬКИЙ 188
ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ У МАЙБУТНІХ ІНЖЕНЕРІВ ЗАСОБАМИ СИСТЕМ КОМП'ЮТЕРНОЇ АЛГЕБРИ
Павло СКРИПКА, Олена КОБИЛЬСЬКА 190
ВИВЧЕННЯ АСТРОНОМІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ МОБІЛЬНИХ ЗАСТОСУНКІВ
Емілія СТАДНИК, Сергій МОХУН 193
ВИКОРИСТАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ГЕЙМІФІКАЦІЇ ЯК ІНСТРУМЕНТУ АКТИВІЗАЦІЇ ПІЗНАВАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ ШКОЛЯРІВ У КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ
Андрій БОЙКО, Анастасія ТОМКІВ 196
МЕТОДИЧНА СИСТЕМА ПОБУДОВИ ТА КОРИГУВАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ОСВІТНІХ ТРАЄКТОРІЙ З ФІЗИКИ В НУШ З ВИКОРИСТАННЯМ МОДЕЛЕЙ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ
Ольга ФЕДЧИШИН..... 198
USAGE GENERATIVE ARTIFICIAL INTELLIGENCE FOR PERSONALIZING TASKS
Anastasiia KRYTSKA, Hanna HOMENYUK 201

СЕКЦІЯ І
АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ СУЧАСНОЇ МАТЕМАТИКИ

УДК 517.925

КОЛЕКТИВНА ДИНАМІКА ТА БІФУРКАЦІЇ У ФРУСТРОВАНІЙ СИСТЕМІ СПІНІВ

Олександр БУРИЛКО[1,2], **Анастасія ГРАБОВЕЦЬ**[1]

[1]Інститут математики Національної академії наук України, Київ, Україна
[2]Інститут математики Гумбольдтського університету Берліна, Берлін, Німеччина
burylko@yahoo.co.uk, nastiahrabovets@gmail.com

Робота присвячена градієнтній моделі фазових осциляторів, яка описує колективну динаміку та енергетичний ландшафт систем фрустрованих спінів. Модель належить до класу Курамото і розглядається на кільці з ідентичних осциляторів, де взаємодія найближчих сусідів конкурує з взаємодією наступних сусідів. Циркулянтна структура матриці зв'язку, зумовлена симетрією кільця, слугує зручним аналітичним інструментом для вивчення колективних режимів та їхньої стійкості. Особливу увагу приділено високому рівню мультистабільності системи: через фрустрований зв'язок одночасно існують численні рівноваги — стани синхронізації, обертові хвилі (rotating waves), протифазні стани, а також асиметричні нерухомі точки та цілі многовиди рівноваг. Отримано повну класифікацію стійкості цих станів залежно від параметрів зв'язку; зокрема окремо встановлено умови стійкості повної синхронізації — одного з найважливіших, з фізичної точки зору, колективних режимів, — а також аналогічний результат для випадку взаємодії з трьома сусідами. Зі зміною параметрів зв'язку мультистабільність системи істотно трансформується внаслідок регулярних і вироджених біфуркацій.

Досліджено також вплив сили зв'язку між осциляторами на енергію фрустрованої системи, з особливим акцентом на множинах Максвелла — критичних значеннях параметрів, при яких глобальний мінімум енергії переходить від одного стану до іншого. Знаходження цих множин дозволяє з'ясувати, який фазовий стан є енергетично вигідним для заданого режиму зв'язку. Встановлено, що в термодинамічній границі поведінка системи узгоджується з відомими результатами для спінових ланцюжків за певних крайових умов [1]; це свідчить про придатність розвиненого підходу і для задач оптимізації енергії в системах із загальнішою або складнішою структурою.

Отримані результати намічають природні напрямки подальших досліджень. Оскільки модель належить до ширшого класу систем типу Курамото з довільною циркулянтною структурою зв'язку, логічним продовженням є поширення повної класифікації рівноваг та енергетичного ландшафту на випадок взаємодії з трьома і більше сусідами. Не менш перспективним є перехід від кільцевої геометрії до двовимірної ґратки, що ближче відповідає вихідній фізичній постановці задачі про фрустровані спінові системи.

1. *Cicalese M., Solombrino F.* Frustrated Ferromagnetic Spin Chains: A Variational Approach to Chirality Transitions // J. Nonlinear Sci. 2015. Vol. 25. P. 291--313.

COLLECTIVE DYNAMICS AND BIFURCATIONS IN A FRUSTRATED SPIN SYSTEM

We study a gradient phase-oscillator model of Kuramoto type on a ring, describing the collective dynamics and energy landscape of frustrated spin systems, with competing nearest- and next-nearest-neighbor coupling. Exploiting the circulant structure of the coupling matrix, we obtain a complete stability classification of synchronized states, rotating waves, anti-phase states, and asymmetric equilibria, including explicit stability conditions for full synchronization in both the two- and three-neighbor coupling cases. We further characterize the Maxwell sets marking transitions of the global energy minimizer between collective states, and show that, in the thermodynamic limit, the results agree with known results for frustrated spin chains under specific boundary conditions.

УДК 517.5

УМОВИ ІСНУВАННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНОГО ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ ФЕРМА-ВЕБЕРА

Уляна ГУДИМА

Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Кам’янець-Подільський, Україна
ulag2107@gmail.com

Відомо (див., наприклад, [1]), що класичною задачею теорії розміщення є задача Ферма-Вебера, в якій потрібно в просторі R^n знайти точку, що мінімізує суму зважених відстаней від точок цього простору до кількох його фіксованих точок.

Узагальненням класичної задачі Ферма-Вебера присвячено велику кількість досліджень.

У деяких моделях задачі Ферма-Вебера розміри фіксованих об'єктів розміщення не можна вважати знехтувано малими. У таких задачах необхідно обчислювати не зважену відстань від точок допустимої множини до деяких фіксованих точок, а зважену відстань від точок допустимої множини до декількох фіксованих множин різних лінійних нормованих просторів.

Тому актуальним є дослідження задачі мінімізації суми зважених відстаней від точок допустимої множини до кількох фіксованих підмножин деяких лінійних нормованих просторів, яка розглядається в цій роботі та є узагальненою версією задачі Ферма-Вебера.

Постановка задачі та деякі її частинні випадки

Нехай X -- лінійний простір над полем дійсних чисел (далі -- лінійний простір), а X_i, $i = \overline{1,m}$, -- лінійні простори, які є підпросторами лінійного простору X, $X_0 = \bigcap_{i=1}^{m} X_i$, $V \subset X_0$, $A_i \subset X_i$, $i = \overline{1,m}$; c_i, $i = \overline{1,m}$, -- ненульові дійсні числа; $(X_i, \|\cdot\|_i)$, $i = \overline{1,m}$, -- лінійні нормовані простори.

Розглядається задача знаходження величини

$$E_V(A_i, i = \overline{1,m}) = \inf_{x \in V} \sum_{i=1}^{m} c_i \inf_{y \in A_i} \|x - y\|_i. \tag{1}$$

Якщо існує елемент $x^* \in V$ такий, що

$$E_V(A_i, i = \overline{1,m}) = \sum_{i=1}^{m} c_i \inf_{y \in A_i} \|x^* - y\|_i,$$

то цей елемент називатимемо екстремальним для задачі знаходження величини (1).

Надалі позначатимемо $I = \{1, \dots, m\}$, $I_+ = \{i \in I : c_i > 0\}$, $I_- = \{i \in I : c_i < 0\}$.

За умов: $X_i = X = V$, $\|\cdot\|_i = \|\cdot\|$, $i = \overline{1,m}$, $I_+ = I$, $A_i = \{a_i\}$, де $a_i \in X$, $i = \overline{1,m}$, задача відшукання величини (1) є задачею Ферма-Вебера в лінійному нормованому просторі.

Якщо ж $X_i = R^n = V$, $\|\cdot\|_i = \|\cdot\|$, $i = \overline{1,m}$, де $\|\cdot\|$ -- евклідова норма на R^n, $I_+ = I$, $A_i = \{a_i\}$, де $a_i \in R^n$, $i = \overline{1,m}$, то задача відшукання величини (1) стає класичною задачею Ферма-Вебера.

Попередні відомості

Позначимо через P декартів (прямий) добуток лінійних просторів $X_1, \dots, X_m$, тобто

$$P = X_1 \times \cdots \times X_m = \{(x_1, \dots, x_m) : x_i \in X_i,\ i = \overline{1,m}\}.$$

Легко бачити, що якщо на множині P операції додавання та множення на дійсні числа визначити таким чином:

$$(\forall\, x = (x_1, \dots, x_m),\ y = (y_1, \dots, y_m) \in P) \quad x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_m + y_m),$$

$$(\forall\, \alpha \in R,\ x = (x_1, \dots, x_m) \in P) \quad \alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_m),$$

то P стає лінійним простором над полем дійсних чисел.

Твердження 1. *Якщо для будь-якого елемента $(x_1, \dots, x_m)$ лінійного простору P покласти*

$$\|(x_1, \dots, x_m)\|_P = \sum_{i=1}^{m} |c_i| \|x_i\|_i,$$

то відповідність $(x_1, \dots, x_m) \in P \to \|(x_1, \dots, x_m)\|_P = \sum_{i=1}^{m} |c_i| \|x_i\|_i$ є нормою, визначеною на P, і отже, $(P, \|\cdot\|_P)$ є лінійним нормованим простором.

Основні результати

Позначимо через $D = \{(x, \dots, x) : x \in V\}$, $A = A_1 \times \cdots \times A_m$,

$$\Phi(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} c_i \inf_{y \in A_i} \|x_i - y\|_i, (x_1, \dots, x_m) \in P.$$

Твердження 2. *Функція $\Phi(x_1, \dots, x_m)$, $(x_1, \dots, x_m) \in P$, є ліпшицевою з константою 1 та неперервною на лінійному нормованому просторі $(P, \|\cdot\|_P)$.*

Розглянемо в лінійному нормованому просторі $(P, \|\cdot\|_P)$ задачу відшукання величини

$$\inf_{(x_1,\dots,x_m)\in D} \Phi(x_1,\dots,x_m). \tag{2}$$

Теорема 1. *Має місце рівність*

$$E_V(A_i, i=\overline{1,m}) = \inf_{(x_1,\dots,x_m)\in D} \Phi(x_1,\dots,x_m). \tag{3}$$

Для того щоб елемент $x^* \in V$ був екстремальним елементом для задачі знаходження величини (1), необхідно і достатньо, щоб елемент $\underbrace{(x^*,\dots,x^*)}_{m \text{ разів}}$ був екстремальним елементом для задачі знаходження величини (2).

З теореми 1 випливає, що задача знаходження величини (1) еквівалентна задачі знаходження величини (2) у лінійному нормованому просторі $(P, \|\cdot\|_P)$.

Теорема 2. *Якщо в задачі знаходження величини (1) $c_i > 0$, $i = \overline{1,m}$, та $D - A$ є замкненою локально компактною множиною лінійного простору $(P, \|\cdot\|_P)$, то існує екстремальний елемент x^* для задачі відшукання величини (1) такий, що для кожного $i \in \{1,\dots,m\}$ існує екстремальний елемент y_i^* для задачі відшукання величини $\inf_{y\in A_i} \|x^* - y\|_i$ та виконується рівність*

$$E_V(A_i, i=\overline{1,m}) = \sum_{i=1}^{m} c_i \|x^* - y_i^*\|_i.$$

Теорема 3. *Якщо в задачі відшукання величини (1) $c_i > 0$, $i = \overline{1,m}$, D є замкненою локально компактною множиною лінійного нормованого простору $(P, \|\cdot\|_P)$, а для кожного $i \in \{1,\dots,m\}$ A_i є обмеженою множиною лінійного нормованого простору $(X_i, \|\cdot\|_i)$, то екстремальний елемент для задачі відшукання величини (1) існує.*

Теорема 4. *Нехай в задачі відшукання величини (1) $I_- \neq \varnothing$; норми $\|\cdot\|_i$, $i = \overline{1,m}$, попарно еквівалентні на V і, отже, для кожного $j \in \{1,\dots,m\}$ існують додатні константи α_{ij}, β_{ij}, $i = \overline{1,m}$, такі, що*

$$\alpha_{ij}\|x\|_j \le \|x\|_i \le \beta_{ij}\|x\|_j, i = \overline{1,m}, \quad \text{для всіх } x \in V.$$

Якщо множини A_i, $i \in I_+$, є обмеженими множинами лінійних нормованих просторів $(X_i, \|\cdot\|_i)$, $i \in I_+$, відповідно, D -- замкнена локально компактна множина лінійного нормованого простору $(P, \|\cdot\|_P)$ та існує $j_0 \in \{1,\dots,m\}$, для якого

$$\sum_{i\in I_+} \alpha_{ij_0} c_i - \sum_{i\in I_-} \beta_{ij_0}|c_i| > 0,$$

то екстремальний елемент для задачі відшукання величини (1) існує.

Теорема 5. *Нехай в задачі відшукання величини (1) $I_- \neq \varnothing$; норми $\|\cdot\|_i$, $i = \overline{1,m}$, попарно еквівалентні на V і, отже, для кожного $j \in \{1,\dots,m\}$ існують додатні константи α_{ij}, β_{ij}, $i = \overline{1,m}$, такі, що*

$$\alpha_{ij}\|x\|_j \le \|x\|_i \le \beta_{ij}\|x\|_j, i = \overline{1,m}, \quad \text{для всіх } x \in V.$$

Якщо множини A_i, $i \in I_-$, є обмеженими множинами лінійних нормованих просторів $(X_i, \|\cdot\|_i)$, $i \in I_-$, відповідно, D є необмеженою множиною простору $(P, \|\cdot\|_P)$ та існує $j_0 \in \{1,\dots,m\}$, для якого

$$\sum_{i\in I_+} \beta_{ij_0} c_i - \sum_{i\in I_-} \alpha_{ij_0}|c_i| < 0,$$

то $E_V(A_i, i = \overline{1,m}) = -\infty$; отже, екстремального елемента для задачі знаходження величини (1) не існує.

В роботі встановлено низку наслідків з теорем 2-5, які представляють також самостійний інтерес.

Основні результати роботи узагальнюють на випадок задачі відшукання величини (1) відповідні результати, встановлені у праці [1] для задачі, яка отримується із задачі (1) за умов: $X_i = R^n$, $\|\cdot\|_i = \|\cdot\|$, $i = \overline{1,m}$, де $\|\cdot\|$ -- евклідова норма на R^n, A_i, $i = \overline{1,m}$, -- замкнені опуклі множини простору R^n, V -- непорожня замкнена опукла множинна простору R^n.

1. N.T. An, N.M. Nam, N.D. Yen. A D.C. algorithm via convex analysis approach for solving a location problem involving sets. *J. Convex Anal.* 23 (1) (2016), 77--101. Zbl 1342.49049.

EXISTENCE CONDITIONS FOR AN EXTREMAL ELEMENT IN THE GENERALIZED FERMA–WEBER PROBLEM

The paper investigates the problem of minimizing the sum of weighted distances from points of a feasible set to several fixed subsets of certain linear normed spaces. This problem constitutes a generalization of the Fermat–Weber problem and consists in determining the value:

$$E_V(A_i, i=\overline{1,m}) = \inf_{x\in V} \sum_{i=1}^{m} c_i \inf_{y\in A_i} \|x-y\|_i, \tag{1}$$

where X is a linear space over the field of real numbers (hereinafter, a linear space), while X_i, $i=\overline{1,m}$, are linear spaces that are subspaces of the linear space X; $X_0 = \bigcap_{i=1}^{m} X_i$, $V \subset X_0$, $A_i \subset X_i$, $i=\overline{1,m}$; c_i, $i=\overline{1,m}$, are nonzero real numbers; $(X_i, \|\cdot\|_i)$, $i=\overline{1,m}$, are linear normed spaces.

If there exists an element $x^* \in V$ such that

$$E_V(A_i, i=\overline{1,m}) = \sum_{i=1}^{m} c_i \inf_{y\in A_i} \|x^*-y\|_i,$$

then this element will be referred to as an extremal element for the problem of determining the value in (1).

The aim of this paper is to establish conditions for the existence of an extremal element for the problem of determining the value in (1).

In investigating the problem under consideration, methods of functional analysis, convex analysis, and the theory of extremal problems are employed.

Theorem 2. Suppose that, in the problem of determining the value in (1), $c_i > 0$, $i=\overline{1,m}$, and $D - A$ are closed locally compact subset of the linear space $(P, \|\cdot\|_P)$. Then there exists an extremal element x^* for the problem of determining the value in (1) such that, for every $i \in \{1,\dots,m\}$, there exists an extremal element y_i^* for the problem of determining the value $\inf_{y\in A_i} \|x^*-y\|_i$, and the following equality holds:

$$E_V(A_i, i=\overline{1,m}) = \sum_{i=1}^{m} c_i \|x^*-y_i^*\|_i.$$

Theorem 3. Suppose that, in the problem of determining the value in (1), $c_i > 0$, $i=\overline{1,m}$, and D are closed locally compact subset of a linear normed space $(P, \|\cdot\|_P)$, and, for every $i \in \{1,\dots,m\}$ A_i is a bounded subset of the linear normed space $(X_i, \|\cdot\|_i)$. Then an extremal element for the problem of determining the value in (1) exists.

Theorem 4. Suppose that, in the problem of determining the value in (1), $I_- \neq \varnothing$; and the norms $\|\cdot\|_i$, $i=\overline{1,m}$ are pairwise equivalent on V, thus, for every $j \in \{1,\dots,m\}$ there exist positive constants α_{ij}, β_{ij}, $i=\overline{1,m}$, such that

$$\alpha_{ij}\|x\|_j \le \|x\|_i \le \beta_{ij}\|x\|_j, i=\overline{1,m}, \quad \textit{for all } x \in V.$$

If the sets A_i, $i \in I_+$, are bounded subsets of the linear normed spaces $(X_i, \|\cdot\|_i)$, $i \in I_+$ respectively, D is a closed locally compact subset of the linear normed space $(P, \|\cdot\|_P)$, and there exists $j_0 \in \{1,\dots,m\}$ such that

$$\sum_{i\in I_+} \alpha_{ij_0} c_i - \sum_{i\in I_-} \beta_{ij_0} |c_i| > 0$$

then an extremal element for the problem of determining the value in (1) exists.

Theorem 5. Suppose that, in the problem of determining the value in (1), $I_- \neq \varnothing$; and the norms $\|\cdot\|_i$, $i=\overline{1,m}$ are pairwise equivalent on V, thus, for every $j \in \{1,\dots,m\}$ there exist positive constants α_{ij}, β_{ij}, $i=\overline{1,m}$, such that

$$\alpha_{ij}\|x\|_j \le \|x\|_i \le \beta_{ij}\|x\|_j, i=\overline{1,m}, \quad \textit{for all } x \in V.$$

If the sets A_i, $i \in I_-$, are bounded subsets of the linear normed spaces $(X_i, \|\cdot\|_i)$, $i \in I_-$, respectively, D is an unbounded subset of the space $(P, \|\cdot\|_P)$, and there exists $j_0 \in \{1,\dots,m\}$ such that

$$\sum_{i\in I_+} \beta_{ij_0} c_i - \sum_{i\in I_-} \alpha_{ij_0} |c_i| < 0,$$

then $E_V(A_i, i=\overline{1,m}) = -\infty$, consequently an extremal element for the problem of determining the value in (1) does not exist.

УДК 517.96

ОСОБЛИВОСТІ ЗАСТОСУВАННЯ ПРОЄКЦІЙНО-ІТЕРАТИВНОГО МЕТОДУ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕКОРЕКТНИХ ІНТЕГРО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Катерина ГЕСЕЛЕВА

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Кам'янець-Подільський, Україна
heseleva@kpnu.edu.ua

Розв'язування некоректних задач є важливим напрямом сучасної обчислювальної математики, адже інтегро-функціональні рівняння першого роду моделюють складні динамічні системи із запізненням. Теоретичні основи проєкційно-ітеративних методів для операторних рівнянь закладено у фундаментальних працях Лучки А. Ю. [1]. Чисельні підходи, зокрема сплайн-колокацію для рівнянь із відхиленням аргументу, висвітлено H. Brunner [3], а загальну теорію регуляризації некоректних задач обгрунтовано H. W. Engl, M. Hanke та A. Neubauer [2]. Проте специфіка застосування проєкційно-ітеративних методів до некоректних рівнянь з оператором деформації

аргументу залишається недостатньо вивченою. Актуальність дослідження полягає у розробці регулярних проєкційно-ітеративних схем, які долають надмірну зумовленість дискретизованих матриць та забезпечують стійкість обчислювального процесу за наявності похибок у вихідних даних.

Нехай $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ – скінченний проміжок. Розглянемо лінійне інтегро-функціональне рівняння першого роду з відхиленням аргументу:

$$(Ax)(t) \equiv \int_a^b K(t,s)\,x(\tau(s))\,ds = f(t), \quad t \in I,$$

вважаємо, що: $x(t) \in L_2(I), f(t) \in L_2(I)$ – простір розв'язків та правих частин; $K(t,s) \in L_2(I \times I)$ – ядро рівняння, що забезпечує компактність оператора $A : L_2(I) \to L_2(I)$; $\tau : I \to I$ – функція деформації аргументу, яка є строго зростаючою гладкою функцією ($\tau'(s) > 0$), яка здійснює запізнення або масштабування аргументу, причому $J = \tau(I) \subseteq I$.

Оскільки оператор A є компактним у нескінченновимірному Гільбертовому просторі $L_2(I)$, обернений оператор A^{-1} не є обмеженим, а задача є некоректною за Адамаром.

Побудуємо спряжений оператор A^*. Для побудови ітераційних схем необхідне явне вираження спряженого оператора A^*. За допомогою заміни змінних $u = \tau(s)$ та властивостей скалярного добутку в $L_2(I)$, оператор A^* має вигляд

$$(A^*y)(u) = \frac{1}{\tau'(\tau^{-1}(u))}\chi_J(u)\int_a^b K(t,\tau^{-1}(u))\,y(t)\,dt,$$

де τ^{-1} – обернена функція до τ, а $\chi_J(u)$ – індикаторна функція множини значень $J = \tau(I)$. Наявність вагового множника $\frac{1}{\tau'(\tau^{-1}(u))}$ суттєво змінює спектральний радіус оператора A^*A, що вимагає коригування кроку ітерацій.

Опишемо модель збурених даних та умови джерела. Замість точної правої частини $f(t)$ задамо наближені дані $f_\delta(t) \in L_2(I)$ такі, що

$$\|f - f_\delta\|_{L_2} \le \delta, \quad \delta > 0.$$

Передбачається, що для точного розв'язку $x^\dagger$ виконується умова джерелоподібності (source condition) з параметром гладкості $\nu > 0$:

$$x^\dagger \in \mathrm{Ran}\left((A^*A)^\nu\right), \quad \text{тобто} \quad x^\dagger = (A^*A)^\nu v, \quad \|v\|_{L_2} \le M.$$

Розглянемо регулярну схему проєкційно-ітеративного методу. Дискретизація здійснюється шляхом вибору послідовності n-вимірних підпросторів $X_n = \mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \subset L_2(I)$ (наприклад, нормованих B-сплайнів степеня m) та ортогональних операторів проєктування $P_n : L_2(I) \to X_n$.

Наближений розв'язок шукаємо у вигляді $x_k^{(n)} = \sum_{j=1}^n c_j^{(k)}\varphi_j(t) \in X_n$ за ітераційною схемою з внутрішньою регуляризацією

$$x_{k+1}^{(n)} = x_k^{(n)} - \gamma P_n A^*\left(Ax_k^{(n)} - f_\delta\right) - \alpha_n P_n x_k^{(n)}, \quad x_0^{(n)} = 0,$$

де $\gamma \in \left((0, \frac{2}{\|A\|^2}\right)$ — параметр ітераційного кроку; $\alpha_n > 0$ — параметр дискретизаційної регуляризації ($\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$).

В операторній формі для коефіцієнтів

$$C^{(k)} = (c_1^{(k)}, \dots, c_n^{(k)})^T$$

цей процес приведе до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь на кожному ітераційному кроці.

$$MC^{(k+1)} = \left((1 - \gamma\alpha_n)M - \gamma G\right)C^{(k)} + \gamma F_\delta,$$

де $M_{ij} = \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle$ — матриця мас, $G_{ij} = \langle A\varphi_j, A\varphi_i \rangle$ – матриця Грама, $F_{\delta,i} = \langle f_\delta, A\varphi_i \rangle$.

Можна переконатися, що кількість ітерацій скінченна. Нехай $A_n = AP_n$ – дискретизований оператор, а $A_n^* = P_n A^*$ – його спряжений у підпросторі X_n. Ітераційна послідовність за наявності похибки у вихідних даних f_δ записується у формі

$$x_{k+1}^{(n)} = \left((1 - \gamma\alpha_n)I - \gamma A_n^* A_n\right)x_k^{(n)} + \gamma A_n^* f_\delta, \quad x_0^{(n)} = 0.$$

Явний розв'язок на k-му кроці виражається через операторний поліном

$$x_k^{(n)} = g_k(A_n^* A_n) A_n^* f_\delta, \quad \text{де} \quad g_k(\lambda) = \frac{1-(1-\gamma\alpha_n-\gamma\lambda)^k}{\alpha_n+\lambda}.$$

Позначимо вектор неузгодженості на k-му кроці через $r_k = Ax_k^{(n)} - f_\delta$. Використовуючи тотожність $A_n g_k(A_n^* A_n) A_n^* = A_n A_n^* g_k(A_n A_n^*)$, вектор неузгодженості набуде вигляду

$$r_k = -\rho_k(A_n A_n^*) f_\delta, \quad \text{де} \quad \rho_k(\lambda) = 1 - \lambda g_k(\lambda) = \frac{\alpha_n + \lambda(1-\gamma\alpha_n-\gamma\lambda)^k}{\alpha_n+\lambda}.$$

У результаті дослідження розроблено та обґрунтовано проєкційно-ітеративну схему розв'язання некоректних інтегро-функціональних рівнянь першого роду з відхиленням аргументу. Уточнено постановку задачі для лінійного інтегро-функціонального рівняння першого роду з відхиленням аргументу $\tau(s)$. Показано, що компактність інтегрального оператора $A : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ зумовлює необмеженість оберненого оператора A^{-1}, що робить задачу фундаментально некоректною. Наявність відхилення $\tau(s)$ додатково ускладнює аналіз, оскільки переносить аргумент шуканої функції за межі стандартного симетричного ядра. Побудовано спряжений оператора A^* у просторі L_2. Доведено, що через наявність функціонального відхилення $\tau(s)$ у виразі для A^* виникає ваговий множник $\frac{1}{\tau'(\tau^{-1}(u))}$ та індикаторна функція $\chi_J(u)$. Це демонструє, що спектральна структура самоспряженого оператора A^*A істотно відрізняється від класичних рівнянь Фредгольма I роду, що вимагає специфічного вибору ітераційного параметру γ. Показано, що при збільшенні розмірності проєкційного простору число обумовленості дискретизованої матриці G прямує до безмежності, що призводить до значного зростання похибки за наявності збурень у правий частині.

1. *Лучка А. Ю.* Проекційно-ітеративні методи розвязування операторних рівнянь. Київ : Наукова думка, 1980. 264 с.
2. *Engl H. W., Hanke M., Neubauer A.(2000)* Regularization of Inverse Problems. Dordrecht; Boston : Kluwer Academic Publishers, 2000. 343 p.
3. *Brunner, H.(2004)* Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Differential Equations. Cambridge : Cambridge University Press, 2004. 224 p.

FEATURES OF THE APPLICATION OF PROJECTION-ITERATIVE METHOD TO THE SOLUTION OF INCORRECT INTEGRO-FUNCTIONAL EQUATIONS

Solving ill-posed problems is a significant area of modern computational mathematics, as integro-functional equations of the first kind model complex dynamic systems with time delays. However, the specifics of applying projection-iterative methods to ill-posed equations involving an argument deformation operator remain insufficiently explored. The relevance of this research lies in the development of regularized projection-iterative schemes that overcome the ill-conditioning of discretized matrices and ensure the stability of the computational process in the presence of errors in the input data. As a result of the research, a projection-iterative scheme has been developed and substantiated for solving ill-posed integro-functional equations of the first kind with a deviated argument. The problem statement for a linear integro-functional equation of the first kind with a deviated argument has been refined. The computational risks of direct discretization have been analyzed.

УДК 517.2

ДРОБОВЕ ЧИСЛЕННЯ ТА ПОНЯТТЯ ДРОБОВОЇ ПОХІДНОЇ

Оксана ГЕТМАНЮК

Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, Тернопіль, Україна
getmanuyk_oksana@tnpu.edu.ua

Зі шкільного курсу математики ми знаємо, що похідна показує швидкість зміни величини. Похідну можна взяти один раз, двічі, тричі: перша похідна від шляху – це швидкість, друга – прискорення. Порядок похідної завжди був цілим числом. Проте ще наприкінці XVII століття математики поставили незвичне питання: чи можна взяти похідну «пів разу»? Пошук відповіді на нього дав початок окремому розділу математичного аналізу – дробовому численню, яке вивчає похідні та інтеграли довільного, не обов'язково цілого порядку [3, 4]. Сьогодні ця теорія, що має понад трьохсотлітню історію, перетворилася з математичної цікавинки на сучасний інструмент моделювання реальних процесів у фізиці, техніці, біології та економіці, тому ознайомлення з нею є актуальним і для майбутніх учителів математики.

Історія дробових похідних почалася майже одночасно з історією звичайного диференціального числення. У 1695 році французький математик Г. Лопіталь у листі до Г. В. Лейбніца запитав, який зміст може мати похідна порядку $\frac{1}{2}$. Лейбніц відповів, що це схоже на парадокс, але колись із нього будуть виведені корисні наслідки [2, 5]. Він виявився правий, хоча чекати довелося понад століття.

Згодом до цієї ідеї поверталися найвідоміші математики. Л. Ейлер помітив, що формулу похідної степеневої функції можна поширити на нецілі порядки, якщо замість факторіала використати введену ним гамма-функцію. Цією темою займалися також Ж. Лагранж і П. Лаплас. Норвезький математик Н. Абель першим застосував дробове інтегрування до реальної механічної задачі – пошуку кривої, по якій тіло скочується до найнижчої точки за один і той самий час незалежно від того, звідки його відпустили. У XIX столітті Ж. Ліувілль і Б. Ріман побудували першу цілісну, логічно впорядковану теорію дробових похідних. Приблизно тоді ж А. Грюнвальд і О. Летніков запропонували інший підхід, заснований на скінченних різницях, а в XX столітті італійський учений М. Капуто дав означення, найзручніше для інженерних і фізичних задач [2, 5].

Щоб зрозуміти саму ідею дробової похідної, згадаймо, як ми отримуємо звичайні похідні. Якщо взяти похідну двічі, отримаємо другу похідну. Логічно припустити, що два кроки по «пів похідної» мають дати одну звичайну похідну. Саме так і влаштована похідна порядку $\frac{1}{2}$: застосована двічі, вона дає звичайну першу похідну. Розглянемо найпростішу функцію $y = x$. Її звичайна похідна дорівнює одиниці, а «половинна» похідна дорівнює $2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$. Якщо ще раз узяти від цього виразу половинну похідну, знову отримаємо одиницю. Отже, дробова похідна – це проміжний крок між самою функцією та її звичайною похідною. Образно похідні можна порівняти зі сходами: функція – це підлога, перша похідна – перша сходинка, друга похідна – друга сходинка, а дробова похідна дає змогу стати між сходинками.

Звідки ж беруться точні означення дробових похідних? Усі вони виникли з однієї ідеї: взяти відому формулу для похідної чи інтеграла цілого порядку n і записати її так, щоб замість n можна було підставити будь-яке число α. Ключову роль тут відіграє гамма-функція Ейлера $\Gamma(x)$. Вона узагальнює факторіал: для натуральних чисел $\Gamma(n+1) = n!$, але, на відміну від факторіала, визначена і для дробових чисел, наприклад $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Підхід Ейлера. Найперше узагальнення з'явилося зі звичайної формули для похідної порядку n від степеневої функції:

$$\frac{d^n}{dx^n} x^k = \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n}$$

Л. Ейлер (1730 р.), а згодом С. Лакруа (1819 р.) замінили факторіали гамма-функцією і отримали формулу, яка має зміст для будь-якого порядку α [3]:

$$D^\alpha x^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} x^{k-\alpha}$$

Саме за цією формулою виходить наведений вище результат: при $k = 1$ і $\alpha = 1/2$ маємо

$$\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} \cdot x^{1/2} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}.$$

Недолік підходу в тому, що він працює лише для степеневих функцій.

Означення Рімана–Ліувілля. Щоб охопити довільні функції, Ж. Ліувілль (1832 р.) і Б. Ріман (робота 1847 р., опублікована 1876 р.) почали не з похідної, а з інтеграла. Відомо, що n разів поспіль проінтегрувати функцію можна однією формулою Коші:

$$I^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\, dt$$

Якщо замінити $(n-1)!$ на $\Gamma(\alpha)$, отримаємо дробовий інтеграл Рімана–Ліувілля порядку α [3, 4]:

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt, \quad \alpha > 0$$

Дробову похідну тепер означають так: спочатку функцію дробово інтегрують до порядку $n - \alpha$, а потім звичайно диференціюють n разів, де n – найближче ціле число, більше за α. Наприклад, щоб отримати похідну порядку $1/2$, функцію спершу «пів разу» інтегрують, а потім один раз диференціюють. У загальному вигляді похідна Рімана–Ліувілля записується так:

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\, dt, \quad n-1 < \alpha < n$$

Означення Рімана–Ліувілля зручне для теорії, але незручне на практиці: у диференціальних рівняннях з такою похідною початкові умови доводиться задавати через дробові інтеграли, фізичний зміст яких неясний. Італійський геофізик М. Капуто (1967 р.), вивчаючи загасання коливань у пружних середовищах, запропонував змінити порядок дій: спочатку звичайно диференціювати, а потім дробово інтегрувати [1,4]:

$$ {}_a^C D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}}\, dt, \quad n-1 < \alpha < n $$

Завдяки цьому для рівнянь з похідною Капуто початкові умови задаються так само, як у класичних рівняннях: значенням функції та її звичайних похідних. Крім того, похідна Капуто від сталої, як і звичайна похідна, дорівнює нулю.

Інший шлях запропонували А. Грюнвальд (1867 р.) і О. Летніков (1868 р.) [5]. Вони виходили із самого означення похідної як границі відношення приростів. Якщо застосувати це означення n разів, отримаємо формулу через скінченні різниці з біноміальними коефіцієнтами:

$$ f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x-kh) $$

Біноміальні коефіцієнти також можна записати через гамма-функцію, тому n замінили на α. Сума при цьому стає нескінченною, бо для дробового α коефіцієнти не обриваються:

$$ D^\alpha f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x-kh), $$

$$ \binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k!\,\Gamma(\alpha-k+1)}. $$

Це означення зручне для наближених обчислень: якщо взяти малий крок h, сума дає наближене значення дробової похідної.

Отже, єдиного означення дробової похідної не існує. Похідна Рімана–Ліувілля зручна для побудови теорії, похідна Капуто – для розв'язування прикладних задач, а підхід Грюнвальда–Летнікова – для наближених обчислень. Для простих функцій ці означення часто дають однаковий результат, проте загалом вони відрізняються [2,4]. Є й несподівані властивості: наприклад, за означенням Рімана–Ліувілля похідна від сталої не дорівнює нулю, хоча у звичайному численні вона завжди нульова.

Головна особливість дробової похідної полягає в тому, що вона має «пам'ять». Звичайна похідна враховує лише те, що відбувається в конкретній точці: щоб знайти швидкість автомобіля зараз, не потрібно знати, де він був годину тому. Дробова похідна враховує всю попередню історію функції: недавні події впливають сильніше, давні – слабше, але повністю вони не забуваються. У природі й техніці багато процесів залежать від свого минулого: матеріал «пам'ятає», як його деформували, ліки поступово накопичуються в організмі, ціни на ринку залежать від попередніх коливань. Звичайні похідні описують такі процеси складно, а дробові – природно.

Саме тому дробові похідні знайшли широке застосування. У механіці ними описують поведінку гуми, полімерів, живих тканин, які поводяться водночас і як пружина, і як в'язка рідина [6]. У фізиці їх використовують для опису аномальної дифузії – поширення речовини в неоднорідному середовищі, наприклад у пористих породах чи клітинах. В інженерії на основі дробових похідних створюють регулятори для систем автоматичного керування, обробляють сигнали та зображення [4]. Їх також застосовують у біології для моделювання росту популяцій, в економіці для аналізу фінансових процесів, а останніми роками – і в машинному навчанні для прогнозування.

Таким чином, апарат дробових похідних став потужним інструментом сучасної науки. Дробова похідна природно узагальнює знайоме поняття похідної: дає змогу «ставати між сходинками» та враховувати минуле процесу. Саме тому її застосовують у низці моделей процесів із пам'яттю, де теперішній стан залежить від того, що відбувалося раніше, – від механіки й медицини до економіки та штучного інтелекту. Ознайомлення студентів з елементами дробового числення розширює їхнє уявлення про поняття похідної, показує живий розвиток математики та її зв'язок із практикою.

1. *Caputo M.* Linear Models of Dissipation whose Q is almost Frequency Independent – II // Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society. 1967. Vol. 13, no. 5. P. 529–539. DOI: https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x.

2. *De Oliveira E. C., Tenreiro Machado J. A.* A Review of Definitions for Fractional Derivatives and Integral // Mathematical Problems in Engineering. 2014. Vol. 2014. Article ID 238459. DOI: https://doi.org/10.1155/2014/238459.

3. *Oldham K. B., Spanier J.* The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order. New York: Academic Press, 1974. 234 p.

4. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications. San Diego: Academic Press, 1999. 340 p.

5. *Ross B.* A Brief History and Exposition of the Fundamental Theory of Fractional Calculus // Fractional Calculus and Its Applications. Berlin: Springer, 1975. P. 1–36. DOI: https://doi.org/10.1007/BFb0067096.

6. *Stinga P. R.* Fractional Derivatives: Fourier, Elephants, Memory Effects, Viscoelastic Materials, and Anomalous Diffusions // Notices of the American Mathematical Society. 2023. Vol. 70, no. 4. P. 576–587. DOI: https://doi.org/10.1090/noti2663.

FRACTIONAL CALCULUS AND THE CONCEPT OF A FRACTIONAL DERIVATIVE

The purpose of the work is to present the concept of a fractional derivative, the history of its origin and its main applications in a form accessible to future mathematics teachers. The methods used are historical and logical analysis of mathematical sources and a comparison of the main approaches to defining fractional derivatives. The paper traces the development of the idea from the letter of G. W. Leibniz to G. de l'Hôpital (1695) to the works of L. Euler, N. H. Abel, J. Liouville, B. Riemann, A. K. Grünwald, A. V. Letnikov and M. Caputo. It is shown that the Riemann–Liouville, Caputo and Grünwald–Letnikov definitions arise from generalizing familiar integer-order formulas by means of the Euler gamma function. The key property of fractional derivatives, their "memory" of the previous history of a process, is explained, and their applications in mechanics, physics, engineering, biology and economics are considered.

УДК 517.938

ЗНАКОЗМІННІ ФУНКЦІЇ ЛЯПУНОВА ТА РЕГУЛЯРНІСТЬ ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕНЬ НА МНОГОВИДАХ

Іван ГРОД

Тернопільський національний педагогічний університет ім.Володимира Гнатюка, м.Тернопіль, Україна
igrod@ukr.net

Одним з важливих питань в якісній теорії диференціальних рівнянь є знаходження умов збереження інваріантних многовидів при збуреннях. Дослідження регулярності лінійних розширень динамічних систем на многовидах є важливим для вивчення їхньої асимптотичної поведінки та існування обмежених інваріантних многовидів [1]. Особливий інтерес становить конструктивна побудова знакозмінних функцій Ляпунова, які дають змогу встановлювати регулярність систем у випадках, коли класичні додатно визначені функції Ляпунова не застосовуються. Це дає можливість отримати нові достатні умови регулярності та побудови функцій Гріна–Самойленка для широких класів динамічних систем, наприклад [2].

У доповіді розглядаються системи диференціальних рівнянь виду

$$\frac{d\psi}{dt} = f(\psi), \frac{dy}{dy} = A(\psi)y, \tag{1}$$

де $\psi \in R^m, y \in R^n$, $f(\psi)$–вектор-функція, визначена, неперервна на R^m і локально задовольняє умову Ліпшиця, $A(\psi)$ - $n \times n$–вимірна матриця, елементами якої є функції, які визначені,неперервні і обмежені на R^m.

Theorem 1. *Нехай система (1) така, що знайдуться симетричні, $n \times n$-вимірні матриці $S_i(\psi) \in C^{'}(R^m; a)$, і деякі комутативні матриці $C_i(\psi) \in C^{'}(R^m)$, $i = \overline{1,3}$, для яких, при $\psi \in R^n$, виконуються умови*

$$\left\langle \left[\dot{S}_2(\psi) + S_2(\psi)A^T(\psi) + A(\psi)S_2(\psi)\right] C_2(\psi)\psi, C_2(\psi)\psi\right\rangle \geq \geq \|(C_2(\psi) - C_1(\psi))\psi\|^2,$$

$$\left\langle \left[\dot{S}_3(\psi) + S_3(\psi)A^T(\psi) + A(\psi)S_3(\psi)\right] C_3(\psi)\psi, C_3(\psi)\psi\right\rangle \geq \geq \|(C_3(\psi) - C_2(\psi))\psi\|^2,$$

$$\left\langle \left[\dot{S}_1(\psi) + S_1(\psi)A^T(\psi) + A(\psi)S_1(\psi)\right] C_1(\psi)\psi, C_1(\psi)\psi\right\rangle \geq \|C_1(\psi)\psi\|^2,$$

$$\det(C_3(\psi)) \neq 0.$$

Тоді система (1) має єдину функцію Гріна задачі про обмежені інваріантні многовиди.

1. *Mitropolsky Yu. A., Samoilenko A. M., Kulik V. L.* Dichotomies and stability in nonautonomous linear systems. — Taylor & Francis Inc, London, 2003. 369 c.

2. *Самойленко А. М., Грод І. М.* Про регулярні лінійні розширення динамічних систем на торі // Нелінійні коливання. 1998. № 1. С. 95–103.

SIGN-INDEFINITE LYAPUNOV FUNCTIONS AND REGULARITY OF LINEAR EXTENSIONS ON MANIFOLDS

Sufficient conditions for the existence and uniqueness of the Green–Samoilenko function are established. The obtained results provide constructive conditions for the regularity of linear extensions and can be applied to the study of bounded invariant manifolds.

УДК 512.64:681.3

ЗАСТОСУВАННЯ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ДО АНАЛІЗУ ДАНИХ

Олександр КРАЙЧУК, Сергій КРАЙЧУК

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне, Україна
a.kraychuk@gmail.com

Розвиток інформаційних систем посилює потребу в ефективному поданні та обробці даних. Мета роботи – розглянути застосування понять і методів лінійної алгебри до аналізу даних, зокрема їхню роль у поданні даних та оптимізації обчислень. Виклад ґрунтується на аналізі наведених джерел і порівнянні реляційного та лінійно-алгебраїчного підходів.

У роботі [1] проаналізовано теоретичне значення і місце навчальної дисципліни «Лінійна алгебра» як окремого розділу вищої математики у структурі підготовки бакалаврів здобувачів вищої освіти на прикладі спеціальності А4.04 Середня освіта (Математика). Охарактеризовано змістове наповнення та досвід вивчення вказаного курсу, визначено зміст, мету, завдання, передбачувані результати вивчення навчальної дисципліни. Завданням курсу є формування у здобувачів вищої освіти математичних понять, засвоєння математичних тверджень, вироблення навичок встановлення правильності нових математичних закономірностей.

Актуальним є також питання практичного застосування тверджень, понять і методів лінійної алгебри для оцінювання ефективності діяльності певних об’єктів, наприклад, соціально-економічних систем [2] та оптимізації заданих процесів, зокрема, для оптимізації обробки та зберігання даних у сучасних інформаційних системах. Засоби лінійної алгебри є формальним апаратом для подання даних у вигляді векторів і матриць та опису обчислень через композиції перетворень. Табличні, ознакові, графові й мережеві дані можуть бути подані у вигляді різного роду матриць. Тоді аналітичні процедури будуть зводитися до скінченного набору дій: матрично-векторних і матрично-матричних множень, поелементних операцій, редукцій і перестановок або проекцій.

Для реляційних баз даних застосовується реляційна алгебра – це формальна процедурна мова запитів, яка використовує операції над відношеннями (таблицями) для створення нових відношень. Для прискорення обробки даних було запропоновано різноманітні рішення та виконання прогнозів у системах машинного навчання з використанням сучасного апаратного забезпечення, зокрема графічних процесорів (GPU) [3]. Завдяки масовому паралелізму та архітектурам, оптимізованим для операцій лінійної алгебри, суттєво зросла пропускна здатність конвеєрів обробки даних і формування прогнозів на основі моделей. Однак поєднання реляційних операторів (у конвеєрах обробки даних) та операторів лінійної алгебри (у системах машинного навчання) моделі передбачають використання різноманітних структур даних. Зокрема, обробка даних зазвичай охоплює такі завдання, як перетворення та агрегування даних, що традиційно вирішуються за допомогою засобів реляційної алгебри (RA). Натомість робочі навантаження, пов’язані з прогнозуванням на основі моделей, передбачають виконання значного обсягу операцій лінійної алгебри (LA). Відмінності в математичних засадах обробки даних і прогнозування часто зумовлюють використання окремих програмних інструментів, бібліотек та апаратних конфігурацій, що може негативно впливати на загальну продуктивність та ефективність. Такий поділ може призвести до підвищення складності, зростання витрат на розробку й обслуговування, а також до виникнення потенційних «вузьких місць», що обмежують продуктивність. Тому фундаментальні відмінності між LA та RA перешкоджають подальшій оптимізації шляхом об’єднання цих двох систем як на логічному, так і на реалізаційному рівнях.

Різні математичні основи створюють труднощі для перехресної оптимізації під час об’єднання реляційної та лінійної алгебри. Реляційні оператори переважно обробляють вхідні дані як набори кортежів, тоді як обчислення

лінійної алгебри працюють з упорядкованими скалярами, векторами та матрицями. Перетворення даних та вартість вводу/виводу між цими двома алгебраїчними системами призводять до значних накладних витрат. Крім того, вказані алгебраїчні системи передбачають різні стратегії логічної оптимізації. Зокрема, реляційна алгебра, специфікація логіки першого порядку, може використовувати логічну редукцію для зменшення обчислювальної складності. На противагу цьому, оператори лінійної алгебри часто можуть використовувати числову інформацію вхідних матриць для зменшення розміру проміжних результатів та загальної складності.

Подання обчислень у формі LA-виразів робить явними алгебраїчні властивості (асоціативність, дистрибутивність, еквівалентність факторизацій) і тим самим дозволяє створювати коректні переписування для зниження вартості виконання: зміну порядку та групування операцій, вибір альтернативних реалізацій і керування матеріалізацією проміжних результатів [3]. Оскільки LA-подання є відносно декларативним, воно підтримує cost-based вибір фізичних операторів і стратегій виконання, включно з використанням розрідженості, блокуванням та (за допустимості) наближеними обчисленнями. Критичним системним ефектом є також скорочення проміжних даних: у багатьох аналітичних задачах саме матеріалізація великих проміжних матриць (векторів) визначає тиск на пам'ять, а оптимізації на кшталт fusion, перестановок операцій і експлуатації розрідженості зменшують кількість проміжних структур і сумарні витрати [3].

Практична ефективність LA-оптимізацій визначається не лише можливістю переписування виразів і планування, а й тим, наскільки точно та з мінімальними накладними витратами сформовані плани відтворюються на рівні виконання з урахуванням розрідженості, локальності доступу до пам'яті та паралелізму.

1. *Крайчук О. В.* Навчальна дисципліна «Лінійна алгебра» у структурі підготовки бакалаврів спеціальності А4.04 Середня освіта (Математика) // Педагогічна наука і освіта XXI століття. 2026. № 6. С. 131–139. DOI: https://doi.org/10.35619/pse.vi6.168.
2. *Kniazevych A. O., Kraychuk A. V., Kraychuk S. O., Ostapchuk N. O.* Application of the Data Envelopment Analysis method to assess the efficiency of social and economic systems // Journal of Geology, Geography and Geoecology. 2022. Vol. 31, No. 1. P. 81–88. DOI: https://doi.org/10.15421/112208.
3. *Shen Z., Cai Y., Cheng K., Lee P. P. C., Li X., Hu Y., Shu J.* A survey of the past, present, and future of erasure coding for storage systems // ACM Transactions on Storage. 2025. Vol. 21, No. 1. P. 1–39. DOI: https://doi.org/10.1145/3708994.

APPLICATION OF LINEAR ALGEBRA TO DATA ANALYSIS

The paper examines the application of propositions, concepts, and methods of linear algebra to data analysis. The discussion is based on a review of the cited sources and a comparison of the relational and linear algebra approaches. Linear algebra tools serve as a formal framework for representing data as vectors and matrices and for describing computations through compositions of transformations. In the process of database transformation within information systems, the tools of linear algebra demonstrate practical efficiency compared to relational algebra methods.

УДК 519.87

ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ МОНО ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ КІНЕТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Ірина КОВАЛЬСЬКА[1], Олена РАДЗІЄВСЬКА[2]

[1]Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Кам'янець-Подільський, Україна
[2]Національний університет харчових технологій, Київ, Україна
kovalska@kpnu.edu.ua, radzlena58@gmail.com

Дослідження кінетичних процесів росту мікроорганізмів, його математичне моделювання є одною з основних задач сучасної біотехнології, системної біології та промислової мікробіології. Основою біоінженерії є перетворення біологічних процесів у систему кількісних рівнянь, в яких відображена взаємодія між клітиною та всім, що її оточує [1].

Математичне моделювання цих процесів почалось зі спостережень Жака Моно і змінювалось від простих описів до складних стохастичних підходів. Розуміння кінетики росту потребує чіткого розмежування між замкненими та відкритими системами, оскільки в них представлені суттєво різні фізіологічні стани мікроорганізмів і їх режими функціонування [2].

Класична модель Моно математично виражається через питому швидкість росту μ, яка пропорційна відносному приросту біомаси за одиницю часу:

$$\mu = \frac{\mu_{\max} S}{K_s + S}.$$

Виконаємо дослідження цієї моделі, яка описується системою диференціальних рівнянь і виявляє залежність швидкості збільшення періодичної культури від концентрації поживної речовини:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mu_{\max} S}{K_s + S} X, \\ \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = -Y \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}. \end{cases} \tag{2}$$

Тут $\mu_{\max}$, K_s та Y – додатні сталі величини: $\mu_{\max}$ – максимально можлива швидкість зростання даного мікроорганізму, K_s – константа напівнасичення, Y – економічний коефіцієнт (вихід біомаси за субстратом); S – концентрація лімітуючого субстрату. Знак мінус показує, що концентрація субстрату із зростанням біомаси зменшується.

Мета дослідження – знайти залежність концентрації мікроорганізмів від часу за умови, що в початковий момент спостереження $X(0) = X_0, S(0) = S_0$. Недоліком цієї моделі є те, що дана залежність не може бути записана у явному вигляді. Але, досліджуючи розв'язок, ми зможемо проаналізувати залежність концентрації від часу та побудувати графік цієї залежності.

Розв'яжемо систему (2). Проінтегруємо друге рівняння:

$$X(t) = -YS(t) + C_1.$$

Врахуємо початкові умови:

$$X(t) = -YS(t) + X_0 + YS_0,$$

або

$$X - X_0 = Y(S_0 - S).$$

Звідси і з першого рівняння отримуємо:

$$S = \frac{YS_0 + X_0 - X}{Y}.$$

Отже,

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_{\max}(YS_0 + X_0 - X)X}{YS_0 + X_0 + YK_s - X}. \tag{3}$$

Позначивши

$$A = YS_0 + X_0 + YK_s, \qquad B = YS_0 + X_0,$$

перепишемо рівняння (3) у вигляді

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_{\max}(B - X)X}{A - X}. \tag{4}$$

Знаходимо розв'язок цього диференціального рівняння:

$$-\frac{A - B}{B} \ln|B - X| + \frac{A}{B} \ln X = \mu_{\max} t + C_2. \tag{5}$$

Із початкових умов знаходимо сталу C_2:

$$C_2 = \frac{A}{B} \ln X_0 - \frac{A - B}{B} \ln|B - X_0|.$$

Тепер рівняння (5) матиме вигляд:

$$\frac{A}{B} \ln\left|\frac{(B - X_0)X}{(B - X)X_0}\right| + \ln\left|\frac{B - X}{B - X_0}\right| = \mu_{\max} t. \tag{6}$$

Проаналізуємо знайдену залежність та побудуємо її графік. З того, що $X_0 > 0$, $S_0 > 0$, слідує, що $0 < X_0 < B$, $0 < B < A$.

Крім того, з формули (4) маємо: $t'(X) > 0$, $0 < X < B$. Тому на проміжку $(0; B)$ функція $t(X)$ зростає. З рівняння (6) слідує, що $t(X) \to -\infty$ при $X \to 0$ та $\dfrac{A}{B} > 1$. Також $t(X) \to \infty$ при $X \to B$. Отже, прямі $X = 0$ і $X = B$ є вертикальними асимптотами для функції $t(X)$ і на цьому проміжку у неї існує обернена функція $X(t)$. Враховуючи, що $0 < X_0 < B$, зобразимо залежність X від t на рис. 1.

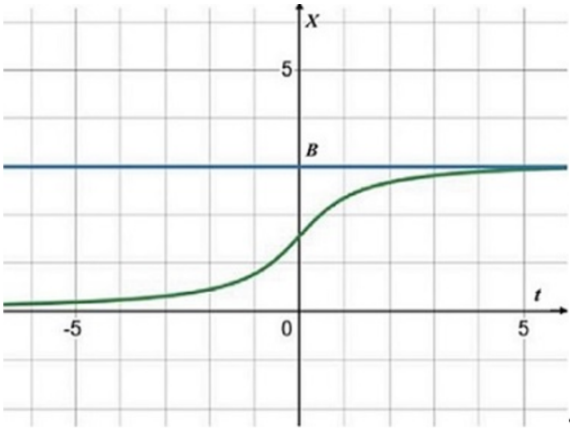


Рис. 1. Залежність концентрації мікроорганізмів від часу

Знайдена залежність повністю відповідає нашим уявленням про закриті біологічні системи [4].

Висновок. Україна є ключовим гравцем на світовому ринку продовольства. Тому вивчення, дослідження і впровадження складних математичних моделей є основним шляхом до підвищення доданої вартості продукції та збереження енергетичної незалежності через біогазові технології. Інтеграція класичної кінетики з методами системного аналізу та штучного інтелекту дозволяє вітчизняним підприємствам не лише виживати в кризових умовах, а й підтримувати стандарти якості та безпеки на глобальному рівні [5].

1. Mathematical Modeling and Control of Bioprocesses / Edited by *Ph. Bogaerts, A. Vande Wouwer*. April 2023. 302 p.

2. *Mockaitis G.* Mono- and Polyauxic Growth Kinetics: A Semi-Mechanistic Framework for Complex Biological Dynamics // Bull Math Biol. 2026. Mar. 18. Vol. 88, No. 4. Article 55. DOI: 10.1007/s11538-026-01621-7. PMID: 41848827; PMCID: PMC12999704.

3. *Shirsat N., Mohd A., Whelan J., English N. J., Glennon B., Al-Rubeai M.* Revisiting Verhulst and Monod models: analysis of batch and fed-batch cultures // Cytotechnology. 2015. May. Vol. 67, No. 3. P. 515–530. DOI: 10.1007/s10616-014-9712-5. Epub 2014 Apr. 5. PMID: 25805268; PMCID: PMC4371576.

4. *Радзієвська О. І., Ковальська І. Б.* Дослідження кінетики росту мікроорганізмів на основі математичної моделі Моно // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. 2026. Вип. 29. С. 113–121.

5. *Тул С., Самойлик І., Клименко В., Шкурупій О.* Трансформація агропродовольчої промисловості України в контексті глобальної цифровізації // Інженерні матеріали. 2023. 40. 26 с.

APPLICATION OF THE MONOD MATHEMATICAL MODEL TO THE STUDY OF KINETIC PROCESSES

Studying the kinetics of microorganism growth and developing mathematical models for it are key tasks in modern biotechnology, systems biology, and industrial microbiology. Bioengineering relies on translating biological processes into a system of quantitative equations that reflect the interactions between a cell and its environment. Mathematical modeling of these processes originated with the observations of Jacques Monod and has evolved from simple descriptions to complex stochastic approaches.

Understanding growth kinetics requires a clear distinction between closed and open systems, as they involve fundamentally different physiological states and functional modes for microorganisms.

This study examines the classical Monod model—described by a system of differential equations—and identifies the relationship between the growth rate of a batch culture and the nutrient concentration.

Since this relationship cannot be expressed in explicit form, the study involved analyzing the concentration-versus-time dependence and plotting the corresponding graph. The resulting relationship is fully consistent with established concepts regarding closed biological systems.

УДК 519.87:351

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ В ІНФОРМАЦІЙНО-АНАЛІТИЧНОМУ ЗАБЕЗПЕЧЕННІ ОРГАНІВ ДЕРЖАВНОЇ ВЛАДИ

Ольга МИРОНЕНКО, Тетяна СОЛОВЙОВА

Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації імені Героїв Крут
mironenkoolga557@gmail.com, tsoloviova08@gmail.com

Сучасний розвиток інформаційних технологій в органах державної влади та місцевого самоврядування потребує математичних методів, здатних забезпечити прогнозування, аналіз та управління динамічними процесами різної природи. Метою роботи є узагальнення можливостей математичного моделювання динамічних процесів для потреб інформаційно-аналітичного забезпечення органів державної влади, зокрема в контексті оборонних технологій, логістики та обробки сигналів.

У балістичних моделях координата об'єкта є функцією часу $x(t)$, тому швидкість визначається як перша похідна координати за часом, а прискорення – як друга похідна [2]:

$$v(t) = \frac{dx}{dt}, \qquad a(t) = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{1}$$

Це дозволяє прогнозувати траєкторії руху об'єктів. Подібним чином у моделях керування безпілотними літальними апаратами похідні використовуються для прогнозування положення рухомого об'єкта: похідна функції зміни координати дає змогу оцінити швидкість і напрямок руху, що критично важливо для рішень у реальному часі.

У логістиці та дослідженні операцій диференціальне числення застосовується для аналізу темпів зміни ресурсів і пошуку оптимальних рішень: перша похідна характеризує швидкість зміни величини, а друга – зміну самого темпу. Це дозволяє аналізувати не лише поточний стан системи, а й тенденцію його зміни. Окремим прикладом є диференціальні моделі Ланчестера, які описують зміну чисельності двох протиборчих сторін у часі [3]:

$$\frac{dx}{dt} = -\beta y, \qquad \frac{dy}{dt} = -\alpha x, \tag{2}$$

де $x(t)$, $y(t)$ – чисельності сторін, α, β – коефіцієнти ефективності. Така модель демонструє нелінійну залежність між параметрами сторін і застосовується при плануванні ресурсів та оцінці ризиків.

Ще одне застосування пов'язане з радіолокацією та обробкою сигналів. Зміна фази відбитого сигналу в часі пов'язана з частотою, а зміна частоти дає інформацію про динаміку руху об'єкта. Таким чином, у навчальній моделі, наведеній у монографії [1], послідовне використання першої та другої похідних дає змогу визначати радіальну швидкість і прискорення цілі.

Розглянуті приклади демонструють спільний принцип: похідна описує швидкість зміни процесу, друга похідна – зміну цієї швидкості, а система диференціальних рівнянь встановлює зв'язок між змінними. Прикладні задачі також показують студентам практичний зміст похідної та диференціальних рівнянь.

Отже, математичне моделювання на основі диференціального числення є важливим засобом дослідження динамічних процесів в інформаційно-аналітичному забезпеченні органів державної влади. Перспективним напрямом подальших досліджень є ускладнення моделей шляхом урахування додаткових чинників, просторового характеру руху та систем зворотного зв'язку.

1. *Мироненко О. В., Соловйова Т. В.* Математичні моделі на основі диференціального числення в оборонних технологіях: від балістики до радіолокації. Розділ монографії.
2. *Newton I.* The Mathematical Principles of Natural Philosophy. London, 1687.
3. *Lanchester F. W.* Aircraft in Warfare: The Dawn of the Fourth Arm. London: Constable and Company, 1916.

MATHEMATICAL MODELLING OF DYNAMIC PROCESSES IN INFORMATION AND ANALYTICAL SUPPORT FOR PUBLIC AUTHORITIES

The paper outlines the role of mathematical modelling of dynamic processes in information and analytical support for public authorities. It considers applications of differential calculus to motion modelling, logistics, operations research and signal processing. The first and second derivatives are used to describe velocity, acceleration and changes in the rates of processes, while the Lanchester equations illustrate the use of differential models to describe interactions between two opposing sides. The examples also demonstrate the educational value of applied problems for explaining derivatives and differential equations. Further development may involve incorporating additional factors, spatial motion and feedback into the models.

УДК 517.2

ДРОБОВА ПОХІДНА СТЕПЕНЕВОЇ ФУНКЦІЇ: ОБЧИСЛЕННЯ ТА ГРАФІЧНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ

Оксана ГЕТМАНЮК, Лариса ХОХЛОВА

Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, Тернопіль, Україна
getmanyuk_oksana@tnpu.edu.ua, larysa_khokhlova@tnpu.edu.ua

У класичному диференціальному численні порядок похідної є натуральним числом: функцію можна продиференціювати один, два або більше разів. Дробове числення розширює цю ідею, допускаючи нецілий порядок диференціювання [1]. Для першого ознайомлення з таким узагальненням зручно використати степеневу функцію, оскільки її дробова похідна має явний аналітичний вираз. Це дає змогу поєднати відоме правило диференціювання з обчисленням нових прикладів та їх графічним аналізом [2].

Мета роботи – на прикладі степеневої функції розкрити спосіб обчислення дробової похідної Рімана–Ліувілля та дослідити, як порядок диференціювання впливає на вигляд її графіка. Використано аналітичні перетворення, чисельне обчислення значень і побудову графіків. Основним прикладом обрано функцію $f(x) = x^2$ на півосі $x > 0$.

Для натурального m та цілого n, де $0 \le n \le m$, звичайне диференціювання степеневої функції дає:

$$\frac{\mathrm{d}^n x^m}{\mathrm{d}x^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}.$$

Перейти від цілих порядків до дробових допомагає гамма-функція Ейлера. Для додатних аргументів вона визначається інтегралом і задовольняє співвідношення [3, § 5.2, 5.5]:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t, \quad z > 0; \qquad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

Зокрема, $\Gamma(m+1) = m!$ для невід'ємного цілого m та $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ [3, § 5.4]. Заміна факторіалів гамма-функціями підказує можливу формулу дробового диференціювання. Однак для точного змісту результату необхідно вказати означення оператора та нижню межу інтегрування.

У роботі використано лівобічну похідну Рімана–Ліувілля з нижньою межею 0. Для $0 < \alpha < 1$ вона має вигляд [2, с. 27]:

$$D^{\alpha}_{0+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x > 0.$$

Тобто спочатку виконують інтегрування порядку $1-\alpha$, а потім звичайне диференціювання. Нижня межа 0 є частиною означення; її зміна загалом змінює результат. Для $f(x) = x^{\beta}$, $\beta \ge 1$, підстановка $t = xu$ в інтегралі та використання бета-функції [3, § 5.12] дають:

$$\int_0^x (x-t)^{-\alpha} t^{\beta}\,\mathrm{d}t = x^{\beta+1-\alpha} \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\beta+2-\alpha)}.$$

Після диференціювання отримуємо відому формулу для степеневої функції [2, с. 28]:

$$D^{\alpha}_{0+} x^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} x^{\beta-\alpha}.$$

Оскільки $\beta \ge 1$ та $0 < \alpha < 1$, усі аргументи гамма-функції в цій формулі додатні. Видно, що порядок α визначає і коефіцієнт, і показник степеня. Для кожного фіксованого $x > 0$ при $\alpha \to 0^+$ одержуємо початкову функцію, а при $\alpha \to 1$ – її звичайну першу похідну.

Розглянемо обчислення похідної порядку $1/2$ від функції $f(x) = x^2$. За рекурентною формулою гамма-функції $\Gamma(5/2) = 3\sqrt{\pi}/4$, а $\Gamma(3) = 2$. Тому:

$$D^{1/2}_{0+} x^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(5/2)} x^{3/2} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{3/2} \approx 1{,}5045\, x^{3/2}.$$

Аналогічно для порядків $1/4$ та $3/4$ маємо:

$$D_{0+}^{1/4}x^2 = \frac{2}{\Gamma(11/4)}x^{7/4} \approx 1{,}2435x^{7/4};$$

$$D_{0+}^{3/4}x^2 = \frac{2}{\Gamma(9/4)}x^{5/4} \approx 1{,}7652x^{5/4}.$$

Для графічного порівняння побудовано функцію $g_\alpha(x) = \dfrac{2x^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}$ для $\alpha = 0;\ 1/4;\ 1/2;\ 3/4;\ 1$ (рис. 2). Крайні значення параметра відповідають $g_0(x) = x^2$ та $g_1(x) = 2x$. Обчислення виконано за аналітичною формулою; значення в точці $x = 0$ на рисунку задано неперервним продовженням.

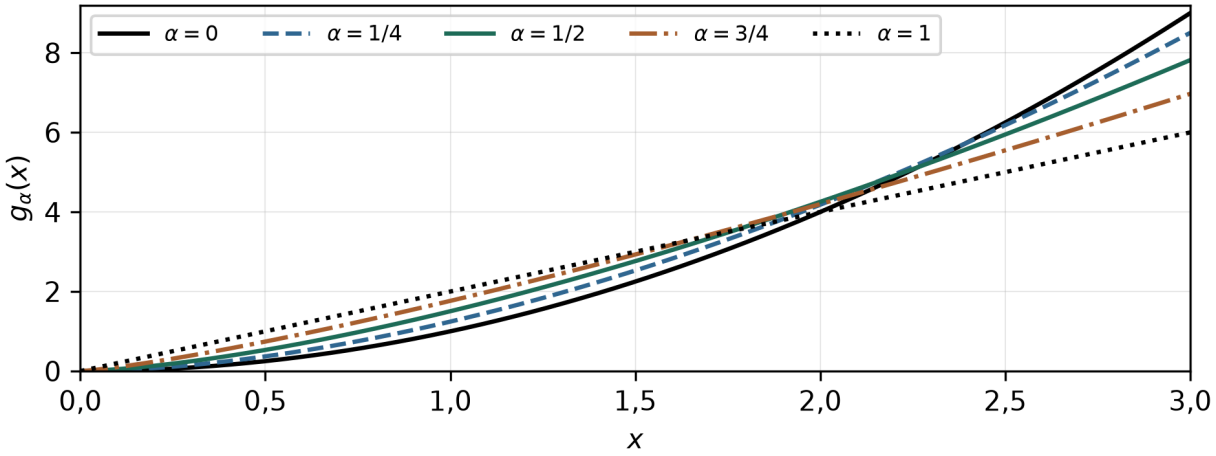


Рис. 2. Функція x^2 та її похідні різних порядків

Усі зображені функції додатні та зростають при $x > 0$. Для $0 < \alpha < 1$ показник степеня $2 - \alpha$ належить інтервалу $(1; 2)$, тому графіки зберігають характер степеневих кривих, а їхня друга звичайна похідна є додатною. При $\alpha \to 1^-$ вони наближаються до прямої $y = 2x$. Проте неперервна зміна порядку не означає, що за кожного x значення дробової похідної лежить між x^2 та $2x$.

Це добре видно на прикладі $\alpha = 1/2$. У точці $x = 1$ маємо $1 < 1{,}5045 < 2$, тож значення дробової похідної справді є проміжним. Натомість при $x = 2$ отримуємо $g_0(2) = g_1(2) = 4$, тоді як $g_{1/2}(2) \approx 4{,}2554$. Тому відповідна крива в цій точці розташована вище від обох крайніх графіків. Для $x > 0$ її перетин із прямою $y = 2x$ відбувається при $x = 9\pi/16 \approx 1{,}7671$, а з параболою $y = x^2$ – при $x = 64/(9\pi) \approx 2{,}2635$. Між цими точками вона перевищує обидві функції.

Тож вислів «проміжний крок між функцією та похідною» стосується порядку оператора, а не обов'язкового розташування графіків. Також графік дробової похідної показує значення нового оператора і загалом не має звичного тлумачення як кутового коефіцієнта дотичної до початкової функції [4]. Ці уточнення важливі для початкового ознайомлення з дробовим численням.

Отже, степенева функція є доступним прикладом для вивчення дробового диференціювання. Використання гамма-функції дає змогу отримати явні формули, а графічне порівняння виявляє особливості зміни результату зі зміною порядку. Для функції x^2 показано неперервний перехід від початкової функції до її першої похідної за параметром α та встановлено, що таке узагальнення не є поточковою інтерполяцією між їхніми значеннями.

1. *Ross B.* A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus. Fractional Calculus and Its Applications / ed. B. Ross. Berlin; Heidelberg: Springer, 1975. P. 1–36. (Lecture Notes in Mathematics; vol. 457). DOI: https://doi.org/10.1007/BFb0067096.

2. *Diethelm K.* The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. Berlin; Heidelberg: Springer, 2010. viii, 247 p. (Lecture Notes in Mathematics; vol. 2004). DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-14574-2.

3. NIST Digital Library of Mathematical Functions. Chapter 5. Gamma Function / ed. F. W. J. Olver et al. Release 1.2.8 of 2026-09-15. §§ 5.2, 5.4, 5.5, 5.12. URL: https://dlmf.nist.gov/5 (дата звернення: 01.10.2026).

4. *Podlubny I.* Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. Fractional Calculus and Applied Analysis. 2002. Vol. 5, No. 4. P. 367–386. URL: https://arxiv.org/abs/math/0110241 (дата звернення: 30.09.2026).

International Scientific and Practical Conference «Modern Trends in the Development of Mathematics: Science and Education»
Ternopil, October 8–9, 2026

FRACTIONAL DERIVATIVE OF A POWER FUNCTION: COMPUTATION AND GRAPHICAL INTERPRETATION

The paper presents the Riemann–Liouville fractional derivative with lower terminal zero as a natural extension of integer-order differentiation, using a power function as the main example. The aim is to show how such a derivative is computed and to examine how the order of differentiation affects the shape of the resulting graph. Analytical transformations, numerical evaluation and graphical comparison are used. Starting from the classical rule for differentiating powers and the Euler gamma function, the well-known formula for the fractional derivative of x^β is derived with the help of the beta function. For $f(x) = x^2$, explicit expressions are obtained for the derivatives of orders $1/4$, $1/2$ and $3/4$, and the family $g_\alpha(x) = 2x^{2-\alpha}/\Gamma(3-\alpha)$, $0 \le \alpha \le 1$, is plotted. The limiting cases $\alpha = 0$ and $\alpha = 1$ recover the original function and its first derivative, and for each fixed $x > 0$ the value changes continuously with α. However, the example $\alpha = 1/2$ shows that a fractional derivative need not lie pointwise between these two functions: on the interval from $9\pi/16 \approx 1.767$ to $64/(9\pi) \approx 2.264$, in particular at $x = 2$, it exceeds both of them. It is also emphasized that the graph of a fractional derivative does not have the usual meaning of the slope of a tangent line. These observations may be useful when introducing fractional calculus to students.

UDC 519.6:519.2:504.45

MATHEMATICAL AND STATISTICAL METHODS FOR MODELLING WATER QUALITY IN RIVER-BASIN SYSTEMS

Iryna BILANYK

Ternopil Volodymyr Hnatiuk National Pedagogical University, Ternopil, Ukraine
i.bilanyk@tnpu.edu.ua

1 Introduction

Water quality in river basins depends on hydrological processes, pollutant inputs and physicochemical transformations. Spatial and temporal variability, irregular observations and tributary inflows complicate concentration forecasting. Differential equations describe transport mechanisms, whereas statistical methods capture relationships that are difficult to specify analytically. This contribution proposes an integrated framework for predicting the concentration of a selected dissolved pollutant and the probability of exceeding a specified threshold. It combines an advection–dispersion–reaction equation, random forest regression and logistic regression, with MATLAB as a computational environment. The framework is methodological; its predictive performance remains to be evaluated using monitoring data.

2 Transport model and river-network coupling

The river network is represented by a directed graph whose edges correspond to river reaches and whose vertices represent confluences and monitoring locations. Assuming sufficient mixing across each cross-section, the one-dimensional mass balance on a reach is

$$\frac{\partial(AC)}{\partial t} + \frac{\partial(QC)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(AD\frac{\partial C}{\partial x}\right) - AkC + q_\ell C_\ell + s. \tag{3}$$

Here $C(x,t)$ is the cross-sectionally averaged concentration, $A(x,t)$ is the cross-sectional area, $Q(x,t)$ is discharge, $D(x,t) > 0$ is the longitudinal dispersion coefficient, and $k \ge 0$ is a first-order loss coefficient. The lateral inflow per unit reach length is $q_\ell \ge 0$, its concentration is C_ℓ, and s denotes an additional mass input per unit length and time. With C measured in $\mathrm{kg\,m^{-3}}$, every term in (3) has units of $\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}$. The hydraulic variables satisfy $\partial_t A + \partial_x Q = q_\ell$. This formulation follows the mass-balance approach used in river water-quality modelling [1].

For constant A, velocity $u = Q/A$ and D, with no lateral inflow, equation (3) reduces to

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - kC + \frac{s}{A}. \tag{4}$$

Advection shifts the pollutant plume downstream, the diffusion-type term describes effective longitudinal spreading, and the reaction term represents pollutant loss. For a conservative solute, $k = 0$; substances with coupled transformations require a reaction system. Thus, a single concentration model represents one water-quality indicator rather than overall water quality.

The problem is completed by an initial distribution $C(x,0) = C_0(x)$, an upstream concentration and a zero dispersive-flux condition at the downstream boundary. At confluences, water discharge and the total pollutant flux $J = QC - AD\partial_x C$ are balanced. Under complete mixing and negligible dispersive exchange at the junction, the downstream

concentration is $C_{\mathrm{mix}} = \sum_j Q_j C_j / \sum_j Q_j$. A finite-volume discretisation is suitable for preserving the discrete mass balance. Parameters D and k are calibrated within physically admissible ranges using only the training observations.

As a complementary approximation strategy, a constant-coefficient, source-free periodic benchmark for (4) can be treated spectrally. Each Fourier component then evolves through an exponential multiplier describing attenuation and downstream displacement. Branched continued fractions are proposed as a means of rationally approximating this multiplier, with diffusion and advection represented by separate arguments. Multivariable fraction approximations provide a methodological basis for exploring this idea [5]. Its accuracy and stability must be checked against the exact multiplier before extension to river-network simulations.

3 Statistical prediction and MATLAB implementation

The predictor vector $\mathbf{z}$ includes discharge, water temperature, antecedent precipitation, seasonal variables, known source loads and lagged concentration measurements. All predictors must be available at the forecast issue time. Random forest regression [2] predicts concentration by averaging individual tree outputs:

$$\widehat{C}_{\mathrm{RF}}(\mathbf{z}) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^{B} T_b(\mathbf{z}), \tag{5}$$

where B is the number of trees and T_b is the prediction of tree b. Bootstrap sampling and random predictor selection at each split allow the ensemble to represent nonlinear relationships and interactions. Predictor importance indicates predictive relevance but does not establish causality.

Logistic regression addresses a different target: threshold exceedance. Defining $Y = \mathbb{I}\{C > C_{\mathrm{crit}}\}$ gives [3]

$$p(\mathbf{z}) = \Pr(Y = 1 \mid \mathbf{z}) = \frac{1}{1 + \exp[-(\beta_0 + \beta^{\mathsf{T}}\mathbf{z})]}. \tag{6}$$

The concentration threshold C_{crit} depends on the substance and assessment objective and is distinct from the probability threshold used for classification. In a main-effects model, $\exp(\beta_j)$ is the odds ratio for a one-unit increase in predictor j, holding the other predictors fixed. Continuous predictors are standardised using training-set statistics; regularisation may be considered when estimates are unstable.

The proposed integration uses the physical prediction $\widehat{C}_{\mathrm{phys}}$ from (3) as an additional statistical predictor. The transport model provides information about pollutant migration, the random forest refines the concentration prediction, and logistic regression estimates exceedance probability. A statistical correction does not automatically preserve mass balance, so its physical consistency must be checked. The physical model, a random forest without the physical predictor and the combined model should be compared on identical test data.

MATLAB supports a common workflow for numerical simulation, statistical fitting and visualisation. After finite-volume spatial discretisation, the transport equations can be advanced using an ODE solver such as ode15s when the resulting system is stiff. Random forest regression can be implemented with TreeBagger using Method='regression', and logistic regression with fitglm using a binomial distribution and logit link [4]. These statistical functions require Statistics and Machine Learning Toolbox. Concentration profiles, time series and exceedance-probability plots can then be compared within the same environment. This describes an implementation route, not a completed numerical experiment.

Validation should use chronological training and test blocks, supplemented by held-out monitoring stations to assess spatial transfer. Calibration, imputation and hyperparameter selection must remain within the training blocks to prevent information leakage. Concentration predictions are evaluated using mean absolute error and root mean squared error; exceedance predictions are assessed using precision–recall AUC, sensitivity and probability calibration. Flood and low-flow periods should be examined separately because dilution and pollutant loading may respond differently to discharge.

The resulting framework links a mechanistic description of pollutant transport with two distinct statistical tasks: concentration prediction and exceedance-risk assessment. Its potential applications include identifying high-risk reaches and periods and supporting monitoring design. Any improvement over the individual models must be established using independent observations from a specific river basin.

1. *Chapra S. C., Pelletier G. J., Tao H.* QUAL2K: A Modeling Framework for Simulating River and Stream Water Quality. Version 2.11: Documentation and Users Manual. Tufts University, 2008. https://qual2k.com/.

2. *Breiman L.* Random Forests // Machine Learning. 2001. Vol. 45. P. 5–32. https://doi.org/10.1023/A:1010933404324doi:10.1023/A:1010933404324.

3. *Hosmer D. W., Lemeshow S., Sturdivant R. X.* Applied Logistic Regression. 3rd ed. Wiley, 2013. https://doi.org/10.1002/9781118548387doi:10.1002/9781118548387.

4. *MathWorks.* Statistics and Machine Learning Toolbox documentation: https://www.mathworks.com/help/stats/treebagger.htmlTreeBagger; https://www.mathworks.com/help/stats/fitglm.htmlfitglm. Accessed 25 October 2026.

5. *Dmytryshyn R., Sharyn S.* Representation of Special Functions by Multidimensional A- and J-Fractions with Independent Variables // Fractal Fract. 2025. Vol. 9, No. 2. Art. 89. https://doi.org/10.3390/fractalfract9020089doi:10.3390/fractalfract9020089.

МАТЕМАТИЧНІ ТА СТАТИСТИЧНІ МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ЯКОСТІ ВОДИ В РІЧКОВО-БАСЕЙНОВИХ СИСТЕМАХ

Запропоновано підхід до моделювання якості води, який поєднує рівняння адвекції--дисперсії--реакції, випадковий ліс для прогнозування концентрації та логістичну регресію для оцінювання ймовірності перевищення заданого порога. Окреслено ідею застосування гіллястих ланцюгових дробів для апроксимації експоненціального множника в спектральному розв'язуванні спрощеної транспортної задачі. Описано можливості реалізації в MATLAB і вимоги до перевірки моделей за незалежними даними моніторингу.

UDC 004.932; 519.6

DIGITAL HALFTONING VIA 3D WEIGHTED SIGMA DELTA SCHEMES

Anna VESELOVSKA

Department of Mathematics, TUM School of CIT, Technical University of Munich
& Munich Center for Machine Learning
anna.veselovska@tum.de

1 Introduction

Digital halftoning represents a continuous-tone image by black and white pixels so that, viewed from a sufficient distance, the image appears similar to the original. Among the many halftoning methods, error diffusion is popular because it is simple to implement and gives good results: the pixels are quantized one after the other, and the quantization error is distributed to pixels that have not yet been processed. The best known example is the Floyd–Steinberg algorithm [1].

Error diffusion has long been connected to $\Sigma\Delta$ quantization, an analog-to-digital conversion scheme for bandlimited signals [2,3]. For one-dimensional signals, one-bit $\Sigma\Delta$ schemes come with rigorous error bounds, which improve with the order of the scheme [4]. A direct generalization to two dimensions by composing difference operators is difficult for one bit, because stability is lost. In [5], this obstacle was avoided by combining one-dimensional schemes along different directions in an *additive* way, with weights summing to one. This class of weighted $\Sigma\Delta$ schemes contains Floyd–Steinberg and several related error diffusion algorithms, and its quantization error for bandlimited images can be estimated.

Many images and signals are not two-dimensional. A colour image has three channels, and video or volumetric data have a third coordinate. Treating each channel independently ignores the possibility of diffusing error across channels. In this paper, we extend the weighted $\Sigma\Delta$ framework of [5] to three dimensions and apply it to RGB images viewed as three-dimensional signals.

2 Notation and Preliminaries

In this section, we recall some important notions and properties related to the theoretical model in three dimensions. The concepts discussed in this section will play a key role in deriving the main results for weighted $\Sigma\Delta$ schemes in 3D. Let $S_\Omega = [-\frac{\Omega}{2}, \frac{\Omega}{2}]^3 \subset \mathbb{R}^3$ and normalize $\Omega = 1$. The Fourier transform is normalized as

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x)\, e^{-2\pi i\, \xi\cdot x}\, dx.$$

The class of bounded bandlimited functions is $B_3^\mu := \{f \in B_{S_1}(\mathbb{R}^3) : \|f\|_\infty \le \mu\}$. Due to the Shannon sampling theorem, it is well known that any bandlimited function $f \in B_{S_1}(\mathbb{R}^3)$ can be uniquely represented by its samples as follows

$$f(x) = \frac{1}{\lambda^3} \sum_{n\in\mathbb{Z}^3} f\big(\tfrac{n}{\lambda}\big)\, \Phi\big(x - \tfrac{n}{\lambda}\big), \qquad x \in \mathbb{R}^3, \tag{7}$$

with $\lambda > 1$ and a reconstruction kernel Φ such that $\mathcal{F}\Phi = 1$ on S_1, $\mathcal{F}\Phi = 0$ outside S_λ and smooth in between.

Quantization setup. Given $y_n = f(n/\lambda)$ for $n \in \mathbb{N}^3$ and $q_n \in \{-1, 1\}$, define

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda^3} \sum_{n \in \mathbb{N}^3} y_n \, \Phi\big(x - \tfrac{n}{\lambda}\big), \qquad f_q(x) = \frac{1}{\lambda^3} \sum_{n \in \mathbb{N}^3} q_n \, \Phi\big(x - \tfrac{n}{\lambda}\big),$$

and the quantization error $e_q = f_\lambda - f_q$. As in [4, 5], the other error term $f - f_\lambda$ does not depend on the quantizer and is a Schwartz-type tail, so the analysis concerns e_q only.

3 Weighted Sigma-Delta Schemes in 3D

To define Weighted Sigma-Delta Schemes in 3D, we will first collect all the necessary ingredients and then proceed with the definition.

Directional backward difference. For $d \in \mathbb{Z}^3$, the directional backward difference is

$$(\Delta_d v)_n = v_n - v_{n-d}.$$

Causal directions. The sequence must be computable by a recurrence in raster order (first index, then second, then third). We therefore allow only lexicographically positive directions

$$\mathcal{D}_+ = \{(i,j,k) \in \mathbb{Z}^3 : \ i > 0, \ \text{or } i = 0, j > 0, \ \text{or } i = j = 0, \ k > 0\}.$$

This is the 3D analogue of the condition "$i > 0$, or $i = 0$ and $j > 0$" in [5].

Weight tensor. Fix $p, \ell_1, \ell_2, s_1, s_2 \in \mathbb{N}$ and the index set

$$\mathcal{I} = \{(i,j,k) : \ 0 \le i \le p, \ -s_1 \le j \le \ell_1, \ -s_2 \le k \le \ell_2\} \cap \mathcal{D}_+.$$

The weight tensor is $\mathbf{W} = (w_{i,j,k}) \in \mathbb{R}^{(p+1)\times(\ell_1+s_1+1)\times(\ell_2+s_2+1)}$ with

$$w_{i,j,k} \ge 0, \qquad w_{i,j,k} = 0 \ \text{ for } (i,j,k) \notin \mathcal{I}, \qquad \sum_{(i,j,k)\in\mathcal{I}} w_{i,j,k} = 1. \tag{8}$$

Definition 1 (First-order weighted $\Sigma\Delta$ quantizer in 3D)**.** For $y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}^3}$ and a weight tensor $\mathbf{W}$ as in (8) and $v_n = 0$ for $n \notin \mathbb{N}^3$, the quantizer produces $q \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}^3}$ via

$$\sum_{d\in\mathcal{I}} w_d \, (\Delta_d v)_n = y_n - q_n, \tag{9}$$

$$q_n = \operatorname{sign}\Big(v_n - \sum_{d\in\mathcal{I}} w_d \, (\Delta_d v)_n + y_n\Big). \tag{10}$$

Since $\sum_d w_d = 1$, this is the explicit recurrence

$$v_n = \sum_{d\in\mathcal{I}} w_d \, v_{n-d} + y_n - q_n, \qquad q_n = \operatorname{sign}\Big(\sum_{d\in\mathcal{I}} w_d \, v_{n-d} + y_n\Big), \tag{11}$$

evaluated in lexicographic order. Every $n - d$ with $d \in \mathcal{D}_+$ precedes n in that order, so (11) is well defined. This is a 3D error diffusion scheme with diffused error v.

Similarly to Proposition 4.1 in [5], one can show that if $\mu \le 1$ (so that $\|y\|_\infty \le 1$) and $v_n = 0$ outside $\mathbb{N}^3$, then $\|v\|_\infty \le 1$, which guarantees *stability* of the proposed quantization scheme. Namely, inducting along the lexicographic order. If $|v_m| \le 1$ for all m preceding n, then $a_n := \sum_d w_d v_{n-d} + y_n$ satisfies $|a_n| \le \sum_d w_d + \|y\|_\infty \le 2$. Since $|a - \operatorname{sign}(a)| \le 1$ for $|a| \le 2$, we get $|v_n| = |a_n - q_n| \le 1$.

4 Error Decay for 1st-order Schemes in Three Dimensions

In this section, we state the main theoretical result of this paper and prove it. The result is an error bound for first-order weighted $\Sigma\Delta$ quantization of bounded bandlimited functions on $\mathbb{R}^3$. The bound decays like λ^{-1} in the oversampling rate λ, and the weight tensor enters the leading constant only through the length $C_{\mathbf{W}}$ of the weighted mean direction.

Theorem 2. *Let $f \in B_3^{\mu}$ with $\mu \le 1$, sampled on $\frac{1}{\lambda}\mathbb{N}^3$ with $\lambda > 1$, and let q be generated by the first-order weighted $\Sigma\Delta$ scheme (9)–(10). Then*

$$\|f_\lambda - f_q\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3_+)} \le \frac{1}{\lambda}\,\|v\|_\infty \left(C_{\mathbf{W}} \cdot C \cdot \|\nabla\Phi\|_{1,2} + O(\lambda^{-1})\right), \qquad \|v\|_\infty \le 1, \tag{12}$$

where $C > 0$ is independent of $\mathbf{W}$ and Φ, $\|\nabla\Phi\|_{1,2} = \left(\sum_{m=1}^{3} \|\partial_m\Phi\|_1^2\right)^{1/2}$, and the weight constant

$$C_{\mathbf{W}}^2 = \Big(\sum_{i,j,k} i\, w_{i,j,k}\Big)^2 + \Big(\sum_{i,j,k} j\, w_{i,j,k}\Big)^2 + \Big(\sum_{i,j,k} k\, w_{i,j,k}\Big)^2.$$

Proof. Write $a_n = x - n/\lambda$. From (9), reindexing and using $v_m = 0$ for $m \notin \mathbb{N}^3$,

$$f_\lambda(x) - f_q(x) = \frac{1}{\lambda^3}\sum_n (y_n - q_n)\Phi(a_n) = \frac{1}{\lambda^3}\sum_n v_n\Big[\Phi(a_n) - \sum_d w_d\,\Phi\big(a_n - \tfrac{d}{\lambda}\big)\Big],$$

where we used $\sum_d w_d = 1$. Taylor's formula gives $\Phi\big(a_n - \frac{d}{\lambda}\big) = \Phi(a_n) - \frac{1}{\lambda}\langle d, \nabla\Phi(a_n)\rangle + R_{a_n,1}\big(-\frac{d}{\lambda}\big)$. Using $\sum_d w_d = 1$ again, the bracket equals $\frac{1}{\lambda}\big\langle \bar d, \nabla\Phi(a_n)\big\rangle - \sum_d w_d\, R_{a_n,1}\big(-\frac{d}{\lambda}\big), \qquad \bar d := \sum_d w_d\, d.$

Main term. By Cauchy–Schwarz,

$$\Big|\tfrac{1}{\lambda^4}\sum_n v_n\langle \bar d, \nabla\Phi(a_n)\rangle\Big| \le \tfrac{\|v\|_\infty}{\lambda}\sum_{m=1}^{3}|\bar d_m|\,\Big(\tfrac{1}{\lambda^3}\sum_n|\partial_m\Phi(a_n)|\Big) \le \tfrac{\|v\|_\infty}{\lambda}\;|\bar d|_2\;C\,\|\nabla\Phi\|_{1,2}\,.$$

The inner sums are Riemann sums of $\|\partial_m\Phi\|_1$, which accounts for the constant C, as in the proof of Theorem 4.2 in [5].

Remainder. Let $R_2 := \frac{1}{\lambda^3}\sum_n v_n \sum_d w_d R_{a_n,1}\big(-\frac{d}{\lambda}\big)$. In integral form, $R_{a,1}(h) = 2\sum_{|\alpha|=2}\frac{h^\alpha}{\alpha!}\int_0^1 (1-t)\,\partial^\alpha\Phi(a+th)\,dt$, and $\sum_{|\alpha|=2}|d^\alpha|/\alpha! = |d|_1^2/2$. As in Appendix B of [5] (the Riemann sum is shift-invariant in the L^1 sense), it holds

$$|R_2| \le \frac{\|v\|_\infty}{\lambda^2}\,C\,M_\Phi\sum_d w_d\,\frac{|d|_1^2}{2}, \qquad M_\Phi = \max_{|\alpha|=2}\|\partial^\alpha\Phi\|_1\,,$$

which is $O(\lambda^{-2})$, i.e. the $\lambda^{-1}\cdot O(\lambda^{-1})$ term in (12). Finally $\|v\|_\infty \le 1$ as mentioned above. □

5 Numerical experiment: RGB images as 3D signals

We test the 3D first-order weighted $\Sigma\Delta$ scheme (9)–(10) on the RGB test photo of the Ternopil Academic Regional Ukrainian Drama Theater (1920 × 1280 pixels) from Pixabay. The image is regarded as a 3D signal indexed by $n = (n_1, n_2, n_3)$ with row index n_1, column index n_2 and colour channel $n_3 \in \{1, 2, 3\}$ (R, G, B). The pixel values are mapped to $y = 2I - 1 \in [-1, 1]$, so that the stability is achieved, $\|v\|_\infty \le 1$, and the recurrence (11) is run in lexicographic order. The direction $d = (i, j, k)$ refers to the row, column and channel offset. We compare three weight tensors:

- **FS2D**: Floyd–Steinberg applied to each channel separately, i.e. $k = 0$ and $w_{0,1,0} = \frac{7}{16}$, $w_{1,-1,0} = \frac{3}{16}$, $w_{1,0,0} = \frac{5}{16}$, $w_{1,1,0} = \frac{1}{16}$;
- **FS3D**: the Floyd–Steinberg weights above multiplied by 0.8, plus the weight $w_{0,0,1} = 0.2$, so that the error of the previous colour channel is fed back into the next one;
- **avg3D**: simple averaging over the three axes, $w_{0,1,0} = w_{1,0,0} = 0.4$ and $w_{0,0,1} = 0.2$.

The quality of the halftoned images is measured by FSIM and by its colour variant FSIMc [6].

Both schemes with feedback across the colour channels obtain higher FSIM and FSIMc than per-channel Floyd–Steinberg, and avg3D obtains the highest values of the three (Table 1). The ranking in FSIM does not follow the ranking in $C_{\mathbf{W}}$: FS3D has the smallest weight constant, but avg3D has the highest FSIM. This is in line with the observation in [5] that a small $C_{\mathbf{W}}$ improves the supremum-norm guarantee but does not by itself determine the visual quality. Since the experiment uses a single image and weights chosen by hand, it should be read as an illustration only; a conclusion about the benefit of the 3D weighting would require averaging over a larger image set, as done for the 2D schemes.

Table 1. Weight constants $C_{\mathbf{W}}$ and similarity indices for the image in Figure 3.

Scheme	$C_{\mathbf{W}}$	FSIM	FSIMc
FS2D	0.643	0.9686	0.9640
FS3D	0.552	0.9749	0.9651
avg3D	0.600	0.9788	0.9714



(a) (b)

Figure 3. Halftoning of an RGB image treated as a 3D signal: (a) original image, (b) halftone obtained with the averaged 3D scheme (FSIM = 0.9788).

1. Floyd R.W., Steinberg L. An adaptive algorithm for spatial grey scale. *Proceedings of the Society of Information Display*. 1976. Vol. 17. Pp. 75–77.

2. Knox K.T. Error image in error diffusion. *Image Processing Algorithms and Techniques III*. International Society for Optics and Photonics, 1992. Vol. 1657. Pp. 268–279.

3. Kite T.D., Evans B.L., Bovik A.C., Sculley T.L. Digital halftoning as 2-D delta-sigma modulation. *Proceedings of the International Conference on Image Processing*. IEEE, 1997. Vol. 1. Pp. 799–802.

4. Güntürk C.S. One-bit sigma-delta quantization with exponential accuracy. *Communications on Pure and Applied Mathematics*. 2003. Vol. 56, No. 11. Pp. 1608–1630.

5. Krahmer F., Veselovska A. Enhanced digital halftoning via weighted sigma-delta modulation. *SIAM Journal on Imaging Sciences*. 2023. Vol. 16, No. 3. Pp. 1727–1761

6. Zhang L., Zhang L., Mou X., Zhang D. FSIM: a feature similarity index for image quality assessment. *IEEE Transactions on Image Processing*. 2011. Vol. 20, No. 8. Pp. 2378–2386.

ЦИФРОВЕ НАПІВТОНУВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ЗВАЖЕНИХ 3D ΣΔ-СХЕМ

Abstract. Aim. *To extend weighted one-bit* ΣΔ *schemes, which are closely related to error diffusion methods for digital halftoning, from two to three dimensions, and to apply them to RGB images with the colour channel as the third coordinate.*
Methods. *Starting from the Shannon sampling theorem in* $\mathbb{R}^3$*, we define quantizers as weighted combinations of one-dimensional* ΣΔ *schemes along causal directions, described by a weight tensor. The error bound exploits the properties of the Taylor expansion of the reconstruction kernel and the nature of the feedback filters; the halftoned images are assessed with the Feature Similarity Index (FSIM).*
Results. *We prove that the error in the supremum norm decays like* λ^{-1} *in the oversampling rate* λ*, with a constant equal to the length of the weighted mean direction, and show that the schemes are stable for inputs of amplitude at most one. In a numerical example, we illustrate that schemes that diffuse error between colour channels reach higher FSIM values (0.9749 and 0.9788) than Floyd--Steinberg applied to each channel separately (0.9686). Since only one image and hand-chosen weights were used, this is an illustration and not a systematic comparison.*

This is joint work with Felix Krahmer and Deeksha Yadav.

Keywords: *digital halftoning, error diffusion,* ΣΔ *quantization, one-bit quantization, bandlimited functions, FSIM.*

UDC 517.9

ULAM–HYERS STABILITY OF AN INITIAL-VALUE PROBLEM FOR A FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH DEVIATING ARGUMENTS

Natalia DILNA

Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, Bratislava, Slovakia
dilna@mat.savba.sk

The study is devoted to the investigation of Ulam–Hyers stability of an initial-value problem for a class of fractional-order differential equations with deviating argument. To establish sufficient conditions for the existence and stability of solutions, Krasnoselskii fixed point theory is applied alongside fractional calculus techniques. Novel criteria for Ulam–Hyers stability are obtained, generalizing several existing results for delay differential equations to the fractional-order setting.

We consider the fractional functional differential equation

$$D_0^q y(t) = P(t)y(\tau(t)) + \mathcal{G}\big(t, y(\omega_1(t)), y(\omega_2(t)), \dots, y(\omega_n(t))\big), \quad t \in [0, T], \tag{13}$$

with the initial condition

$$y(0) = c, \tag{14}$$

where D_0^q is the Caputo fractional derivative of order q, $q \in (0,1)$, $c \in \mathbb{R}$, c is a parameter, $0 < T < +\infty$, $P \in L^\infty([0,T],\mathbb{R})$, and τ, $\omega_j : [0,T] \to [0,T], j = 1,2,\dots,n$, are measurable functions, and $\mathcal{G} : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is an L^∞ - Carathéodory function, $n \in \mathbb{N}$.

Definition 2 ([1]). The solution of the fractional functional differential problem (FFDP) (13), (14) is an absolutely continuous function $y : [0,T] \to \mathbb{R}$ that satisfies equality (13) for almost all $t \in [0,T]$ and possesses the property (14).

1. Notations and Definitions

We use the following notation:

- $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$; $\quad \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$; $\quad \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$;
- $L^\infty([0,T],\mathbb{R})$ is the Banach space of all Lebesgue integrable functions $y : [0,T] \to \mathbb{R}$ with the norm

$$\|y\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} |y(t)|;$$

- $\mathcal{W}^{1,\infty}([0,T],\mathbb{R})$ is the Sobolev space of all functions $y : [0,T] \to \mathbb{R}$ that are absolutely continuous, having essentially bounded first derivatives on $[0,T]$, with the norm

$$\|y\| = \|y\|_\infty + \|y'\|_\infty.$$

Definition 3 ([7]). The function $\mathcal{G}$ satisfies L^∞ - Carathéodory conditions on $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ if

- $\mathcal{G}(t,\cdot,\dots,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is continuous for a. e. $t \in [0,T]$;
- $\mathcal{G}(\cdot, y_1, y_2, \dots, y_n) : [0,T] \to \mathbb{R}$ is measurable for all $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$;
- For each compact set $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$, there exists a function $\eta \in L^\infty([0,T],\mathbb{R})$, $\eta \geq 0$, such that

$$|\mathcal{G}(t, y_1, y_2, \dots, y_n)| \leq \eta(t)$$

for all $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathcal{K}$ and a. e. $t \in [0,T]$.

Definition 4 (§2.1 and §2.4 in [5]).

- For $y(t) \in \mathcal{W}^{1,\infty}((0,T],\mathbb{R})$, the Caputo fractional derivative $D_0^q y(t)$ of order q, $q \in (0,1)$, exists almost everywhere on $(0,T]$ and

$$D_0^q y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_0^t (t-s)^{-q} y'(s)\,ds, \quad \text{where} \quad \Gamma(q) := \int_0^\infty t^{q-1} e^{-t}\,dt.$$

- For $y(t) \in L^{\infty}((0,T],\mathbb{R})$, the fractional integral $\mathcal{I}_{0t}^{q}$ of order q, $q \in (0,1)$, is defined by

$$\mathcal{I}_{0t}^{q} y(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} y(s)ds, \quad \text{for almost all} \quad t \in (0,T]).$$

Definition 5 ([2--4,8]). The problem (13), (14) is UH-stable if there exists a constant $\alpha > 0$ such that for arbitrary $\varepsilon > 0$, and for each function $u \in \mathcal{W}^{1,\infty}([0,T],\mathbb{R})$ satisfying the inequality

$$\left| D_0^q u(t) - P(t)u(\tau(t)) - \mathcal{G}\big(t, u(\omega_1(t)), u(\omega_2(t)), \ldots, u(\omega_n(t))\big) \right| \leq \varepsilon, \quad t \in [0,T], \tag{15}$$

there exists a solution $y \in \mathcal{W}^{1,\infty}([0,T],\mathbb{R})$ of the problem (13), (14) with $c = u(0)$ that satisfies

$$|u(t) - y(t)| \leq \alpha\varepsilon. \tag{16}$$

In other words, UH stability of a problem is its property of having an exact solution close to an approximate solution.

2. Auxiliary Propositions

In our investigation, we use the following statements.

Lemma 1 (Lemmas 2.21 and 2.22, [5]). *The next properties hold almost everywhere on* $[0,T]$*:*

(i) Suppose that $0 < q < 1$ *and* $y(t) \in L^{\infty}([0,T],\mathbb{R})$*, then*

$$D_0^q \mathcal{I}_{0t}^{q} y(t) = y(t);$$

(ii) Suppose that $0 < q < 1$ *and* $y(t) \in \mathcal{W}^{1,\infty}([0,T],\mathbb{R})$*, then*

$$\mathcal{I}_{0t}^{q} D_0^q y(t) = y(t) - y(0).$$

Lemma 2. *The nonhomogeneous initial value problem* (13), (14) *is equivalent to the fractional integral equation*

$$y(t) = c + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} P(s) y(\tau(s))ds + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \mathcal{G}\left(s, y(\omega_1(s)), y(\omega_2(s)), \ldots, y(\omega_n(s))\right) ds,$$

where $t \in [0,T]$ *and* $y(\cdot) \in \mathcal{W}^{1,\infty}([0,T],\mathbb{R})$.

Proposition 1 (Krasnoselskii's fixed point theorem, Chapter III, p. 148, [6]). *Assume that S is a closed, convex, bounded subset of a Banach space E and suppose that B_1 and B_2 are operators on S satisfying the following conditions:*

1. $B_1(x) + B_2(y) \in S$, *for all* $x, y \in S$;
2. B_1 *is continuous and compact;*
3. B_2 *is a contraction.*

Then, there exists $x \in S$ *such that* $B_1(x) + B_2(x) = x$.

Lemma 3. *Assume that a function* $u \in \mathcal{W}^{1,\infty}([0,T],\mathbb{R}^n)$ *satisfies the inequality* (15)*. Then, the following inequality is fulfilled:*

$$\left\| u(t) - u(0) - \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \left(P(s)u(\tau(s) - \mathcal{G}\Big(s, u(\omega_1(s)), u(\omega_2(s)), \ldots, u(\omega_n(s))\Big) \right) ds \right\| \leq \frac{T^{q-1}(T+q)}{\Gamma(q+1)} \varepsilon.$$

3. Solvability Conditions

In order to establish UH stability of the problem (13), (14), first, we need to prove the existence of a solution of the problem. For this purpose, we use Krasnoselskii's fixed point theorem (see Proposition 1).

Let us set the operators $B_1, B_2 : \mathcal{W}^{1,\infty}([0,T],\mathbb{R}) \to \mathcal{W}^{1,\infty}([0,T],\mathbb{R})$ as

$$B_1(y)(t) := \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} P(s) y(\tau(s)) ds + c, \tag{17}$$

$$B_2(y)(t) := \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} \mathcal{G}\big(s, y(\omega_1(s)), y(\omega_2(s)), \dots, y(\omega_n(s))\big) ds, \quad t \in [0,T]. \tag{18}$$

Remark 1. In view of Lemma 2 and formulas (17) and (18), we have that the problem (13), (14) is equivalent to the equation

$$y(t) = B_1(y)(t) + B_2(y)(t), \quad t \in [0,T].$$

Remark 2. By applying Leibnitz's integral rule, the following relations are true for $t \in [0,T]$:

$$\frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{q-1} \varphi(s) ds = (q-1) \int_0^t (t-s)^{q-2} \varphi(s) ds \quad \varphi \in L^\infty([0,T],\mathbb{R});$$

$$\frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-s)^{q-1} ds + \frac{1}{\Gamma(q)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{q-1} ds = \frac{t^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{t^{q-1}}{\Gamma(q)} = \frac{t^{q-1}(t+q)}{\Gamma(q+1)}.$$

Theorem 3. *Assume that there exist constants $M_p < \infty$, $M_{\mathcal{G}} < \infty$, $0 < L_j < \infty$, $j = 1, \dots n$, such that the conditions*

$$\|P(t)\|_\infty = M_p;$$
$$\|\mathcal{G}(t,0,0,\dots,0)\|_\infty = M_{\mathcal{G}};$$
$$\Big|\mathcal{G}\Big(\cdot, x_1, x_2, \dots, x_n\Big) - \mathcal{G}\Big(\cdot, y_1, y_2, \dots, y_n\Big)\Big| \le \sum_{j=1}^n L_j |x_j - y_j|$$

are fulfilled for any x_j and $y_j \in \mathcal{W}^{1,\infty}([0,T],\mathbb{R})$, $j = 1,2,\dots,n$. Moreover, suppose that there exists $\kappa \in (0,1)$ such that

$$\kappa := \kappa_1 + \kappa_2, \quad \kappa_1 = \frac{T^{q-1}(T+q)}{\Gamma(q+1)} M_p, \quad \kappa_2 = \frac{T^{q-1}(T+q)}{\Gamma(q+1)} \sum_{j=1}^n L_j. \tag{19}$$

Then, the initial-value problem (14) *for the fractional differential equation with deviating arguments* (13) *has a solution.*

4. Ulam-Hyers stability

Theorem 4. *Under the assumptions of Theorem 3, the initial-value problem* (14) *for the fractional differential equation with deviating arguments* (13) *is Ulam–Hyers stable in the sense of Definition 5. In particular, there exists*

$$\alpha := \frac{T^{q-1}(T+q)}{\Gamma(q+1)(1-\kappa)} > 0, \tag{20}$$

such that for every $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ and every $u \in \mathcal{W}^{1,\infty}([0,T],\mathbb{R}^n)$ satisfying (15)*, there is a unique solution $y \in \mathcal{W}^{1,\infty}([0,T],\mathbb{R}^n)$ of* (13)*,* (14) *with the coupled initial condition $c = u(0)$ satisfying* (16)*.*

5. Proofs

The proofs of Theorems 3 and 4 proceed by applying Theorems 1 and 2 of [2] alongside Theorem 2 and Remark 5 of [3]. Specifically, we identify the corresponding operators and terms by setting

$$P(t)y(\tau(t)) := \sum_{i=1}^m p_i(t) x(\tau_i(t)), \quad m \in \mathbb{N},$$

$$\sum_{i=1}^m z_i(t) x(v_i(t)) := 0, \quad f(t) := 0,$$

(cf. problem (1), (2) from [2]), with the initial conditions $y(0) = c$, where $c := u(0)$ (cf. Definition 2 from [3]). Under this specific identification of terms, the problem satisfies all hypotheses of the cited assertions, directly yielding the desired solvability conditions and stability bounds. This completes the proof.

6. Conclusions

We proved the existence of an explicit constant α that ensures Ulam–Hyers stability of the initial-value problem (14) for the fractional differential equation with deviating arguments (13) in the space $W^{1,\infty}([0,T],\mathbb{R})$.

Since exact solutions to (13), (14) are generally elusive compared to approximate solutions satisfying (15) with $u(0) = c$, Ulam–Hyers stability serves as a crucial practical tool.

A major limitation of our framework is its confinement to compact intervals. Future research could naturally extend these solvability and stability results to unbounded domains, as well as investigate generalized stability regimes under weaker assumptions.

7. Funding sources

This research is supported by the Slovak Grant Agency VEGA-SAV No. 2/0062/24 and The Slovak Research and Development Agency APVV No. VV-MVP-24-0424.

1. Azbelev N., Maksimov V., Rakhmatullina L. *Introduction to the Theory of Linear Functional Differential Equations*. World Federation Publishers Company: Atlanta, GA, USA, 1995.
2. Dilna N., Fekete G., Langerová M., Tóth B.. Ulam–Hyers and Generalized Ulam–Hyers Stability of Fractional Differential Equations with Deviating Arguments. *Mathematics*. 2024. Vol. 12, No. 3418. https://doi.org/10.3390/math12213418
3. Dilna N., Jadlovska I. On the Correct Application of Ulam–Hyers Stability to Initial Value Problems for Second-Order Functional Differential Equations, Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2026. Vol. 46, No. 7, 6963-6974. https://doi.org/10.1002/mma.70426
4. Hyers D.H. On the stability of the linear functional equation. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*. 1941. Vol. 27. Pp. 222--224.
5. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier: Amsterdam, The Netherlands, 2006.
6. Krasnoselskii M.A. *Topological methods in theory of nonlinear integral equations. Modern Problems of Mathematics*. Gos. Tech. Izd. 1956.
7. Rachunková I., Staněk S., Tvrdý M. *Solvability of Nonlinear Singular Problems for Ordinary Differential Equations*. Book Series: Contemporary Mathematics and its applications. Hindawi Publishing Corporation: London, UK. 2008.
8. Ulam S.M. *Problems in Modern Mathematics*. Chapter VI, Science Editions. Wiley: New York, NY, USA. 1960.

СТІЙКІСТЬ УЛАМА-ГАЄРСА ПОЧАТКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ З ВІДХИЛЕННЯМИ АРГУМЕНТІВ

Метою дослідження є аналіз стійкості Улама–Гаєрса початкової задачі для нелінійних диференціальних рівнянь дробового порядку з відхиленням аргументів. Із використанням теорії нерухомої точки (теорема Красносельського) та аналітичних оцінок інтегральних операторів дробового числення встановлено достатні умови існування та стійкості розв'язків. Отримані результати узагальнюють відповідні твердження для класичних рівнянь на дробові моделі із відхиленням аргументів.

СЕКЦІЯ ІІ
АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ МЕТОДИКИ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

УДК 373.5.016:51]:159.955

ОКРЕМІ ШЛЯХИ РОЗВИТКУ КРЕАТИВНОГО МИСЛЕННЯ УЧНІВ СЬОМИХ КЛАСІВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Надія КОРНІЄНКО, Віталій АЧКАН
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка
nadiakorniienko25@gmail.com,

Сучасна математична освіта дедалі більше орієнтується не лише на засвоєння знань, а й на формування в учнів здатності застосовувати їх у нових ситуаціях та самостійно розв'язувати нестандартні завдання. У цьому контексті особливого значення набуває розвиток креативного мислення як складової математичної діяльності. Особливо актуальною ця проблема є у середньому шкільному віці, коли навчання математики може стати простором для дослідження, пошуку й власних міркувань. Дослідження показують, що спеціально підібрані завдання можуть сприяти глибшому аналізу, генеруванню ідей та формуванню активної ролі учнів у навчанні [1, 2]. Різним аспектам формування креативного мислення на уроках математики присвячені дослідження A. Bicer [1], J. Joklitschke, B. Rott, M. Schindler [2], E. Levenson, R. Swisa, M. Tabach [3], Silver E. A. [5]. Водночас аналіз наукових джерел свідчить, що питання уточнення та конкретизації шляхів розвитку креативного мислення на уроках математики потребує подальшого дослідження.

У межах математичної освіти креативне мислення доцільно тлумачити розглядати як здатність продукувати нові й оригінальні ідеї, знаходити нестандартні способи розв'язання завдань та гнучко застосовувати знання [5]. Воно проявляється у пошуку різних підходів до розв'язання, поєднанні відомих методів і створенні власних способів. Основними характеристиками математичної креативності є продуктивність (генерування кількох ідей або рішень), гнучкість (здатність змінювати підходи) та оригінальність (нестандартність ідей) [2]. Розвиток цих якостей створює умови для самостійного й творчого розв'язання математичних завдань.

Для розвитку зазначених якостей у семикласників доцільно змінювати характер математичної діяльності, створюючи більше можливостей для самостійного пошуку. Зокрема, цьому сприяють відкриті й багатоваріантні завдання, дослідницька діяльність та ситуації, у яких учні можуть самостійно обирати, змінювати або створювати способи розв'язання математичних проблем [2, 3, 4].

Одним із ефективних шляхів розвитку креативного мислення на уроках математики є використання відкритих задач, зокрема таких, що допускають кілька способів розв'язання. Такі завдання не задають учневі єдиного способу дії, а спонукають шукати, порівнювати та обирати стратегію розв'язання. Аналіз різних способів розв'язання однієї задачі дає змогу генерувати альтернативні рішення, змінювати підходи до математичної проблеми та обґрунтовувати вибір стратегії, що пов'язано з розвитком продуктивності й гнучкості мислення [3, 4].

Наприклад, семикласникам можна запропонувати задачу: «Периметр прямокутника дорівнює 20 см, а його довжина на 2 см більша за ширину. Знайдіть сторони прямокутника двома різними способами». В одному випадку учні можуть скласти й розв'язати рівняння, в іншому – скористатися півпериметром і різницею сторін. Порівняння отриманих способів допомагає побачити, що одна математична ситуація може мати різні шляхи розв'язання. Така робота сприяє розвитку продуктивності через пошук кількох рішень і гнучкості через перехід від одного способу міркування до іншого [3, 4].

Значний потенціал для розвитку креативного мислення мають відкриті математичні проблеми, у яких наперед не визначено спосіб пошуку відповіді. На відміну від задач із кількома способами розв'язання, тут учень має більшу свободу у виборі методів, способу представлення результату та напряму дослідження. Це дає можливість самостійно висувати припущення, перевіряти їх і шукати власний шлях до результату [2, 3].

Наприклад, семикласникам можна запропонувати проблемну ситуацію: «Сума двох натуральних чисел дорівнює 20. Дослідіть, яких значень може набувати їхній добуток. Визначте, за яких чисел добуток буде найбільшим». Учні можуть обрати різні способи дослідження: скласти таблицю, виконати систематичний перебір або обґрунтувати залежність добутку від значень чисел. Важливим результатом стає не лише отримання відповіді, а й формулювання та перевірка власного припущення. Така діяльність розвиває продуктивність через генерування ідей і гнучкість через самостійний вибір стратегії [1, 3].

Важливим засобом розвитку креативного мислення є залучення учнів до дослідницько-творчої діяльності, що передбачає пошук закономірностей, висунення та перевірку припущень, а також створення власних математичних задач. На відміну від розв'язування «закритої» задачі, така діяльність дає учневі можливість самостійно визначати, що саме досліджувати, як перевірити припущення та як представити отриманий результат. Створення власних математичних задач розглядається як один із напрямів розвитку математичної креативності [1, 5].

Наприклад, учням можна запропонувати дослідити кількість діагоналей у трикутнику, чотирикутнику, п'ятикутнику та шестикутнику. Встановивши закономірність, учні формулюють припущення про кількість діагоналей у довільному многокутнику та перевіряють його на інших прикладах. На завершення доцільно запропонувати кожному учневі або групі скласти власну задачу, пов'язану з виявленою закономірністю. Така робота поєднує пошук ідей, перевірку припущень та створення власного математичного продукту, що сприяє розвитку продуктивності, гнучкості та оригінальності мислення [1, 5].

Отже, розвиток креативного мислення учнів сьомих класів на уроках математики доцільно пов'язувати зі зміною характеру математичної діяльності: від відтворення готового алгоритму до самостійного пошуку, вибору та створення способів розв'язання. Задачі з кількома способами розв'язання, відкриті математичні проблеми та дослідницько-творчі завдання дають змогу систематично розвивати продуктивність, гнучкість та оригінальність мислення. Організація цієї діяльності має враховувати особливості сприйняття змісту навчального матеріалу, вікові та індивідуальні особливості учнів сьомих класів діяльність була пов'язана зі змістом навчального матеріалу і послідовно включалася в освітній процес.

1. Examining middle school students' experiences with opportunities for mathematical creativity / A. Bicerta ін. Mathematics Education Research Journal. 2026. URL: https://doi.org/10.1007/s13394-026-00594-z (дата звернення: 24.09.2026).
2. *Joklitschke J., Rott B., Schindler M.* Notions of Creativity in Mathematics Education Research: a Systematic Literature Review. International Journal of Science and Mathematics Education. 2021. URL: https://doi.org/10.1007/s10763-021-10192-z (дата звернення: 24.09.2026).
3. *Levenson E., Swisa R., Tabach M.* Evaluating the potential of tasks to occasion mathematical creativity: definitions and measurements. Research in Mathematics Education. 2018. Т. 20, № 3. С. 273–294. URL: https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1450777 (дата звернення: 24.09.2026).
4. *Schindler M., Lilienthal A. J.* Students' Creative Process in Mathematics: Insights from Eye-Tracking-Stimulated Recall Interview on Students' Work on Multiple Solution Tasks. International Journal of Science and Mathematics Education. 2019. Т. 18, № 8. С. 1565–1586. URL: https://doi.org/10.1007/s10763-019-10033-0 (дата звернення: 24.09.2026).
5. *Silver E. A.* Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. 1997. Т. 29, № 3. С. 75–80. URL: https://doi.org/10.1007/s11858-997-0003-x (дата звернення: 24.09.2026).

SELECTED APPROACHES TO DEVELOPING CREATIVE THINKING AMONG SEVENTH-GRADE STUDENTS IN MATHEMATICS LESSONS

The purpose of this paper is to review and analyze pedagogical approaches to developing creative thinking in 7th-grade students during mathematics lessons. The study draws on a theoretical analysis of pedagogical and mathematical literature, a review of active learning frameworks, and an examination of task-based methodologies, including multiple-solution tasks, open-ended problems, exploratory activities, and student-led problem posing. The analysis indicates that shifting mathematical activity from algorithmic reproduction toward independent exploration can support key dimensions of mathematical creativity, particularly productivity, flexibility, and originality. In particular, opportunities to apply diverse solution strategies, address open-ended problems, and formulate mathematical problems independently encourage students to generate alternative ideas, adapt their reasoning flexibly, and develop their own mathematical insights. The findings highlight the potential of exploratory and open-ended approaches as a means of fostering creative thinking in lower-secondary mathematics education.

УДК 378.147:37.091.26

ПІДГОТОВКА МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ ДО ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ УЧНІВ ЗАСОБАМИ КОМПЕТЕНТНІСНИХ ЗАВДАНЬ

Ольга БАРНА
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка,
Тернопіль, Україна
barna@tnpu.edu.ua

Реалізація концепції Нової української школи зумовила суттєве переосмислення підходів до оцінювання результатів навчання учнів: від переважної фіксації рівня засвоєння знань і вмінь – до оцінювання як складника освітнього процесу, що дає змогу виявляти навчальний поступ учня, визначати його сильні сторони й труднощі, надавати зворотний зв'язок та приймати обґрунтовані рішення щодо подальшого навчання [1].Такі зміни актуалізують проблему підготовки майбутніх учителів до здійснення оцінювальної діяльності відповідно до сучасних вимог загальної середньої освіти.

Зауважимо, що формування контрольно-оцінювальної компетентності майбутніх вчителів є предметом дослідження науковців, що підтверджує тезу про важливість пошуку ефективних методичних підходів. Зокрема, Таточенко і Шипко [2] ще у 2016 р. розглядали контрольно-оцінювальну компетентність як складник професійної компетентності майбутнього вчителя математики та пропонували формувати її через розв'язування спеціальних методичних задач ситуаційного характеру.Сучасний систематичний огляд S. Pastore показує, що assessmentliteracy охоплює конструювання й застосування засобів оцінювання, інтерпретацію результатів, використання їх для педагогічних рішень та комунікацію результатів оцінювання [3]. В той же час дослідники Enu і Ngcobo в майбутніх учителів математики виявили тенденцію сприймати оцінювання переважно як підсумкове і як загальнопедагогічну, а не специфічну для навчання математики діяльність [4], що підтверджує потребу у дослідженні підходів до формування здатностей майбутніх педагогів до оцінювання не тільки в розрізі освіти України, а й в цілому у світі.

Підготовку майбутнього вчителя математики та інформатики до оцінювання результатів навчання учнів розглядаємо як цілеспрямований процес формування його готовності проєктувати, організовувати та здійснювати оцінювання, інтерпретувати отримані результати й використовувати їх для коригування подальшого освітнього процесу. На нашу думку, така підготовка має охоплювати кілька взаємопов'язаних складників. Теоретико-нормативний складник передбачає розуміння мети, функцій і видів оцінювання, знання нормативних вимог до оцінювання результатів навчання учнів та особливостей формувального, поточного і підсумкового оцінювання. Предметно-методичний складник пов'язаний з умінням співвідносити результати навчання математичної та інформатичноїосвітніх галузей зі змістом і видами навчальної діяльності учнів, добирати та конструювати завдання, за допомогою яких можна отримати докази досягнення цих результатів. Критеріально-інструментальний складник охоплює вміння визначати критерії та показники оцінювання, розробляти схеми нарахування балів, добирати й застосовувати відповідні методи та інструменти оцінювання. Аналітико-коригувальний складник передбачає здатність аналізувати й інтерпретувати результати виконання учнями оцінювальних завдань, виявляти типові та індивідуальні труднощі, надавати конструктивний зворотний зв'язок і на цій основі визначати подальші педагогічні дії.

Отже, готовність майбутнього вчителя до оцінювальної діяльності не може обмежуватися знанням нормативних вимог чи володінням окремими методами контролю. Важливим є формування здатності вибудовувати цілісний процес оцінювання, логіку якого можна представити послідовністю декількох взаємопов'язаних елементів (рис. 1):



Рис. 1. Логіка проєктування та здійснення оцінювання результатів навчання учнів

Одним із ресурсів, що може бути використаний для формування готовності майбутніх учителів математики та інформатики до оцінювальної діяльності, є платформа «Каталог компетентнісних робіт для НУШ» [5], де розміщено понад 100 компетентнісних робіт для 7–8 класів з різних освітніх галузей, які створені в межах заходів ЮНЕСКО з підтримки професійного розвитку вчителів в Україні за підтримки GlobalPartnershipforEducation, у партнерстві з «Освіторією» та у співпраці з МОН України. Для кожної роботи подано завдання для учнів; схему оцінювання; приклади розв'язків відкритих завдань; методичні рекомендації; електронну таблицю з характеристиками кожного завдання, його співвіднесенням із результатами Державного стандарту та групами результатів. Наприклад, діагностувальна робота з математики для 7 класу містить 8 завдань та охоплює всі чотири групи результатів математичної освітньої галузі. Діагностувальна робота з інформатики для 7 класу містить 12 завдань і також спрямована на оцінювання всіх чотирьох груп результатів інформатичної освітньої галузі: роботи з даними та інформацією; створення інформаційних продуктів; усвідомленого використання інформаційно-комунікаційних технологій; усвідомлення наслідків використання інформаційних

технологій та дотримання етичних і правових норм інформаційної взаємодії. Для обох робіт, як і для всіх інших, разом із завданнями запропоновано схеми оцінювання, методичні поради та опис завдань, що дає змогу використовувати їх як комплексні методичні кейси для підготовки майбутніх учителів.

Аналіз завдань математичної та інформатичної освітніх галузей засвідчив їх орієнтацію на оцінювання не лише предметних знань і вмінь, а й здатності учнів застосовувати їх у різних навчальних і практичних ситуаціях. Завдання передбачають аналіз запропонованої ситуації та даних, вибір способу дії, застосування предметних знань для розв'язання проблеми, обґрунтування отриманого результату. Відкриті та комплексні завдання створюють можливість оцінювати не лише кінцеву відповідь, а й спосіб міркування та виконання завдання учнем.

У професійній підготовці майбутніх учителів доцільно, на нашу думку, перейти від ознайомлення з готовими оцінювальними матеріалами до їх послідовного професійного аналізу, експертизи, адаптації та самостійного конструювання. З цією метою пропонуємо п'ятиетапну модель роботи студентів із матеріалами платформи (табл. 1).

Таблиця 1.

Модель роботи майбутніх учителів математики та інформатики з оцінювальними матеріалами

Етап	Діяльність студентів	Орієнтовне завдання	Результат підготовки
1. Ідентифікація результату навчання	Аналізує завдання з платформи та визначає, який результат / групу результатів воно дає змогу оцінити	*Визначте та обґрунтуйте, досягнення якого результату навчання перевіряє завдання. Зіставте свій висновок з характеристикою завдання.*	Уміє встановлювати зв'язок «результат навчання → оцінювальне завдання»
2. Аналіз доказів навчання	Визначає, які дії та відповіді учня можуть бути доказами досягнення результату	*Що саме має зробити учень, щоб продемонструвати досягнення результату? Які елементи його відповіді є доказами цього?*	Уміє визначати спостережувані прояви результату навчання
3. Аналіз та експертиза оцінювання	Аналізує схему оцінювання, еталонні відповіді, розподіл балів; зіставляє їх із заявленими результатами	*Проаналізуйте схему оцінювання. За що нараховується кожний бал? Чи дає запропонована схема змогу об'єктивно оцінити заявлений результат?*	Уміє встановлювати зв'язок «доказ → критерій → бал», оцінювати валідність і прозорість критеріїв
4. Адаптація та конструювання	Модифікує готове завдання або створює власне за заданим результатом навчання; розробляє критерії та схему оцінювання	*Змініть завдання так, щоб воно давало змогу оцінити інший результат / вищий рівень його прояву. Розробіть схему оцінювання.*	Уміє самостійно проєктувати «результат → завдання → критерії оцінювання»
5. Інтерпретація результатів і педагогічне рішення	Аналізує змодельовані або реальні відповіді учнів, виявляє труднощі та визначає подальші дії вчителя	*Оцініть три відповіді учнів. Якого результату досяг кожен? Які труднощі виявлено? Що має зробити вчитель далі?*	Уміє використовувати результати оцінювання для коригування подальшого навчання

Запропонована модель передбачає поступове ускладнення діяльності студентів. На першому етапі майбутній учитель визначає, який результат навчання дає змогу оцінити конкретне завдання, та аргументує свій висновок. Доцільно спочатку виконувати таку роботу без використання авторської характеристики завдання, а після цього зіставляти власні висновки з матеріалами розробників. Такий прийом спонукає студента не формально співвідносити завдання з результатом навчання, а аналізувати діяльність, яку має здійснити учень у процесі його виконання.На другому етапі увага зосереджується на визначенні доказів досягнення результату навчання. Студенти мають встановити, які дії учня та елементи його відповіді свідчитимуть про досягнення певного результату. Наприклад, сама правильна відповідь не завжди є достатнім доказом сформованості відповідного вміння: важливими можуть бути вибір способу розв'язання, побудова моделі, обґрунтування висновку, інтерпретація даних або пояснення алгоритму дій.Третій етап передбачає аналіз запропонованої авторами схеми оцінювання. Студенти встановлюють, за які прояви навчальної діяльності нараховуються бали, наскільки критерії відповідають заявленим результатам та чи дають вони змогу диференціювати різні рівні виконання завдання. У такий спосіб формується розуміння взаємозв'язку «доказ досягнення результату → критерій → оцінка».На четвертому етапі діяльність набуває продуктивного характеру: майбутнім учителям пропонується модифікувати готове завдання або сконструювати власне для оцінювання визначеного результату навчання, сформулювати критерії та розробити схему оцінювання. Завдання може бути також трансформоване

таким чином, щоб змінити рівень його складності, контекст, вид діяльності учня або результат навчання, який воно дає змогу оцінити.Завершальний етап пов'язаний з інтерпретацією результатів оцінювання та прийняттям педагогічних рішень. Студентам можна запропонувати реальні або змодельовані відповіді кількох учнів на одне завдання, які необхідно оцінити за визначеними критеріями, встановити характер допущених помилок і труднощів та запропонувати подальші педагогічні дії. Саме цей етап дає змогу перейти від розуміння оцінювання як процедури виставлення бала до його використання як інструменту підтримки навчального поступу учня.Таким чином, одне й те саме оцінювальне завдання може стати для майбутнього вчителя об'єктом багаторівневого методичного аналізу: від визначення результату навчання, на оцінювання якого воно спрямоване – до інтерпретації можливих відповідей учнів та прийняття педагогічних рішень. У цьому випадку готові матеріали платформи виконують не репродуктивну, а навчально-проєктувальну функцію: студент не відтворює запропоновану авторами систему оцінювання, а досліджує логіку її побудови, здійснює експертизу та набуває досвіду створення власного оцінювального інструментарію.

Отже, використання матеріалів платформи «Каталог компетентнісних робіт для НУШ» у професійній підготовці майбутніх учителів математики та інформатики створює можливості для поєднання теоретико-нормативного, предметно-методичного, критеріально-інструментального та аналітико-коригувального складників їхньої готовності до оцінювальної діяльності. Запропонована послідовність роботи забезпечує перехід від засвоєння студентами теоретичних засад оцінювання до їх практичного застосування. Перспективним напрямом подальшої роботи є апробація запропонованої моделі у процесі методичної підготовки майбутніх учителів математики та інформатики та дослідження її впливу на формування їхньої готовності до оцінювальної діяльності.

1. Наказ Міністерства освіти і науки України «Про затвердження Рекомендацій щодо оцінювання результатів навчання учнів 5-9 класів закладів загальної середньої освіти» № 1427 від 14 серпня 2026. URL: https://mon.gov.ua/npa/pro-zatverdzhennia-rekomendatsii-shchodo-otsiniuvannia-rezultataiv-navchannia-uchniv-5-9-klasiv-zakladiv-zahalnoi-serednoi-osvity.
2. *Таточенко В.І., Шипко А.Л.* Контрольно-оцінювальна компетентність майбутніх вчителів математики. (2016). Збірник наукових праць «Information Technologies in Education» (ITE), 26, 126-147. https://doi.org/10.14308/ite000577.
3. *Pastore S.* (2023) Teacherassessmentliteracy: a systematicreview. Front. Educ. 8:1217167. doi: 10.3389/feduc.2023.1217167. URL: https://www.frontiersin.org/journals/education/articles/10.3389/feduc.2023.1217167/full.
4. *Enu J., Ngcobo Z. A.* ThreeGhanaianPreserviceTeachers' KnowledgeandUnderstandingofAssessmentLiteracy: ImplicationsforTeachingandLearningofMathematics. JournalofMathematicsEducationatTeachersCollege. 2024. 15(1). P. 23–30. DOI: 10.52214/jmetc.v15i1.10612.https://journals.library.columbia.edu/index.php/jmetc/article/view/10612/6299.
5. Каталог компетентнісних робіт для НУШ. URL: https://nus-tasks.net/.

PREPARING FUTURE MATHEMATICS AND INFORMATICS TEACHERS TO ASSESS STUDENTS' LEARNING OUTCOMES THROUGH COMPETENCY-BASED TASKS

The study aims to substantiate the potential of competency-based tasks from the Catalogue of Competency-Based Tasks for the New Ukrainian School for preparing future mathematics and informatics teachers to assess students' learning outcomes. The research employed analysis of scientific and methodological literature and regulatory documents, content analysis of the platform materials, comparison, and generalization.

The main result is a five-stage model for working with assessment materials, which includes identifying learning outcomes, analyzing evidence of their achievement, examining assessment criteria, adapting and designing tasks, and interpreting assessment results to inform pedagogical decisions.

The proposed approach supports the transition from theoretical knowledge of assessment to its practical application in future teachers' professional training.

УДК 376.1:51

ПРЕДМЕТНО-ПРАКТИЧНА ДІЯЛЬНІСТЬ ЯК ОСНОВА ФОРМУВАННЯ БАЗОВИХ МАТЕМАТИЧНИХ УЯВЛЕНЬ УЧНІВ 5-6 КЛАСІВ З ООП

Маріан БИРКА
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна
m.byrka@chnu.edu.ua
Олеся ПРИУТЕСКУ
Чернівецька гімназія №19Чернівецького району Чернівецької області, м. Чернівці, Україна
priuteskuolesa@gmail.com

Вступ. Сучасний етап розвитку системи освіти характеризується посиленням уваги до забезпечення рівного доступу до якісної освіти для всіх здобувачів, зокрема учнів з особливими освітніми потребами (ООП). Важливим завданням інклюзивного навчання є створення таких педагогічних умов, за яких кожна дитина може максимально реалізувати власні пізнавальні можливості, набути необхідних компетентностей та поступово інтегруватися в освітнє й соціальне середовище.

Особливого значення набуває навчання математики учнів 5-6 класів з ООП, оскільки саме на цьому етапі відбувається перехід від початкової до базової середньої освіти, ускладнюється зміст навчального матеріалу, зростає рівень абстрактності математичних понять, посилюється роль словесно-логічного мислення. Для значної частини учнів з ООП традиційне засвоєння математичних знань через пояснення, символічні записи та виконання однотипних вправ може бути недостатньо ефективним. У зв’язку з цим актуальним є пошук методів і засобів, які забезпечують опору на безпосередній практичний досвід дитини.

Одним із перспективних напрямів є використання предметно-практичної діяльності як основи формування базових математичних уявлень.

Мета дослідження полягає в теоретичному і методичному обґрунтуванні предметно-практичної діяльності як основи формуваннябазових математичних уявлень учнів 5-6 класів з ООП.

Базові математичні уявлення розглядаємо як сукупність первинних уявлень здобувача освіти про: *властивості предметів*(порівняння за величиною, формою, кольором, розташуванням у просторі), *кількість і рахунок* (предметний рахунок у межах, доступних для засвоєння, співвідношення цифр і кількості), *величина і геометрія* (розпізнавання базових геометричних фігур (коло, квадрат, трикутник), вимірювання довжини та маси за допомогою умовних мірок) та *побутові обчислення* (елементарні дії з грошовими знаками (монетами, купюрами)для забезпечення соціально-побутової орієнтації [2].

Поняття *«предметно-практична діяльність»*тлумачимо як організовану взаємодію здобувача освіти з реальними або спеціально дібраними навчальними об’єктами, у процесі якої учень виконує практичні дії, спостерігає за їх результатом, встановлює зв'язки між кількісними та просторовими характеристиками об'єктів і поступово узагальнює отриманий досвід. Така діяльність поєднує пізнавальний, практичний та комунікативний компоненти навчання [1; 3].

Для учнів 5-6 класів з ООП предметно-практична діяльність має особливе значення, оскільки дозволяє враховувати індивідуальний темп навчання, особливості сприймання та переробки інформації, рівень сформованості пізнавальних процесів. Безпосередня дія з предметом створює додаткову сенсорну опору, сприяє концентрації уваги та полегшує встановлення причинно-наслідкових зв'язків.

Формування базових математичних уявлень учнів 5-6 класів з ООП доцільно здійснювати завдяки поступовому ускладненню освітньої діяльності: «реальний предмет → практична дія → наочна модель → схематичне зображення → математичний символ → абстрактне поняття» [3, с. 241].

Так, для формування уявлень про кількість і рахунок,під час вивчення натуральних чисел і арифметичних дій ефективним є *використання предметно-практичних вправ,* у якихздобувачам освіти пропонується перераховувати реальні предмети, складати набори певної кількості об'єктів, об’єднувати та розділяти їх, порівнювати отримані групи.

Наприклад, завдання «Було 7 олівців, до них додали ще 3. Скільки стало?» може виконуватися спочатку шляхом безпосереднього маніпулювання олівцями, потім – за допомогою малюнка або схеми, і лише після цього – шляхом запису математичного виразу 7 + 3 = 10.

Для формування уявленьпро величинив учнів 5-6 класів з ООП особливо важливо забезпечити *можливість безпосереднього вимірювання*. Зокрема, здобувачі освіти можуть вимірювати довжину предметів лінійкою, визначати масу за допомогою терезів, порівнювати об'єм ємностей, визначати час за годинником.

Наприклад, завдання «Виміряй довжину зошита», «Порівняй масу двох предметів», «Визнач, скільки хвилин тривала діяльність» допомагають усвідомити здобувачам освіти з ООП зв'язок між математичними одиницями вимірювання та реальними властивостями об'єктів.

Для формування просторових і геометричних уявленьучнів 5-6 класів з ООП доцільно *використовувати конструктори, палички, геометричні моделі, мозаїку, папір, мотузку та інші доступні матеріали*. Такі завдання сприяють розвитку просторового мислення та одночасно забезпечують емоційно позитивний досвід навчання.

Наприклад, учень може скласти квадрат із чотирьох паличок, визначити кількість його сторін і вершин, порівняти квадрат із прямокутником, створити з геометричних фігур просту композицію.

Для формування уявлень про побутові обчислення, навчальний матеріал слід*пов'язати з покупками, приготуванням їжі, плануванням маршруту, розкладом дня, вимірюванням відстаней, використанням грошей*та інші життєві і побутові ситуації.У такий спосіб математичні знання набувають практичної значущості.

Наприклад, завдання «У тебе є 100 гривень. Обери два товари та визнач, скільки грошей залишиться» поєднує арифметичні дії з реальною соціально-побутовою ситуацією.

Разом з цим, відмітимо, що ефективність формування базових математичних уявлень учнів 5-6 класів з ООП на основі предметно-практичної діяльностізначною мірою залежить відврахування вчителем математики низки рекомендацій:

*–залучення кожного здобувача освіти з ООП до багатоканального сприймання інформації*шляхом поєднання зорових, тактильних, слухових і кінестетичних опор, адже під час засвоєння поняття «довжина» здобувач освіти не лише слухає пояснення педагога, а й бачить предмет, торкається його, вимірює, називає отриманий результат та записує відповідне число;

–забезпечення доступності і поетапності розроблених вчителем завдань,що реалізується завдяки: поділу складного завдання на декілька простих послідовних кроків виконання, використаннякороткихі чітких словесних інструкції та візуальних підказок, наведення зразків дій тощо;

–поступове зменшення кількості предметних опор у міру формування математичного поняття, що передбачає на початковому етапі виконання учнем з ООП дії з реальними предметами, адалі їх поступовою заміною на малюнки, схеми та моделі, у підсумку на виконання ним математичних записів абстрактного математичного матеріалу;

–забезпечення розмаїття способів виконання завданьпредметно-практичної діяльності,адже одна й та сама математична тема може бути вивчена через різні способи і шляхи опрацювання змісту і практичного застосування певного математичного поняття. Наприклад, під час вивчення поняття «величина», один здобувач освіти може порівнювати два предмети за довжиною, інший – вимірювати їх у сантиметрах, а ще один – обчислювати різницю між отриманими значеннями. Спільним залишається, але його відповідають індивідуальним можливостям учнів.

Висновки.Отже, предметно-практична діяльність може розглядатися як важлива основа формування базових математичних уявлень учнів 5-6 класів з ООП, яка забезпечує зв'язок між конкретним досвідом здобувача освіти та абстрактним математичним знанням, підвищує доступність навчального матеріалу, сприяє розвитку пізнавальної активності, самостійності та здатності застосовувати математичні знання у повсякденному житті.

Ефективність такої діяльності значною мірою залежить відзалучення кожного здобувача освіти з ООП до багатоканального сприймання інформації, забезпечення доступності і поетапностірозроблених вчителем завдань, поступового зменшення кількості предметних опор у міру формування математичного поняття, а такожзабезпечення розмаїття способів виконання завдань з математики.

1. *Біневич І.* До проблеми формування математичної компетентності в учнів з порушеннями інтелектуального розвитку // Особлива дитина: навчання і виховання. 2023. №112(4). С. 142-164.
2. Навчальна програма «Елементарні математичні уявлення» для дітей 5-10 класів з інтелектуальними порушеннями помірного та тяжкого ступенів. URL: https://drive.google.com/file/d/1AX9MEjLz4QXuJxD4Q2Dn1OqGtn8QAhBo/view.

3. *Павлишина Н.* Формування математичної компетентності дітей з особливими освітніми потребами у процесі корекційно-розвиткової роботи // ActaPaedagogicaVolynienses. 2025. Вип. 5. С. 239-243. DOI: https://doi.org/10.32782/apv/2025.5.33.

SUBJECT-BASED PRACTICAL ACTIVITY AS A BASIS FOR FORMING BASIC MATHEMATICAL CONCEPTS OF 5TH-6TH GRADE STUDENTS WITH SPECIAL EDUCATIONAL NEEDS

The concept of «subject-based practical activity» is interpreted as an organized interaction of a student with real or specially selected educational objects, during which the student performs practical actions, observes their result, establishes connections between the quantitative and spatial characteristics of objects and gradually generalizes the experience gained. For studentsin grades 5-6with special educational needs, subject-based practical activity is of particular importance, since it allows taking into account the individual pace of learning, the peculiarities of perception and processing of information, and the level of formation of cognitive processes. Direct action with the object creates additional sensory support, promotes concentration of attention and facilitates the establishment of cause-and-effect relationships.

The formation of basic mathematical concepts of students in grades 5-6 with special educational needsis advisable to carry out through the gradual complication of educational activities: «real object → practical action → visual model → schematic image → mathematical symbol → abstract concept». Exercises and examples are provided for the formation of basic mathematical concepts of students in grades 5-6 with special educational needs about: properties of objects, quantity and counting, magnitude and geometry, and everyday calculations.

The effectiveness of such activities largely depends on the involvement of each student in special educational needs education in multi-channel perception of information, ensuring the accessibility and gradualness of tasks developed by the teacher, gradually reducing the number of subjects supports as the mathematical concept is formed, and ensuring a variety of ways to complete mathematical tasks.

УДК 373.5.016:512.624

КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ЯК ЗАСІБ ФОРМУВАННЯ АЛГЕБРАЇЧНО-ГЕОМЕТРИЧНОГО МИСЛЕННЯ УЧНІВ

Володимир БОНДАРЧУК
здобувач другого рівня вищої освіти спеціальності Середня освіта (Математика),
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль, Україна,
bondarchuk_vr@fizmat.tnpu.edu.ua
Ірина БІЛАНИК
доктор філософії зі спеціальності «Математика», викладач,
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка,
м. Тернопіль, Україна,
i.bilanyk@tnpu.edu.ua

У процесі вивчення комплексних чисел учні часто сприймають їх передусім як новий алгебраїчний об’єкт, для якого необхідно засвоїти правила додавання, множення та переходу між різними формами запису. Водночас геометричний зміст комплексного числа та його показникової форми може залишатися недостатньо пов’язаним із розв’язуванням задач. Це породжує методичну проблему: як показати учневі, що комплексне число може бути не лише об’єктом обчислень, а й математичною моделлю геометричного процесу? Метою роботи є обґрунтування доцільності використання комплексних чисел для розв’язування проблемних геометричних задач та визначення їх методичних можливостей у формуванні алгебраїчногеометричного мислення учнів профільної школи. Методи дослідження: аналіз математичної та навчально-методичної літератури, моделювання, порівняння способів розв’язування задач та аналіз навчальних ситуацій. Ідея запропонованого підходу полягає у зміні ролі комплексного числа в навчальній задачі. Точка площини P(x, y) розглядається як комплексне число

$$z = x + iy.$$

Тоді геометричні перетворення отримують природне алгебраїчне представлення. Паралельне перенесення на вектор (a1, a2) задається формулою

$$z \longmapsto z + a, \qquad a = a_1 + ia_2,$$

а поворот навколо початку координат на кут α — множенням на

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

Поворот навколо довільного центра z0 можна подати у вигляді

$$z \longmapsto e^{i\alpha}(z - z_0) + z_0.$$

Саме перехід від геометричної дії до алгебраїчної моделі створює основу для проблемного навчання. Геометрична інтерпретація комплексних чисел та розгляд комплексних функцій як перетворень площини є також важливою складовою сучасного математичного викладу цієї теми [1, 2]. Першу проблемну ситуацію можна побудувати на композиції декількох геометричних перетворень. Задача 1. Матеріальна точка починає рух із точки A(1, 2). Спочатку вона переміщується на вектор (3, −1), потім повертається навколо точки M(2, 3) на 90◦проти годинникової стрілки, після чого виконується гомотетія відносно початку координат із коефіцієнтом 2. Знайти кінцеві координати точки. Замість послідовного опрацювання координат можна закодувати початкову точку комплексним числом z0 = 1 + 2i.

Тоді послідовність перетворень має вигляд

$$z_1 = z_0 + (3 - i) = 4 + i,$$

$$z_2 = i\big(z_1 - (2 + 3i)\big) + (2 + 3i) = 4 + 5i,$$

$$z_3 = 2z_2 = 8 + 10i.$$

Отже, кінцеве положення точки: (8, 10) .

Зміст проблемної ситуації полягає не стільки в отриманні числової відповіді, скільки у виявленні учнями відповідності між геометричними діями та операціями над комплексними числами. Подальше узагальнення приводить до функції вигляду

$$f(z) = Az + B,$$

тобто конкретна композиція перетворень переходить у загальну алгебраїчну модель. Більш складна проблема виникає тоді, коли одна й та сама геометрична конструкція повторюється багато разів. Безпосереднє координатне відстеження руху в такій ситуації стає громіздким. Тому постає питання: як описати багаторазовий процес однією математичною моделлю та використати закономірність, що виникає під час його повторення? Задача 2. Турист подорожує містом поетапно. Кожен етап складається з трьох відрізків довжиною 100 м, розділених правими поворотами на 60◦. Між останнім відрізком одного етапу й першим відрізком наступного етапу турист робить поворот ліворуч на 60◦. На якій відстані від початкового положення він перебуватиме після 1997 етапів? Графічна побудова дає змогу спочатку дослідити характер руху та висунути припущення щодо періодичності траєкторії. Відповідну геометричну модель подано на рис. 1.

Для аналітичного опису введемо

$$\alpha = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}.$$

Результуюче переміщення протягом одного етапу дорівнює

$$x = 100 + 100\overline{\alpha} + 100\overline{\alpha}^{\,2} = 100 - 100\sqrt{3}\,i.$$

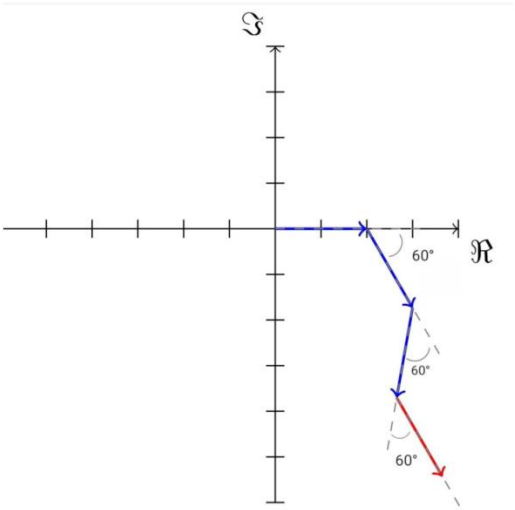


Рис. 1. Графічна модель послідовного руху туриста

Кожний наступний етап повертається на 60◦, тому сумарне переміщення після 1997 етапів задається геометричною прогресією:

$$z = x(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{1996}) = x\frac{1 - \alpha^{1997}}{1 - \alpha}. \qquad (2)$$

Оскільки $\alpha^6 = 1$ і $1997 \equiv 5 \pmod 6$, маємо

$$\alpha^{1997} = \alpha^{-1}.$$

Тому з (2)

$$z = x\alpha^2.$$

Оскільки $|\alpha| = 1$, то

$$|z| = |x| = \sqrt{100^2 + (100\sqrt{3})^2} = 200.$$

Отже, турист перебуватиме на відстані 200 м від початкового положення. Отриманий приклад демонструє послідовність математичного моделювання: спочатку учень аналізує графічну ситуацію, потім кодує напрям руху комплексними числами, виявляє повторювану структуру та переходить до геометричної прогресії. Таким чином, одна задача поєднує геометрію, алгебру, тригонометрію та елементи математичного моделювання. Використання різних форм подання комплексних чисел сприяє встановленню зв’язків між алгебраїчним і геометричним способами міркування [1, 2]. Практичне значення запропонованого підходу полягає в можливості використовувати подібні задачі під час профільного навчання математики. Державний стандарт профільної середньої освіти орієнтує освітній процес на поглиблене та професійно орієнтоване вивчення споріднених предметів і розвиток відповідних результатів навчання [3]. Тому комплексні числа доцільно розглядати не лише як окрему тему, а як інструмент встановлення зв’язків між алгеброю та геометрією. Запропонований підхід дозволяє організувати навчальну діяльність за схемою: проблемна ситуація →графічна модель →комплексна модель →виявлення закономірності →алгебраїчне узагальнення → геометрична інтерпретація результату. Це створює умови для переходу від механічного застосування формул до самостійного побудування та дослідження математичної моделі. Отже, використання комплексних чисел у проблемних геометричних задачах дає змогу змістовно поєднати алгебраїчний і геометричний способи міркування. Особливо продуктивними є задачі на композицію перетворень та багаторазове повторення геометричних процесів, оскільки вони спонукають учнів не лише виконувати обчислення, а й шукати структуру, формулювати закономірності та інтерпретувати отримані результати.

1. *Muir J. R. Complex Analysis:* A Modern First Course in Function Theory. Hoboken : Wiley, 2015. 280 p.

2. *Zill D. G., Shanahan P. D.* Complex Analysis: A First Course with Applications. 3rd ed. Burlington : Jones & Bartlett Learning, 2015.
3. *Alpay D.* A Complex Analysis Problem Book. 2nd ed. Cham : Birkh¨auser, 2016. 596 p.
4. *Kortemeyer J.* Complex Numbers: An Introduction for First Year Students. Wiesbaden : Springer, 2022. 47 p.
5. *Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С.* Алгебра і початки аналізу : профільний рівень : підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2018.

COMPLEX NUMBERS AS A MEANS OF DEVELOPING STUDENTS'ALGEBRAIC-GEOMETRIC THINKING

Abstract. The paper considers a methodological problem of students' formal perception of complex numbers as an algebraic object without sufficient understanding of their geometric meaning. A problembased approach is proposed, in which complex numbers are used as a mathematical model of geometric transformations and repeated geometric processes. Two problem situations are presented: a composition of geometric transformations and a repeated movement described by a geometric progression. The examples demonstrate how graphical analysis can be combined with complex-number modeling to identify regularities and interpret algebraic results geometrically. The proposed approach contributes to the development of students' ability to establish connections between algebraic and geometric representations and to use mathematical modeling in profile mathematics education. Keywords: complex numbers, geometric transformations, mathematical modeling, problem-based learning, algebraic-geometric thinking, profile mathematics education.

УДК 372.851

НАСТУПНІСТЬ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «КООРДИНАТИ ТА ВЕКТОРИ» У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ

Юлія БОТУЗОВА
Криворізький державний педагогічний університет, Кривий ріг, Україна
Сергій ДЕМ'ЯНЕНКО
Криворізький державний педагогічний університет, Кривий ріг, Україна
vassalatii@gmail.com

Відповідно до модельних програм з геометрії для 7–9 класів НУШ [1, 2], у базовій школі (9 клас) суттєво поглиблюються уявлення школярів про аналітичне представлення геометричних об'єктів. Зокрема, учні засвоюють рівняння прямої та кола, а також формули обчислення довжини відрізка й координат його середини. Це створює міцне підґрунтя для засвоєння методу координат як універсального інструменту доведення теорем і розв'язування задач. Водночас понятійний апарат геометрії збагачується векторними величинами (вивчаються рівні, протилежні та колінеарні вектори, а також базові операції над ними).

Необхідність ґрунтовного засвоєння теми «Координати та вектори» у шкільному курсі геометрії зумовлена завданнями формування високого рівня математичної компетентності учнів. Володіння цим матеріалом дає змогу здійснювати аналітичний опис просторових об'єктів і є базою для міжпредметних зв'язків із фізикою, географією, інформатикою та іншими науками. Сучасний етап цифровізації освіти вимагає органічної інтеграції класичних методів із цифровими освітніми середовищами, що суттєво активізує розвиток просторової уяви, творчого потенціалу та дослідницьких навичок школярів.

Теми «Координати на площині» та «Вектори на площині є одними із тих, які мають своє продовження у старшій профільній школі (10–12 класи), де зазначені змістові лінії набувають свого логічного розвитку в темах «Координати у просторі» та «Вектори у просторі». При цьому увесь навчальний матеріал подається за аналогією до раніше вивченого на площині, що дозволяє повною мірою реалізувати принцип наступності, забезпечити неперервність математичної освіти та мінімізувати адаптивний бар'єр під час переходу від планіметрії до стереометрії.

Ефективним методичним інструментом реалізації цього принципу є самостійне складання учнями порівняльних таблиць за аналогією. Працюючи над такими таблицями, старшокласники самостійно структурують раніше здобуті знання з планіметрії та проєктують їх на тривимірний простір, що сприяє усвідомленому засвоєнню нового матеріалу та розвитку аналітичного мислення. Прикладом такої структуризації є таблиця 1.

Таблиця 1.

Порівняння основних формул координат і векторів на площині та у просторі

Поняття / Дія	На площині (9 клас)	У просторі (10 клас)
Координати точки	$A\ (x, y)$	$A\ (x, y, z)$
Відстань між двома точками	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
Координати середини відрізка	$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$	$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}$
Координати вектора	$\bar{a}(a_1, a_2)$	$\bar{a}(a_1, a_2, a_3)$
Довжина (модуль) вектора	$\lvert\bar{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$	$\lvert\bar{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
Скалярний добуток векторів	$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$	$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Важливим чинником успішної реалізації цього процесу є використання сучасних цифрових інструментів, зокрема динамічних математичних середовищ GeoGebra (рис.1) та GeoGebra 3D (рис.2). Вони дозволяють візуалізувати двовимірні та просторові конфігурації, конструювати тривимірні моделі векторів та перетворень координат, перетворюючи абстрактні поняття на доступні для дослідницького сприйняття об'єкти. Застосування інтерактивних аплетів та тренажерів сприяє формуванню стійких навичок розв'язування планіметричних та стереометричних задач координатно-векторним методом.

На рис. 1 представлено інтерактивний тренажер координати вектора, який генерує координати двох точок та будує вектор, а учень має скористатись формулою знаходження координат вектора, ввести свої обчислення і впевнитись у їх правильності чи помилковості.

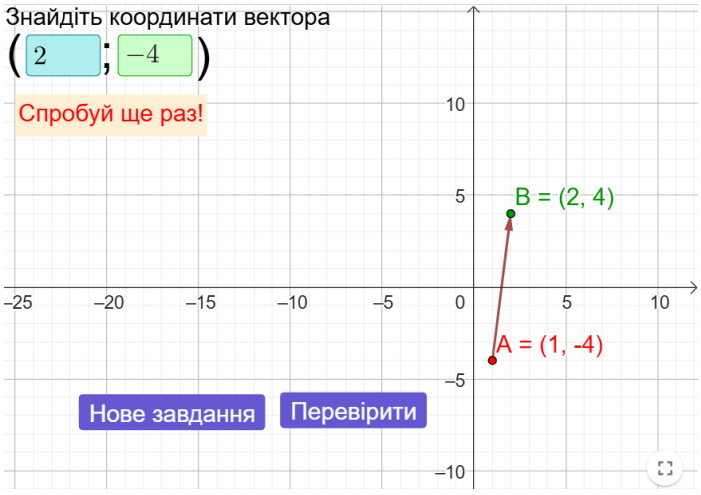


Рис. 1. Інтерактивний тренажер GeoGebraдля знаходження координат вектора на площині

На рис. 2 зображено аплет, який в динаміці показує процес побудови точки із заданими координатами у тривимірній системі координат.

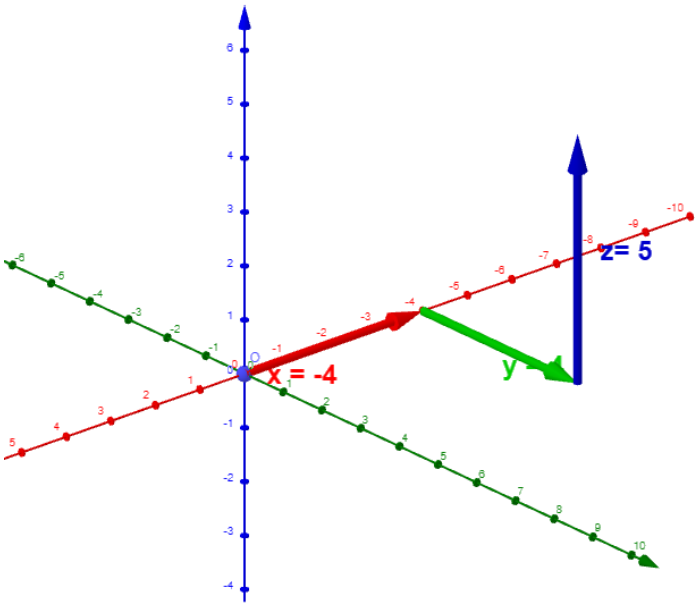


Рис. 2. Аплет GeoGebra 3Dдля демонстрації побудови точки у тривимірній системі координат

Отже, системний та наступнісний підхід до вивчення координат і векторів від основної до старшої школи є ефективним інструментом формування ключових математичних компетентностей учнів, розвитку їхнього просторового й критичного мислення та підготовки до практичної діяльності у цифровому середовищі.

1. *Бурда М. І., Тарасенкова Н. А., Васильєва Д. В.*Модельна навчальна програма «Геометрія. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти. URL: https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.prohr.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/Heometriya.7-9%20kl.Burda.ta.in.26.07.2023.pdf. (дата звернення: 30.09. 2026 р.)
2. Модельна навчальна програма «Геометрія. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти/ Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П., Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С. URL:https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2023/Model.navch.prohr.5-9.klas/Matem.osv.galuz-2023/Heometriya.7-9.kl.Mierzliak.ta.in.30.08.2023.pdf. (дата звернення: 30.09. 2026 р.)

CONTINUITY IN TEACHING THE TOPIC «COORDINATES AND VECTORS»
IN THE SCHOOL GEOMETRY COURSE

The article highlights the methodical aspects of ensuring continuity in teaching the topic «Coordinates and Vectors» from basic school (9th grade) to senior high school (10th–12th grades). The purpose of the study is to substantiate the methodological conditions for a smooth transition from plane geometry to stereometry using coordinate-vector methods. The research applies methods of structural-logical analysis of curriculum content, comparative analysis of mathematical formulas, and digital visualization. The principal results demonstrate that structural analogy, student-generated comparative tables, and the integration of dynamic mathematics software such as GeoGebra and GeoGebra 3D effectively bridge the gap between 2D and 3D spatial concepts. The proposed digital applets and interactive trainers enhance students' spatial imagination, critical thinking, and analytical problem-solving skills in high school geometry.

УДК 373.5:51]:004.9

ВИКОРИСТАННЯ ДИНАМІЧНИХ МАТЕМАТИЧНИХ СЕРЕДОВИЩ (GEOGEBRA, GRAN) ЯК ІНСТРУМЕНТУ МОДЕЛЮВАННЯ У STEM-ПРОЄКТАХ

Вікторія ВЛАДИЧУК
Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне, Україна
viktoriiavladych@gmail.com

Актуальність цієї теми полягає у необхідності впровадження STEM-підходу в освітній процес, що вимагає використання сучасних цифрових інструментів для якісного унаочнення, візуалізації та прикладного математичного моделювання реальних процесів.

Метою дослідження є обґрунтування та висвітлення можливостей та ефективності застосування динамічних математичних середовищ, таких як GeoGebra та комплексу GRAN, у навчанні математики й реалізації STEM-проєктів.

Для реалізації поставленої мети та дослідження можливостей цих середовищ було застосовано такі теоретичні методи: аналіз, синтез та порівняння науково-педагогічної і методичної літератури; систематизація й узагальнення; моделювання.

Сучасний напрямок розвитку освітнього простору спрямований на активне впровадження новітніх цифрових технологій з метою підвищення якості викладання та розвитку мислення здобувачів освіти. Динамічні математичні середовища відіграють роль інструменту в реалізації STEM-освіти, дозволяючи учням досліджувати прикладні задачі та здійснювати плавний перехід від абстрактних формул до реальних математичних моделей. Застосування спеціальних програмних засобів надає навчальному процесу яскраво вираженого дослідницького характеру, забезпечує високий рівень унаочнення матеріалу та сприяє формуванню практичних навичок. Комп'ютерне моделювання створює умови для індивідуалізації навчання, економії навчального часу на уроці та стимулює учнів до самостійного пошуку й обробки інформації. Серед найбільш поширених цифрових математичних комплексів, які ефективно застосовуються у середній та вищій школі, чільне місце посідають середовище GeoGebra та український програмно-методичний комплект GRAN.

Програмне забезпечення GeoGebra є безкоштовною динамічною платформою для вивчення та викладання математики, яка функціонує на багатьох операційних системах. Воно кросплатформово підтримує роботу на пристроях під управлінням Windows, macOS, Linux, iOS та Android, що забезпечує високу доступність для учнів і педагогів. Основною перевагою GeoGebra є інтеграція в єдиному цифровому просторі геометрії, алгебри, таблиць, графічних побудов, статистики та символьних розрахунків. Середовище пропонує користувачам широкий вибір спеціалізованих застосунків, зокрема Графічний калькулятор, Калькулятор Сюїта, Науковий калькулятор, 3D Калькулятор та модуль Геометрія. Наявність класичного застосунку дає можливість одночасно використовувати кілька робочих полотен для візуалізації складних залежностей. Завдяки своєму функціоналу пакет GeoGebra активно застосовується у підготовці майбутніх учителів математики як засіб реалізації STEM-підходу [1].

У межах двовимірного полотна GeoGebra надає унікальні можливості для побудови та інтерактивного дослідження планіметричних фігур. Інструмент переміщення дозволяє динамічно перетягувати базові елементи і бачити в реальному часі зміни залежних об'єктів зі збереженням їхніх геометричних властивостей. Користувачі можуть створювати вільні точки, точки належності до об'єктів, а також точки перетину ліній чи кривих. Базовий інструментарій містить засоби побудови прямих через дві точки, векторів, променів, перпендикулярних та паралельних ліній. Для роботи з многокутниками передбачено можливості створення довільних, правильних або заданих за довжинами сторін багатокутників із налаштуванням їхнього колірного оформлення. Можливості побудови кіл охоплюють створення за центром і точкою, трьома точками, центром і радіусом, а також побудову дотичних, січних, хорд і дуг [1].

Важливою складовою геометричного моделювання у GeoGebra є виконання різноманітних перетворень на площині, таких як паралельне перенесення, обертання, дзеркальна симетрія відносно прямої чи точки та гомотетія. Вбудовані вимірювальні інструменти дозволяють миттєво обчислювати довжини відрізків, величини кутів, площі фігур, периметри та довжини дуг. Для розширення стандартного функціоналу користувачі мають змогу розробляти власні інструменти, наприклад серединний перпендикуляр, та додавати їх на панель побудов. Наочна перевірка математичних закономірностей здійснюється через створення динамічних моделей ромба, бісектриси кута трикутника чи розміщення центра описаного кола. Такий підхід перетворює вивчення геометрії на активний експериментальний процес у якому учні самостійно відкривають властивості фігур [1].

Просторове моделювання у стереометрії реалізується завдяки використанню Полотна 3D середовища GeoGebra. Тривимірний простір дозволяє створювати многогранники, тіла обертання, поверхні та маніпулювати ними шляхом повороту, переміщення та масштабування. Об'єкти у просторі можна задавати як геометрично, так і аналітично за допомогою відповідних рівнянь і нерівностей. Користувачам доступні налаштування прозорості, стилів та відображення елементів у перспективній чи ортогональній проекції для покращення візуального сприйняття. Навчальне середовище підтримує побудову площин за трьома точками, точкою і прямою, вектором нормалі або загальним рівнянням. Побудова складних просторових тіл здійснюється за допомогою інструментів створення призм, пірамід, правильних многогранників та спеціального конструктора многогранників [1].

Тіла обертання у GeoGebra 3D утворюються шляхом обертання плоских фігур чи відрізків навколо заданої осі на обраний кут. Наочне розв'язування стереометричних задач забезпечується через створення динамічних моделей. Учні отримують можливість досліджувати розгортки куба, перерізи конуса, утворення циліндрів і визначення відстані між мимобіжними прямими через паралельні площини. Динамічна візуалізація 3D-об'єктів розвиває у здобувачів освіти просторову уяву та дозволяє глибше зрозуміти складні геометричні співвідношення [1].

Як приклад практичного застосування наведено STEM-задачу з геометрії, розв'язання якої реалізовано за допомогою інтерактивного математичного середовища GeoGebra. Дизайнери моделюють новий спортивний шейкер. Його нижня частина має форму циліндра радіусом 4см і висотою 14 см, а верхня кришка-носик – форму конуса з тим самим радіусом основи (4 см) і висотою 6 см.Обчисліть загальний внутрішній об'єм шейкера в мілілітрах$1\text{см}^3 = 1\text{мл}$ [3]. (див. на рис 1)

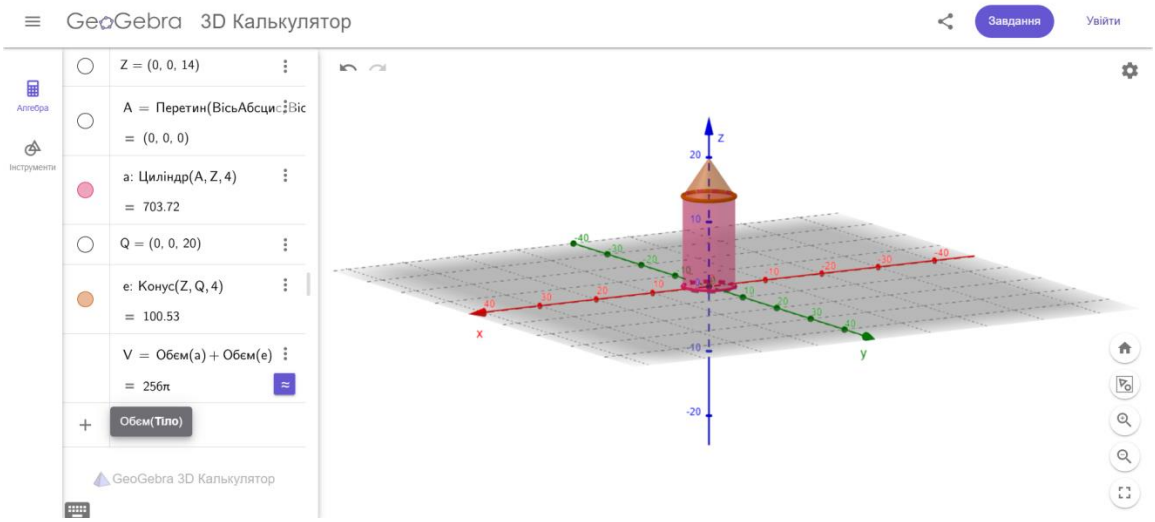


Рис 1. Геометричне моделювання STEM-задачі в середовищі GeoGebra

Окрім геометричних побудов, середовище GeoGebra володіє потужною вкладкою «Системи комп'ютерної алгебри (СКА)» для виконання символьних та числових обчислень. Модуль СКА дозволяє розв'язувати алгебраїчні рівняння, нерівності та їхні системи, здійснювати спрощення виразів, розкладати многочлени на множники. За допомогою комп'ютерної алгебри учні можуть точно обчислювати похідні та інтеграли, перевіряти власні обчислення й знаходити рішення складних задач. Для систематичного дослідження функцій використовуються графічні калькулятори та протокол побудови, що дозволяють будувати графіки у декартовій системі. Динамічні повзунки дають змогу змінювати числові параметри та коефіцієнти, спостерігаючи за плавними трансформаціями графіків [1].

Інтерактивні прапорці в GeoGebra використовуються для керування видимістю окремих об'єктів, графіків чи додаткових елементів під час демонстрації навчального матеріалу. Інструментарій дослідження функцій дозволяє знаходити точні значення нулів функції, екстремуми на проміжку, будувати дотичні, асимптоти та обчислювати площі під кривою за допомогою визначеного інтеграла. Описані можливості створюють міцну основу для розв'язування алгебраїчних задач із параметрами та аналізу складених кусково-заданих функцій [1].

Важливе місце у школі посідає також програмно-методичний комплекс GRAN, розроблений під керівництвом академіка М. І. Жалдака. Цей комплект містить програми GRAN1, GRAN-2D та GRAN-3D, які характеризуються простим інтерфейсом та орієнтовані на використання у середніх навчальних закладах. Програма GRAN1 призначена для графічного аналізу функцій, заданих у декартовій або полярній системі координат. Вона дозволяє учням графічно розв'язувати рівняння, нерівності та їхні системи з однією чи двома змінними, наближено знаходити корені многочленів і досліджувати границі послідовностей. Головними перевагами застосування GRAN є індивідуалізація навчального процесу, надання йому дослідницького характеру, суттєва економія часу та наочність [2].

Програма GRAN-2D призначена для графічного аналізу систем геометричних об'єктів на площині та дозволяє будувати графіки функцій із модулем. У цій програмі можна налаштовувати тип залежності функції, колір, товщину та стиль ліній для створення чітких демонстраційних моделей. Програма GRAN-3D забезпечує графічний аналіз тривимірних об'єктів, серед яких є точки, відрізки, ламані, площини, многогранники та поверхні обертання. Учні можуть виконувати поворот, деформацію, паралельне перенесення просторових фігур і будувати

перерізи опуклих многогранників площинами. Впровадження комплексу GRAN стимулює розвиток творчих та інтелектуальних здібностей школярів і формує вміння самостійно здобувати знання[2].

У контексті реалізації STEM-проєктів динамічні середовища виступають засобом прикладного моделювання, де математичний апарат застосовується для аналізу реальних процесів. Особливо цінним є те що здобувачі освіти можуть моделювати форму мостів, куполів, пляшок, старовинних ваз та досліджувати рельєф земної поверхні.Завдяки поетапному моделюванню учні переконуються, що абстрактні поняття алгебри й геометрії мають безпосереднє практичне застосування. Використання середовищ GeoGebra та GRAN забезпечує високий рівень залученості учнів, перетворюючи їх із пасивних слухачів на активних дослідників реального світу.

1. *Чемерис О. А., Прус А. В., Фонарюк О. В.* Майстерня GeoGebra: практичний підхід до візуалізації математики: методичні рекомендації. Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2024. 46 с. URL: https://eprints.zu.edu.ua/id/eprint/41691.
2. *Головко І. І., Білозор В. В.* Застосування GRAN для підвищення ефективності та якості викладання математики. URL: https://informatika.udpu.edu.ua/?page_id=2901.
3. Google. Gemini (версія 1.5 Flash) [генеративна система штучного інтелекту]. Запит: «Згенеруй задачі із STEM-освіти для уроку геометрії». 2026.
4. GeoGebra: інтерактивна математична платформа [Електронний ресурс]. Офіційний вебсайт. URL: https://www.geogebra.org/?lang=uk.

THE USE OF DYNAMIC MATHEMATICAL ENVIRONMENTS (GEOGEBRA, GRAN) AS A MODELING TOOL IN STEM PROJECTS

The relevance of this topic lies in the need to implement a STEM approach in the educational process, which requires the use of modern digital tools for high-quality visualization, visualization and applied mathematical modeling of real processes.

The purpose of the study is to substantiate and highlight the possibilities and effectiveness of using dynamic mathematical environments, such as GeoGebra and the GRAN complex, in teaching mathematics and implementing STEM projects.

To achieve the goal and explore the possibilities of these environments, the following theoretical methods were applied: analysis, synthesis and comparison of scientific, pedagogical and methodological literature; systematization and generalization; modeling.

УДК 378.147:51:004.8

НАВЧАЛЬНІ ЗАВДАННЯ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ В УМОВАХ ГЕНЕРАТИВНОГО ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Світлана ГАДЕЦЬКА
Харківський національний автомобільно-дорожній університет, м. Харків, Україна
svgadetska@ukr.net,
Наталя СТЯГЛИК, Любов ФІЛАТОВА
Харківський національний університет імені В.Н.Каразіна, м. Харків, Україна
natalia.stiahlyk@karazin.ua, liubov.filatova@karazin.ua

Актуальність дослідження. Розвиток генеративного штучного інтелекту (ШІ) та поширення цифрових математичних сервісів докорінно змінює характер навчальної діяльності студентів і вимагає переосмислення підходів до проєктування завдань з різних навчальних дисциплін, зокрема з вищої математики. Використання студентами таких інструментів як ChatGPT, Photomath, Symbolab і Wolfram Alpha, забезпечує їм швидке отримання розв’язань, пояснень та математичних перетворень. У результаті традиційні завдання, орієнтовані переважно на отримання правильної кінцевої відповіді, втрачають частину своєї діагностичної функції.

В умовах дистанційного та змішаного навчання особливого значення набувають завдання, які передбачають не лише виконання обчислень, а й аналіз способу розв’язання, обґрунтування математичних дій, виявлення помилок, перевірку достовірності результатів і самостійне конструювання математичних моделей. І мова не йде про повну відмову від використання таких інструментів, навпаки, ШІ у цьому випадку може

розглядатися не тільки як інструмент отримання відповіді, а і як об'єкт критичного аналізу, засіб організації діалогу та підтримки пізнавальної діяльності здобувача освіти.

Мета дослідження – розробити та систематизувати підходи до адаптації навчальних завдань з вищої математики до умов активного використання генеративного ШІ, а також обґрунтувати дидактичні прийоми, спрямовані на оцінювання математичного мислення, самостійність міркувань, здатність до перевірки та аргументації автоматично отриманих результатів.

В процесі дослідження було здійснено педагогічне спостереження за виконанням дистанційних розрахунково-графічних і контрольних робіт приблизно 250 студентами протягом трьох навчальних років. До такої вибірки ввійшли студенти перших курсів двох закладів освіти різних спеціальностей, що дало можливість узагальнити отримані висновки не обмежуючись однією галуззю знань. Додатково було проведено анонімне опитування студентів першого та другого курсів щодо практики використання ними інструментів ШІ під час вивчення математичних дисциплін. Педагогічні спостереження дали змогу виокремити типові моделі використання ШІ: пасивне копіювання готових розв'язків, об'єднання відповідей із різних цифрових джерел та поверхневе редагування згенерованого матеріалу без глибокого осмислення. Такі практики створюють ілюзію засвоєння навчального матеріалу та знижувати рівень самостійного математичного міркування здобувачів.

Для подолання зазначених проблем авторами запропоновано трирівневий підхід до трансформації навчальних завдань, що передбачає різні рівні пізнавальної діяльності студентів під час виконання практичних завдань з вищої математики:

1. Репродуктивний рівень – отримання, відтворення та первинне ознайомлення з готовим розв'язанням завдання за допомогою ШІ.

2. Аналітичний рівень – перевірка коректності розв'язання завдання відповідними ШІ-інструментами, виявлення помилок, обґрунтування математичних перетворень і порівняння різних способів розв'язування.

3. Конструктивний рівень – самостійне конструювання математичного об'єкта, задачі або моделі із заданими властивостями, а також перевірка та обґрунтування запропонованого рішення.

Для практичної реалізації цього підходу було сформовано систему з семи дидактичних прийомів адаптації навчальних завдань.

1. Сократівський діалог із ШІ. Студент взаємодіє із системою штучного інтелекту не для отримання готової відповіді, а для послідовного уточнення математичних понять, умов задачі та логіки розв'язання. Завдання може передбачати формулювання серії запитань до ШІ, аналіз його відповідей і визначення того, які твердження потребують додаткового обґрунтування. Такий прийом сприяє розвитку вміння ставити змістовні запитання та усвідомлювати логічні зв'язки між етапами розв'язання завдання.

2. Сократівський діалог із елементами скаффолдингу. В рамках цього дидактичного прийому передбачено поетапне виконання навчального завдання, під час якого студент поступово вибудовує власну стратегію розв'язання, а штучний інтелект використовується як інструмент підтримки та перевірки міркувань. На початковому етапі студент аналізує умову задачі, визначає відомі й невідомі величини, з'ясовує взаємозв'язки між ними та формулює, що саме необхідно встановити. Далі він розбиває загальну проблему на окремі етапи, формулює проміжні запитання, обирає відповідний математичний метод і прогнозує можливий результат. Водночас викладач, зі свого боку, організовує структуру такого діалогу та надає поступові підказки враховуючи складність завдання й рівень підготовки студента. Підказки можуть стосуватися аналізу умови, вибору методу, перевірки проміжних результатів або обґрунтування отриманого висновку. Крім того, підтримка має поступово зменшуватися в міру того, як студент набуває впевненості та здатності самостійно виконувати відповідні дії. У випадку використання скаффолдингу штучний інтелект виконує роль додаткового засобу навчальної підтримки, тоді як відповідальність за логіку розв'язання та достовірність остаточного висновку залишається за студентом

3. Сократівська реверсія. Студент аналізує вже сформульовану відповідь або розв'язання та за допомогою запитань відновлює логіку, яка могла привести до цього результату. Наприклад, необхідно з'ясувати, чому було обрано певний метод, які припущення використано та за яких умов отримана відповідь є правильною. Прийом дає змогу перейти від механічного відтворення алгоритму до розуміння його структури та меж застосування.

4. Аналіз і локалізація помилки ШІ. Студент отримує розв'язання математичної задачі, згенероване ШІ, яке містить навмисну або випадкову помилку. Необхідно знайти конкретний етап, на якому виникла помилка, пояснити її причину, запропонувати виправлення та перевірити кінцевий результат. При такому підході важливо вимагати від студента не зазначити неправильну відповідь, а саме виконати математичне обґрунтування зробленої ШІ помилки на відповідному кроці розв'язку.

5. Аналіз задач із надлишковими або неповними даними. Навчальне завдання містить зайву інформацію, недостатню кількість даних або неоднозначно сформульовані умови. Студент має визначити, які відомості необхідні для розв'язання, яких даних бракує, чи існує кілька можливих інтерпретацій та як зміна умов впливає на результат. ШІ може використовуватися для генерації альтернативних трактувань, однак остаточне рішення та його обґрунтування здійснює студент.

6. Конструювання задач із заданими властивостями. Замість розв'язування готової задачі студент має створити власну математичну задачу або модель, яка відповідає визначеним вимогам. Наприклад, необхідно сконструювати функцію з певними властивостями, систему рівнянь із заданою кількістю розв'язків або геометричну модель із конкретними параметрами. ШІ може застосовуватися для генерації ідей та первинної перевірки, але студент повинен довести відповідність створеного об'єкта встановленим у завданні умовам.

7. Контекстно-персоналізований аналіз. Цей прийом передбачає розгляд математичного завдання не лише як абстрактної вправи з формулами та обчисленнями, а як інструменту для дослідження певної реальної ситуації, професійної проблеми або питання, яке має особисте значення для студента. Такий підхід допомагає побачити практичну цінність математики та зрозуміти, де й за яких умов отримані знання можуть бути використані. студенту пропонується пов'язати математичну задачу зі знайомою або потенційно важливою для нього сферою діяльності. Наприклад, студент, який навчається за економічним чи фінансовим напрямом, може застосувати математичне моделювання для аналізу кредитних платежів, динаміки доходів, інвестиційних ризиків або зміни вартості товару. Студент технічної спеціальності може досліджувати залежність між параметрами системи, прогнозувати споживання ресурсів або аналізувати результати експерименту. Водночас важливо, щоб контекст не був формальним доповненням до задачі, а впливав на вибір математичної моделі, спосіб її застосування та інтерпретацію результатів. Робота над таким завданням передбачає кілька послідовних кроків. Спочатку студент визначає проблему, яку необхідно дослідити, та з'ясовує, які дані доступні для аналізу. Потім він добирає відповідну математичну модель, формулює необхідні припущення та визначає, які змінні й параметри мають найбільше значення. На наступному етапі виконує обчислення, може використовувати ШІ для порівняння підходів або перевірки окремих етапів, а після цього пояснює отриманий результат з урахуванням реального контексту. Проте студент має самостійно оцінити коректність моделі та обґрунтувати висновки.

Зазначені прийоми можуть комбінуватися в межах одного навчального завдання. Наприклад, студент спочатку отримує розв'язання за допомогою ШІ, потім виявляє та виправляє помилки, порівнює кілька методів і завершує роботу конструюванням аналогічної задачі зі зміненими параметрами. Така організація діяльності дає змогу оцінювати не лише кінцевий результат, а й процес математичного міркування.

Висновки. В умовах поширення генеративного ШІ адаптація навчальних завдань з вищої математики має передбачати зміщення акценту з контролю кінцевої відповіді на оцінювання способів міркування, математичного обґрунтування, критичної перевірки та здатності до конструювання. Запропонована трирівнева модель і систематизовані дидактичні прийоми створюють передумови для підвищення пізнавальної активності здобувачів, розвитку відповідального використання ШІ та посилення діагностичної цінності оцінювання. Перспективним напрямом подальших досліджень є розроблення прикладів завдань, промптів і формалізованих критеріїв оцінювання для кожного з визначених дидактичних прийомів.

1. *Brandibur, O., Filipowicz-Chomko, M., Girejko, E., Kaslik, E., Mozyrska, D., Mureşan, R., Pappas, N., Tănasie, A. L., & Zaharia, C. Higher Mathematics Education and AI Prompt Patterns: Examples from Selected University Classes // Applied Sciences. 2026. 16(1), 339. https://doi.org/10.3390/app16010339*
2. *Opesemowo, O. A. G., & Ndlovu, M. Artificial intelligence in mathematics education: The good, the bad, and the ugly // Journal of Pedagogical Research. 2024. 8(3), 333-346. https://doi.org/10.33902/JPR.202426428*
3. *Liu, B., Zhang, W., & Wang, F. Can Generative Artificial Intelligence Effectively Enhance Students' Mathematics Learning Outcomes? – A Meta-Analysis of Empirical Studies from 2023 to 2025. // Education Sciences. 2026. 16(1), 140. https://doi.org/10.3390/educsci16010140*
4. *Nguyen, D. T., & Pham, Q. V. The evolving landscape of AI integration in mathematics education: A systematic review of trends (2015-2025) // Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education. 2025. 21(10), em2714. https://doi.org/10.29333/ejmste/17078*
5. *Msomi, A. M., & Mthethwa, T. M. Artificial intelligence in higher education mathematics: A systematic review of trends, benefits, and challenges. In M. Makua et al. (Eds.), Proceedings of the Focus Conference (TFC 2024) (Atlantis Highlights in Social Sciences, Education and Humanities. 2024. Vol. 31, pp. 89–118). Atlantis Press. https://doi.org/10.2991/978-94-6463-630-7_6*
6. *Fischer, I., Sweeney, S., Lucas, M., & Gupta, N. Making sense of generative AI for assessments: Contrasting student claims and assessor evaluations // The International Journal of Management Education. 2024. 22(3), Article 101081.https://doi.org/10.1016/j.ijme.2024.101081*

7. *Favero, L., Pérez-Ortiz, J. A., Käser, T., & Oliver, N. Enhancing critical thinking in education by means of a Socratic chatbot. In F. Bellas & O. Fontenla-Romero (Eds.), AI in education and educational research (CCIS. 2025. Vol. 2519, pp. 15–28). Springer.https://doi.org/10.1007/978-3-031-93409-4_2*

HIGHER MATHEMATICS LEARNING TASKS IN THE ERA OF GENERATIVE ARTIFICIAL INTELLIGENCE

This study aims to examine the need to transform higher mathematics learning tasks in response to the widespread use of generative artificial intelligence (AI) tools and digital mathematical services by students. It emphasizes the need to reconsider traditional approaches to assessing learning outcomes by shifting the focus from verifying final answers to evaluating mathematical reasoning, solution justification, and critical verification of results. The study is based on pedagogical observations of students' performance in distance learning assignments and the findings of an anonymous student survey. Typical patterns of AI use in mathematics education were identified and systematized. A three-level model for transforming learning tasks is proposed, comprising reproductive, analytical, and constructive levels of cognitive activity. A system of seven didactic techniques for adapting learning tasks was developed and described: Socratic dialogue with AI, Socratic dialogue with scaffolding, Socratic reversal, analysis and localization of AI-generated errors, tasks involving redundant or incomplete data, construction of problems with specified properties, and context-based personalized analysis. The study outlines directions for further developing practical tasks, prompts, and assessment criteria aimed at fostering student autonomy, critical thinking, and responsible use of AI in mathematics education.

УДК 373.5.016:51

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ЯК ЗАСІБ АКТИВІЗАЦІЇ ПІЗНАВАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ УЧНІВ

Максим ДЕМИДАСЬ
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка,
м. Тернопіль, Україна
demydas_m@fizmat.tnpu.edu.ua
Мирон ГРОМЯК
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка,
м. Тернопіль, Україна
ghromjak@tnpu.edu.ua

Сучасний етап розвитку загальної середньої освіти характеризується підвищеними вимогами до якості навчання природничо-математичних дисциплін і, зокрема, фізики. Одним із головних завдань шкільного курсу фізики є не просто передавання учням суми теоретичних знань, а формування в них стійкого пізнавального інтересу, здатності самостійно здобувати знання та застосовувати їх для розв'язання практичних проблем. У цьому контексті особливої актуальності набуває пошук ефективних засобів активізації пізнавальної діяльності учнів, серед яких чільне місце посідають математичні методи. Використання математичного апарату під час розв'язування фізичних задач, зокрема задач з механіки, дозволяє перетворити навчання з пасивного сприйняття інформації на активний процес пошуку, аналізу й узагальнення, що безпосередньо впливає на розвиток логічного мислення, самостійності та пізнавальної активності здобувачів освіти.

Метою дослідження є теоретичне обґрунтування та експериментальна перевірка методичних підходів до використання математичних методів як засобу активізації пізнавальної діяльності учнів під час вивчення механіки на уроках фізики. Для досягнення поставленої мети визначено такі завдання: проаналізувати сучасний стан використання математичних методів у навчанні фізики; виявити чинники, що активізують пізнавальну діяльність учнів під час розв'язування задач з механіки математичними методами; розробити методичні рекомендації щодо інтеграції математичних методів у навчальний процес; експериментально перевірити ефективність запропонованих підходів.

Математичні методи є невід'ємною складовою сучасної фізики, оскільки дозволяють не лише формулювати фізичні закони у вигляді рівнянь, а й знаходити їхні розв'язки, аналізувати поведінку систем та прогнозувати результати. Історія розвитку фізики демонструє, що саме математизація знань – від геометричних побудов Архімеда й Евкліда до диференціального й інтегрального числення Ньютона та Лейбніца – стала рушієм переходу від якісного опису природних явищ до їх кількісного аналізу. Це дає підстави розглядати математичні методи не лише як інструмент обчислень, а й як засіб розвитку мислення учнів, здатний перетворити розв'язування фізичної задачі на пізнавальний пошук [4].

У дослідженні встановлено, що застосування математичних методів у кінематиці (рівняння руху, графіки залежності швидкості й прискорення від часу), у динаміці (закони Ньютона, рівняння руху тіла під дією сил) та у статиці (системи рівнянь для аналізу рівноваги сил і моментів) сприяє не лише формальному засвоєнню формул, а й розвитку вміння моделювати реальні ситуації, висувати припущення та перевіряти їх математичним шляхом. Саме такий підхід – від конкретної фізичної ситуації до її математичного опису і назад до фізичної інтерпретації результату – є ключовим механізмом активізації пізнавальної діяльності, оскільки перетворює учня з пасивного виконавця алгоритму на активного дослідника.

У межах дослідження систематизовано математичні методи, які доцільно застосовувати під час розв'язування задач з механіки: векторний метод – для задач на складання швидкостей, наприклад, під час визначення часу перетину річки човном і його зносу течією; координатний метод і метод функцій – для задач на зустрічний або доганяючий рух двох тіл, коли розв'язок зводиться до знаходження точки перетину залежностей координати від часу; метод квадратних рівнянь (через дискримінант) – коли рівняння руху тіла є нелінійним відносно часу; графічний метод – для аналізу залежностей швидкості, прискорення й переміщення від часу та унаочнення характеру руху; метод систем рівнянь – для задач статики на рівновагу сил і моментів. Використання кожного з цих методів вимагає від учня не механічного застосування формули, а свідомого вибору математичного апарату відповідно до фізичної ситуації, аналізу отриманого результату та його фізичної інтерпретації, що і є проявом активної, дослідницької, а не репродуктивної пізнавальної діяльності [2].

Проведений аналіз дав змогу сформулювати умови, за яких використання математичних методів найбільш ефективно активізує пізнавальну діяльність учнів: поступовість ускладнення завдань – від найпростіших обчислень до розв'язування рівнянь і використання елементів диференціального числення; зрозумілість і чіткість пояснення зв'язку між фізичним явищем та відповідною математичною операцією; практична спрямованість задач, наближених до реальних життєвих ситуацій; диференційований підхід з урахуванням рівня підготовки кожного учня; застосування сучасних технологій – комп'ютерних симуляцій, графічних калькуляторів, спеціалізованого програмного забезпечення, які дають змогу наочно демонструвати результати обчислень і зосереджувати увагу учнів на аналізі, а не на рутинних розрахунках.

Реалізація диференційованого підходу до активізації пізнавальної діяльності учнів увиразнюється в доборі задач різного рівня складності в межах однієї теми. Так, для учнів із базовим рівнем підготовки доцільні задачі на застосування готової формули, наприклад визначення часу вільного падіння тіла за формулою $h = \frac{gt^2}{2}$; для учнів середнього рівня – задачі, що потребують складання рівняння руху й аналізу рівнодійної сили, зокрема рух тіла похилою площиною з урахуванням сили тертя; для найбільш підготовлених учнів – задачі, розв'язання яких передбачає елементи чисельних методів, зокрема метод Ейлера, що застосовується тоді, коли точний аналітичний розв'язок диференціального рівняння руху є надто складним. Така побудова системи задач дає змогу кожному учневі працювати відповідно до власного рівня підготовки, поступово переходячи від репродуктивної діяльності до дослідницької, що і становить сутність активізації пізнавальної діяльності засобами математики [5].

Окремої уваги заслуговує мотиваційний аспект: задачі з механіки, розв'язання яких потребує застосування математичного апарату, здатні сприйматися учнями як цікавий інтелектуальний виклик за умови, що вчитель наочно демонструє практичну користь здобутих результатів – від розрахунку параметрів руху до пояснення принципів роботи сучасних технічних пристроїв. Формування міжпредметних зв'язків між фізикою і математикою також суттєво впливає на активізацію пізнавальної діяльності, оскільки дає учням змогу побачити цілісну картину природничо-наукового знання та усвідомити універсальність математичної мови для опису явищ навколишнього світу [6].

Експериментальна перевірка розроблених методичних підходів, що включала апробацію системи задач з кінематики, динаміки та статики, розв'язуваних математичними методами, підтвердила їхню ефективність. Результати спостережень і аналізу навчальних досягнень учнів засвідчили підвищення рівня засвоєння навчального матеріалу, розвиток умінь аналізувати умови задачі, виокремлювати головне та обирати оптимальний спосіб розв'язання. Крім того, зафіксовано зростання зацікавленості учнів у розв'язуванні задач із застосуванням математичного апарату, що виявлялося у більшій самостійності, готовності виконувати додаткові й ускладнені завдання, а також у прояві креативності під час пошуку нестандартних шляхів розв'язання. Це підтверджує гіпотезу дослідження про те, що використання математичних методів сприяє не лише кращому засвоєнню матеріалу, а й розвитку критичного мислення та пізнавальної активності здобувачів освіти.

Отримані результати також засвідчили важливість фахової підготовки вчителя до інтегрованого викладання фізики й математики: педагог має вільно володіти не лише предметним матеріалом, а й методикою поетапного введення математичного апарату, щоб перетворити його на дієвий засіб активізації пізнавальної діяльності, а не на додаткове навантаження для учнів.

Отже, проведене дослідження підтвердило, що математичні методи за умови їх методично обґрунтованого й поступового впровадження у процес розв'язування задач з механіки виступають дієвим засобом активізації пізнавальної діяльності учнів. Вони сприяють розвитку логічного та аналітичного мислення, формуванню міжпредметних зв'язків, підвищенню навчальної мотивації та готовності учнів до самостійного розв'язання практичних завдань. Перспективи подальших досліджень убачаємо в розробці інтерактивних методик навчання, що поєднують фізику й математику, а також у впровадженні цифрових технологій моделювання фізичних процесів.

1. *Бар'яхтар В. Г., Довгий С. О., Божинова Ф. Я., Кірюхіна О. О.* Фізика: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / за ред. В. Г. Бар'яхтара, С. О. Довгого. Харків: Вид-во «Ранок», 2017.
2. *Голдінова А. Д.* Методика використання графічного методу під час розв'язування задач з фізики у закладах загальної середньої освіти // Збірник наукових праць студентів, аспірантів, докторантів і молодих вчених «МОЛОДА НАУКА-2021». 2021. Т. 3. С. 59.
3. Державний стандарт базової середньої освіти: затв. постановою Кабінету Міністрів України від 30.09.2020 № 898. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020-п#Text
4. *Ляшенко О. І.* Сучасні проблеми навчання фізики в контексті компетентнісного підходу до освіти // Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету ім. Івана Огієнка. Серія: Педагогічна. 2015.
5. *Мантула Т. І.* Реалізація компетентнісного підходу в процесі навчання: моделювання уроку з використанням технологій Веб-2.0: наук.-метод. посібник. Кіровоград: ТОВ «Поліграф-сервіс», 2009. 132 с.
6. *Мястковська М. О., Пшембаєв І. М.* Використання PhET-симуляцій для виконання домашніх завдань з молекулярної фізики // Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету ім. Івана Огієнка. Серія: Педагогічна. 2016. Вип. 22. С. 204–207.

MATHEMATICAL METHODS AS A MEANS OF ACTIVATING STUDENTS' COGNITIVE ACTIVITY

The purpose of the study was to provide a theoretical justification and experimental verification of methodological approaches to using mathematical methods as a means of enhancing students' cognitive activity while studying mechanics in physics lessons. The study focused on identifying effective ways of integrating mathematical tools into physics education to develop students' logical and analytical thinking, independence, problem-solving skills, and learning motivation.

The study employed theoretical analysis of contemporary approaches to the use of mathematical methods in physics education, analysis and systematization of mathematical methods for solving mechanics problems, pedagogical observation, analysis of students' learning achievements, and experimental testing of the developed methodological approaches. The mathematical methods considered included the vector method, coordinate method, functional method, graphical method, systems of equations, quadratic equations, and elements of numerical methods, in particular Euler's method. These methods were applied to problems in kinematics, dynamics, and statics.

The study demonstrated that the systematic and methodologically justified use of mathematical methods in solving mechanics problems contributes not only to better understanding and retention of physics concepts but also to the development of students' ability to construct mathematical models of physical situations, analyze problem conditions, select appropriate solution methods, formulate and verify assumptions, and interpret mathematical results physically. Experimental implementation of a system of problems in kinematics, dynamics, and statics revealed increased students' learning achievements, independence, interest in solving physics problems, and willingness to complete more complex and non-standard tasks. The results also confirmed the importance of differentiated instruction and the integration of digital technologies, such as computer simulations and graphical tools, in enhancing students' cognitive activity.

The study concludes that mathematical methods, when introduced gradually and methodologically appropriately, are an effective means of enhancing students' cognitive activity in physics education. They promote logical and analytical thinking, interdisciplinary connections between mathematics and physics, learning motivation, and students' readiness for independent problem solving.

УДК 378.016:51

ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ: КОМПЛЕКСНИЙ ПІДХІД ДО ВИВЧЕННЯ Й ФОРМУВАННЯ СТІЙКИХ ЗНАНЬ

Уляна ГУДИМА,

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
м. Кам'янець-Подільський, Україна
hudyma_uliana@kpnu.edu.ua,
Тетяна ДУМАНСЬКА
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
м. Кам'янець-Подільський, Україна
dumanska@kpnu.edu.ua

Вивчення показникової функції є важливим етапом формування функціонального мислення учнів, однак засвоєння цієї теми нерідко супроводжується труднощами, зумовленими необхідністю сформувати саме поняття показникової функції, встановити взаємозв'язок між її аналітичним заданням, значенням основи, характером зміни та графічним представленням, а також усвідомити й запам'ятати систему її основних властивостей. Формальне засвоєння окремих властивостей не завжди забезпечує їх подальше відтворення та застосування через певний проміжок часу. З огляду на це нами розроблено методику вивчення показникової функції та її властивостей, що ґрунтується на комплексному поєднанні різних форм і методів навчальної діяльності, зокрема візуалізації, групової взаємодії, спостереження, порівняння, обговорення, самостійного формулювання закономірностей, їх відтворення та застосування. Методика передбачає багаторазове звернення до навчального матеріалу в різних видах пізнавальної діяльності та залучення різних способів його сприйняття, опрацювання, запам'ятовування й відтворення. Принциповою особливістю розробленої методики є її орієнтація не лише на безпосередній результат навчання, а й на його збереження в часі. Метою розробки є забезпечення не лише ефективного первинного засвоєння поняття показникової функції та її властивостей, а й їх стійкого збереження, відтворення та застосування через певний проміжок часу.

З метою підвищення якості засвоєння здобувачами освіти поняття та вивчення властивостей показникової функції було розроблено та апробовано цілісну методичну систему, побудовану на засадах компетентнісного, діяльнісного, дослідницького та цифрового підходів.

Мету формувального експерименту конкретизовано за чотирма основними напрямами:

- когнітивний напрям: формування цілісного уявлення про показникову функцію як системний математичний об'єкт (інтеграція графічного, аналітичного та табличного способів подання) для подолання формально-процедурного рівня засвоєння та забезпечення усвідомленого розуміння властивостей показникової функції;
- діяльнісний (варіаційний) напрям:полягав у розвитку динамічного функціонального мислення учнів, формуванні вмінь аналізувати зміну значень функції залежно від зміни аргументу, досліджувати прирости функції та співвідношення між її послідовними значеннями. Це мало сприяти усвідомленню основної властивості показникової залежності – пропорційної зміни значень функції при рівномірній зміні аргументу – та подоланню статичного сприйняття функціональних залежностей;
- практичний (прикладний) напрям: формування вмінь використовувати показникову функцію як математичну модель реальних процесів (фізичних, біологічних, економічних, демографічних);
- технологічний напрям: системне використання цифрових інструментів (GeoGebra, електронних таблиць, цифрових симуляторів) як засобів візуалізації, математичного дослідження та експериментування задля подолання репродуктивного характеру навчання та розширення можливостей дослідницької діяльності учнів.

Основні завдання експерименту передбачали: розробку навчально-методичного забезпечення, упровадження авторської методики в експериментальних класах, проведення вхідної/підсумкової діагностики та порівняльний аналіз результатів із контрольними класами.

У підручниках рівня стандарту автори намагаються спростити теорію, але методичні підходи до введення показникової функції відрізняються залежно від авторського колективу.

Ми поділяємо думку Є. П. Неліна[3], який як для рівня стандарту, так і для профільного, формульний запис показникової функції наводить на наочно-пояснювальному (індуктивному) рівні з короткою розгорткою логіки.

Вважаємо, що поняття показникової функції краще засвоїться здобувачами освіти, якщо його введення здійснюється через створення проблемної ситуації на основі прикладних задач, зберігаючи графічно-табличний і мотиваційний підхід. Це спонукає учнів до усвідомлення необхідності нового виду функціональної залежності, у якій величина змінюється не на сталу величину, а в однакову кількість разів.Такий підхід забезпечує реалізацію діяльнісного та дослідницького підходів до навчання, сприяє розвитку логічного мислення, уміння аналізувати закономірності та демонструє практичну значущість нового математичного поняття.

Спочатку учням пропонується розглянути дві прикладні задачі: «вірусний допис» (мотиваційна) та процес «охолодження чаю». Незважаючи на різний зміст, обидві ситуації описуються однаковою математичною закономірністю, що створює передумови для формування нового математичного поняття.

Задача 1. «Вірусний допис» (мотиваційна). Учень опублікував допис у соціальній мережі. Першого дня його побачили 3 друзі. Кожного наступного дня кількість людей, які бачать допис, потроюється, бо кожен, хто побачив, поширює його далі. Як змінюватиметься кількість переглядів із часом?

Модель: $N(t) = 3 \cdot 3^t = 3^{t+1}$.

Висновок учнів: абсолютний приріст не є сталим, проте відношення кожного наступного значення до попереднього постійне і дорівнює 3. Процес описує зростання.

Задача 2. «Охолодження чаю» (контрастна). Чай у чашці має температуру 90 °C. Кімнатна температура – 20 °C. Кожні 5 хвилин різниця між температурою чаю та кімнатною температурою зменшується вдвічі. Як змінюватиметься температура чаю з часом?

Модель: $T(t) = 20 + 70 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5}}$.

Висновок учнів: абсолютне зменшення маси не є сталим, але відношення послідовних значень стале і дорівнює 0,5. Процес описує спадання.

Ця задача є контрастною: якщо «Вірусний допис» демонструє зростання, то «Охолодження чаю» – спадання. Це дозволяє учням одразу побачити, що показникова залежність може бути двох типів: зростаючою та спадною. Крім того, задача має побутовий контекст, що робить її зрозумілою.

Під час порівняльного аналізу учні встановлюють ключові відмінності показникової залежності від лінійної (сталою є не різниця сусідніх значень, а їх відношення) та помічають, що в обох формулах змінна міститься в показнику степеня при сталій основі.

Після аналізу обох прикладних задач учитель організовує фронтальне обговорення з метою узагальнення встановлених закономірностей. Доцільно запропонувати учням відповісти на такі запитання:

- Яким способом отримували кожне наступне значення величини в обох задачах?
- Чим цей спосіб відрізняється від способу утворення значень у лінійній функції?
- Які ще процеси можуть описуватися аналогічною закономірністю?
- Чи можна подати розглянуті залежності за допомогою вже відомих функцій?
- Якого математичного поняття бракує для опису таких процесів?

У ході обговорення учні доходять висновку, що відомих їм функціональних залежностей недостатньо для опису таких процесів.

Таким чином, створена проблемна ситуація природно підводить учнів до усвідомлення необхідності введення нового виду функціональної залежності – показникової функції. Саме на цьому етапі доцільно перейти до формулювання означення показникової функції.

Після розв’язування прикладних задач та усвідомлення учнями того, що розглянуті процеси не можуть бути описані за допомогою вивчених раніше функцій (лінійної, квадратичної, оберненої пропорційності тощо), учитель організовує роботу з узагальнення отриманих результатів і переходить до формування нового математичного поняття.

Вивчення властивостей функцій є ключовим етапом формування понятєвого апарату шкільного курсу математики. Саме під час дослідження властивостей відбувається перехід від формального знання формули до глибокого розуміння поведінки функції, її особливостей, спільних і відмінних рис порівняно з іншими класами функцій.

Традиційний підхід (пасивне конспектування готових властивостей) замінюється на дослідницьку командну роботу в середовищі GeoGebra.

Класи діляться на групи, кожна з яких отримує пару функцій із оберненими значеннями основи ($a > 1$ та $0 < a < 1$).

Такий підхід дає змогу організувати дослідження на двох рівнях:

– на першому рівні учні здійснюють внутрішньогрупове порівняння двох функцій, аналізуючи вплив значення основи на їхні властивості;

– на другому рівні результати всіх груп узагальнюються під час колективного обговорення, що створює умови для встановлення загальних закономірностей і формування цілісного уявлення про показникову функцію.

Учні заповнюють Карту дослідження «Властивості показникової функції», аналізуючи такі параметри: область визначення та область значень функцій, нулі функції та точки перетину з віссю *Oy*, проміжки монотонності, поведінку функції при $x \to +\infty$ та $x \to -\infty$, наявність горизонтальної асимптоти, парність / непарність та знакосталість.

Завдяки побудові графіків функцій із взаємно оберненими основами в єдиній системі координат GeoGebra учні доходять важливих геометричних та аналітичних висновків.

Заповнення карти здійснюється поступово в ході виконання дослідницьких завдань, а отримані результати стають основою для подальшого колективного обговорення, порівняльного аналізу та систематизації знань.

Презентація результатів дослідження групами та колективне заповнення зведеної таблиці властивостей забезпечують перехід від процедурного запам'ятовування до свідомого розуміння показникової функції як цілісної математичної системи.

Завершальним етапом дослідницького циклу запропонованої методики є перехід від емпірично встановлених у ході графічного експерименту закономірностей до їхнього строгого математичного обґрунтування. Зокрема, властивість монотонності показникової функції, попередньо виявлена шляхом спостереження за графіком, не повинна залишатися на рівні емпіричного факту, а має бути підтверджена засобами аналітичного доведення.

Таким чином, у межах запропонованої методики GeoGebra використовується як інструмент виявлення та первинної перевірки закономірності, тоді як власне математичне доведення забезпечує її остаточне теоретичне обґрунтування, що унеможливлює підміну строгого математичного знання суто емпіричним спостереженням.

Для перевірки ефективності розробленої методики проведено педагогічний експеримент із залученням контрольної та експериментальної груп учнів. Оцінювання результатів навчання здійснювалося у два етапи: безпосередньо після завершення вивчення теми та через визначений проміжок часу. Така організація експерименту дала змогу не лише визначити рівень первинного засвоєння поняття показникової функції та її властивостей, а й дослідити стійкість отриманих результатів у часі. Порівняння результатів контрольної та експериментальної груп на обох етапах дозволило встановити особливості збереження, відтворення та застосування засвоєного навчального матеріалу після завершення безпосереднього навчального впливу.

1. *Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швець В.О.* Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. 128 с.
2. *Швець В. О.* Теорія та методика навчання математики в старшій профільній школі: курс лекцій. Київ.: Вид-во УДУ ім. Михайла Драгоманова, 2024. 504 с.
3. Шкільні підручники. URL: https://pidruchnyk.com.ua/11klas/matematyka11/ (дата звернення: 15.09.2026).

EXPONENTIAL FUNCTION AND ITS PROPERTIES: A COMPREHENSIVE APPROACH TO LEARNING AND BUILDING SUSTAINABLE KNOWLEDGE

The study examines an integrated approach to introducing the concept and properties of the exponential function in 11th-grade mathematics, specifically aimed at ensuring durable and long-term knowledge retention. To achieve this objective, a complex set of research methods was employed: theoretical methods (analysis of pedagogical literature, synthesis, comparison, and generalization of educational models) and empirical methods (pedagogical observation, computer modeling in GeoGebra, two-stage diagnostic testing, and a pedagogical experiment involving control and experimental groups). The learning process is structured around contextual, contrasting applied problems («Viral Post» and «Cooling Tea») that create a problem-based situation, helping students naturally grasp the core mechanism of exponential growth and decay. To prevent passive, short-term memorization, the study of function properties is organized through collaborative student research using the dynamic mathematics software GeoGebra, followed by formal analytical proofs. The experimental evaluation confirmed that this combined experiential and digital approach significantly minimizes knowledge decay over time, fostering stable and retrievable functional reasoning skills in students.

УДК 378.147:51:004.8

ГОТОВНІСТЬ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ ДО ВИКОРИСТАННЯ ГЕНЕРАТИВНОГО ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Оксана ЖЕРНОВНИКОВА
Харківський національний педагогічний університет імені Г. С. Сковороди, Харків, Україна
oazhernovnykova@hnpu.edu.ua

Генеративний штучний інтелект (ГШІ) змінив умови навчання математики: учень закладу загальної середньої освіти може отримати розв'язання типової задачі разом із поясненням, а вчитель – добірку завдань або фрагмент уроку. Водночас відповідь мовної моделі на математичне запитання може бути правдоподібною, але хибною: містити необґрунтований перехід, застосування теореми поза умовами її чинності або некоректну умову задачі. Тому професійно значущим для вчителя математики є не володіння сервісом, а здатність перевірити математичний зміст відповіді, оцінити її дидактичну придатність і пояснити учням межі допустимого використання ГШІ. Рамка компетентностей ЮНЕСКО [6] відносить такі вміння до компетентностей учителя, утім не конкретизує їх для математичної освіти.

Здобувачі вищої педагогічної освіти мають досвід користування ГШІ переважно як студенти; досвіду його застосування в ролі вчителя до педагогічної практики вони, зазвичай, не мають. Педагогічна практика є першою ситуацією, у якій самооцінка готовності зіставляється з реальними вимогами уроку. Діагностика, проведена лише до практики або лише після неї, не дає змоги відрізнити сформовану готовність від некритичної впевненості. Цим зумовлено звернення до повторного вимірювання.

Мета дослідження – з'ясувати стан готовності майбутніх учителів математики до педагогічно доцільного використання ГШІ та характер її змін за період педагогічної практики.

Дослідження продовжує роботи з формування цифрової компетентності майбутніх учителів математики, у яких на констатувальному етапі встановлено переважно середній і низький її рівні [1] та обґрунтовано технологію формування з мотиваційно-ціннісним, когнітивним і операційним компонентами [2]. З урахуванням специфіки ГШІ цю структуру доповнено рефлексивно-етичним компонентом, зміст якого спирається на дослідження академічної доброчесності [3]; враховано також порівняльний аналіз формування професійної компетентності викладача математики в Україні та США [5]. Готовність до використання ГШІ розглядаємо як здатність усвідомлено застосовувати системи ШІ, розуміти обмеження їхніх відповідей і нести відповідальність за педагогічні рішення, ухвалені з їх застосуванням. Зміст компонентів подано в табл. 1.

Педагогічний експеримент проведено у 2025/2026 навчальному році на факультеті математики, інформатики і природничої освіти ХНПУ імені Г. С. Сковороди. Вибірка складалася зі здобувачів випускних курсів спеціальності А4.04 Середня освіта (Математика): 24 здобувачі першого (бакалаврського) і 46 здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти. Анкетування здійснювалося двічі: до початку проведення педагогічної практики у закладах загальної середньої освіти та після її завершення; відповіді одного учасника зіставлялися за анонімним кодом. Участь була добровільною і не впливала на оцінювання. Бакалаври й магістри розглядаються як підгрупи за рівнем освіти, а не як контрольна та експериментальна групи.

Розроблена нами анкета складається з трьох частин. Загальний блок (п'ять запитань) фіксує рівень освіти, досвід, частоту й мету використання ГШІ та доступ до сервісів, що дає змогу відокремити досвід користування від самооцінки готовності. Основна частина містить 20 тверджень, по п'ять на кожний компонент (табл. 1), які оцінюються за шкалою від 1 («цілком не погоджуюся») до 5 («цілком погоджуюся»); передбачено відповідь «не можу оцінити», яка до обчислень не залучається. Твердження сформульовано як описи конкретних професійних дій, а не загальних ставлень, що спрямовано на зменшення частки соціально бажаних відповідей. Формулювання на обох етапах є незмінними, чим забезпечується зіставність вимірювань.

Таблиця 1

Компоненти готовності майбутніх учителів математики до використання генеративного штучного інтелекту

Компонент (твердження)	Що діагностується	Приклад твердження
Мотиваційно-ціннісний (1–5)	Готовність використовувати ГШІ для досягнення навчальної мети зі збереженням власної інтелектуальної участі	Я готовий/готова відмовитися від використання ГШІ, якщо воно заважає досягненню мети уроку

Компонент (твердження)	Що діагностується	Приклад твердження
Когнітивний (6–10)	Розуміння можливих помилок моделі та меж різних способів перевірки математичних тверджень	Я розумію, що результат числової перевірки не є доведенням загального твердження
Операційний (11–15)	Уміння формулювати запит, аналізувати й виправляти відповідь, створювати дидактичний матеріал	Я можу виявити необґрунтований перехід у згенерованому математичному розв’язанні
Рефлексивно-етичний (16–20)	Прозорість використання ГШІ, захист персональних даних, оцінювання наслідків для навчання	Я можу пояснити учням дозволені межі використання ГШІ для конкретного завдання

Третя частина анкети заповнювалася лише після проходження педагогічної практики й стосувалася фактичних дій: чи використовувався ГШІ, на якому етапі роботи над уроком, які матеріали створювалися, як часто і якими способами перевірялася їх математична коректність. Здобувачеві пропонувалося також навести знеособлений приклад виявленої помилки ГШІ та вказати, якої підготовки йому бракувало. Цей блок дав змогу зіставити самооцінку з повідомленими діями: наприклад, оцінку твердження 12 (виявлення необґрунтованого переходу) – із наведеним прикладом помилки та способом її виявлення.Аналізувалися лише повні пари відповідей. З огляду на порядковий характер шкали та обсяг підгруп значущість приросту в кожній підгрупі перевіряється за критерієм знакових рангів Вілкоксона, а відмінність приростів між підгрупами – за критерієм Манна–Уїтні. Додатний приріст свідчить про зростання самооцінки готовності. Від’ємний приріст не обов’язково означає погіршення підготовки: він може відображати корекцію завищеної самооцінки після зіставлення з реальними вимогами уроку. Розрізнити ці випадки дає змогу третя частина анкети.

Узагальнені показники за компонентами подано в табл. 2.

Таблиця 2

Показники готовностімайбутніх учителів математики
до використання генеративного штучного інтелекту

Компонент	Бакалаври (n = 22)			Магістри (n = 43)		
	до	після	приріст	до	після	приріст
Мотиваційно-ціннісний	4,00 (3,80–4,60)	4,10 (3,65–4,80)	0,00	3,80 (3,60–4,20)	3,80 (3,60–4,20)	0,00
Когнітивний	3,40 (3,00–3,60)	3,60 (3,20–4,00)	+0,30	3,60 (3,20–4,00)	4,00 (3,60–4,40)	+0,40
Операційний	3,90 (3,25–4,00)	3,40 (3,00–3,95)	−0,30	3,40 (3,20–3,80)	3,80 (3,30–4,20)	+0,40
Рефлексивно-етичний	3,40 (3,05–3,60)	3,60 (3,20–4,20)	+0,30	3,60 (3,10–4,00)	3,80 (3,40–4,40)	+0,20

Повні пари відповідей отримано від 22 бакалаврів і 43 магістрів. Досвід використання ГШІ до практики мали 66 із 70 здобувачів (94,3 %): 23 бакалаври і 43 магістри. Під час проходження педагогічної практики ГШІ використовували 13 із 22 бакалаврів (59,1 %) і 27 із 43 магістрів (62,8 %); завжди перевіряли математичну коректність згенерованих матеріалів 17 із цих 40 здобувачів (42,5 %), знеособлений приклад виявленої помилки ГШІ навели 25 із 40 (62,5 %).

Показники мотиваційно-ціннісного компонента в обох підгрупах не змінилися ($p = 0,93$ і $p = 0,41$). За когнітивним і рефлексивно-етичним компонентами зафіксовано значні зміни: у бакалаврів $p = 0,031$ і $p = 0,035$, у магістрів $p < 0,001$ в обох випадках. За операційним компонентом зміни різноспрямовані: у магістрів +0,40;

$p = 0,024$, у бакалаврів −0,30; $p = 0,005$; відмінність приростів між підгрупами є значущою за критерієм Манна–Уїтні ($p < 0,001$), тоді як за рештою компонентів підгрупи не відрізняються ($p \geq 0,79$).

Структура анкети визначає і зміст підготовки до практики. Кожному компоненту відповідає навчальний сценарій, у якому відповідь моделі є об’єктом перевірки, а не готовим результатом: аналіз згенерованого розв’язання з установленням умов застосування теореми (наприклад, ознаки збіжності ряду); аналіз змодельованої учнівської помилки з добором контрприкладу й навідних запитань; створення диференційованих завдань із попереднім самостійним розв’язуванням; перевірка твердження обчисленням або динамічною моделлю в GeoGebra з усвідомленням того, що така перевірка не замінює доведення. До виконаного завдання додаються запит, фрагмент відповіді моделі та опис перевірки, що відповідає вимогам академічної доброчесності [3]; сценарії придатні для реалізації в умовах змішаного навчання [4]. На етапі первинного опанування способу розв’язування передбачаються завдання без ГШІ. Слід зазначити, що анкета є інструментом самооцінювання,

тому її показники не ототожнюються з результатами об'єктивної перевірки математичних і методичних умінь. За відсутності контрольної групи зміни між вимірюваннями тлумачаться як динаміка, пов'язана з періодом практики, а не як доведений причинний ефект.

Готовність майбутнього вчителя математики до використання ГШІ доцільно діагностувати двічі, до і після педагогічної практики, оскільки лише повторне вимірювання дає змогу відрізнити сформовану готовність від некритичної впевненості. Розроблена анкета операціоналізує чотири компоненти готовності через твердження про конкретні професійні дії та доповнює самооцінку відомостями про фактичне використання ГШІ на уроках. За період проходження педагогічної практики самооцінка готовності зросла за когнітивним і рефлексивно-етичним компонентами в обох підгрупах, за мотиваційно-ціннісним залишилася без змін, а за операційним змінилася різноспрямовано: зросла в магістрів і знизилася в бакалаврів. Менш ніж половина здобувачів, які використовували ГШІ на практиці, завжди перевіряли математичну коректність згенерованих матеріалів, що визначає перевірку математичного змісту відповідей моделі як пріоритет підготовки до практики.

Перспективи подальших досліджень пов'язані з оцінюванням узгодженості тверджень у межах блоків і зіставленням самооцінок із результатами виконання практичних діагностичних завдань на виявлення помилки, перевірку твердження та адаптацію матеріалу для учнів.

4. *Романовський О. Г., Гриньова В. М., Жерновникова О. А., Штефан Л. А., Фазан В. В.* Formationoffuturemathematicsteachers' digitalcompetence: ascertainstage // Інформаційні технології і засоби навчання. 2018. Т. 65, № 3. С. 184–200. DOI: 10.33407/itlt.v65i3.2412.
5. *Жерновникова О. А., Перетяга Л. Є., Ковтун А. В., Кордубан М. В., Наливайко О. О., Наливайко Н. А.* Технологія формування цифрової компетентності майбутніх учителів засобами гейміфікації // Інформаційні технології і засоби навчання. 2020. Т. 75, № 1. С. 170–185.
6. *Nalyvaiko O., Zhernovnykova O., Nalyvaiko N., Molotok V.* Academic integrityin the condition sforce ddistance learning // Openeducational e-environment of modernuniversity. 2022. Vol. 13. P. 89–103.
7. *Ponomarova N., Gulich O., Zhernovnykova O., Olefirenko N., Masych V.* Conditions of blended learning implementation in H. S. Skovoroda Kharkiv National Pedagogical University: experienceofPhysicsandMathematicsFaculty // SHS WebofConferences. 2021. Vol. 104. 02017.
8. *Батюк Л. В., Жерновникова О. А.* Компаративний аналіз формування професійної компетентності викладача математики в STEM-освітньому середовищі США та України // Проблеми математичної освіти (ПМО–2025): матеріали XI міжнар. наук.-метод. конф. Черкаси: ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2025. С. 58–59.
9. *Miao F., Cukurova M.* AI competencyframe work for teachers. Paris: UNESCO, 2024. DOI: 10.54675/ZJTE2084.

READINESS OF PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS TO USE GENERATIVE ARTIFICIAL INTELLIGENCE: DIAGNOSTICS BEFORE AND AFTER TEACHING PRACTICE

The paper addresses the readiness of pre-service mathematics teachers to use generative AI in a pedagogically sound way. A pedagogical experiment involved 70 graduating students (24 bachelor's and 46 master's) surveyed before and after teaching practice.

The questionnaire operationalises four components of readiness through 20 statements about specific professional actions and is supplemented by a block on actual AI use during practice.

The scoring procedure, the interpretation of shifts between the two measurements and the methodological implications for teacher training are presented.

УДК 373.5.016:51

РЕАЛІЗАЦІЯ КОМПЕТЕНТНІСНОГО ПІДХОДУ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В КОНТЕКСТІ ВИМОГ НОВОЇ УКРАЇНСЬКОЇ ШКОЛИ ЗАСОБАМИ STEM-ОСВІТИ

Христина КЛУБУК
Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне,Україна
khrystuna115@gmail.com

Актуальність цієї теми полягає у переході Нової української школи (НУШ) до компетентнісного підходу на уроках математики, що передбачає взаємозв'язок теорії з повсякденним життям. Ключовим інструментом стають засоби STEM-освіти, що розвивають аналітичне мислення та розумову діяльність учнів. Згідно з сучасними освітніми пріоритетами поєднання міждисциплінарної інтеграції (наука, технології, інженерія, математика) з практичними методами викладання математики є необхідною умовою для успішного формування компетентностей в учнів).

Метою дослідження є обґрунтування та опис особливостей впровадження компетентнісного підходу під час уроків з математики в умовах НУШ, а також визначення результатів використання прикладних завдань, STEM-кейсів для формування умінь і навичок та пізнавального інтересу у здобувачів освіти.

Для виконання поставлених завдань було використано систему підходів: аналіз, синтез педагогічних і методичних джерел; систематизація та узагальнення.

STEM-підхід (Science – вивчення законів природи, Technology – знання, процеси, які входять до технологічної діяльності, Engineering – створення продукту і вирішення проблемних питань, Math – вивчення цифр, величин та форм) є одним з провідних напрямків розвитку освіти сьогодення. Його активно впроваджують в освітній процес у межах Нової української школи [1].

Як передбачено у Державній установі «Інститут модернізації змісту освіти» на 2025 рік (від 08.01.2025 №3), метою STEM-освіти є формування у здобувачів відповідних компетентностей, зацікавленості у професійному самовизначенні на науково-технічних сферах, розвиток аналітичного мислення та цифрової грамотності [2].

Реалізація компетентнісного підходу під час навчання математики в класах НУШ засобами STEM-освіти, перш за все, потребує заміни змісту окремих тем з урахуванням особистісно-орієнтованих завдань, запровадження інноваційних технологій навчання, а також створення належних умов для успішної проєктної діяльності.

В освіті поєднуються міждисциплінарна інтеграція та проєктний підхід. Основою міждисциплінарності лежить інтеграція природничих наук із технологіями, інженерною творчістю та математикою. Використання STEM-засобів в умовах НУШ дає змогу досліджувати світ, проводити досліди та створювати власні проєкти. Учням варто не боятися припускатися помилок під час вирішення складних завдань. Наприклад, під час вивчення теми з математики «Симетрія на площині. Масштаб і пропорції» учні можуть знайти на шкільному подвір'ї чи вдома приклади симетрії, паралельних чи перпендикулярних ліній у рослинах, будівлях чи тваринах.

Одним із дієвих інструментів компетентнісного підходу з математики є використання життєвих ситуацій і завдань (наприклад, завдань PISA).Завдяки STEM-засобам, а саме конструкторам, роботехнічним наборам, лазерним рулеткам, учні можуть досліджувати математику і робити висновки, що дозволяє розвивати мислення та математичну компетентність. Як приклад практичного застосування наведено задачу з математики. Площа Європейського Союзу становить 4476000 км^2.Знайдіть частину сільськогосподарських земель, на якій будуть рости органічні овочі і фрукти з планами ЄС до 2030 року. Візьміть до уваги, що усі сільськогосподарські землі ЄС становлять третю частину від загальної площі [3].

Важливим засобом у цьому процесі в контексті НУШ є також метод кейсів – навчальний підхід, що дозволяє аналізувати та вирішувати реальні проблемні ситуації. Використання навчальних STEM-кейсів під час формування математичних компетентностей дає змогу зробити урок захопливим і практично орієнтованим. Учні опановують навички обчислень, планування, аналізу даних і формування висновків. Наприклад, кейси з алгебри дають можливість зіставляти різні підходи до розв'язання задач [4].

Отже, навчання STEM-засобами має відбуватися не на вивченні окремих предметів, а на засадах міждисциплінарної взаємодії. Враховуючи сучасні теоретичні розробки, вчителі математики активно шукають захопливі STEM-засоби, орієнтовані на вікові особливості та захоплення учнів. Особливу увагу приділяють інтегрованому поєднанню знань із різних навчальних предметів у єдину систему чи тему. Завдяки STEM-засобам учні набувають навичок аналізу інформації та критичного мислення, що сприяє ефективному формуванню ключових компетентностей, які є необхідними для самореалізації нинішнього покоління.

1. *Балик Н. Р.* Використання кейс-уроків у процесі впровадження STEM-освіти в середніх загальноосвітніх школах України // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи : матеріали III міжнар. наук.-практ. конф. «STEM-освіта: шляхи впровадження, актуальні питання та перспективи». Київ ; Вінниця, 2017. № 1. С. 19–23.
2. *Методичні рекомендації щодо розвитку STEM-освіти в закладах загальної середньої та позашкільної освіти у 2024/2025 навчальному році. Лист ІМЗО від 12.08.2025 № 21/08-1242 URL: https://imzo.gov.ua/2025/08/08/lyst-imzo-vid-18-07-2025-21-08-624-metodychni-rekomendatsii-shchodo-rozvytku-stem-osvity-v-zakladakh-zahal-noi-seredn-oi-ta-pozashkil-noi-osvity-u-2025-2026-navchal-nomu-rotsi/*

3. *Топузов О. М., Васильєва Д. В.* Збірник завдань для розвитку математичної компетентності учнів у форматі PISA. Київ : Педагогічна думка, 2022. 120 с. URL: *YEYAN-Matematyka-CHastyna-1.pdf*
4. *Поліхун Н. І.* STEM/STEAM-освіта: від теорії до практики : методичний посібник / Н. І. Поліхун, К. Г. Постова, Г. В. Онопченко, О. В. Онопченко, І. М. Шевченко. Київ : Інститут обдарованої дитини НАПН України, 2023. 121 с.

IMPLEMENTING THE COMPETENCY-BASED APPROACH IN MATHEMATICS LESSONS WITHIN THE FRAMEWORK OF THE NEW UKRAINIAN SCHOOL REQUIREMENTS THROUGH STEM EDUCATION

The relevance of this topic stems from the New Ukrainian School (NUS) initiative's shift toward a competency-based approach in mathematics lessons, which emphasizes the connection between theory and everyday life. STEM education tools have become key instruments in this process, fostering students' analytical thinking and cognitive activity. In line with modern educational priorities, combining interdisciplinary integration (science, technology, engineering, and mathematics) with practical teaching methods is essential for successfully developing student competencies.

The study aims to substantiate and describe the implementation of the competency-based approach in mathematics lessons within the NUS framework, as well as to evaluate the impact of using applied problems and STEM case studies on the development of students' skills and cognitive interest.

To achieve these objectives, a range of approaches was employed, including the analysis and synthesis of pedagogical and mathematical sources, systematization and generalization, and the modeling and adaptation of applied problems.

УДК 373.5.091.26:51

ФОРМУВАЛЬНЕ ОЦІНЮВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ СКЛАДОВОЇ У КОМПЛЕКСНИХ STEAM – ПРОЄКТАХ ЯК ІНСТРУМЕНТ ВИМІРЮВАННЯ КЛЮЧОВИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ

Марія КОВАЛЕЦЬ
Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне, Україна
Kovaletsmariia9470@gmail.com

Актуальність дослідження зумовлена стрімким поширенням комплексних STEAM-проєктів у закладах загальної середньої освіти, де математична складова часто виявляється розчиненою серед природничого, технологічного та інженерного компонентів, що ускладнює її окреме й об'єктивне оцінювання. Традиційні підсумкові контрольні роботи не дають змоги простежити динаміку формування математичних умінь учня в умовах командної міждисциплінарної діяльності, тому постає потреба в розробленні інструментів формувального оцінювання, здатних фіксувати прогрес кожного учасника проєкту без порушення цілісності групової роботи. Мета дослідження полягає в обґрунтуванні підходів до формувального оцінювання математичної складової STEAM-проєктів як інструменту вимірювання ключових компетентностей учнівства. Для досягнення мети використано методи аналізу й систематизації науково-педагогічної літератури, порівняння вітчизняного досвіду впровадження STEM-освіти, а також узагальнення педагогічного досвіду організації проєктної діяльності з математичним складником [1].

Аналіз чинної модельної навчальної програми міжгалузевого інтегрованого курсу STEM засвідчує, що математична компетентність розглядається не як окрема предметна лінія, а як наскрізний інструмент моделювання, аналізу даних і обґрунтування інженерних та дослідницьких рішень, який реалізується практично в кожному змістовому модулі курсу [1]. Це підтверджує тезу про необхідність вимірювання математичної складової не після завершення проєкту, а безпосередньо в процесі його виконання, коли учень послідовно проходить етапи постановки проблеми, побудови математичної моделі, обчислень, інтерпретації результатів і презентації здобутих даних команді.

У межах дослідження запропоновано розглядати формувальне оцінювання математичної складової STEAM-проєкту як сукупність трьох взаємопов'язаних компонентів: поточного спостереження за навчальними діями учня (застосування формул, побудова графіків, перевірка гіпотез), аналізу проміжних продуктів діяльності (розрахунків, схем, таблиць результатів вимірювань) та рефлексивного самооцінювання учнем власного внеску в розв'язання математичної частини завдання. Такий підхід узгоджується з висновками щодо структурно-функціональної моделі формування STEM-компетентностей, де діагностичний блок передбачає використання критеріїв ціннісно-мотиваційного, креативно-діяльнісного, когнітивного та рефлексивно-оцінного характеру [2].

Диференціація інструментів формувального оцінювання доцільна відповідно до рівня реалізації курсу: на основному рівні достатньо фіксувати коректність виконання алгоритму обчислень і участь учня в колективному розв'язанні математичної частини завдання за готовим шаблоном, тоді як на поглибленому рівні оцінюванню підлягають самостійність постановки математичної проблеми, обґрунтованість вибору методу, якість перевірки та інтерпретації отриманих результатів [1]. Така диференціація дає змогу узгодити критерії оцінювання з очікуваними результатами навчання, визначеними для кожного рівня складності STEAM-діяльності.

Практичне значення дослідження полягає в розробленні орієнтовної рубрики оцінювання, яка дає змогу вчителю фіксувати рівень сформованості математичних умінь учня за чотирма рівнями – початковим, середнім, достатнім і високим – окремо від оцінки командного продукту STEAM-проєкту в цілому. Це дає змогу уникнути ситуації, коли підсумковий бал за проєкт формально приписується всім членам команди незалежно від фактичного внеску кожного в математичне обґрунтування рішення [2].

Наукова новизна результатів полягає в уточненні структури математичної компетентності учня саме в контексті командної міждисциплінарної діяльності, де традиційні предметні критерії доповнюються показниками комунікації математичних результатів партнерам по команді та коректного застосування цифрових інструментів для перевірки й візуалізації обчислень. Це розширює усталене розуміння математичної компетентності, орієнтоване переважно на індивідуальне розв'язування задач, і наближає його до вимог сучасної проєктної STEAM-діяльності [1].

Окремої уваги в дослідженні потребує питання інструментарію збору даних формувального оцінювання математичної складової STEAM-проєкту. На відміну від традиційного уроку математики, де вчитель має змогу послідовно перевірити роботу кожного учня, у командному проєкті математичні дії часто виконуються паралельно кількома учасниками або делегуються одному з них, що ускладнює індивідуалізацію оцінки. Тому доцільним є використання коротких цільових спостережень на ключових етапах інженерного циклу – постановки проблеми, побудови моделі, обчислень і презентації результатів, – які фіксують саме математичні дії учня, а не загальний внесок у проєкт [1].

Важливим елементом формувального оцінювання є зворотний зв'язок, який учень отримує безпосередньо під час виконання математичної частини завдання, а не лише після завершення проєкту. Своєчасні коментарі вчителя щодо коректності обраного методу розрахунку, повноти інтерпретації графіка чи доцільності перевірки результату дають змогу учневі скоригувати свою діяльність до моменту публічної презентації проєкту, що підвищує як якість кінцевого продукту, так і рівень усвідомленості математичних дій самого учня [2].

Не менш значущим є розвиток навичок самооцінювання в команді, оскільки саме воно формує у здобувачів освіти здатність до рефлексії щодо власного внеску в розв'язання математичної частини завдання. Використання простих інструментів самооцінювання (короткі анкети, шкали впевненості, структуровані запитання на кшталт «який метод я застосував і чому») дає змогу вчителю доповнити спостереження власними судженнями учня про рівень сформованості його математичних умінь, що узгоджується з рефлексивно-оцінним критерієм структурно-функціональної моделі формування STEM-компетентностей [2].

Ключова методична проблема полягає в тому, що продукт командного STEAM-проєкту є результатом спільної діяльності, тоді як формувальне оцінювання математичної складової має вимірювати індивідуальний рівень сформованості вмінь конкретного учня. Об'єктивізація такого вимірювання досягається завдяки розмежуванню двох рівнів аналізу: командного (чи коректно побудовано й застосовано математичну модель у кінцевому продукті) та індивідуального (чи здатний кожен учасник команди самостійно пояснити обраний метод, відтворити обчислення або застосувати той самий підхід до аналогічної задачі поза контекстом проєкту) [1].

Додатковим інструментом об'єктивізації оцінювання є короткі індивідуальні перевірки розуміння, які вчитель проводить окремо з кожним учнем на етапах побудови моделі та інтерпретації результатів, не порушуючи цілісності командної роботи. Такі перевірки передбачають, наприклад, прохання пояснити, чому для розв'язання обрано саме цю формулу чи метод статистичного опрацювання даних, або відтворити ключовий розрахунок із проєкту на дещо зміненому наборі числових даних, що дає змогу відрізнити самостійне розуміння від відтворення результату, отриманого іншим членом команди [1].

Об'єктивність оцінювання підвищується також завдяки використанню структурованих критеріїв взаємооцінювання в команді, коли учасники проєкту оцінюють математичний внесок одне одного за чіткими, заздалегідь визначеними показниками (коректність обчислень, обґрунтованість вибору методу, якість перевірки результату), а не за загальним враженням від командної роботи. Поєднання даних учительського спостереження, індивідуальних міні-перевірок і структурованого взаємооцінювання дає змогу отримати комплексну, підтверджену оцінку математичних навичок учня в умовах командної міждисциплінарної діяльності [1].

Отже, формувальне оцінювання математичної складової комплексних STEAM-проєктів дає змогу об'єктивізувати вимірювання ключових компетентностей учнівства, забезпечуючи водночас педагогічну підтримку учня впродовж усього циклу проєктної діяльності.

1. *Модельна навчальна програма* міжгалузевого інтегрованого курсу «STEM. Профільна середня освіта. Основний / поглиблений рівень» для закладів загальної середньої освіти / А. С. Кудра та ін. Київ : МОН України, 2026. 20-27 с. URL: https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2026/mnp/08/21/mnp-stem.pdf
2. *Пилипенко О. С.* Формування STEM-компетентностей студентів закладів фахової передвищої освіти у навчанні математики / наук. керівник Т. Г. Крамаренко ; Криворізький держ. пед. ун-т. Кривий Ріг, 2023. 284 с. URL: https://elibrary.kdpu.edu.ua/handle/123456789/8070

FORMATIVE ASSESSMENT OF THE MATHEMATICAL COMPONENT IN INTEGRATED STEAM PROJECTS AS A TOOL FOR MEASURING KEY COMPETENCIES

English abstract. The aim of the study is to substantiate approaches to the formative assessment of the mathematical component of STEAM projects as a tool for measuring students' key competencies. To achieve this aim, the study employs methods involving the analysis and systematization of academic and pedagogical literature, a comparison of domestic experience in implementing STEM education, and the generalization of pedagogical experience regarding the organization of project-based activities with a mathematical component.

УДК 37.091.33:51:004

НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ БЕЗ ВІКОВИХ МЕЖ: ОСОБЛИВОСТІ РОБОТИ ЗІ СТУДЕНТАМИ РІЗНОГО ВІКУВ УМОВАХ ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ

Ольга КИЄНКО
ВСП «Донбаський аграрний фаховий коледж СНУ ім. В. Даля», м. Дніпро, Україна
boleksij276@gmail.com
Михайло ГЕРМАН
ВСП «Донбаський аграрний фаховий коледж СНУ ім. В. Даля», м. Дніпро, Україна
sergejoak@gmail.com

Сьогодні студент коледжу не обов'язково є вчорашнім випускником школи. До закладів фахової передвищої освіти вступають люди різного віку. Одні продовжують навчання відразу після 9 класу, інші повертаються до освіти через кілька або навіть багато років. Причини можуть бути різними: бажання отримати нову спеціальність, змінити професію, здобути освіту, якої свого часу не вистачало. Тому ситуація, коли одну й ту саму дисципліну вивчають студенти з різним життєвим та освітнім досвідом, уже не є чимось незвичним.

Особливо цікаво це можна побачити на прикладі математики. Студенти, які вступили до коледжу на основі базової середньої освіти, одночасно з професійною підготовкою продовжують здобувати повну загальну середню освіту. Отже, математичний матеріал може бути однаковим за програмою, але зовсім не однаковим за тим, як його сприймають різні студенти.

Для того, хто тільки нещодавно навчався у школі, багато тем є продовженням уже знайомого матеріалу. Дорослому студентові після тривалої перерви інколи доводиться пригадувати навіть те, що колись добре знав. Формули забуваються, окремі правила вже не відтворюються автоматично, потрібно знову звикати до математичних записів. Проте є й інша сторона. З віком людина накопичує життєвий, а часто і професійний досвід. Через це практичний зміст задачі може сприйматися вже не як абстрактна умова з підручника, а як зрозуміла життєва ситуація.

Саме тому говорити про студентів різного віку в категоріях «кому легше, а кому важче» було б неправильно. Значно важливіше враховувати різний попередній досвід. Один студент краще пам'ятає шкільну програму, інший краще розуміє практичний бік завдання. Комусь достатньо один раз почути пояснення викладача, а комусь потрібно повернутися до нього ще раз.

В умовах дистанційного навчання ця різниця стає ще помітнішою. Для математики дистанційний формат має свої особливості. Під час звичайного заняття викладач бачить роботу студента, може звернути увагу на помилку в конкретній дії. Через екран зробити це складніше, особливо тоді, коли студент не може точно пояснити, на якому саме етапі перестав розуміти розв'язання.

Водночас дистанційне навчання має можливості, яких не було при традиційній роботі лише з дошкою, підручником і зошитом. Навчальний матеріал можна залишити в електронному середовищі, до нього можна повернутися пізніше. Відеопояснення або запис заняття, за наявності такої можливості, можна переглянути повторно. Викладач може окремо показати зразок виконання завдання, додати коротку інструкцію, презентацію, тест для самоперевірки або додаткові приклади. Цифрові технології в освіті дорослих розглядаються, зокрема, як засіб розширення доступу та можливостей навчання [1; 2].

Для дорослого студента така можливість має практичне значення. Повернувшись до певної теми через кілька років після школи, не завжди можна відразу пригадати весь необхідний матеріал. При дистанційному навчанні є можливість самостійно повернутися до попередньої теми, ще раз переглянути пояснення і тільки після цього виконувати завдання. Водночас це корисно не лише дорослим студентам. Молодший студент також може пропустити частину пояснення, не зрозуміти тему з першого разу або потребувати додаткового прикладу.

Тому цифрові інструменти доцільно розглядати не як заміну викладача математики, а як додатковий спосіб організувати навчання. Не так важливо, скільки різних програм використовується на занятті. Значно важливіше, чи допомагають вони студентові зрозуміти тему. Іноді звичайного електронного конспекту, демонстрації екрана та кількох завдань для самоперевірки буде достатньо. Надмірна кількість сервісів, навпаки, може відволікати від самої математики.

Не зовсім правильно автоматично пов’язувати цифрові навички з віком людини. Молодий студент може постійно користуватися смартфоном, але вперше працювати з певною освітньою платформою. Дорослий студент може багато років використовувати комп’ютер у роботі й не мати труднощів із дистанційним навчанням. Тому важливішими є попередній досвід людини, доступ до техніки, зрозумілість навчального середовища та якість пояснення.

Дистанційний формат також дає певну гнучкість дорослим людям, які поєднують освіту з роботою та іншими обов’язками. У дослідженнях цифрової освіти дорослих гнучкість щодо часу й місця навчання розглядається як одна з її важливих можливостей [2]. Проте гнучкість не означає, що дистанційно навчатися простіше. Такий формат вимагає самостійності, організації власного часу та відповідальності за виконання завдань.

Вікова різноманітність студентів поступово стає звичайною рисою освіти. Це потрібно враховувати і при викладанні математики. Завдання викладача полягає не в тому, щоб створювати окрему математику для молодших і старших студентів. Навчальна програма залишається спільною. Проте способи пояснення, повторення та закріплення матеріалу можуть бути достатньо гнучкими.

Цифрові засоби та дистанційні технології дають для цього додаткові можливості. Вони дозволяють студентові повернутися до матеріалу, повторити забуте, перевірити себе та працювати з окремими темами у власному темпі. Для викладача це можливість доповнити звичайне пояснення матеріалами, які залишаються доступними після заняття. Саме так цифрові інструменти можуть бути корисними в навчанні математики студентів різного віку: не замінюючи традиційне навчання, а роблячи його більш гнучким.

1. UNESCO. Recommendation on Adult Learning and Education. Paris: UNESCO, 2015.
2. OECD. Quality Matters: Ensuring the Quality of Digital Adult Education and Training. Paris: OECD Publishing, 2024.

MATHEMATICS EDUCATION WITHOUT AGE LIMITS: PECULIARITIES OF TEACHING STUDENTS OF DIFFERENT AGES IN DISTANCE LEARNING

The paper considers the peculiarities of teaching mathematics to college students of different ages in distance learning. Attention is paid to differences in previous educational experience and to the role of digital tools in providing opportunities to review explanations, repeat material and organize independent work at an individual pace. It is emphasized that age itself does not determine a student’s digital competence or ability to learn mathematics.

УДК 373.5.016:51

ФОРМУВАННЯ КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ УЧНІВ ЧЕРЕЗ РОЗВ’ЯЗАННЯ НЕСТАНДАРТНИХ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ У STEM-СЕРЕДОВИЩІ

Марія КОЗАЧЕНКО
Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне, Україна
mariakozacenko2005@gmail.com

З розвитком інформаційно-комунікаційних технологій, робототехніки та нанотехнологій стрімко зростає потреба у досвідчених фахівців технічних та природничо-математичних дисциплін. Саме тому STEM-освіта є пріоритетним напрямком, адже сьогодні існує велика затребуваність IT-фахівців, програмістів, інженерів і працівників технологічних виробництв. Професії майбутнього тісно пов'язані з технологіям виробництвом на межі з природними науками. Щоб підготувати до цього молодь, творче мислення майбутніх спеціалістів необхідно розвивати вже зі шкільного курсу математики. Цього можна досягти шляхом розв'язання евристичних, дослідницьких та прикладних задач із використанням інформаційно-комунікаційних технологій, зокрема системи динамічної математики GeoGebra, а також через активне впровадження проектної та дослідницької діяльності. Участь учнів у міжнародних порівняльних дослідженнях, таких як TIMSS та PISA, є невіддільною частиною цього процесу, оскільки вона дозволяє об'єктивно оцінювати рівень підготовки підлітків та їхню здатність застосовувати здобуті знання на практиці [1]. Розглянемо окремі приклади евристичних задач:

Задача 1. Кімната в будинку Іщуків має 5 м завдовжки, 3,5 м завширшки і 3 м заввишки. Площа дверей і вікон ставить $\frac{1}{6}$ чистину від усієї площі стін.

1) Скільки рулонів шпалер потрібно, щоб обклеїти цю кімнату, якщо довжина рулону становить 10 м, а ширина – 0,5 м ?

2) Скільки коштів витратить родина на шпалери, якщо один рулон коштує 180 грн? Враховуйте, що, якщо купувати шпалери на суму понад 1000 грн, магазин робить знижку 5%[2,с. 35].

Розв'язання:

1) Площа всіх стін (див. на рис. 1):

$S_{\text{стін}} = 10{,}5 + 15 + 10{,}5 + 15 = 51$ м^2.

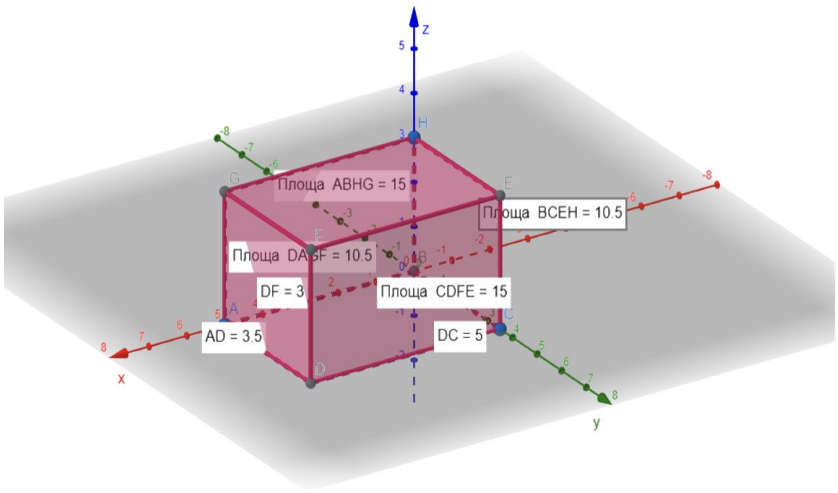


Рис. 2. Модель кімнати в програмі GeoGebra

Площа, яку потрібно обклеїти:$S_{\text{обкл}} = S_{\text{стін}} - \frac{1}{6}S_{\text{стін}} = (1 - \frac{1}{6}) \cdot 51 = \frac{5}{6} \cdot 51 = 42{,}5$ м^2;

Площа одного рулону:$S_{\text{рулону}} = 10 \cdot 0{,}5 = 5$ м^2;

Кількість рулонів:$n = \frac{42{,}5}{5} = 8{,}5$ в магазині продають лише цілі рулони, тому ми округлимо до 9 рулонів;

2) Вартість без знижки: $9 \cdot 180 = 1620$ грн;

Сума, яку оплатили родина Іщуків: $1620 - 1620 \cdot 0{,}05 = 1620 - 81 = 1539$ грн.

Відповідь:

1) 9 рулонів;

2) 1539 грн.

Задача 2. З року в рік лісники Вінниччини залучають до акції «Майбутнє лісу – у твоїх руках!» школярів. Так, учасники та учасниці учнівських лісництв заклали для висаджування саджанців дуба ділянку прямокутної форми 15 м завдовжки і 8 м завширшки. Скільки мішків чорнозему знадобилося для її закладання, якщо на кожний квадратний метр ділянки потрібно 40 кг чорнозему, а мішок уміщує 100 кг [2, с. 53]?

Розв'язання:

Використовуючи GeoGebra визначимо площу ділянки (див. на рис. 2).

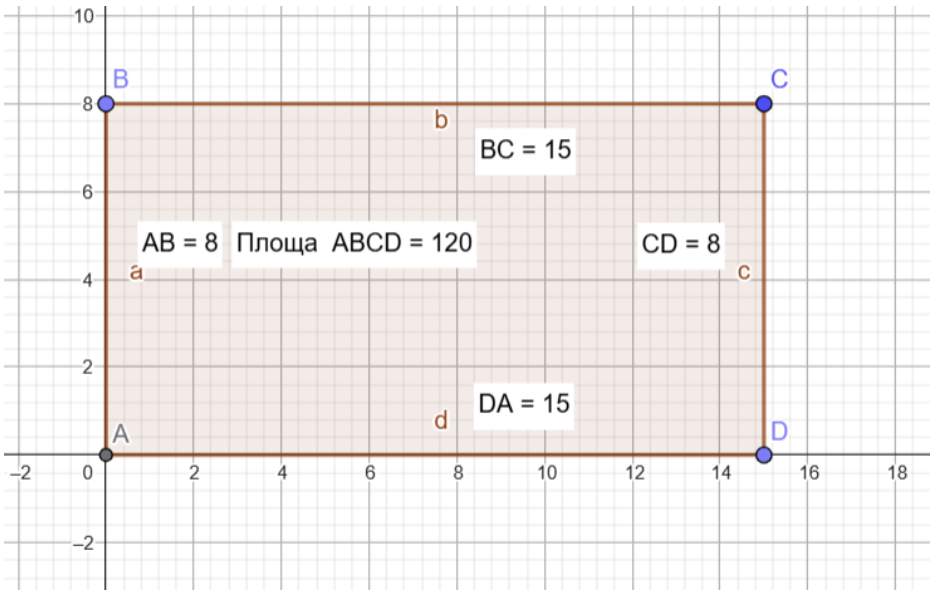


Рис. 3. Площа ділянки

Тоді визначило кількість чорнозему, яка нам знадобиться:

$120 \cdot 40 = 4800$ кг.

Звідси, кількість мішків:

$\frac{4800}{100} = 48$ мішків чорнозему.

Відповідь: 48 мішків.

Задача 3. Висота футбольних воріт – відстань від нижнього контура перекладини до поверхні землі – 8 фунтів. Ширина футбольних воріт – відстань між стійками – 8 ярдів. Знайдіть в інтернеті, як перевести фунти та ярди в метри, й обчисліть площу футбольних воріт у м^2. Результат округліть до десятих м^2[2, с. 56].

Розв'язання:

Здійснимо пошук в інтернеті. В результаті ми дізналися, що

1 фунт = 0,3048 м;

1 ярд = 3 фунтам = 0,9144 м;

Звідси, 8 фунтів = 2,4384 м, а 8 ярдів = 7,3152 м [3].

Використовуючи GeoGebra визначимо площу ділянки (див. на рис. 3).

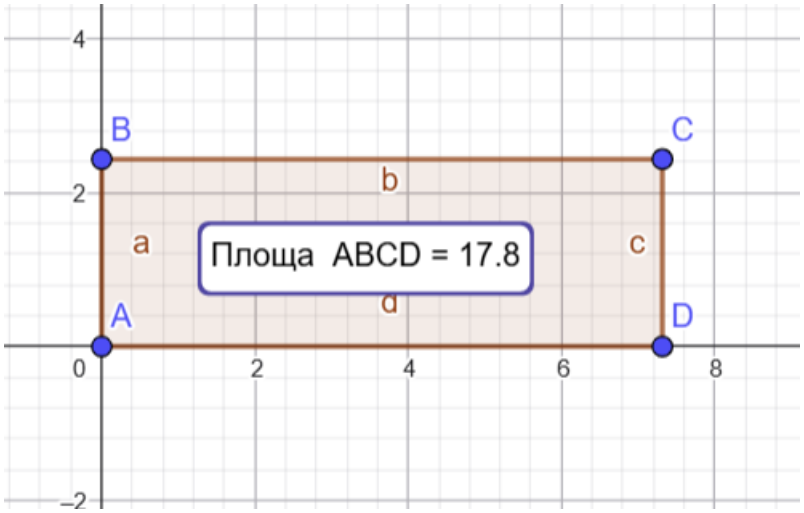


Рис.4. Площа футбольних воріт

Відповідь:17,8 м^2.

У межах дослідження було розглянуто практичний потенціал застосування евристичних та прикладних завдань у процесі навчання математики. На основі розв'язання прикладних задач практичного спрямування доведено важливість зв'язку шкільної теорії з реальним життям. Показано ефективність використання сучасних цифрових інструментів, зокрема середовища динамічної математики GeoGebra, для наочного моделювання, графічної інтерпретації та точного обчислення параметрів геометричних фігур. Використання таких підходів сприяє розвитку критичного мислення, просторової уяви та дослідницьких навичок здобувачів освіти, що повністю відповідає вимогам Нової української школи (НУШ) до сучасної STEM-освіти.

1. *Гриб'юк О.О., Юнчик В.Л.* Евристичні задачі з використання системи динамічної математики GeoGebra в контексті STEM-освіта //Матеріали Всеукраїнської наукової конференції.2015. С.1-10.
2. *Істер О.С.* Геометрія: підруч. для 8 кл. закл. заг. серед. освіти. Київ : Генеза,2025.216 с.
3. Таблиця відповідності фунтів і метрів. URL: https://samoosvita.in.ua/tablytsya-vidpovidnosti-futiv-i-metriv/ (дата звернення: 27.09.2026)
4. GeoGebra URL: https://www.geogebra.org/materials (дата звернення: 27.09.2026).

FORMING PUPILS' CRITICAL THINKING THROUGH SOLVING NON-STANDARD APPLIED PROBLEMS IN A STEM ENVIRONMENT

The process of forming pupils' critical thinking through STEM education via solving non-standard applied problems is investigated. Examples of applying mathematical models using the GeoGebra environment are considered.

УДК 517.2:517.3

ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ТА ІНТЕГРАЛА В ПРОЦЕСІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

Зоя КРАВЧЕНКО
Харківська академія неперервної освіти, Харків, Україна
zoyakrav@ukr.net

Освіта сьогодення вносить свої зміни до підготовки випускників, а стрімкий розвиток освіти, науки і техніки ставить нові вимоги до підготовки майбутнього покоління: виховання випускника освіченого, висококваліфікованого, обізнаного у різних сферах наукової діяльності. На сьогодні вагомою проблемою для випускників є оволодіння математичними знаннями. Зазначимо, що шкільний курс «Алгебри і початків аналізу», який включає елементи математичного аналізу досить часто викладається відособлено, не маючи яскраво вираженої прикладної спрямованості, викликаючи в учнів нерозуміння необхідності вивчення навчального матеріалу. Через це з самого початку початки математичного аналізу доцільно викладати у зв'язку з його використанням у фізиці та інших природничих науках, що буде сприяти розвитку прикладної спрямованості

математичної освіти та формуванню сприйняття органічної єдності світу. Ми погоджуємося з авторами [3], що в більшості шкільних підручників з курсу алгебри і початків аналізу старшої профільної школи обмежуються розглядом класичних задач, що приводить до поняття похідної, розглядають прикладні задачі, пов'язані лише з механічним змістом похідної та окремі прикладні задачі на знаходження найбільшого (найменшого) значення функції.

Аналіз досліджень і публікацій. Питання прикладної спрямованості шкільної математичної освіти, зокрема алгебри і початків аналізу, досліджували в своїх роботах відомі методисти В.Г. Бевз, М.Б. Гельфанд, З.І. Слєпканьта ін. Я.С. Бродський, О.Л. Павлов розглядали шляхи реалізації проблеми прикладної спрямованості навчання математики, А.О.Соколенко, В.О. Швець [3] розглядали різні типи прикладних задач, що призначені для вивчення похідної та її застосування у курсі алгебри і початків аналізу, В.Я. Забранський розглядав прикладні задачі під час вивчення лінійних та квадратних рівнянь, В.А. Ачкан [1] розглядав прикладні задачі у процесі вивчення показникових рівнянь у класах різних профілів.

Одним із шляхів здійснення прикладної спрямованості навчання початкам аналізу є використання прикладних задач, що розкривають можливість застосування математичного аналізу до оточуючої дійсності. Прикладні задачі використовують у процесі навчання для розкриття різноманітних застосувань математичного аналізу в житті. Слід зазначити, що у старшокласників виникають труднощі, під час виконання завдань практичного спрямування, також у більшості учнів не сформовано вміння виконувати елементарне моделювання/ Тому, можна дійти висновку, що у змістовій лінії курсу алгебри і початків аналізу не вистачає завдань практичного спрямування.

Мета статті – розглянути один з шляхів удосконалення методики навчання алгебри і початкам аналізу, а саме посилення прикладної спрямованості навчання за допомогою використання у навчальному процесі прикладних задач фізичного змісту (на прикладі застосування похідної та інтеграла). Запропонувати систему прикладних задач на застосування похідної та інтеграла, яка сприятиме формуванню дослідницької компетентності учнів.

Виклад основного матеріалу. Дослідники по різному трактують поняття «прикладної задачі». Одні прикладною називають задачу, що потребує перекладу з природної мови на математичну, інші вважають, що прикладна задача за своєю постановкою і методами розв'язування має бути близькою до задач, що виникають на практиці.

Ми будемо розуміти під прикладною задачею таку задачу, яка виникла поза курсом математики і розв'язується математичними методами і способами, які вивчаються в шкільному курсі. Тому прикладні задачі в навчанні алгебри і початків аналізу використовуються для відпрацювання навичок конструювання математичних моделей по відповідним реальним ситуаціям, розвитку логічного мислення учнів, застосування математичних знань, що необхідні в повсякденному житті, майбутній професії в нестандартних ситуаціях, формування уміння для дослідження, моделювання практичних ситуацій на основі вивчених формул і властивостей.

Прикладні задачі можна умовно розділити на такі, у яких математична модель міститься в умові задачі, і на такі, розв'язання яких передбачає побудову математичної моделі.

Для розв'язування прикладних задач ми використовуємо елементи математичного моделювання. Спрощена схема евристичної діяльності математичного моделювання може виглядати так: 1) побудова математичної моделі; 2) реалізація математичної моделі математичними методами; 3) інтерпретація одержаного розв'язку.

Математичне моделювання дає можливість не тільки обчислити конкретні значення якоїсь величини, але й досліджувати об'єкт або процес, про який йдеться в задачі.

Для реалізації математичної моделі математичними методами доцільно скористатися орієнтирами: 1) одну з величин, яку потрібно знайти (або величину, за допомогою якої можна дати відповідь на питання задачі), позначити через x (і за змістом задачі накласти обмеження на x); 2) ту величину, про яку говориться, що вона найбільша або найменша, виразити як функцію від x: 3) дослідити одержану функцію на найбільше чи найменше значення (найчастіше за допомогою похідної); 4) впевнитися, що одержаний результат має зміст для початкової задачі.

Аналіз знайдених результатів обов'язковий у процесі розв'язування прикладних задач, так як у процесі розвитку науки і техніки дані про досліджувані явища усе більше і більше уточнюється і настає момент, коли висновки, що одержують на основі існуючої математичної моделі не відповідають нашим знанням про явища. Таким чином, виникає необхідність побудови нової, досконалішої математичної моделі.

Під час формування поняття похідної слід виробляти розуміння того, що похідна моделює не лише швидкість механічного руху, а й швидкість зміни будь-якого процесу з часом.

Похідна може характеризувати швидкість зміни функції по відношенню до зміни незалежної змінної. В механіці похідна характеризує швидкість нерівномірного прямолінійного руху, в біології – швидкість розмноження колонії мікроорганізмів, в економіці – граничні витрати виробництва, в хімії – швидкість хімічної реакції. Існує цілий ряд математичних задач, що розв'язуються за допомогою похідної: знаходження кута між прямими, що перетинаються між графіками функцій; знаходження рівняння дотичної до графіка функції; доведення тотожностей; розв'язування рівнянь; доведення нерівностей; розв'язування систем рівнянь; розв'язування задач з параметрами; знаходження границі функції за допомогою правила Лопіталя.

Зупинимося більш детально на застосуванні похідної під час розв'язування прикладних задач фізичного змісту. Запропоновані задачі можна розглядати як основу для створення багатьох інших прикладних задач із різним змістовим наповненням, але спільною ідеєю розв'язання. Передусім, бажано повторити з учнями фізичні похідні величини, що буде узагальнено у вигляді таблиці, яка буде демонструватися на дошці. Далі пропонуємо учням розглянути конкретні задачі фізичного змісту.

Таким чином, використання прикладних задач фізичного змісту на різних етапах уроку алгебри і початків аналізу сприяє підвищенню мотивації до навчання алгебри і початків аналізу, відображає зв'язок між алгеброю і початками аналізу та фізикою, формує в старшокласників уміння застосовувати отримані знання у практичній, наближеній до життєвої ситуації. Тому вітчизняним методистам та науковцям потрібно більшу увагу звернути на напрацювання підходів, що будуть направлені на посилення практичної спрямованості математичної освіти.

1. *Ачкан В.В.* Використання прикладних задач у процесі вивчення показникових рівнянь у класах різних профілів // Математика в школі. 2011. № 4. С. 31–35.
2. *Грицик Т.А.* Прикладні задачі під час вивчення лінійних та квадратних рівнянь. // Математика в школі. 2010. № 12. С. 14–19.
3. *Соколенко Л.О.* Різні типи прикладних задач, що призначені для вивчення похідної та її застосувань у курсі алгебри і початків аналізу // Математика в рідній школі. 2014. № 9. С. 2–10.

TITLE OF THE TALK IN ENGLISH

The derivative and integral use in the process of solving applied problems.

УДК 37:004.9

SMART-ОСВІТА ЯК ЕКОСИСТЕМА: ВІД ЦИФРОВІЗАЦІЇ ПРОФЕСІЙНОЇ ПІДГОТОВКИ ДО ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОЇ ТРАНСФОРМАЦІЇ ОСВІТНЬОГО СЕРЕДОВИЩА

Микола КУДІНОВ
Бердянський державний педагогічний університет, м. Запоріжжя, Україна
nickbestforever@gmail.com

У сучасній науковій та освітній дискусії поняття «SMART-освіта» поступово розширилося від використання цифрових технологій та інтелектуальних освітніх середовищ до системного поєднання даних, адаптивних технологій, штучного інтелекту, педагогічних практик і механізмів управління. На основі узагальнення міжнародних наукових підходів пропонуємо розглядати цю еволюцію як умовну послідовність чотирьох етапів:

- SMART-освіта 1.0 (Цифровізація): фокус на базових цифрових ресурсах, PDF-форматах, системах управління навчанням (LMS), електронних журналах та інструментах відеоконференцзв'язку [6].
- SMART-освіта 2.0 (Дані та персоналізація): поява освітньої аналітики, адаптивного навчання та інтелектуальних систем репетиторства [7].
- SMART-освіта 3.0 (Освіта з підтримкою штучного інтелекту): інтеграція генеративного штучного інтелекту, ШІ-тьюторів, автоматизованого зворотного зв'язку та систем інтелектуального оцінювання [8].
- SMART-освіта 4.0 (Людиноцентрична інтелектуальна освітня екосистема): перспективнийетап, у межах якого штучний інтелект не просто допомагає викладачу, а комплексно взаємодіє з освітніми даними, LMS, аналітикою, адаптивними платформами, цифровими ресурсами, системами оцінювання, менеджментом закладу,

педагогом і здобувачем освіти [3; 8].

У ранніх дослідженнях Smart Learning середовище розглядалося не як набір окремих інструментів, а як цілісна система. Зокрема, Г. Дж. Хванг [4] визначав Smart Learning Environment як середовище, що здатне визначати контекст і стан навчання та надавати відповідні підказки чи підтримку у потрібний час. У свою чергу, З. Чжу з колегами [10] виокремлюють три взаємопов'язані компоненти: розумне середовище → розумнапедагогіка → розумний учень.

На основі узагальнення сучасних міжнародних підходів, представлених в OECD Digital Education Outlook 2026 [8], нами виокремлено три взаємопов'язані рівні цифрової освітньої екосистеми:

1) Рівень здобувача освіти забезпечує персоналізацію й адаптивність завдяки освітній аналітиці.

2) Рівень педагога виступає простором професійної трансформації, де цифрові інструменти слугують інтелектуальними асистентами, беручи на себе рутинні задачі й вивільняючи час для наставництва та прийняття рішень.

3) Рівень управління (менеджменту) базується на прийнятті рішень на основі даних для стратегічного планування та оптимізації ресурсів.

Синергія цих рівнів забезпечує перехід від локальної цифровізації до системної трансформації. Її доказовою базою є метааналіз 43 експериментальних і квазіекспериментальних досліджень [1], що засвідчив статистично значущий позитивний ефект Smart Learning Environments на результати навчання, та систематичний огляд 38 оглядових досліджень [5], який виявив як переваги, так і обмеження інтелектуальних освітніх технологій.

Для глибшого розуміння еволюції та ризиків цифрової трансформації нами розроблено матрицю SMART-освіти (табл. 1). На ресурсному рівні цифрові ресурси забезпечують доступ до інформації, але створюють ризик інформаційного перевантаження [6]. На комунікаційному рівні інструменти LMS (систем управління навчанням) і хмарні сервіси трансформують комунікацію, водночас створюючи ризики її фрагментації та соціальної ізоляції [2]. Навчальна аналітика уможливлює прийняття рішень на основі даних, але актуалізує ризики профілювання здобувачів і порушення приватності [7].

На адаптивному рівні навчання забезпечує глибоку персоналізацію, стикаючись із ризиком алгоритмічної упередженості та звуження навчального контексту [5]. На інтелектуальному рівні ШІ та генеративний ШІ можуть підтримувати навчання й мислення, однак передавання їм когнітивної роботи не гарантує приросту навчальних результатів і може послаблювати власну пізнавальну активність здобувача [8].

Таблиця 1.

Матриця SMART-освіти

Рівень	Технологія	Що змінюється	Ризик
ресурсний	цифрові ресурси	доступ до інформації	інформаційне перевантаження
комунікаційний	LMS, хмара	взаємодія	фрагментація
аналітичний	навчальна аналітика	рішення на основі даних	профілювання
адаптивний	адаптивне навчання	персоналізація	алгоритмічна залежність
інтелектуальний	ШІ / генеративний ШІ	підтримка мислення	когнітивний аутсорсинг
управлінський	ШІ + дані	управління системою	непрозорість рішень
людиноцентричний	Людина+ШІ	співпраця людини й ШІ	послаблення людської агентності

На управлінському рівні поєднання ШІ та даних створює можливості для оптимізації управління системою, водночас актуалізуючи проблему непрозорості рішень («чорної скриньки» алгоритмів) та етичної відповідальності менеджменту [8].Людиноцентричність доцільно розглядати як наскрізний принцип взаємодії «людина + ШІ», головним ризиком порушення якого є послаблення людської агентності [9].

Отже, SMART-освіту доцільно розглядати не як наступний рівень технологічної насиченості освітнього процесу, а як системну трансформацію взаємодії здобувача, педагога, даних, цифрових технологій та управлінських механізмів, у якій технологічна інтелектуалізація має поєднуватися з педагогічною доцільністю та збереженням людської агентності.

1. *Cao J., Rashid R. A. B. A., Zhu H., Lyu B., Huang Y., Li X.* The effects of smart learning environments on learning outcomes: a meta-analysis of 43 experimental and quasi-experimental studies. Frontiers in Education. 2026. Vol. 11. Article 1829962. DOI: https://doi.org/10.3389/feduc.2026.1829962
2. Digital Education Action Plan (2021–2027): Resetting education and training for the digital age / European Commission. URL: https://education.ec.europa.eu/focus-topics/digital-education/actions (дата звернення: 25.09.2026).
3. Guidance for generative AI in education and research / F. Miao, W. Holmes. Paris : UNESCO Publishing, 2023. URL: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000386693 (дата звернення: 25.09.2026)
4. *Hwang G. J.* Definition, framework and research issues of smart learning environments – a context-aware ubiquitous learning perspective. Smart Learning Environments. 2014. Vol. 1, no. 4. DOI: https://doi.org/10.1186/s40561-014-0004-5
5. *Kerimbayev N., Adamova K., Shadiev R. et al.* Intelligent educational technologies in individual learning: a systematic literature review. Smart Learning Environments. 2025. Vol. 12, no. 1. DOI: https://doi.org/10.1186/s40561-024-00360-3
6. OECD Digital Education Outlook 2021: Pushing the Frontiers with AI, Blockchain and Robots. Paris : OECD Publishing, 2021. DOI: https://doi.org/10.1787/589b283f-en
7. OECD Digital Education Outlook 2023: Toward Inclusive and Equitable Digital Ecosystems. Paris : OECD Publishing, 2023. DOI: https://doi.org/10.1787/c74f03de-en
8. OECD Digital Education Outlook 2026: Exploring Effective Uses of Generative AI in Education. Paris : OECD Publishing, 2026. DOI: https://doi.org/10.1787/062a7394-en
9. Reimagining our futures together: a new social contract for education / UNESCO. Paris : UNESCO Publishing, 2021. 186 p. URL: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000379707
10. *Zhu Z. T., Yu M. H., Riezebos P.* A research framework of smart education. Smart Learning Environments. 2016. Vol. 3, no. 4. DOI: https://doi.org/10.1186/s40561-016-0026-2

SMART EDUCATION AS AN ECOSYSTEM: FROM THE DIGITALIZATION OF PROFESSIONAL TRAINING TO THE INTELLIGENT TRANSFORMATION OF THE EDUCATIONAL ENVIRONMENT

The paper examines the evolution of SMART education from the digitalization of educational processes to the development of a human-centered intelligent educational ecosystem. Based on the analysis and synthesis of international scholarly approaches, four conceptual stages in the development of SMART education are identified, along with three interconnected levels of the digital educational ecosystem: the learner, the educator, and educational management. A SMART education matrix is proposed to systematize technological opportunities, educational transformations, and the associated risks of digital transformation. The paper substantiates the need for the integrated application of digital technologies, artificial intelligence, learning analytics, and pedagogical practices, while ensuring adherence to the principles of human-centeredness, pedagogical appropriateness, and the preservation of human agency.

УДК 378.091.3:373.5.011.3-051]:51:[37.091.313:005.336.2]

КОНТЕКСТНЕ ПОРТФОЛІО ЯК ІНСТРУМЕНТ МОДЕРНІЗАЦІЇ ПРАКТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

Світлана ЛУК'ЯНОВА
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, м. Київ, Україна
s.m.lukianova@udu.edu.ua
Ірина ДРЕМОВА
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, м. Київ, Україна
i.a.dremova@udu.edu.ua

Сучасний етап реформування системи загальної середньої освіти в Україні, зумовлений масштабуванням концепції Нової української школи (НУШ) та новими глобальними викликами, висуває якісно нові вимоги до фахової підготовки майбутнього вчителя математики. Сучасний педагог має володіти не лише фундаментальним математичним знанням, а й гнучким методичним інструментарієм, здатністю до моделювання професійних ситуацій, інтеграції технологій STEM та безперервної професійної рефлексії. У цьому вимірі традиційна система вищої педагогічної освіти часто демонструє розрив між теоретико-методичною підготовкою у ЗВО та реальними викликами шкільного процесу навчання математики здобувачів освіти різних вікових груп. Сучасна реальність вимагає також від учителя готовності до розв'язування складних професійних завдань: адаптації навчальних

матеріалів для учнів з особливими освітніми потребами; побудови індивідуальної освітньої траєкторії для математично обдарованої учнівської молоді; організації адаптивного навчання з метою подолання значних навчальних втрат; нівелювання математичної тривожності у значної частини учнівства та формування їхньої психологічної резильєнтності в умовах кризових станів.

Подолання цієї суперечності актуалізує впровадження контекстного підходу (за О. Вербицьким). Ця концепція передбачає послідовну трансформацію навчально-пізнавальної діяльності здобувача вищої освіти у професійну діяльність фахівця через динамічне моделювання умов, зв'язків і відносин реальної праці вчителя. У контекстному навчанні засвоєння абстрактних знань проєктується на сценарії майбутніх професійних дій, що забезпечує формування цілісного, інваріантного досвіду педагогічної діяльності. Універсальний характер та високий дидактичний потенціал контекстно-орієнтованого підходу у вдосконаленні вищої педагогічної освіти переконливо підтверджено розвідками вітчизняних науковців [1; 2].Очевидно, що специфіка контекстного навчання майбутніх учителів різних спеціальностей має індивідуальні домінанти, які насамперед відображають фундаментальні основи засвоєння знань саме з конкретного предмета.

У практиці *Українського державного університету імені Михайла Драгоманова* ефективним інструментом реалізації цього підходу у професійному становленні майбутніх учителів математики виступає технологія портфоліо [3; 4]. Ми розглядаємо її як комплексну освітню технологію роботи суб'єктів освітнього процесу з інформаційними ресурсами. Вона забезпечує опанування здобувачами прийомами роботи з нормативною та методичною літературою, системну інтеграцію знань з математичних, педагогічних та методичних дисциплін, розвиток творчих здібностей при створенні авторських дидактичних матеріалів та формування стійкої готовності використовувати набуті компетентності в реальних умовах шкільної практики.

У процесі тривалого науково-методичного пошуку на базі університету використання технології портфоліо пройшло суттєву еволюцію, сутність якої узагальнено в таблиці 1.

Таблиця 1.

Період	Форма впровадження	Функціональне призначення та дидактичне ядро
2010-2019 рр.	Тематичне портфоліо, «шахматне портфоліо» (для магістрів та другої вищої освіти).	Інструмент індивідуального оцінювання поточних навчальних досягнень здобувачів.Ядро – статичні залікові роботи.
2020-2023 рр.	Групові тематичні портфоліо з методики навчання математики.	Технологія організації та проведення практичних занять; заохоченнястудентів до кооперативної праці під час виконання різнопланових теоретико-методичних завдань. Ядро – методичні розробки.
З 2024 р.	Індивідуальні портфоліо на основі колективної та міждисциплінарної діяльності. Контексні портфоліо (з 2025 р.).	Комплексний підхід: інтеграція взаємопов'язаних освітніх компонент ОПП і виробничої практики. Дидактичне ядро – наскрізна професійно-профільна задача.

У межах підготовки майбутніх учителів математики ми визначаємо *професійно-профільні задачі* (дидактичне ядро контекстного портфоліо) як комплексні навчальні завдання, які за своєю структурою, предметним змістом та психологічними умовами розв'язування моделюють реальну професійну діяльність учителя математики в закладі загальної середньої освіти. Особливістю такого підходу є те, що *професійно-профільна задача* має наскрізний характер і може виникати як безпосередньо під час вивчення курсу «Теорія та методика навчання математики», так і вивчення інших освітніх компонент ОПП, а також у процесі проходження виробничої практики чи власної професійної діяльності магістрів, оскільки серед них уже значна частина працює в закладах загальної середньої освіти.

За умови обрання контексно-орієнтованого підходу та посилення міждисциплінарних зв'язків відбувається часткова трансформація базових функцій портфоліо, які були нами визначені у [3].

- *Діагностична:* переорієнтовується з контролю теоретичних знань на оперативне виявлення «проблемних точок» у процесі розв'язування конкретної професійної задачі.
- *Цілепокладання:*формує вміння самостійно проєктувати дизайн уроку, планувати й алгоритмізувати власну квазіпрофесійну діяльність на практичних заняттях через декомпозицію умов задачі.
- *Мотиваційно-проєктна:* зміщує акцент із отримання оцінки на внутрішній професійний інтерес до створення авторських дидактичних матеріалів та STEM-кейсів для Нової української школи.

• *Інформаційна:* перетворює «папку-накопичувач» на інструмент глибокого аналізу та навігації в сучасному дидактичному просторі, де інформація збирається під цільовий запит задачі.

• *Оцінювальна та контролююча:*зосереджені на фіксації динаміки розвитку компетентностей; перенесення педагогічного акценту з оцінки на самооцінку.

• *Рефлексивна та комунікативна:* забезпечують умови для командної взаємодії, спільного пошуку альтернативних рішень задачі, захисту власних методичних ідей та аналізу результатів педагогічних дій.

Важливою умовою проєктування контекстного портфоліо на сучасному етапі стало суттєве посилення міждисциплінарних зв'язків між курсами «Теорія та методика навчання математики» та «Наукові основи шкільного курсу математики». Створювані здобувачами компоненти (методичні матеріали) портфоліо тепер відображають не відірвані методичні прийоми, а глибоке фундаментальне розуміння математичної науки як базису для викладання конкретних тем у середній школі. У межах розв'язування професійно-профільних задач магістри моделюють навчальні ситуації, де шкільний курс розгортається крізь призму наукового математичного знання, забезпечуючи реалізацію принципу наступності та інтеграції технологій STEM. Це допомагає майбутньому вчителеві адаптувати складні наукові поняття до рівня розуміння учнів івикладати у майбутньому математику у доступній та цікавій формі для дітей різного віку.

Висновки: Таким чином, контекстне портфоліо, що будується навколо розв'язування наскрізних професійно-профільних задач у процесі колективної діяльності під час вивчення взаємопов'язаних освітніх компонент стає простором професійного становлення. Воно модернізує практичну підготовку майбутніх учителів математики, трансформуючи її з процесу репродуктивного накопичення знань у процес генерації індивідуального досвіду розв'язування професійно-контекстних задач, повністю адаптованих до вимог НУШ та викликів сьогодення.

1. *Карпенко Т. А., Лакомова О. Й., Шиян Д. В.* Методика організації контекстного навчання майбутніх учителів географії. // Alfred Nobel University Journal of Pedagogy and Psychology. 2023. Вип. 2 (26). С. 60–66.
2. *Липчанко-Ковачик О. В., Кончович К. Т., Варга Л. І.* Контекстно-орієнтоване навчання як елемент професійної підготовки майбутнього вчителя іноземної мови. Інноваційна педагогіка, 2022. Вип. 50, т. 1. С. 101 – 103.
3. *Лук'янова С. М., Швець В. О.* Технологія портфоліо у фаховій підготовці майбутніх вчителів математики. Вісник Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького. Серія «Педагогічні науки». 2025. № 1. С. 71–77.
4. *Shvets V., Lukianova S.* Use of portfolio technology in the training of future teachers of mathematics. Yearbook of Shumen University «Bishop K. Preslavski». Conference proceedings, MATTEX 2024. 2024. Vol. 1. P. 191–196.

THE CONTEXTUAL PORTFOLIO AS A TOOL FOR MODERNIZING THE PRACTICAL TRAINING OF FUTURE MATHEMATICS TEACHERS

The abstracts substantiate the use of a contextual portfolio as an effective tool for modernizing the practical training of future mathematics teachers. It is determined that the cross-cutting professional-profile task acts as the didactic core of this technology, modeling the real working conditions of a teacher and stimulating interdisciplinary integration. The creation of a contextual portfolio ensures the generation of individual experience of Master's students, adapted to the New Ukrainian School requirements and modern challenges.

УДК 514:111

СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ В ЗМІСТОВІЙ ЛІНІЇ «ТРИКУТНИКИ»

Віктор ЛЯШЕНКО
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, Кременчук, Україна
viklyash2903@gmail.com
Людмила СКОТНІКОВА
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, Кременчук, Україна
lskotnikova7@gmail.com

Згідно програми з математики, метою вивчення геометрії в ЗСО є формування творчих здібностей, креативного та логічного мислення учнівської молоді. Вивчення геометрії сприяє формуванню здатності учнів обґрунтовувати, доводити твердження, вміти працювати із задачею. Однією з основних змістовх лінійпланіметрії є тема«трикутники», яка вивчається в 7-му-9-му класах [1, 3]. Одним із основних методичних завдань вчителя математики полягає в навчанні учнів основної та старшої школи творче мислити,самостійно доводити геометричні твердження, детально обгрунтовувати кожен крокрозв'язку.

В 9–му класі першою темою, що вивчають учні в курсі геометрії, є тема «Розв'язування трикутників». Кожний трикутник включає в себевизначальні й інші елементи: сторони, кути, висоти, медіани, бісектриси, радіуси вписаного та описаного кіл, площу і периметр. Визначальними елементами трикутника вважають сторони і кути; іншими – решту його елементів. «Розв'язати трикутник» означає: за допомогою мінімальної кількості заданих його елементів. з застосуванням відповідних теорем та міркувань, знайти всі інші невідомі елементи трикутника. Залежно від заданих і шуканих елементів при розв'язуванні трикутників розглядають основні випадки і неосновні, або окремі випадки. Основними випадками розв'язання трикутників є такі, що дозволяють за допомогою теорем та заданими визначальними елементами знаходити інші невідомі визначальні елементи і площу трикутника. До неосновних належать випадки розв'язання трикутників, коли серед заданих і шуканих елементів поряд з визначальними є й інші елементи. Серед основних теорем, що дозволяють розв'язати будь-який трикутник є теореми косинусів і синусів [1].

У *9 класі розширюються уявлення учнів* про числові величини До відомих учням скалярних величин додається поняття векторної величини [2, 4]. Розглядаються основні поняття векторної алгебри: (рівні, протилежні, колінеарні вектори, лінійні операції над векторами, скалярний добуток двох векторів та його властивості) [2, 3]. Вважаємо, що з метою більш глибокого засвоєння теми «Трикутники» основні поняття векторної алгебри в шкільний курс математики доцільно було б вводити перед або одночасно з темою «Трикутники» .

Метою даної роботи є методичне об'єднання змістових ліній векторної алгебри та розв'язання трикутників в єдину послідовність викладання матеріалу на факультативних заняттях з геометрії.

Використання властивостей скалярного добутку двох неколінеарних векторів дозволяє легко знайти основні метричні співвідношення в трикутнику[2,3].

Розглянемо полігон трьох векторів $\overrightarrow{BC}=\vec{a},\overrightarrow{CA}=-\vec{b},\overrightarrow{AB}=\vec{c}$ та довільний трикутник ABCу якому відомі сторони $AB=c, BC=a, AC=b$ та кути при його вершинах $\angle A=\alpha,\ \angle B=\beta,\ \angle C=\gamma$ (Рис 1):

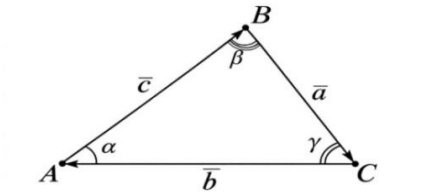


Рис.1 Полігон векторів

За правилом додавання векторів $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ або $\vec{a}=\vec{b}-\vec{c}$.

Знайдемо скалярний квадрат вектора $\vec{a}=\vec{b}-\vec{c}$ Будемо мати:

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right)=\left(\left(\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)\right)\Rightarrow a^2=b^2+c^2-2\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\quad(1)$$

$$\text{або } a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha\,(2)$$

Аналогічно отримуємо формули для двох інших сторін трикутника:

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta,\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma,\ (3)$$

Отримали відому теорему косинусів [3].

Теорема косинусів. Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток цих сторін на косинус кута між ними.

Слід зазначити, що всі ці формули, а також інші, що визначають залежність між елементами трикутника, можна отримати скориставшись правилом *циклічної заміни:* буква *a* заміняється буквою *b*, буква *b* заміняється буквою *c*, буква *c* – буквою *a*. Одночасно заміняються кути:кут $\angle A=\alpha$ заміняється кутом $\angle B=\beta$, кут $\angle B=\beta$ заміняється кутом $\angle C=\gamma$, кут $\angle C=\gamma$ – кутом $\angle A=\alpha$. З формул (2), (3) легко визначити косинуси кутів трикутника знаючи його сторони:

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\cos\beta=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac},\ \cos\gamma=\frac{+a^2+b^2-c^2}{2ab}.\ (4)$$

Якщо $\angle C=\gamma=\pi/2$,томаємотеорему Піфагора: $c^2=a^2+b^2$ (5)

Подальші співвідношення між елементами трикутниката його площу можемо отримати перетворюючи формули (2)- (4) . Якщо $\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, то

$$1-\cos\alpha=\frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc}.\quad(6)$$

Введемо позначення $2p=a+b+c$. Віднімаючи від цієї рівності відповідно $2a,2b,2c$ отримаємо:

$$2(p-a)=-a+b+c,\ 2(p-b)=a-b+c,\ 2(p-c)=a+b-c.$$

Підставляючи отримані значення у вираз для $1-\cos\alpha,1-\cos\beta,1-\cos\gamma$ будемо мати:

$$1-\cos\alpha=\frac{2(p-b)(p-c)}{bc},\ 1-\cos\beta=\frac{2(p-c)(p-a)}{ca},1-\cos\gamma=\frac{2(p-a)(p-b)}{ab}\ (7)$$

Шляхом аналогічних перетворень знаходимо:

$$1+\cos\alpha=\frac{2p(p-a)}{bc},1+\cos\beta=\frac{2p(p-b)}{ac},1+\cos\gamma=\frac{2p(p-c)}{ab}.(8)$$

Помноживши вираз (7) на (8) будемо мати: $(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=\sin^2\alpha=\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}$.

Звідки

$$\sin\alpha=\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.(9)$$

Так як внутрішні кути трикутника менші 180^0, то радикал додатній, тому $\sin\alpha>0$. Разом з тим сума двох сторін трикутника завжди більше третьої і тому вирази $-a+b+c>0,a-b+c>0,a+b-c>0.$

Позначимо $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Тоді із формули (9) маємо:

$$\sin\alpha=\frac{2S}{bc},\sin\beta=\frac{2S}{ca},\sin\gamma=\frac{2S}{ab}(10)$$

Взявши відношення синусів кутів трикутника будемо мати: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{a}{b},\ \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{b}{c}$

З цього співвідношення слідує наступна теорема[3]:

Теорема синусів. Сторони трикутника відносяться одна до одноїяк синуси протилежних кутів.

Слід зазначити, що теорему синусів можна отримати без залучення теореми косинусів,скориставшись лемою про властивість вписаного кутав коло радіусом R, що спирається на діаметр кола [3]:

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}=2R \quad (11)$$

Із рівності (10) $\sin\alpha=\frac{2S}{bc}\Rightarrow S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ми отримали формулу, ліва частина якої визначає площу трикутника, коли відомі дві сторони трикутника і кут між ними, а права частина є відома теорема Герона, яка теж дозволяє обчислювати площу трикутника, коли відомі три його сторони:

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha,\ S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (12)$$

Розглянемо геометричний зміст величин $p, p-a, p-b, p-c$. Розглянемо коло, вписане в трикутник ABC та побудуємо зовнішнє коло в продовженні кута $\angle A=\alpha$ (Рис. 2). Позначимо через M, P, Q точки дотику кола до сторін a,b,c трикутника. Згідно властивостей дотичних до кола, що виходять з однієї точки маємо[2]: $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AQ}=x,\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BQ}=y,\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CP}=z.$

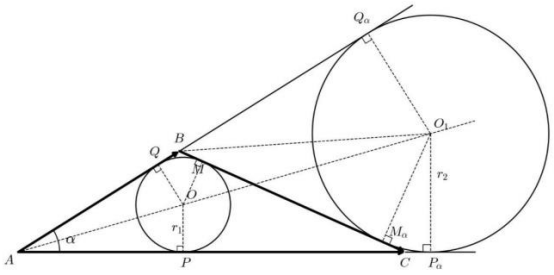


Рис.2

Для визначення невідомих x, y, z складаємо систему лінійних рівнянь:

$$y+z=a, z+x=b, x+y=c \ . \ (13)$$

Розв'язавши систему рівнянь (13) отримаємо значення невідомихx,y,z .

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AQ}=x=p-a,\ \overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BQ}=y=p-b,\ \overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CP}=z=p-c.$$

Позначимо через M_a,P_a,Q_a точки дотику зовнішнього кола до сторони a, тадопродовження сторін b та c трикутника ABC(Рис.2) будемо мати:

$$\overrightarrow{AP_a}=\overrightarrow{AQ_a}\ ;\ \overrightarrow{CM_a}=\overrightarrow{CP_a};\overrightarrow{BM_a}=\overrightarrow{BQ_a}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AP_a}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP_a}=b+\overrightarrow{CM_a}\\ \overrightarrow{AQ_a}=\overrightarrow{AB}+\ \overrightarrow{BP_a}\ =c+\overrightarrow{BM_a}\end{cases}$$

Як відомо з тригонометрії $1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}, 1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$. Поділивши ці два вирази та скориставшись формулами (4), (9) отримаємо:

$$tg^2\frac{\alpha}{2}=\frac{2(p-b)(p-c)}{p(p-a)}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-a)^2}\Rightarrow tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{(p-a)}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}} \ . \ (14)$$

Із прямокутного трикутника AOP маємо $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{OP}{AP}=\frac{r}{p-a}$. Звідки: $r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$.

Взагалі формула (14) має місце (виконується) для всіх кутів трикутрика:

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{p-a},\ tg\frac{\beta}{2}=\frac{r}{p-b},\ tg\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{p-c} \ .(15)$$

Висновок.Скориставшись властивостями скалярного добутку ми отримали основні формули, що дозволяють обчислювати площу трикутника та інші його елементи, коли відомі два лінійних елементи і один із кутів трикутника, а саме:

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha,\ S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},\ S=rp,$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha,\ \frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}=2R$$

Тут r, R – радіуси вписаного та описаного кола.

1. *Нестеренко Т. Я.* Розв'язування трикутників. – К.: Радянська школа, 1964. – 91 с.
2. *Ляшенко В. П., Кобильська О. Б., Набок Т. А.* Лінійна алгебра та аналітична геометрія з елементами комп'ютерної математики навчальний посібник / В. П. Ляшенко, О. Б. Кобильська, Т. А. Набок:. – Кременчук: Вид-во «ПП Щербатих О.В.»., 2021. – 208 с.
3. *Мерзляк А. Г.* Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2017. – 240 с. : іл.
4. *Мерзляк А. Г.* Геометрія : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – 2-ге ви дання, переробл. – Х.: Гімназія, 2021. – 208 с. : іл. ISBN 978-966-474-275-4

THE SCALAR PRODUCT OF VECTORS AND ITS APPLICATION IN THE CONTENT STRAND «TRIANGLES»

The aim of this paper is to methodologically integrate the topics of vector algebra and the solution of triangles into a unified teaching sequence for elective geometry classes. The study employs elements of vector algebra—specifically, the properties of the scalar product of two non-collinear vectors—to derive fundamental metric relationships within a triangle. Key formulas are obtained that allow for the calculation of a triangle's area and other elements when two linear dimensions and one angle are known.

УДК 373.5:51:004

ІНТЕГРОВАНЕ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ У БАЗОВІЙ ШКОЛІ

Вікторія ЛУЧКО
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна
viktoria.luchko@chnu.edu.ua
Іван ЖИТАРЮК
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна
i.jitariuk@chnu.edu.ua

Сучасна базова середня освіта орієнтується не лише на засвоєння учнями системи предметних знань, а й на формування здатності застосовувати їх у нових навчальних і життєвих ситуаціях. У цьому контексті особливого значення набуває інтеграція змісту різних освітніх галузей, яка дає змогу встановлювати функціональні зв'язки між знаннями, способами діяльності та практичними завданнями.

Актуальність інтеграції математики та інформатики зумовлена передусім близькістю способів діяльності, характерних для цих освітніх галузей. Аналіз даних, встановлення закономірностей, моделювання, алгоритмізація, візуалізація інформації, розв'язування проблемних завдань і перевірка результатів є важливими як для математичної, так і для інформатичної освіти.

Водночас інтегроване навчання не варто ототожнювати з механічним додаванням матеріалу різних навчальних предметів. Н. Бібік, досліджуючи інтегроване навчання в початковій школі, наголошує, що інтегрування є якісно відмінним від звичного структурування, презентації та засвоєння навчального змісту, оскільки забезпечує його представлення в нових органічних взаємозв'язках [1]. Саме це теоретичне положення є важливим для розуміння інтеграції і на наступному освітньому рівні.

При цьому не йдеться про механічне перенесення підходів початкової школи в базову середню освіту. У 5-9 класах учні вже мають певний досвід предметного навчання, тому завдання інтеграції полягає передусім у встановленні змістових і функціональних зв'язків між набутими знаннями та способами діяльності. Отже, ідею органічного взаємозв'язку навчального змісту, обґрунтовану в дослідженнях інтегрованого навчання початкової школи, доцільно розглядати як теоретичне підґрунтя для розвитку інтеграційних підходів у базовій середній освіті.

Нормативною основою для такого підходу є Державний стандарт базової середньої освіти. У ньому зміст освіти структуровано за освітніми галузями, серед яких визначено *математичну* та *інформатичну*. Важливо, що Стандарт не обмежує реалізацію освітніх галузей лише окремими предметами, а передбачає можливість їх комбінування для інтеграції. Базова середня освіта охоплює два цикли: адаптаційний (5-6 класи) та цикл базового предметного навчання (7-9 класи) [2].

Така структура створює передумови для поступового розвитку інтеграційних умінь учнів. У 5-6 класах, коли відбувається адаптація до нового рівня освіти, інтеграція може сприяти встановленню зв'язків між математичними поняттями та базовими інформатичними способами діяльності. У 7-9 класах, зі зростанням складності математичного та інформатичного змісту, ці зв'язки можуть реалізовуватися через моделювання, алгоритмізацію, роботу з даними, цифрове дослідження та проєктну діяльність.

Безпосередні можливості для інтеграції закладено й у модельній навчальній програмі «Інформатика. 5-6 класи» за авторством І. О. Завадського, О. В. Коршунової, В. В. Лапінського. У методичних рекомендаціях МОН зазначено, що ця програма має значний інтеграційний потенціал як складова STEM-циклу: змістові лінії «*Моделювання та структури даних*» і «*Алгоритми та програми*» корельовано з курсом математики та іншими навчальними дисциплінами [3].

З математичного боку можливості для інтеграції також визначаються змістом модельних навчальних програм. Наприклад, програма «Математика. 5-6 класи» передбачає формування математичної компетентності та опрацювання таких змістових компонентів, як числа й обчислення, вирази, рівняння, залежності, графіки, геометричні фігури та робота з даними [4].

Отже, нормативний та програмовий аналіз дає підстави виокремити кілька напрямів інтегрованого навчання математики та інформатики в базовій школі.

Одним із найбільш природних напрямів є *робота з даними*. У математиці учні працюють із числовими значеннями, таблицями, діаграмами, залежностями, середніми величинами, відсотками та іншими способами представлення інформації. Інформатика, своєю чергою, надає цифрові засоби для збирання, структурування, опрацювання та візуалізації даних.

Наприклад, учням можна запропонувати дослідити витрати електроенергії впродовж певного періоду. На *математичному етапі* вони порівнюють значення, обчислюють різницю, середнє значення, визначають найбільші та найменші показники. На *інформатичному етапі* створюють електронну таблицю, використовують формули та будують діаграму. Завершальним етапом стає інтерпретація результатів і формулювання висновків. У цьому випадку математичні та інформатичні дії об'єднані спільною дослідницькою метою.

Другим важливим напрямом є *математичне та комп'ютерне моделювання*. Математична модель дає змогу описати реальний об'єкт або процес за допомогою чисел, формул, таблиць чи графіків. Цифрове середовище, своєю чергою, дає можливість змінювати параметри моделі, спостерігати за результатами та перевіряти припущення.

Наприклад, при вивченні залежності вартості покупки від кількості товару учні можуть створити таблицю відповідних значень, сформулювати залежність, побудувати графік та дослідити його за допомогою електронної таблиці. Зміна параметрів моделі дозволяє простежити, як змінюється результат. Отже, цифровий інструмент у цьому випадку не просто забезпечує наочність, а стає засобом математичного дослідження.

Третій напрям – *алгоритмізація математичної діяльності*. Розв'язування складної математичної задачі передбачає певну послідовність логічних дій: аналіз умови, визначення відомих і невідомих величин, вибір способу розв'язування, виконання обчислень, перевірку та інтерпретацію результату. Подібна логіка реалізується в інформатиці через алгоритми та програми.

Тому продуктивними можуть бути завдання, у яких учні спочатку визначають послідовність дій для розв'язування математичної проблеми, а потім подають її у вигляді алгоритму або реалізують у цифровому середовищі. Такий підхід сприяє розвитку алгоритмічного мислення й водночас допомагає усвідомити логічну структуру математичних способів розв'язування.

Четвертим напрямом є *цифрова візуалізація математичних об'єктів і залежностей*. Використання цифрових середовищ дає можливість не лише демонструвати математичні об'єкти, а й досліджувати їх у динаміці. Наприклад, при вивченні властивостей прямокутника учні можуть змінювати довжину та ширину фігури й спостерігати за зміною її площі та периметра. Це сприяє переходу від формального використання формул до дослідження взаємозв'язків між величинами.

Окреме місце посідає *проєктна діяльність*, оскільки саме вона дає змогу природно поєднати зміст двох освітніх галузей. Наприклад, проєкт «Шкільний бюджет» може включати збирання реальних даних, виконання

математичних обчислень, створення електронної таблиці, побудову діаграм і презентацію результатів. Проєкт «Статистика нашого класу» може передбачати проведення опитування, систематизацію результатів, обчислення статистичних показників та їх цифрову візуалізацію.

Важливою умовою такої інтеграції є те, щоб цифрові технології не використовувалися лише для зовнішньої модернізації традиційного уроку. Якщо звичайна вправа просто переноситься з паперового носія на екран, це ще не забезпечує інтеграції. Інтеграційний ефект виникає тоді, коли цифровий інструмент розширює можливості математичної діяльності: дозволяє працювати з більшим масивом даних, швидко змінювати параметри моделі, будувати динамічні графіки, перевіряти припущення або представляти результати дослідження.

Тому інтегроване завдання доцільно конструювати не від цифрового інструмента, а від *спільного освітнього результату*. Його логіка може бути представлена як послідовність:

проблемна ситуація → математичне дослідження → цифрове опрацювання → аналіз результатів → висновок.

Наприклад, при дослідженні споживання води в родині учні спочатку визначають необхідні дані, виконують математичні обчислення, створюють цифрову модель, будують діаграму та на основі отриманих результатів формулюють рекомендації щодо раціонального використання ресурсів. У такій ситуації знання з математики та інформатики не просто використовуються паралельно: вони стають взаємопов'язаними засобами розв'язання однієї проблеми.

На нашу думку, важливо враховувати й різницю між двома циклами базової середньої освіти. У 5-6 класах доцільними є доступні для віку завдання на роботу з таблицями, даними, діаграмами, простими математичними моделями та алгоритмами. У 7-9 класах можливості інтеграції можна розширювати через дослідження функціональних залежностей, статистичних даних, геометричних моделей, алгоритмів, програмних реалізацій математичних способів розв'язування та міжпредметні STEM-проєкти. Такий поступовий розвиток відповідає логіці переходу від адаптаційного до базового предметного циклу, визначеного Державним стандартом [2].

Ще однією умовою результативної інтеграції є узгодження очікуваних результатів навчання. Учитель має визначити, яке математичне поняття або вміння формується, яке інформатичне вміння розвивається та який спільний результат отримують учні. Це дозволяє уникнути ситуації, коли один із предметів виконує лише допоміжну або декоративну функцію.

Не менш важливим є *оцінювання*. Воно має враховувати не тільки правильність математичних обчислень або технічну вправність роботи з цифровим засобом, а й уміння учня пояснювати спосіб розв'язування, працювати з даними, обґрунтовувати висновки, інтерпретувати отриманий результат і представляти його в зрозумілій формі.

Отже, інтегроване навчання математики та інформатики в базовій середній школі доцільно розглядати як організацію навчальної діяльності, у якій математичні та інформатичні знання й способи діяльності взаємодіють для досягнення спільного освітнього результату. Теоретичні положення щодо органічного взаємозв'язку навчального змісту, представлені, зокрема, у працях Н. Бібік, можуть бути використані як одне з підґрунтів для такого підходу, але його реалізація в 5-9 класах має враховувати специфіку базової середньої освіти та вимоги чинного Державного стандарту.

Найбільш перспективними напрямами інтеграції математики та інформатики є робота з даними, математичне й комп'ютерне моделювання, алгоритмізація, цифрова візуалізація та проєктна діяльність. Їх поєднання створює умови для того, щоб цифрові технології виконували не лише функцію засобу подання інформації, а ставали інструментом математичного дослідження, перевірки припущень, моделювання та розв'язування практичних проблем.

Перспективу подальшого дослідження вбачаємо в розробленні системи інтегрованих завдань для учнів 5-9 класів, диференційованих відповідно до двох циклів базової середньої освіти, а також у визначенні критеріїв оцінювання результатів такої інтегрованої діяльності.

1. *Бібік Н. М.* Інтегроване навчання: модус застосування в початкових класах. Компетентнісно орієнтоване навчання: виклики та перспективи : зб. тез III Всеукр. наук.-практ. інтернет-конф. (Київ, 29 березня 2021 р.). Київ : Педагогічна думка, 2021. С. 11–13. 3 с. URL: https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/725241/ (дата звернення: 18.09.2026).

2. Державний стандарт базової середньої освіти : затв. постановою Кабінету Міністрів України від 30 вересня 2020 р. № 898. Офіційний вебпортал Верховної Ради України. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020-%D0%BF (дата звернення: 18.09.2026).
3. *Завадський І. О., Коршунова О. В., Лапінський В. В.* Інформатика. 5-6 класи : модельна навчальна програма для закладів загальної середньої освіти. 2021. 20 с. URL: https://osvita.ua/school/program/program-5-9/83156/ (дата звернення: 18.09.2026).
4. *Бурда М. І., Васильєва Д. В.* Математика. 5-6 класи : модельна навчальна програма для закладів загальної середньої освіти. Київ : КОНВІ ПРІНТ, 2021. 34 с. URL: https://undip.org.ua/library/matematyka-5-6-klasy-modelna-navchalna-prohrama/ (дата звернення: 18.09.2026).
5. Інструктивно-методичні рекомендації щодо організації освітнього процесу та викладання навчальних предметів у закладах загальної середньої освіти у 2022/2023 навчальному році. Додаток 10. Інформатична освітня галузь. Київ : Міністерство освіти і науки України, 2022. URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/metodichni%20recomendazii/2022/08/20/01/Dodatok.10.informatyka.20.08.2022.pdf (дата звернення: 18.09.2026).

INTEGRATED MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE EDUCATION IN BASIC SCHOOL

Modern basic secondary education focuses not only on students' acquisition of a system of subject-specific knowledge but also on developing their ability to apply this knowledge in new educational and real-life situations. In this context, the integration of content from different educational fields is becoming increasingly important, as it enables students to establish meaningful connections between knowledge, modes of activity, and practical tasks.

The relevance of integrating mathematics and computer science is primarily determined by the similarity of the modes of activity characteristic of these educational fields. Data analysis, pattern recognition, modeling, algorithmization, information visualization, problem solving, and verification of results are important components of both mathematical and computer science education.

УДК 372.851

НЕПЕРЕРВНЕ ФОРМУВАННЯ ЛОГІЧНОГО СКЛАДНИКА МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ УЧНІВ ОСНОВНОЇ ШКОЛИ: ВІД 5 ДО 9 КЛАСУ

Роксолана МІЛЯН
Relish Labs LLC (Home Chef), Чикаго, США
roksolana.milian@gmail.com
Марта ЮРЧАК
Байковецька гімназія Байковецької сільської ради
Тернопільського району Тернопільської області, м. Тернопіль, Україна
yurchakmarta@gmail.com

Формування математичної компетентності передбачає не лише оволодіння математичними знаннями й уміннями, а й розвиток здатності учнів аналізувати умови, встановлювати логічні зв'язки, обґрунтовувати твердження, перевіряти правильність міркувань та оцінювати отримані результати. У Державному стандарті базової середньої освіти математичну компетентність визначено як одну з ключових, що, зокрема, передбачає розвиток логічного мислення, роботу з інформацією та оцінювання її достатності й достовірності [1].

Особливої уваги потребує забезпечення наступності між початковою та базовою середньою освітою. Сформовані в 1–4 класах логіко-математичні вміння мають не просто повторюватися, а послідовно розвиватися в 5–9 класах на складнішому математичному матеріалі [2]. За відсутності такої наступності розвиток логічних умінь може набувати фрагментарного характеру, коли учні виконують окремі логічні завдання, але не переносять відповідні способи міркування на новий зміст.

Метою роботи є конкретизація підходів до забезпечення наступності у формуванні логічного складника математичної компетентності учнів 5–9 класів та представлення відповідної поетапної методичної системи. Для досягнення мети використано аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури, нормативних документів, узагальнення педагогічного досвіду та моделювання методичної системи.

Питання формування логічного складника математичної компетентності, його структури, критеріїв та показників розглядалися у попередніх дослідженнях авторів [3–8]. Логічний складник математичної компетентності розглядаємо як динамічне поєднання здатності розуміти логіку математичних міркувань і подій,

застосовувати логічні вміння та використовувати їх у математичній і/або особистісно значущій продуктивній діяльності.

У структурі математичної компетентності виокремлюємо чотири взаємопов'язані компоненти: мотиваційно-ціннісний, когнітивний, діяльнісний та рефлексивно-оцінювальний. Їх розвиток у 5–9 класах доцільно розглядати не як послідовність ізольованих умінь, а як поступове ускладнення способів математичного міркування та підвищення самостійності учня.

Основою наступності пропонуємо вважати повернення до одних і тих самих базових логічних дій на різному математичному матеріалі та з поступовим зростанням рівня самостійності. До таких дій належать: порівняння, виявлення закономірностей, аналіз умов задачі, перевірка можливості твердження, обґрунтування висновку, виявлення помилки та оцінювання способу розв'язання.

Поетапна система формування логічного складника

З урахуванням вікової динаміки та змісту математичної освіти 5–9 класів виокремлено чотири етапи формування логічного складника математичної компетентності (табл. 1).

Таблиця 1.

Етапи формування логічного складника математичної компетентності

Етап	Період	Основна спрямованість
Діагностико-прогностичний	5 клас	виявлення сформованих логічних умінь та визначення напрямів подальшого розвитку
Мотиваційно-пізнавальний	6 клас – I семестр 7 класу	усвідомлення значення логічного міркування та засвоєння способів логічного аналізу
Активно-діяльнісний	II семестр 7 – 8 клас	систематичне застосування логічних дій у різних видах математичної діяльності
Пошуково-творчий	9 клас	самостійне використання логічних стратегій, дослідження та обґрунтування власних висновків

На діагностико-прогностичному етапі у 5 класі доцільно визначати рівень сформованості базових логічних умінь за допомогою завдань на «Прості аналогії», «Логічні закономірності», «Логічність умовиводів». Діагностика має поєднуватися з подальшою роботою над помилками, порівнянням способів розв'язання та обґрунтуванням отриманих результатів. Відповідні завдання можуть включатися до вступної, тематичної та поточної діагностики [8].

Мотиваційно-пізнавальний етап передбачає формування усвідомленої потреби в логічному обґрунтуванні математичних дій. У 6–7 класах доцільно систематично використовувати логічні задачі, дослідницькі запитання та завдання, у яких недостатньо лише отримати числову відповідь. Учень має пояснити, чому певне твердження є правильним, чи може описана ситуація існувати та які дані необхідні для отримання обґрунтованого висновку.

На активно-діяльнісному етапі логічні дії переносяться на алгебраїчний та геометричний матеріал. Доцільним є використання мініпроєктів і проблемних завдань, зокрема «Що означає мислити логічно?», «Математичні софізми і парадокси», «Задачі з надлишковими даними». Учні не лише виконують математичні операції, а й аналізують умови, виявляють суперечності, перевіряють припущення та оцінюють обґрунтованість висновків.

Доведення, пояснення та перевірка правильності міркувань можуть розглядатися не лише як елементи геометричного курсу, а й як засоби розвитку математичного мислення та формування здатності обґрунтовувати математичні твердження [9]. Це особливо важливо для розвитку рефлексивно-оцінювального компонента математичної компетентності.

Пошуково-творчий етап у 9 класі передбачає поступове підвищення самостійності учнів. Прикладами можуть бути завдання на «Складні аналогії», «Виявлення загальних понять», «Логіко-кількісні відношення», а також задачі, що потребують побудови стратегії пошуку. Наприклад, у задачі про визначення задуманого числа від 1 до 1000 за допомогою запитань із відповіддю «так/ні» учень має не лише знайти відповідь, а й обґрунтувати ефективність стратегії послідовного поділу множини можливих значень.

Важливим контекстом для розвитку логічного складника є робота з даними. Задачі з надлишковими або неповними даними, інтерпретація таблиць і діаграм, перевірка обґрунтованості висновків та оцінювання достатності інформації спонукають учнів не лише виконувати математичні дії, а й аналізувати умови, встановлювати зв'язки та оцінювати отримані результати [10].

Узагальнено розвиток логічних дій можна представити таким чином (табл. 2).

Таблиця 2.

Розвиток провідних логічних дій у 5–9 класах

Клас	Провідні логічні дії	Характер діяльності
5	порівняння, класифікація, виявлення закономірностей	виконання за зразком, пояснення
6	аналіз умов, встановлення зв'язків, перевірка можливості	пояснення та обґрунтування
7	аналіз, доведення, виявлення суперечностей	самостійне застосування
8	перевірка припущень, аналіз помилок, оцінювання способів	дослідницька діяльність
9	побудова стратегій, узагальнення, оцінювання висновків	самостійна пошуково-творча діяльність

Одним із засобів розвитку рефлексивно-оцінювального компонента є робота з математичними софізмами. Наприклад, завдання на кшталт «6 кг = 6 000 000 г», «4 грн = 40 000 коп.», «64 см² = 65 см²» або «вага слона дорівнює вазі комара» створюють ситуацію, у якій учень має не просто визначити правильну відповідь, а локалізувати помилку в міркуванні та пояснити, на якому етапі порушено логіку.

Методично важливо систематично ставити учням запитання «Чому?», «Чи може таке бути?», «Які дані це підтверджують?», «Де виникла помилка?», «Чи можна отримати такий самий висновок іншим способом?». Поступово такі запитання мають переходити від запитань вчителя до запитань, які учні самостійно ставлять до власного розв'язання. Ефективним є поєднання письмового розв'язання задач із подальшим груповим або індивідуальним обговоренням способу міркування та аналізом помилок.

Спостереження за навчальною діяльністю учнів упродовж шести років використання відповідних матеріалів свідчать про те, що учні відносно легко включаються в завдання на порівняння, виявлення закономірностей і роботу зі схемами, тоді як обґрунтування власних висновків потребує більш тривалої та систематичної підтримки. Завдання із софізмами та запитаннями «Чи може таке бути?» на початкових етапах часто сприймаються як незвичні, однак за регулярного використання сприяють активнішому обговоренню способів міркування, пошуку помилок і перевірці власних висновків. Наведені спостереження мають описовий характер і не є кількісною оцінкою ефективності запропонованої системи.

Практичне значення та висновки: Практичне значення роботи полягає в можливості використання окресленої послідовності етапів, системи логічних дій та наведених типів завдань під час планування навчання математики в 5–9 класах. Представлений підхід може бути використаний для узгодження завдань на формування логічних умінь між окремими класами та для посилення рефлексивно-оцінювального компонента математичної діяльності учнів.

Отже, неперервність формування логічного складника математичної компетентності доцільно забезпечувати не через механічне повторення логічних завдань, а через систематичне повернення до базових логічних дій на дедалі складнішому математичному матеріалі та з поступовим зростанням самостійності учнів. Запропонована чотириетапна система дає змогу поєднати діагностику, мотивацію, активну діяльність і пошуково-творче застосування логічних способів міркування. Перспективним напрямом подальшого дослідження є емпірична перевірка динаміки розвитку логічного складника математичної компетентності учнів 6–9 класів та апробація відповідних навчально-методичних матеріалів.

1. *Державний стандарт базової середньої освіти*: затв. постановою Кабінету Міністрів України від 30 вересня 2020 р. № 898.
2. *Матяш О. І., Velbitskaya I.* Компаративний аналіз формування логіко-математичного мислення учнів початкової школи: імплікації для вчителя математики базової школи. *Дидактика математики: теорія, досвід, інновації*. 2025. № 4. С. 51–64. DOI: 10.31652/3041-2277-2025-4-51-64.
3. *Бачинська Р.* Задача як засіб формування логічної складової математичної компетентності учнів базової школи. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. 2018. Вип. 51. С. 24–28. URL: https://vspu.net/sit/index.php/sit/article/view/5362
4. *Matiash O., Mykhailenko L., Milian R., Voievoda A., Nakonechna L., Kateryniuk H.* The place and role of problems combinations in the methodical system of the pupils' logical thinking. *IJCSNS International Journal*

of Computer Science and Network Security. 2022. Vol. 22, No. 5. Pp. 463–469. DOI: 10.22937/IJCSNS.2022.22.5.65.
5. *Мілян Р. С.* Формування логічної складової математичної компетентності учнів основної школи: дис. … д-ра філософії: 014 Середня освіта (Математика). Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського: Вінниця, 2021.
6. *Матяш О. І., Мілян Р. С.* Навчаємо мислити логічно: методичні рекомендації для вчителів. Вектор: Тернопіль, 2020. 104 с.
7. *Матяш О. І., Мілян Р. С.* Вчимося мислити логічно: навчально-методичний посібник для учнів. Вектор: Тернопіль, 2020. 106 с.
8. *Мілян Р. С., Юрчак М.* Математика: робочий зошит: 5 клас: у 2 ч. Підручники і посібники: Тернопіль, 2023.
9. *Кусій М. І., Матяш О. І., Крутоус Т. П., Матяш А. Д.* Доведення як інструмент розвитку математичного мислення у навчанні геометрії. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми. 2025. № 77. С. 62–71. DOI: 10.31652/2412-1142-2025-77-62-71.
10. *Мілян Р. С.* Робота з даними та логічний складник математичної компетентності: американський досвід. Дидактика математики: теорія, досвід, інновації. 2026. № 5. С. 67–78. DOI: 10.31652/3041-2277-2026-5-67-78.

CONTINUOUS DEVELOPMENT OF THE LOGICAL COMPONENT OF STUDENTS' MATHEMATICAL COMPETENCE IN BASIC SCHOOL: FROM GRADE 5 TO GRADE 9

The transition from primary to basic secondary education is an important stage in the development of students' mathematical competence, particularly their ability to reason, justify mathematical statements, analyze problem conditions, and evaluate the results of their own activity. The paper focuses on continuity in the development of the logical component of mathematical competence in Grades 5–9. The aim is to specify approaches to ensuring continuity and to present a staged methodological system. The study employs analysis of psychological, pedagogical, and methodological literature and normative documents, generalization of pedagogical experience, and methodological modeling. Four successive stages are distinguished: diagnostic-prognostic, motivational-cognitive, active-activity-based, and search-creative. The continuity of logical development is considered through the gradual complication of mathematical content, logical actions, and students' independence. Particular attention is paid to justification, reflection, error analysis, work with data, and the use of non-standard tasks. The presented approach can be used in planning mathematics instruction in Grades 5–9 and in developing methodological materials aimed at strengthening students' logical and reflective-evaluative abilities.

УДК 372.851

ВИКЛИКИ ДЕРЖАВНОГО СТАНДАРТУ ПРОФІЛЬНОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ ДО НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Євген НЕЛІН
Харківський національний педагогічний університет імені Г. С. Сковороди, м. Харків, Україна
epnelin@ukr.net

Масове впровадження Державного стандарту профільної середньої освіти [1] розпочнеться з 2027/2028 навчального року. Зазначений документ є логічним продовженням концептуальних положень Державного стандарту базової середньої освіти (2020) та орієнтує освітній процес на формування в учнів і учениць предметних (математичних) і ключових компетентностей. В обох стандартах обов'язкові результати навчання визначено на основі компетентнісного потенціалу математичної освітньої галузі, схарактеризованого в додатку 7 до кожного з них.

Роль державних стандартів у реформуванні шкільної освіти є предметом досліджень вітчизняних дидактів і методистів. Теоретичні засади стандартизації загальної середньої освіти розроблено в працях М. Бурди, Л. Гриневич, В. Кременя, О. Савченко та інших учених. Узагальнення цих праць, а також досліджень Т. Засєкіної та М. Тишковець дає підстави виокремити два підходи до тлумачення поняття «освітній стандарт». Згідно з першим підходом («стандарт змісту») документ нормативно закріплює зміст навчального матеріалу, обов'язкового для засвоєння; згідно з другим («стандарт досягнень») – визначає рівні навчальних досягнень, яких мають досягти учні [3]. У Законі України «Про освіту» (2017) стандарт освіти визначено як нормативний акт, що

встановлює для кожної освітньої галузі вимоги до обов'язкових результатів навчання та компетентностей здобувачів освіти. Упровадження стандарту такого типу зумовлює низку викликів для системи освіти. Мета дослідження – уточнити виклики, пов'язані з упровадженням Державного стандарту профільної середньої освіти в математичній освітній галузі, та визначити ефективні способи реагування на них.

У чинних державних стандартах для кожної освітньої галузі, зокрема математичної, визначено компетентнісний потенціал, що окреслює напрями розвитку загальних і спеціальних умінь та ціннісних орієнтирів учнів. Стандарти ґрунтуються на поєднанні компетентнісного, діяльнісного та особистісно орієнтованого підходів до навчання. Предметні вимоги до результатів навчання математики в стандартах не наведено: їх конкретизовано в модельних і навчальних програмах. Очікувані результати навчання сформульовано на рівні освітньої галузі, а їх деталізацію та орієнтири для оцінювання (додаток 8) подано через інтелектуальні вміння, які мають бути сформовані в учнів у процесі навчання математики. Усі зазначені вміння є значущими результатами навчання, однак на початковому етапі профільного навчання математики першочергової уваги, на нашу думку, потребують такі: визначення в задачі вихідних даних і шуканих величин та опис зв'язків між ними; розроблення стратегії та плану розв'язування задачі; пошук альтернативних способів розв'язування з урахуванням ризиків обраного способу; виокремлення груп задач, що розв'язуються подібними методами, та ознак таких задач; побудова математичної моделі задачі у вигляді виразу, рівняння, нерівності, їх системи, функції або в іншій формі; вибір доцільної моделі з кількох можливих [1].

Вимоги Стандарту конкретизовано в Типовій освітній програмі для 10–12 класів закладів загальної середньої освіти [2], масове впровадження якої також заплановано на 2027/2028 навчальний рік. Відповідно до додатка 5 до цієї програми навчання математики в 10–12 класах може здійснюватися за однією з п'яти модельних програм: «Математика. 10–12 класи. Основний рівень», «Алгебра. 10–12 класи. Основний рівень», «Геометрія. 10–12 класи. Основний рівень», «Алгебра. 10–12 класи. Поглиблений рівень», «Геометрія. 10–12 класи. Поглиблений рівень». Водночас у листі МОН України «Про формування потреби в навчальній літературі для 10 класу закладів загальної середньої освіти у 2027 році» (№ 1/1672-26 від 28.01.2026), адресованому видавництвам і авторам підручників, передбачено можливість навчання математики на поглибленому рівні також за підручником інтегрованого курсу «Математика», що потребує відповідної модельної програми. З огляду на це нами розроблено шість модельних програм з математики, алгебри та геометрії [4–9], у яких ураховано вимоги Стандарту до основного й поглибленого рівнів. У програмах передбачено, що перший семестр 10 класу є адаптаційним. Це дає учням змогу систематизувати й узагальнити навчальний матеріал з математики за 5–9 класи, компенсувати можливі освітні втрати, ознайомитися з особливостями обраного профілю та остаточно визначитися з профілем навчання й подальшою освітньою траєкторією, оскільки саме протягом першого семестру 10 класу учні мають право змінити обраний профіль.

Реалізація вимог нових стандартів до математичної освітньої галузі та вимог модельних програм потребує оновлення змісту підручників математики й удосконалення методики навчання за ними. Пріоритетним напрямом такого вдосконалення є розроблення рекомендацій для вчителів та учнів щодо визначення стратегій (загальних планів діяльності) і складання планів розв'язування задач різних типів. Доцільним є також розроблення орієнтирів для пошуку альтернативних способів розв'язування задач, прогнозування ризиків, пов'язаних із застосуванням цих способів, та подолання таких ризиків, а також рекомендацій щодо виокремлення груп задач, які розв'язуються подібними методами, і застосування відповідних методів.

Зазначені положення реалізовано в розроблених нами підручниках математики для 10 класу Нової української школи, які з 1 вересня 2026 року проходять пілотування в 52 академічних ліцеях 15 областей України. Вимоги стандартів нового покоління до математичної освітньої галузі втілено в цих підручниках через систему спеціальних орієнтирів щодо способів навчальної діяльності учнів із виучуваним математичним матеріалом. Ключовим аспектом роботи за підручниками є обговорення з учнями вибору орієнтирів, стратегій і планів розв'язування задач, що сприяє активізації їхньої пізнавальної діяльності та формуванню відповідних інтелектуальних умінь і математичних компетентностей.

1. Державний стандарт профільної середньої освіти: затв. постановою Кабінету Міністрів України від 25 липня 2024 р. № 851. URL: https://osvita.ua/doc/files/news/926/92660/66a3b96443c48380633931.pdf
2. Типова освітня програма для 10–12 класів закладів загальної середньої освіти, які забезпечують здобуття профільної середньої освіти за академічним спрямуванням: наказ МОН України від 26.05.2025 р. № 765. URL: https://osvita.ua/legislation/Ser_osv/94729/
3. *Засєкіна Т. М., Тишковець М. Д.* Від «стандарту змісту» до «стандарту результатів» – концептуальні засади реформування загальної середньої освіти // Український педагогічний журнал. 2021. № 4. С. 134–141.
4. *Нелін Є. П., Школьний О. В., Миляник А. І., Простакова Ю. С., Василишин М. С.* Модельна навчальна програма навчального предмета «Алгебра. 10–12 класи. Основний рівень» для закладів загальної

середньої освіти. URL: https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2026/mnp/04/15/mnp-algebra-10-12-klasi-osnovnii-riven-nelin-jep-ta-in.pdf
5. *Нелін Є. П., Школьний О. В., Миляник А. І., Простакова Ю. С., Василишин М. С.* Модельна навчальна програма навчального предмета «Алгебра. 10–12 класи. Поглиблений рівень» для закладів загальної середньої освіти. URL: https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2026/mnp/04/15/mnp-algebra-10-12-klasi-pogliblenii-riven-nelin-jep-ta-in.pdf
6. *Нелін Є. П., Школьний О. В., Миляник А. І., Простакова Ю. С., Василишин М. С.* Модельна навчальна програма навчального предмета «Геометрія. 10–12 класи. Основний рівень» для закладів загальної середньої освіти. URL: https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2026/mnp/04/15/mnp-geometriia-10-12-klasi-osnovnii-riven-nelin-jep-ta-in.pdf
7. *Нелін Є. П., Школьний О. В., Миляник А. І., Простакова Ю. С., Василишин М. С.* Модельна навчальна програма навчального предмета «Геометрія. 10–12 класи. Поглиблений рівень» для закладів загальної середньої освіти. URL: https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2026/mnp/04/15/mnp-geometriia-10-12-klasi-pogliblenii-riven-nelin-jep-ta-in.pdf
8. *Нелін Є. П., Школьний О. В., Миляник А. І., Простакова Ю. С., Василишин М. С.* Модельна навчальна програма навчального предмета «Математика. 10–12 класи. Основний рівень» для закладів загальної середньої освіти. URL: https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2026/mnp/04/mnp-matematika-10-12-klasi-osnovnii-riven-nelin-je-p-ta-in.pdf
9. *Нелін Є. П., Школьний О. В., Миляник А. І., Простакова Ю. С., Василишин М. С.* Модельна навчальна програма навчального предмета «Математика. 10–12 класи. Поглиблений рівень» для закладів загальної середньої освіти. URL: https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/Navchalni.prohramy/2026/mnp/07/29/matematychna-osvitnia-haluz/modelna-navcalna-programa-navcalnogo-predmeta-matematika-10-12-klasi-pogliblenii-riven-dlia-zakladiv-zagalnoyi-serednyoyi-osviti-avt-nelin-je-p-skolnii-o-v-milianik-a-i-prostakova-iu-s-v.pdf

CHALLENGES OF THE STATE STANDARD OF SPECIALISED SECONDARY EDUCATION FOR TEACHING MATHEMATICS

The paper specifies the challenges that the implementation of the State Standard of Specialised Secondary Education poses for the mathematics educational field and outlines ways of responding to them: six model curricula in mathematics, algebra and geometry with an adaptation semester in grade 10, and new textbooks that provide students with guidelines for choosing strategies and plans for solving problems.

УДК 37.016:51

ВИКОРИСТАННЯ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ MATHIGONPOLYPAD ДЛЯ ПОДОЛАННЯ ФОРМАЛІЗМУ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ФОРМУЛ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

ДіанаПАВЛОВИЧ
Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна
diana.pavlovych@chnu.edu.ua
Руслана КОЛІСНИК
Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна
r.kolisnyk@chnu.edu.ua

Відповідно до Державного стандарту базової середньої освіти, ключовим орієнтиром сучасної шкільної освіти є формування математичної компетентності через дослідницьку та практико-орієнтовану діяльність [1]. Однак під час вивчення шкільного курсу математики спостерігається проблема формалізму знань: учні механічно запам'ятовують формули, формулювання теорем тощо без усвідомлення їхньої суті. Відсутність наочного розуміння доведення тверджень, тотожностей та їхнього, зокрема, геометричного змісту призводить до низького рівня засвоєння матеріалу, нездатності застосовувати знання у нестандартних ситуаціях і, як наслідок, до глибших освітніх втрат.

У наукових працях О. В. Семеніхіної та М. Г. Друшляк доведено, що ефективним засобом подолання формалізму знань є залучення програм динамічної математики та цифрової візуалізації [2]. Перспективним інструментом у цьому контексті виступає цифрова математична платформа Mathigon[3]. Інтерактивне середовище Mathigon Polypad, яке дає змогу моделювати віртуальні маніпулятиви та створювати адаптивні дидактичні матеріали [4].Режим «автора» в Polypad дозволяє вчителю розробити інтерактивні вправи з автоматичною перевіркою. Це економить час на уроці і дає можливість учневі працювати самостійно у власному темпі, при цьому отримуючи миттєвий зворотний зв'язок, що є важливим етапом для закріплення навичок. Значною перевагою сервісу є те, що користуватися ним можна у браузері і не потрібно завантажувати додаток на пристрій ні учням, ні вчителю.

У роботі розроблено комплекс інтерактивних завдань для візуалізації формул скороченого множення засобами середовища Mathigon Polypad, який спрямований на послідовне формування глибокого розуміння формул:

1. Геометрична інтерпретація формули квадрата двочлена (Рис. 1).

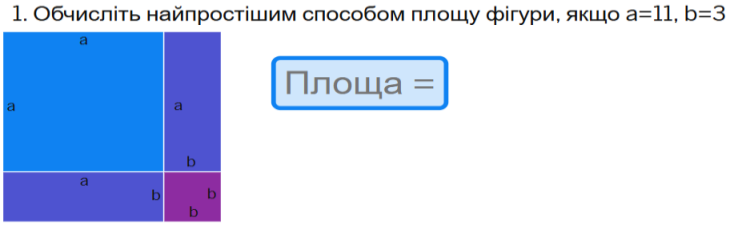


Рис.1. Геометрична інтерпретація формули квадрата двочлена в середовищі Polypad

Завдання ілюструє алгебраїчну тотожність через площі складених геометричних фігур (квадратів та прямокутників). Це дозволяє учням репрезентувати абстрактний вираз у вигляді наочного об'єкта, забезпечуючи перехід від когнітивного спостереження до доведення тотожності. Інтерактивний режим автора гарантує миттєвий автоматизований зв'язок щодо правильності виконаних побудов.

2. Інтерактивна вправа на систематизацію та відповідність (Рис. 2).

Завдання побудоване за допомогою механізму drag-and-drop (перетягування блоків). Формат забезпечує інтерактивну самоперевірку, створює психологічно комфортне середовище для припущення та виправлення помилок, сприяючи формуванню самостійної освітньої траєкторії учня.

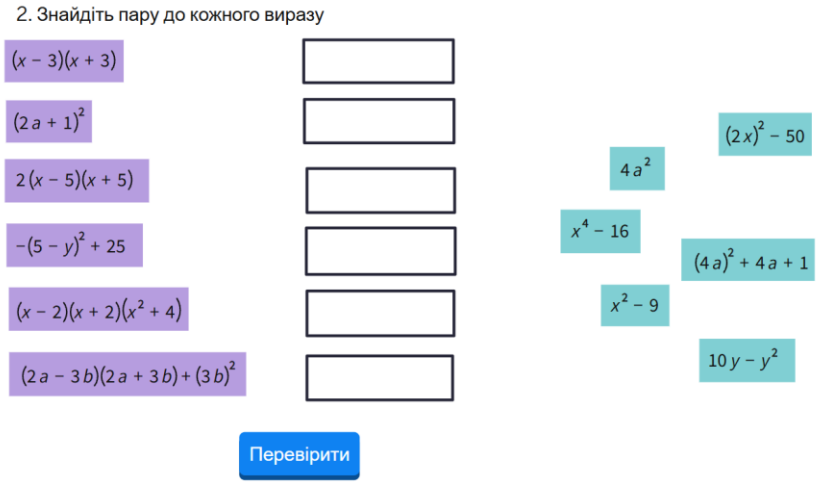


Рис. 2. Інтерактивна вправа на встановлення відповідності

3. Формування навичок раціональних обчислень (Рис. 3).

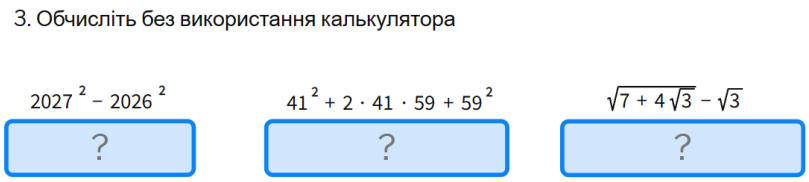


Рис. 3. Використання формул скороченого множення для раціональних обчислень

Вправа спрямована на застосування формул скороченого множення для оптимізації усних розрахунків складних числових та ірраціональних виразів без використання обчислювальної техніки.Завдяки розпізнаванню прихованих формул учні перетворюють складні числові та ірраціональні вирази на прості усні дії.

Використання інтерактивної дошки Polypad перетворює вивчення абстрактних алгебраїчних понять на наочний та захопливий процес досліджень. Запропоновані завдання сприяють глибокому розумінню формул скороченого множення завдяки їхній геометричній інтерпретації. Інтерактивний формат роботи та миттєвий зворотний зв'язок підвищують емоційне залучення школярів і дозволяють кожному навчатися за власною освітньою траєкторією. Такий підхід цілком відповідає концептуальним засадам Нової української школи, адже переводить учня з ролі пасивного слухача на активний суб’єкт навчання. Вчитель же виступає ментором та фасилітатором, який лише скеровує дослідницький процес та забезпечує підтримку.

1. Про деякі питання державних стандартів повної загальної середньої освіти: постанова Кабінету Міністрів України від 30.09.2020 № 898. URL:https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020-%D0%BF. Дата звернення: 23.09.2026.
2. *Семеніхіна О. В., Друшляк М. Г.* Використання програм динамічної математики в освітньому процесі // Фізико-математична освіта. 2017. Вип. 4, № 14. С. 110–115.
3. Mathigon – The Mathematical Playground. URL: https://mathigon.org/. Дата звернення: 23.09.2026.
4. *Колісник Р.С., Лучко В.С., Лукій К.Г.* Платформа Mathigon як засіб реалізації елементів STEM-освіти на уроках математики. «Наукові інновації та передові технології»: журнал. 2026. № 2(54). С. 1492-1505

USING THE MATHIGON POLYPAD ENVIRONMENT FOR THE VISUALIZATION OF ABRIDGED MULTIPLICATION FORMULA

The purpose of this study is to theoretically substantiate and develop a set of interactive tasks for visualizing abridged multiplication formulas using the Mathigon Polypad platform. The research methods include the analysis of educational literature, structural-logical modeling of learning material, and the practical design of virtual manipulatives. The principal results encompass the development of a comprehensive methodological complex within Mathigon Polypad. The created interactive tasks demonstrate the geometric interpretation of algebraic identities, utilize the platform's authoring mode for automated assessment, and facilitate the application of formulas for rational calculations. This digital approach provides an effective methodological tool for algebra teachers to overcome formalism in students' learning.

УДК 372.851

НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ УЧНІВ 5 КЛАСУ НУШ: АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ ТА СУЧАСТНІ МЕТОДИЧНІ ПІДХОДИ

Ольга ПЕРЕЙМИБІДА
Загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів №1 м. Зборова Зборівської міської ради Тернопільського району Тернопільської області, Україна
metodolga@gmail.com

Перехід учнів до 5 класу є важливим етапом їхнього шкільного життя. Дитина потрапляє в нове освітнє середовище, стикається з новими вимогами, збільшенням кількості навчальних предметів, різними вчителями та необхідністю самостійно організовувати власну навчальну діяльність. Концепція Нової української школи орієнтує освітній процес на формування ключових компетентностей та наскрізних умінь, необхідних дитині для подальшого навчання й життя [1]. Державний стандарт базової середньої освіти також визначає компетентнісний підхід одним із ключових орієнтирів сучасної освіти [2].

Особливої уваги в цей період потребує навчання математики, адже математична освіта передбачає не лише засвоєння певної системи знань, а й розвиток логічного, критичного та алгоритмічного мислення, уміння застосовувати математичні знання в реальних життєвих ситуаціях [2].

Однією з основних проблем сучасного навчання математики у 5 класі є суттєва різниця в рівнях підготовки учнів. Після завершення початкової школи діти мають різний досвід навчання, темп роботи, рівень сформованості обчислювальних навичок та вміння застосовувати математичні знання під час розв'язування задач. Саме тому організація навчального процесу має враховувати індивідуальні освітні потреби школярів [3].

У таких умовах важливим завданням учителя є створення диференційованого освітнього середовища, у якому кожен учень може працювати відповідно до своїх можливостей і поступово переходити на вищий рівень. Доцільним є використання завдань різної складності, вправ на вибір, роботи в парах і групах, математичних ігор, практичних ситуацій та коротких завдань для оперативної перевірки розуміння матеріалу.

Не менш важливою проблемою є мотивація п'ятикласників до вивчення математики. Компетентнісний підхід передбачає не механічне накопичення знань, а здатність учня застосовувати їх у різноманітних ситуаціях [2]. Тому математичний матеріал доцільно пов'язувати з реальним життям.

Наприклад, традиційні вправи можна доповнювати завданнями практичного спрямування: розрахувати вартість покупки, визначити час, порівняти відстані, спланувати маршрут, проаналізувати дані таблиці чи діаграми, виконати нескладні фінансові розрахунки. Такі завдання допомагають учням зрозуміти практичну цінність математики та підвищують їхню пізнавальну активність.

Ефективним є також використання проблемних ситуацій, коли вчитель не повідомляє готовий спосіб розв'язання, а створює умови, за яких учні самостійно шукають закономірність, висувають припущення та перевіряють їх. Такий підхід сприяє розвитку математичного мислення та формуванню вміння аргументувати власну думку.

Особливого значення у 5 класі набуває формувальне оцінювання. У сучасній школі оцінювання має бути інструментом підтримки навчання, а не лише способом фіксації його результату [4]. Учневі важливо розуміти не тільки те, яку оцінку він отримав, а й що саме йому вдалося, у чому виникла помилка та як її виправити.

Короткий коментар учителя, самооцінювання, взаємооцінювання, рефлексія наприкінці уроку допомагають зробити навчання більш усвідомленим. Особливо корисними є запитання: «Що сьогодні було для мене зрозумілим?», «Де виникли труднощі?», «Що я вже вмію робити самостійно?».

Практично ефективним є поєднання різних форм роботи на одному уроці. Після пояснення нового матеріалу можна запропонувати учням коротке індивідуальне завдання, далі – роботу в парах із взаємоперевіркою, а завершити урок завданням практичного або творчого характеру. Така організація дозволяє підтримувати активність школярів і водночас своєчасно виявляти труднощі.

Важливою умовою ефективного навчання є також позитивний психологічний клімат на уроці. Учень повинен мати право на помилку, адже саме аналіз помилок є важливою частиною математичного навчання. Завдання вчителя полягає не лише у виправленні неправильної відповіді, а й у допомозі дитині зрозуміти причину помилки та знайти правильний спосіб міркування.

Отже, сучасна методика навчання математики у 5 класі має бути спрямована на поступовий перехід від відтворення готових алгоритмів до самостійного математичного міркування, пошуку способів розв'язання та застосування знань у практичних ситуаціях.

Навчання математики у 5 класі НУШ потребує гнучкого поєднання традиційних і сучасних методичних підходів. Основними напрямами роботи вчителя мають бути врахування індивідуальних освітніх потреб учнів, практична спрямованість навчання, розвиток математичного мислення, підтримка мотивації та використання формувального оцінювання.

Ефективний урок математики сьогодні – це не лише урок правильного виконання обчислень. Це простір, у якому учень розмірковує, шукає, помиляється, виправляє помилки, аргументує та бачить практичну цінність математичних знань. Саме такий підхід відповідає компетентнісним засадам Нової української школи [1; 2] та створює основу для формування математично компетентної особистості.

1. Нова українська школа: концептуальні засади реформування середньої школи / за заг. ред. М. Грищенка. Київ, 2016.
2. Про деякі питання державних стандартів повної загальної середньої освіти: Постанова Кабінету Міністрів України від 30.09.2020 № 898. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020-п.
3. *Савченко О. Я.* Нова українська школа: порадник для вчителя. Київ: Літера ЛТД, 2018.

5. Про затвердження методичних рекомендацій щодо оцінювання навчальних досягнень учнів 5–6 класів, які здобувають освіту відповідно до нового Державного стандарту базової середньої освіти: Наказ Міністерства освіти і науки України від 01.04.2022 № 289. URL: https://zakon.rada.gov.ua/rada/show/v0289729-22.
6. Про освіту: Закон України від 05.09.2017 № 2145-VIII. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19.
7. Про повну загальну середню освіту: Закон України від 16.01.2020 № 463-IX. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/463-20.

TEACHING MATHEMATICS TO FIFTH-GRADE STUDENTS IN THE NEW UKRAINIAN SCHOOL: CURRENT CHALLENGES AND MODERN METHODOLOGICAL APPROACHES

The article examines current challenges in teaching mathematics to fifth-grade students within the framework of the New Ukrainian School. The main difficulties of the adaptation period are identified, including differences in students' levels of mathematical preparation, learning motivation, and the need to develop independent learning skills and mathematical thinking. Modern methodological approaches to organizing mathematics instruction are proposed, aimed at enhancing students' cognitive engagement, developing mathematical competence, and creating opportunities for students to experience success in learning.

УДК 373.5.091.33:51

ОКРЕМІ ЗАСОБИ ФОРМУВАННЯ КЛЮЧОВИХ КОМПЕТЕТНОСТЕЙ УЧНІВ СТАРШОЇ ШКОЛИ

Констянтин ПОПЕК
Тернопільський національний педагогічний університет, м. Тернопіль, Україна
kostiapopek@gmail.com
Віталій АЧКАН
Тернопільський національний педагогічний університет, м. Тернопіль, Україна
achkan_vitaliy@tnpu.edu.ua

Впровадження Концепції Нової української школи [2], побудованої на основі компетентнісного підходу до навчання, виховання та розвитку школярів ,орієнтоване на формування особистості, здатної до безперервного навчання впродовж життя та ефективної адаптації до нових умов у навчальному та життєвому середовищі. Означені стратегічні орієнтири зумовлюють потребу переосмислення традиційних підходів до організації освітнього процесу, а також оновлення методів, форм і засобів навчання відповідно до актуальних суспільних запитів і викликів сьогодення.

Під час воєнного стану, освітній процес зазнає суттєвих ускладнень, зумовлених ракетними обстрілами, повітряними тривогами, змінами формату навчання, підвищеним рівнем стресу учнів особливо актуальним є пошук дієвих засобів підвищення мотивації до навчання у цілому, і математики зокрема, покращення процесу формування предметних і ключових компетентностей.

Одним із ключових засобів навчання математики є задачі. У процесі розв'язування математичних задач учні набувають досвіду логічного та критичного мислення, формують уміння аналізувати, узагальнювати, моделювати реальні ситуації математичними засобами, приймати обґрунтовані рішення в умовах невизначеності. Це безпосередньо корелює з переліком ключових компетентностей НУШ, зокрема математичною компетентністю, умінням навчатися впродовж життя, інформаційно-цифровою компетентністю та компетентністю у природничих науках. Таким чином, цілеспрямоване формування ключових компетентностей засобами математики доцільно реалізовувати на основі задачного підходу до навчання.

У наукових дослідженнях значну увагу приділено використанню задачного підходу як ефективного дидактичного інструменту. Так, В.В. Ачкан та К.В. Власенко [1] обґрунтовують доцільність застосування задачного підходу для розвитку креативного мислення студентів у процесі вивчення елементарної математики. Схоже дослідження R. Noreen та A. Rana [5] орієнтоване на створення системи математичних задач як засобу розвитку креативного мислення учнів.

Скворцова С.О. обґрунтувала роль сюжетних задач як ключового засобу навчання математики у початковій школі, інструменту формування ключових та математичних компетентностей школярів. [3]

У нашому дослідженні ми спираємось на дослідження [4] і під Rich задачами з математики в старшій школі будемо розуміти задачі, які створюють умови для самостійного «відкриття» учнями нових математичних

понять, закономірностей або способів діяльності, сприяють формуванню здатності діяти в умовах невизначеності, застосовувати нестандартні підходи до розв'язування, а також стимулюють розвиток креативного мислення

До основних видів Rich задач доцільно віднести відкриті та інтегративні задачі.Під відкритою задачею з математики в старшій школі будемо розуміти задачу, умова якої може містити надлишкові або недостатні дані, а також передбачати існування кількох можливих розв'язків залежно від способу інтерпретації умови [4].

Під інтегративною математичною задачею в курсі математики розуміємо таку задачу, розв'язування якої забезпечує поєднання та узгодження знань учнів, здобутих під час вивчення різних розділів шкільного курсу математики [4]. Детальніше теоретичні положення, що стосуються цих задач висвітлені у дослідженні авторів [4].

Відкриті та інтегративні задачі доцільно використовувати на уроках різних типів. Наприклад, на уроках ознайомлення із новим матеріалом доцільно застосовувати задачі проблемні ситуації, на уроках застосування знань та вмінь та на комбінованих уроках доцільним є використання задач із відкритим закінченням, на уроках узагальнення та систематизації доцільним є використання пошуково-дослідницьких задач.

Наведемо по одному прикладу відкритих та інтегративних задач, які доцільно використовувати для навчання математики в старшій профільній школі.

На уроці застосування знань і вмінь доцільно запропонувати учням відкриту задачу: у пряму призму, сторони якої дорівнюють 8, 9 та 10 м. вписано кулю. Створіть не менше чотирьох задач різних рівнів складності, використовуючи ці умови (додавати можна не більше двох умов) та розв'яжіть їх.

На уроці систематизації і узагальнення знань, вмінь та навичок учням доцільно запропонувати інтегративну задачу: Одна з учениць класу почала приходити на перший урок занадто втомлена. На питання учителя, чому так відбувається, дівчина відповіла, що почала ходити до школи іншою дорогою. За словами дівчинки, дорога набагато коротша, ніж попередня, але дуже крута. Вчитель вирішила дати учням класу завдання з'ясувати наскільки ж крутою є нова дорога учениці до школи.Учні з'ясували, що тротуар, по якому іде кожен ранок дівчина, являє собою сходи, що складаються з невеличких сходинок. Вони порахували кількість сходинок, їх глибину і висоту. Використовуючи відомості про прямокутні трикутники, подібність трикутників, відомості з тригонометрії, учні легко визначили кут нахилу дороги. Продумайте і подайте загальну інструкцію для вирішення цієї задачі. Бажано навести декілька способів розв'язання.

Використання інноваційних підходів до класифікації задач, зокрема класифікація на основі Rich задач створює нові можливості для інтенсифікації процесу навчання математики, формування ключових та математичних компетентностей учнів і становить перспективи

1. *Ачкан В.В., Власенко К.В.* Задачі як засіб розвитку творчих здібностей студентів у процесі навчання елементарної математики Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природ-ничо-математичного циклу «ІТМ-2020»: матер. IVМіжнар. дистан. наук.-метод. конф. Суми: ФОП Цьома С.П., 2020. С. 15-17.
2. Концепція «Нова українська школа»:Рішення Колегії МОН від 27.10.2016 № 10. URL: https://www.kmu.gov.ua/storage/app/media/reforms/ukrainska-shkola-compressed.pdf /(дата звернення 30.08.2026).
3. Нова українська школа: методика навчання математики у 3–4 класах закладів загальної середньої освіти на засадах інтегративного і компетентнісного підходів: навч.-метод. посіб. / С. О. Скворцова, О. В. Онопрієнко. Харків : Вид-во «Ранок», 2020. 320 с.
4. *Попек К.О., Ачкан В.В.* Інноваційні підходи до класифікації задач у навчанні математики. Сучасні цифрові технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи: матеріали XVII Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції, м. Тернопіль, 9 квітня, 2026 р. Тернопіль: ТНПУ ім. Володимира Гнатюка 2026. С. 79 – 82.
5. *Noreen R. And Rana A. M. K.* Activity-Based Teaching versus Traditional Method of Teachingin Mathematics at Elementary Level. Bulletin of Education and Research August 2019, Vol. 41, No. 2 pp. 145-159.

SPECIFIC MEANS OF DEVELOPING KEY COMPETENCIES IN PRIMARY SCHOOL STUDENTS

The publication examines the role of rich tasks in teaching mathematics at the upper secondary school level and proposes classifications of open-ended tasks in mathematics education (open-ended and integrative tasks). The main types of open-ended tasks include problem-situation tasks, open-ended tasks, and inquiry-based research tasks. The main types of integrative tasks that are appropriate for students include tasks whose solution facilitates the establishment of

content-based and conceptual connections between different areas of school mathematics (e.g., between algebra and geometry).

УДК 37.091.3:51

ЗАСТОСУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ГЕЙМІФІКАЦІЇ ТА МІКРОФОРМАТІВ У НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ

Наталія ПРАВІЦКА
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна
n.pravitska@chnu.edu.ua
Софія ЛЕМІШЕВСЬКА
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна
lemishevska.sofiia@chnu.edu.ua

Трансформація сучасної освіти зумовлює пошук нових підходів до залучення школярів до навчальної діяльності. Особливої уваги потребує навчання математики, оскільки опанування абстрактних понять, формул та алгоритмів потребує від учнів значної концентрації та пізнавальної активності. Одним із перспективних напрямів є поєднання елементів гейміфікації з короткими завершеними навчальними блоками (мікроконтентом), що дає змогу структурувати матеріал, забезпечувати оперативний зворотний зв'язок і підтримувати навчальну мотивацію [1; 2].

Гейміфікація в освіті не означає суцільну гру. Це радше точкове використання ігрових елементів у освітньому процесі. На уроках математики доцільним є використання системи балів, рівнів, цифрових відзнак, рейтингових таблиць, математичних квестів та обмежених у часі завдань. Наприклад, за успішне розв'язання задачі учень отримує певну кількість балів і переходить до складнішого рівня, а виконання комплексу завдань може супроводжуватися отриманням цифрової відзнаки. Водночас ігровий елемент має бути підпорядкований конкретній навчальній меті, а не замінювати зміст навчання [4].

Паралельно може використовуватися мікроконтент- лаконічні, завершені за змістом навчальні блоки, спрямовані на опрацювання одного поняття, правила, способу дій або типу завдання.У шкільній математиціце можуть бути короткі відеопояснення,«математичні лайфхаки», задачі-хвилинки, головоломки, вправи на пошук помилки, а також покрокові алгоритми розв'язування типових задач.Такий підхід дає змогуструктурувати об'ємний навчальний матеріал на невеликі змістові блоки та зменшувати когнітивне навантаження під час його опрацювання.

Зручним середовищем для поширення подібних матеріалів можуть бути цифрові платформи та соціальні мережі, зокрема TikTok або InstagramReels. Вони не замінюють повноцінного уроку, проте можуть використовуватися як додатковий цифровий простір для подання коротких пояснень, демонстрації способів розв'язування задач або постановки проблемних запитань. Набори таких матеріалів можна формувати у тематичні добірки та поєднувати з ігровими завданнями, тестами й математичними квестами.

Методично доцільним є поєднання мікроконтенту та гейміфікації за логікою: «коротке пояснення → практичне завдання → ігровий виклик → зворотний зв'язок → перехід до наступного рівня». Наприклад, під час опрацювання теми «Квадратні рівняння» учень спочатку переглядає коротке відеопояснення способу обчислення дискримінанта, після чого розв'язує 2–3 нескладні приклади. За успішне виконання він отримує бали та переходить на наступний рівень, де може виконати завдання на пошук помилки у готовому розв'язанні або взяти участь у часовому математичному челенджі.

Для реалізації такого підходу можуть використовуватися різноманітні цифрові інструменти:

- *Kahoot!, Quizizz, Wordwallma LearningApps* - підходять для швидких опитувань, вікторин і змагальних вправ.
- *GeoGebra*- допомагає наочно показати графіки, геометрію та математичні залежності.
- *TikTok ma Reels*- для поширення коротких пояснювальних і демонстраційних матеріалів.

Важливо не перетворити мікроконтент на поверхове «гортання стрічки». Кожен мікроформат має бути пов'язаний із конкретною навчальною метою та передбачати активну дію учня: виконання завдання, проходження тесту, пошук помилки, формулювання відповіді або виконання певного кроку квесту. Завдяки цьому мікроформат виконує не лише функцію зацікавлення, а й може забезпечувати послідовне засвоєння, закріплення та перевірку навчального матеріалу.

Одним із можливих форматів поєднання гейміфікації та мікроконтенту є «Математичний мікрочелендж», який передбачає три основні етапи:

1. Перегляд 30–60-секундного відео з коротким поясненням навчального матеріалу.
2. Розв'язання одного завдання протягом 1–2 хвилин.
3. Миттєва перевірка результату та отримання балів, які можуть бути використані для переходу на наступний рівень.

Такий формат можна інтегрувати в різні етапи уроку: як мотиваційний елемент на початку заняття, засіб первинного закріплення нового матеріалу, завдання для самостійної роботи або експрес-домашнє завдання.

Поєднання гейміфікації та мікроконтенту створює умови для більш структурованої та динамічної організації навчальної діяльності. Ігрові механіки - бали, рівні, відзнаки та квести - у поєднанні з короткими навчальними матеріалами можуть забезпечувати оперативний зворотний зв'язок і підтримувати пізнавальну активність учнів. Водночас ефективність такого підходу залежить не від кількості використаних цифрових інструментів, а від їх відповідності віковим особливостям учнів, змісту навчального матеріалу та конкретним дидактичним цілям.

Перспективним напрямом подальшого дослідження є експериментальна перевірка запропонованого підходу та визначення його впливу на навчальну мотивацію, активність і результати навчання школярів під час опрацювання окремих тем шкільного курсу математики.

1. *Шикітка Г. М., Лагодич М. І.* Впровадження гейміфікації в освітній процес із математики в початковій школі України. Педагогічна Академія: наукові записки. 2024. DOI: 10.5281/zenodo.13868520
2. *Жерновникова О. А., Шешуряк В. М., Візіренко О. В., Фалько Д. В.* Запровадження гейміфікації у процес вивчення математики. 2023.
3. *Лінник Г., Морачковська І.* Використання елементів гейміфікації при викладанні математичного аналізу у ЗВО. Фізико-математична освіта. 2026. Т. 41, № 2. С. 56–63. DOI: 10.31110/fmo2026.v41i2-05.
4. *Доценко С., Золотухіна С.* Гейміфікація освітнього процесу в закладах загальної середньої освіти: ретроспективний аналіз та сучасні вектори розвитку. Молодь і ринок. 2026. DOI: 10.24919/2308-4634.2026.352213.

THE USE OF GAMIFICATION ELEMENTS AND MICROFORMATS IN MATHEMATICS EDUCATION

This paper explores the possibilities of combining gamification elements and microformats in mathematics education. It describes the main game mechanics that can be used in mathematics education, including scoring systems, levels, digital badges, quests, and timed tasks. The essence of microcontent as short, self-contained learning units is explained, and examples of its application in studying mathematical material are provided. A «Mathematical Microchallenge» model is proposed, which involves a sequential combination of a brief explanation, a practical task, a game-based challenge, and immediate feedback. The possibilities for using digital tools and social networks to implement this approach are identified. The feasibility of further experimental testing of its impact on students' learning motivation, cognitive activity, and academic performance is substantiated.

УДК 37.016:51:377

ЗАСОБИ РЕАЛІЗАЦІЇ ПРОФЕСІЙНО-ПРИКЛАДНОЇ СПРЯМОВАНОСТІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ У ПРОФЕСІЙНОМУ КОЛЕДЖІ

Надія ПРОЦИК
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка,
Тернопіль, Україна
nprozuk@tnpu.edu.ua

Сучасні вимоги до професійної підготовки здобувачів освіти зумовлюють необхідність посилення професійно-прикладної спрямованості навчання математики у професійних коледжах. Математична підготовка має забезпечувати не лише засвоєння знань, а й здатність застосовувати їх для вимірювань, визначення потреби в матеріалах, виконання виробничих розрахунків та обґрунтування практичних рішень. Особливого значення такі вміння набувають у підготовці здобувачів професійної освіти будівельного профілю.

Професійно-прикладна спрямованість навчання математики передбачає встановлення змістових зв'язків математичного матеріалу з майбутньою професійною діяльністю та його використання для розв'язання практично значущих завдань [3; 4]. Відповідно, добір засобів навчання має визначатися не лише наявністю професійного контексту, а насамперед характером математичної діяльності, яку передбачає завдання.

Реалізацію цієї спрямованості забезпечує поєднання професійно-орієнтованих математичних задач, проблемних ситуацій, Rich-задач, навчальних кейсів і STEM/STEAM-проєктів із математичним моделюванням та цифровими інструментами. Професійно-орієнтовані задачі передбачають застосування математичних знань до конкретних виробничих розрахунків; проблемні ситуації та Rich-задачі стимулюють пошук і порівняння способів розв'язання; кейси та проєкти створюють умови для комплексного аналізу практичних проблем. Математичне моделювання забезпечує перехід від професійної ситуації до кількісних залежностей, а цифрові засоби — їх дослідження й візуалізацію. Питання підготовки викладачів до інноваційної педагогічної діяльності висвітлено, зокрема, у праці В. Ачкана [1].

Професійно-орієнтовану математичну задачу доцільно відрізняти від проблемної ситуації. Перша зазвичай містить визначені вихідні дані та конкретну вимогу, тоді як друга передбачає самостійне уточнення проблеми, вибір суттєвих даних, побудову математичної моделі й обґрунтування рішення. Такий підхід узгоджується з положеннями проблемного навчання [2].

Прикладом може слугувати задача з теми «Площі геометричних фігур. Відсоткові розрахунки» для здобувачів професійної освіти будівельного профілю, зокрема майбутніх лицювальників-плиточників. Її професійний зміст пов'язаний із визначенням потреби в облицювальному матеріалі під час виконання оздоблювальних робіт.

Професійно-орієнтована задача. Під час оздоблювальних робіт потрібно облицювати керамічною плиткою стіну завдовжки 4 м і заввишки 2,5 м. Посередині стіни, від рівня підлоги, розташований дверний отвір розмірами 0,8 × 2 м, який не облицьовують. Для роботи використовують плитку розмірами 25 × 40 см; в одній упаковці – 10 плиток. Визначте, скільки упаковок потрібно придбати, передбачивши за умовою задачі додатковий запас матеріалу 10 %. На цьому етапі розрахунок виконайте за площею, без урахування міжплиткових швів і конкретної схеми укладання. Поясніть необхідність округлення результату.

Дидактична мета використання задачі – формування вмінь обчислювати площі геометричних фігур, узгоджувати одиниці вимірювання, виконувати відсоткові розрахунки й визначати потребу в матеріалі з урахуванням умов його придбання; розвиток здатності аналізувати практичні дані, обирати математичні дії та обґрунтовувати отриманий результат у професійному контексті.

На початковому етапі здобувачі освіти аналізують умову, визначають площу поверхні, що підлягає облицюванню, обирають послідовність обчислень враховуючи при цьому запас матеріалу та пояснюють спосіб округлення кількості упаковок. Така робота дає змогу перевірити не лише обчислювальні вміння, а й розуміння практичного призначення результату. Водночас розрахунок лише за площею є наближеним: він не відображає впливу схеми розміщення плиток на обсяг підрізування.

Саме для дослідження цього обмеження доцільно залучити GeoGebra. У цифровому середовищі здобувачі освіти будують масштабну геометричну модель стіни з дверним отвором, розміщують на ній плитки заданого формату та порівнюють два варіанти укладання – довшою стороною горизонтально і вертикально. Вони встановлюють, де виникає потреба в підрізуванні, оцінюють кількість цілих і підрізаних плиток та обговорюють можливість використання обрізків. Завдяки цьому цифрова модель допомагає перейти від абстрактного обчислення площі до аналізу геометричних особливостей облицювання.

Для розрахункових варіантів доцільно використати електронні таблиці (Microsoft Excel або Google Sheets). Здобувачі освіти вводять розміри стіни, отвору й плитки, відсоток запасу та кількість плиток в упаковці, після чого змінюють окремі параметри й аналізують відповідні результати. Порівняння табличних обчислень із геометричною моделлю дає змогу з'ясувати відмінність між орієнтовною потребою в матеріалі за площею та потребою, уточненою з урахуванням укладання. При цьому цифрові інструменти не замінюють математичних міркувань: здобувачі мають пояснити вибір моделі, прийняті припущення та обґрунтованість рішення.

У поданому вигляді задача має визначені дані та вимогу. Її можна перетворити на професійно-орієнтовану проблемну ситуацію, запропонувавши самостійно порівняти різні формати та способи укладання плитки й обґрунтувати критерії вибору. Якщо додати відомості про вартість, комплектацію упаковок і допустимі втрати, вона може стати основою навчального кейсу. Вимірювання реальної поверхні, розроблення ескізу та порівняння рішень у поєднанні зі знаннями професійних дисциплін створюють передумови для невеликого STEM/STEAM-проєкту. Таким чином, одна задача може бути використана для організації різних за складністю видів математичної діяльності.

Висновок. Реалізація професійно-прикладної спрямованості навчання математики у професійному коледжі потребує не формального включення професійного контексту, а організації діяльності, у якій математичні знання є основою для обґрунтування практичних рішень. Наведений приклад ілюструє послідовний перехід від розрахункової задачі до геометричного моделювання, порівняння альтернатив і використання цифрових засобів. Методична цінність таких інструментів полягає в можливості досліджувати залежність результату від прийнятих умов, перевіряти припущення та інтерпретувати математичні результати з огляду на професійну діяльність.

1. *Ачкан В. В.* Формування готовності майбутніх учителів математики до інноваційної педагогічної діяльності в процесі вивчення математичних дисциплін. Наукові записки Бердянського державного педагогічного університету. Серія: Педагогічні науки. 2023. Вип. 3. С. 419–431. URL: https://dspace.bdpu.org.ua/handle/123456789/4007.
2. *Дейніченко Т. І., Галяс А. С., Шмадченко М. С.* Проблемне навчання математики. Наумовські читання: матеріали XIX науково-методичної конференції здобувачів вищої освіти та молодих учених. Харків, 2022. С. 47–49. URL: https://dspace.hnpu.edu.ua/handle/123456789/7973.
3. *Ковальчук М. Б.* Професійна спрямованість навчання математики як інтеграційна основа фахової підготовки студентів інженерних спеціальностей: монографія. Вінниця: ВНТУ, 2020. 348 с.
4. *Лов'янова І. В.* Професійно спрямоване навчання математики у профільній школі: теоретичний аспект: монографія. Черкаси: Видавець Чабаненко Ю. А., 2014. 354 с. DOI: https://doi.org/10.31812/0564/2241.

TOOLS FOR IMPLEMENTING THE PROFESSIONAL AND APPLIED ORIENTATION OF MATHEMATICS TEACHING IN A VOCATIONAL COLLEGE

The paper examines the tools for implementing the professional and applied orientation of mathematics teaching in vocational colleges, including professionally oriented mathematical tasks, problem situations, Rich tasks, case studies, STEM/STEAM projects, mathematical modelling, and digital tools. A wall-tiling task is presented as an example for students pursuing construction-related vocational education, particularly future tilers. The task involves calculating areas, converting units of measurement, performing percentage calculations, and estimating material requirements. The proposed sequence of learning activities involves mathematical calculations, geometric modelling of alternative tile layouts using GeoGebra, and comparison of results using spreadsheets. Particular attention is paid to the didactic potential of digital tools for developing mathematical modelling skills, spatial reasoning, and the ability to interpret quantitative results in a professional context. The paper also outlines possibilities for extending the task into a problem situation, a case study, or a STEM/STEAM project by introducing alternative materials and practical constraints.

УДК 37.016:51:930.85

МАТЕМАТИКА, КУЛЬТУРА ТА ІСТОРІЯ: МІЖДИСЦИПЛІНАРНИЙ ВИМІР МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ

ІринаСІРА
Харківський національний педагогічний університет імені Г.С. Сковороди, м.Харків, Україна
itsira@hnpu/edu.ua

Сучасний розвиток освіти характеризується посиленням уваги до міждисциплінарних зв'язків, інтеграції знань та формування здатності здобувачів освіти застосовувати набуті знання в нових ситуаціях. У цьому контексті математика не повинна розглядатися виключно як система абстрактних понять, формул, теорем і алгоритмів. Вона є важливою складовою людської культури, результатом тривалого розвитку наукової думки та засобом пізнання природних, технічних і соціальних явищ [1].

Історія математики дає можливість показати, що математичні поняття виникали не ізольовано, а у відповідь на конкретні практичні та теоретичні потреби. Потреби вимірювання земельних ділянок, будівництва, торгівлі, астрономічних спостережень, календарних обчислень, навігації та механіки стимулювали розвиток різних математичних методів. Отже, історико-культурний контекст здатний перетворити формальне засвоєння математичного матеріалу на процес усвідомленого відкриття логіки його виникнення та розвитку.

Використання історії математики в освітньому процесі має не лише інформаційне, а й методологічне значення. Історичний матеріал може створювати проблемну ситуацію, мотивувати пошук способу розв'язання, демонструвати різні шляхи математичного міркування та сприяти розумінню того, чому певне поняття або метод

набув сучасного вигляду. Саме тому історію математики доцільно розглядати не як додатковий набір цікавих фактів, а як ресурс математичного навчання [2].

Особливого значення ця проблема набуває у професійній підготовці майбутніх учителів математики. Учитель має не лише знати історичні факти, пов'язані з математикою, а й уміти методично перетворювати їх на засіб організації навчальної діяльності. У цьому аспекті важливою є праця І. Сірої та О. Штонди, у якій актуалізовано проблему формування історичного компонента математико-методичної культури майбутнього вчителя математики [4]. Такий підхід дає підстави розглядати історичну обізнаність майбутнього педагога як складову його професійної культури, що забезпечує більш осмислене використання історико-математичного матеріалу в освітньому процесі.

Водночас перспективним є розширення цього підходу від суто історико-методичного до міждисциплінарного. Історичний факт має освітню цінність не сам по собі, а тоді, коли він включається в систему математичної діяльності учня або студента. Наприклад, інформація про розвиток геометричних знань у зв'язку з архітектурою може стати основою для дослідження геометричних форм, симетрії, пропорцій, масштабування та просторових співвідношень. Аналогічно історія астрономічних спостережень може бути пов'язана з вимірюваннями, функціональними залежностями, періодичними процесами та математичним моделюванням.

Таким чином, продуктивною видається така послідовність організації навчальної діяльності:

історична ситуація → культурний контекст → математична проблема → математична модель → розв'язання → інтерпретація → рефлексія.

Її сутність полягає в тому, що здобувач освіти спочатку знайомиться з певною історичною або культурною ситуацією, після чого визначає математичну проблему, будує або використовує відповідну модель, виконує математичні операції, а потім повертається до початкового контексту й інтерпретує отриманий результат. Така структура забезпечує взаємодію математичного, історичного, культурного та практичного компонентів.

Особливо широкі можливості для реалізації такого підходу відкриває геометрія. Історія розвитку геометричних знань може бути пов'язана з архітектурою, землемірством, картографією, мистецтвом і технікою. Наприклад, вивчення симетрії може ґрунтуватися на аналізі архітектурних споруд або орнаментів, але результатом такого звернення до культури має бути не лише естетичне спостереження, а виконання конкретної математичної діяльності: визначення осей симетрії, дослідження перетворень, побудова фігур, встановлення закономірностей.

Не менш важливим є зв'язок математики з мистецтвом. Проблеми пропорцій, симетрії, ритму, масштабу та геометричних перетворень мають одночасно математичний і культурний виміри. Водночас використання таких прикладів потребує наукової обережності. Зокрема, поширені твердження про «золотий переріз» у мистецтві та архітектурі не повинні подаватися як безумовно доведені універсальні закономірності. Історико-культурний матеріал має сприяти критичному аналізу джерел, перевірці тверджень і розмежуванню математичного факту, історичної інтерпретації та популярного міфу.

Важливий потенціал має також поєднання математики з історією та статистикою. Історичні дані про населення, економічні процеси, розвиток міст, виробництва, освіти або науки можуть бути представлені у вигляді таблиць, діаграм і графіків. Їх аналіз дає можливість одночасно формувати математичні вміння та навички критичного читання інформації. У такому випадку математична освіта виходить за межі виконання формальних операцій і спрямовується на інтерпретацію реальних даних.

Міждисциплінарний підхід узгоджується із сучасним розумінням математичної грамотності, відповідно до якого важливим є не лише володіння математичними процедурами, а й здатність формулювати, застосовувати та інтерпретувати математику в різноманітних контекстах [3]. Застосування історичних і культурних ситуацій створює додаткові можливості для переходу від абстрактного математичного об'єкта до його змістовного осмислення.

Важливою умовою реалізації такого підходу є підготовленість учителя. Майбутній педагог має вміти здійснювати відбір достовірного історичного матеріалу, визначати його зв'язок із конкретною математичною темою, формулювати проблемні запитання та організовувати дослідницьку діяльність учнів. У цьому контексті формування історичного компонента математико-методичної культури майбутнього вчителя набуває практичного значення [4].

Доцільним є також використання цифрових технологій. Цифрові карти, динамічні геометричні середовища, електронні архіви, інтерактивні часові шкали та засоби візуалізації даних дають можливість поєднувати історичні джерела з математичним моделюванням і дослідницькою діяльністю. Водночас цифровий інструмент має залишатися засобом математичного пізнання, а не самоціллю.

Отже, міждисциплінарна інтеграція математики, історії та культури може розглядатися як цілісна методологічна стратегія. Її сутність полягає у створенні освітніх ситуацій, у яких математичне знання набуває конкретного історичного, культурного або практичного контексту, а здобувач освіти не лише отримує готову інформацію, а здійснює математичне дослідження.

Отже, поєднання математики, культури та історії розширює зміст сучасної математичної освіти та створює умови для переходу від формального засвоєння математичних процедур до осмисленого математичного пізнання. Історія математики дає можливість простежити походження понять і методів, культура забезпечує їх змістовний контекст, а математика виступає інструментом аналізу та моделювання відповідних явищ.

Важливим результатом такого підходу є формування в здобувачів освіти здатності бачити математику як динамічну частину людської культури, пов'язану з розвитком науки, техніки, мистецтва та суспільства. Для майбутнього вчителя це означає необхідність формування не лише предметних математичних компетентностей, а й історико-методичної культури, що дає змогу педагогічно доцільно використовувати історичний матеріал [4].

Перспективним напрямом подальших досліджень є розроблення системи міждисциплінарних математичних завдань, у яких історико-культурний контекст поєднується з математичним моделюванням, цифровими технологіями та дослідницькою діяльністю. Особливої уваги потребує також підготовка майбутніх учителів до конструювання таких освітніх ситуацій та визначення критеріїв їхньої методичної ефективності.

5. D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *FortheLearningofMathematics, 5*(1), 44–48.
6. Fauvel, J., & van Maanen, J. (Eds.). (2000). *History in mathematics education: The ICMI study*. KluwerAcademicPublishers. https://doi.org/10.1007/978-94-010-1795-9
7. OECD. (2023). *PISA 2022 assessment and analytical framework: Mathematics, reading, science and financial literacy*. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/dfe0bf9c-en
8. Сіра, І. Т., & Штонда, О. Г. (2026). Формування історичного компоненту математико-методичної культури майбутнього вчителя математики. *Педагогічна Академія: наукові записки*, (27). https://doi.org/10.5281/zenodo.18826631

MATHEMATICS, CULTURE AND HISTORY:

AN INTERDISCIPLINARY DIMENSION OF MATHEMATICS EDUCATION

The paper examines the interdisciplinary potential of integrating mathematics, culture, and history in contemporary mathematics education. The expediency of using historical and mathematical material is substantiated not merely as a means of illustrating the origins of mathematical concepts, but as an important component of organizing students' cognitive activity. Particular attention is paid to the fact that mathematical concepts, methods, and ways of reasoning have developed within specific cultural, scientific, technological, and social contexts. Therefore, their study through a historical and cultural perspective can contribute to a deeper understanding of the logic underlying the development of mathematical knowledge. The paper analyzes the significance of the historical component of the mathematical and methodological culture of prospective mathematics teachers. A structural model of interdisciplinary integration is proposed/The possibilities of implementing this approach in the study of geometry, algebra, statistics, elements of mathematical analysis, and mathematical modelling are considered. The conditions for the effective use of historical and cultural material are identified, including scientific accuracy, relevance to mathematical content, problem-based learning, active student engagement, and reflective interpretation of results. It is argued that the historical and cultural component can serve as an effective means of developing mathematical thinking, cognitive motivation, and the ability to apply mathematical knowledge in diverse disciplinary and cultural contexts.

УДК 373.5.015.3:159.955]:514.113

ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГІЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ФОРМУВАННЯ ПРОСТОРОВОГО МИСЛЕННЯ СТАРШОКЛАСНИКІВ

Валентин СІЧКАР
Криворізький державний педагогічний університет, м. Кривій Ріг, Україна
valenyn.sichkar44@gmail.com
Катерина ПОЛЬГУН
Криворізький державний педагогічний університет, м. Кривій Ріг, Україна
polgun@kdpu.edu.ua

У сучасних умовах інформатизації та діджиталізації суспільства стрімкого розвитку набувають цифрові освітні технології. Освіта все більше орієнтується на розвиток когнітивних здібностей учнів, серед яких важливу роль відіграє просторове мислення. Воно є ключовою здатністю, яка необхідна не лише для успішного засвоєння природничо-математичних дисциплін, а й для професійної діяльності в IT-сфері, дизайні, архітектурі, інженерії тощо.

Вивчення стереометрії зазвичай викликає труднощі в учнів через потребу уявляти просторові фігури та встановлювати зв'язки між ними, оскільки звичайні плоскі креслення в підручниках не завжди здатні донести старшокласнику властивості об'ємних геометричних тіл. Незважаючи на об'єктивну необхідність, традиційна освітня система приділяє недостатню увагу цілеспрямованому розвитку просторового мислення в учнів старшої школи, що зумовлює гостру потребу в пошуку та впровадженні новітніх дидактичних підходів.

Метою дослідження є обґрунтування психолого-педагогічних та методичних особливостей формування просторового мислення старшокласників на прикладі створення динамічної моделі циліндра у середовищі GeoGebra 3D.

У психолого-педагогічній літературі просторове мислення розглядають як специфічну психологічну діяльність, що забезпечує генерацію та оперування просторовими образами для розв'язання різноманітних теоретичних і практичних задач. Цей феномен педагоги та психологи розглядають як один зі складників математичного інтелекту.

Ж. Піаже одним із перших довів, що здатність до ментальних трансформацій об'єктів формується поступово через діяльність і проходить через сенсомоторний, дооперaційний етапи та етап конкретних операцій. Натомість Л. Виготський наголошував на ролі соціальної взаємодії в розвитку просторового мислення, де засобом структурування образів простору виступає мова [3, с. 252; 5, с. 1-2].

Доповнюючи ці підходи, І. Якиманська зазначала, що розвиток просторового мислення сприяє накопиченню візуальних образів, які є основою для вміння «читати» креслення й оперувати ними. Вона звела всі види оперування просторовими образами до трьох основних: зміна положення уявного об'єкта, зміна його структури та комбінації цих перетворень [2, с. 50].

Завдяки дослідженням цих психологів та педагогів можна встановити, що здатність до ментальних трансформацій об'єктів формується поступово через взаємодію з предметним світом і спирається на накопичення візуальних образів, які стають базою для розуміння геометричних понять.

Дослідження вікової динаміки дослідниками Н. Й. Чижаковська та А. В. Мамотенко показує, що шкільне навчання стимулює розвиток просторового мислення, проте робить це недостатньо ефективно для переходу більшості учнів на найвищий творчий рівень. Дослідники переконалися, що старшокласники (10-11 класи) мають статистично значуще вищі показники сформованості просторового мислення, ніж учні середньої школи (7-8 класи). Зокрема, вони краще справляються з тестами на технічне розуміння, конструювання, знаходження логічних принципів та орієнтування у графічній моделі простору. У старшому шкільному віці саме високий рівень просторового мислення стає ключовим індикатором наявності спеціальних предметних та інженерних здібностей, хоча базовим компонентом навчальної успішності залишається понятійне мислення [4].

Г. І. Іванова у статті [1] описує рівні оперування образами просторового мислення у стереометрії та структурує їхза трьома рівнями:

- початковий (здатність уявляти зміну положення об'єкта);
- середній (здатність змінювати структуру об'єкта);
- високий (здатність конструювати новий просторовий об'єкт за зразком чи умовами) [1, с.135].

Головними проблемами традиційної методики викладання геометрії у старших класах є недостатнє використання наочності та недосконала система задач. Зазвичай це демонстрація готових моделей, малюнки у підручниках і задачі на механічне застосування формул. Вчитель має розуміти, що просторове мислення оперує

наочністю, тому, на нашу думку, для сучасних старшокласників ефективним засобом подолання труднощів є використання комп'ютерних технологій, зокрема середовища 3D-моделювання, а також віртуальної та доповненої реальності [5].

З огляду на все описане вище, можна доповнити класичні уроки геометрії завданнями, що зорієнтовані на активну конструкторську діяльність. Наприклад, при вивченні теми «Осьовий переріз циліндра» доцільно запропонувати учням завдання на створення інтерактивної динамічної розробки у сервісі GeoGebra 3D. Детальний алгоритм виконання такого завдання представлено у табл. 1, а кінцевий результат наведено на рис. 1.

Таблиця 1.

Завдання та алгоритм його виконання усервісі GeoGebra 3D

Завдання: У сервісі GeoGebra 3D створіть динамічну модель циліндра та дослідіть його осьовий переріз.

Алгоритм виконання:

1	Відкрийте середовище GeoGebra 3D Calculator.
2	За допомогою інструмента «Повзунок» створіть два параметри: R (для радіуса основи, $1 < R < 5$) та H (для висоти циліндра, $1 < H < 10$).
3	У рядку введення задайте точки A (0, 0, 0) та B (0, 0, H), що будуть центрами основ циліндра.
4	Скористайтеся інструментом «Циліндр»,послідовно клікніть на точки A та B, а у вікні «Радіус» введіть змінну R.
5	Для побудови осьового перерізу проведіть площину, що проходить через вісь циліндра. Використайте інструмент «Площина через три точки». Послідовно клікніть на точки точки A, B та довільну точку на колі нижньої основи циліндра.
6	Використайте інструмент «Перетин двох поверхонь», клікнувши на створену площину та бічну поверхню циліндра.
7	У налаштуваннях зніміть галочку «Показувати об'єкт» для допоміжної площини, а для прямокутника перерізу змініть колір та стиль ліній за вашими уподобаннями.
8	За допомогою інструмента «Площа» виведіть на екран значення площі перерізу. Для цього відредагуйте текст: «Площа осьового перерізу = *ЧИСЛОВА_ЗМІНА_ПЛОЩІ* кв. од.». У налаштуваннях тексту перейдіть у вкладку «Додатково» та у налаштуванні положення оберіть «Абсолютна позиція на екрані».
9	Рухаючи повзунки R та H, з'ясуйте, як змінюється форма перерізу. Зробіть висновки, за яких умов осьовий переріз циліндра стає квадратом.
10	Збережіть файл «Осьовий переріз циліндра Прізвище Клас.ggb».

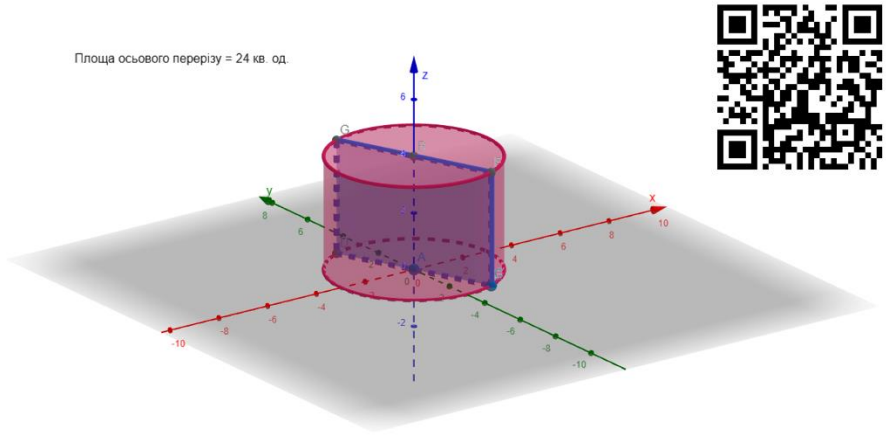


Рис. 1. Очікуваний результат виконання учнем завдання в сервісі GeoGebra 3D та QR-код на готову розробку.

Подібні завдання дають змогу учням послідовно формувати просторові образи, перейти від пасивного сприйняття наочних моделей до активного оперування ними. Водночас для досягнення максимальної ефективності впровадження таких завдань має бути поступовим та системним.

Спираючись на рівні розвитку просторовго мислення за Г. Івановою, доцільно розпочати роботу з використаня вже готових розробок у середовищі GeoGebra 3Dабо її аналогах. Так учні навчаться змінювати положення просторових об’єктів у віртуальному середовищі (обертатити об’єкт, керувати кутом огляду тощо) та досліджувати його структуру (змінювати розміри просторових об’єктів тощо), що забезпечить формування в учнів початкового та середнього рівнів просторового мислення. Натомість завдання наведене у табл. 1 спрямоване на формування високого рівня просторого мислення, адже вимагає від учня не просто взаємодії з готовою моделлю, а й самостійного її створення. У подальшому алгоритм побудови просторової моделі може ставати менш детальним або ж його можна взагалі не подавати.

Просторове мислення є фундаментальною здібністю не лише опанування природничо-математичних дисциплін, а й підготовкою до інженерно-технічних професій. Проте традиційні підходи до вивчення геометрії не здатні повною мірою забезпечити його розвиток. Подолання цієї проблеми передбачає поєтапне впровадження комп’ютерних технологій, що сприятиме розвитку просторового мислення – від взаємодії з готовими моделями до самостійного конструювання інтерактивних просторових об’єктів.

1. *ІвановаГ. І.* Розвиток просторового мислення учнів засобами 3D-моделювання // Collection of Scientific Papers «SCIENTIA», м. Лісабон, Португалія, 16 груд. 2022 р. 2022 С. 135–137.
2. *КоростельП.* Розвиток просторового мислення майбутніх педагогів професійного навчання засобами комп'ютерної графіки // Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології. 2021. № 10. С. 48–57.
3. *Полянська Д*. Психолого-педагогічні основи просторового мислення // НАУКА. ОСВІТА. МОЛОДЬ. : зб. матеріалів Всеукр. наук. конф. студентів та молодих науковців, м. Умань, 15 квіт. 2025 р. 2025. С. 252–254.
4. *Чижаковська Н. Й., Мамотенко А. В.*Вікова динаміка та особливості формування просторового мислення у школярів у контексті його ролі в інтелектуальній структурі // XII International Science Conference «Current problems in the development of science and education», м. Сарагоза, Іспанія, 17–19 жовт. 2025 р., 2025. С. 264–267.
5. *Яковенко О., Гуртовий Ю.* Психолого-педагогічні аспекти та структура просторового мислення в курсі стереометрії // Наукові записки молодих учених. 2025. №14. 12 с.

PSYCHOLOGICAL AND PEDAGOGICAL FEATURES OF FORMING SPATIAL THINKING IN HIGH SCHOOL STUDENTS

The article investigates the psychological and pedagogical features of forming spatial thinking in high school students during stereometry lessons. The expediency of replacing traditional static visualization with active constructive activity is substantiated. A methodology for the step-by-step use of 3D modeling (using GeoGebra 3D as an example) is proposed to help students achieve a high, creative level of spatial thinking by constructing dynamic geometric objects.

УДК 378:37.091.12.011.3-051:51

РОЛЬ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ «ІНТЕГРАЦІЯ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ» У ПІДГОТОВЦІ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ СПЕЦІАЛЬНОСТІ СЕРЕДНЯ ОСВІТА (МАТЕМАТИКА)

Лілія СОКОЛЕНКО
Національний університет «Чернігівський колегіум» імені Т.Г. Шевченка, м. Чернігів, Україна
liliysokol9@gmail.com

Поняття «інтеграція» (integratio) в перекладі з англійської мови означає *«відновлення», «поповнення», «цілий».*Доцільність інтегрованого підходу до організації навчально-виховного процесу обґрунтовується ще в працях Я.А. Коменського: «Всі знання виростають з одного кореня – навколишньої дійсності, мають між собою зв’язки, а тому повинні вивчатись у зв’язках» [10, с.73].

Дидактичнийзміст поняття «інтеграція» розкривають в своїх роботах О.Я. Савченко, М.С. Вашуленко,Н.М. Бібік,Л.П. Кочина, Н.В. Лесняк, Н.І. Присяжнюк та ін. Виокремлюють *повну* інтеграцію, *тематичну* інтеграцію, *інтеграцію видів навчальної діяльності учнів* [10, с.78].

Реалізація інтегрованого підходу під час навчання шкільного курсу математики розглядається в роботах вітчизняних дослідників Акуленко І.А. [1], Черненко Н.А. [9] та ін. Реалізація *повної інтеграції*має місце в *інтегрованих підручниках* для нової української школи (базової школи), серед яких підручники: 1)Джон Ендрю Біос. Математика: підруч. для 5 кл. закладів загальної середньої освіти, 2) Джон Ендрю Біос. Математика: підруч. для 6 кл. закладів загальної середньої освіти. (у 2-х частинах), 3) Школьний О., Нелін Є., Миляник А. Проскурякова Ю. Математика: підруч. для 7 кл. закл. заг. серед. освіти (у 2-х частинах), 4) Істер О.С. Математика (інтегрований курс): підруч. для 7 кл. закл. заг. серед. освіти У 2 ч. та ін. Реалізації інтегрованого навчання математики під час проведення позаурочної роботи в 7-8 класах присвячено посібник [4].

Проблема інтегрованого навчання математики старшої профільної школи була і залишається актуальною. Її реалізації присвячені роботи вітчизняних авторів Акуленко І.А.[1],Анікушин А.В. [2], Бахчетжиоглу О.О., де Конінг О.А.) [5], Соколенко Л.О. [6], Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швець В.О. [7], Черненко Н.А. [9] та ін.

Не менш цікаві підходи до реалізації інтегрованого навчання математики старшої школи пропонуються у підручниках естонської школи: LepmannL, LepmannT., Velsker K. Matemaatika X (XI), (XII) klassile «Koolibri» Tallinnта ін.

Проведенню позаурочної роботи з математики, яка має безпосереднє відношення до проблеми інтеграції навчання, присвячені посібники іноземних авторів Бенджаміна А. [3], Строгац С. [8].

Представлений вище аналіз стану реалізації проблеми в науковій та навчально-методичній літературі свідчить про актуальність навчальної дисципліни «Інтеграція навчання математики» для здобувачів вищої освіти другого магістерського рівня спеціальності А4 Середня освіта (Математика).

Предметом її вивчення є організація та запровадження інтегрованого навчання курсу «Математика» в базовій та старшій школі, яке передбачає об’єднання математичних знань та навичок з іншими навчальними дисциплінами та сферами життя.

Метою навчальної дисципліни «Інтеграція навчання математики» є ознайомлення здобувачів вищої освіти другого магістерського рівня з суттю та метою інтеграції навчання математики в базовій та в старшій школі, існуючими вітчизняними та зарубіжними методиками навчання інтегрованих курсів «Математика» в базовій та в старшій школі, існуючими засобами інтеграції навчання математики та створення нових засобів реалізації даної проблеми.

Вивчення навчальної дисципліни «Інтеграція навчання математики» у Національному університеті «Чернігівський колегіум» імені Т.Г. Шевченка відбувається на основі запропонованої нами програми:

Змістовий модуль 1. Навчання математики в контексті інтеграційних процесів.

Тема 1. Дидактична суть та мета інтеграції навчання. З історії становлення поняття «інтеграція». Дидактична суть інтеграції. Види інтеграції та способи реалізації в процесі навчання (повна інтеграція, тематична інтеграція, інтеграція видів навчальної діяльності учнів). Створення інтегрованих курсів. Доцільність запровадження інтегрованого навчання в закладах загальної середньої освіти.

Тема 2. Навчання математики з використанням міжпредметних зв’язків. Поняття про міжпредметні зв’язки. Види міжпредметних зв’язків. Можливі напрями здійснення міжпредметних зв’язків між математикою та іншими навчальними предметами. Прикладні задачі (означення та метод розв’язування) та їх місце та роль у навчанні шкільного курсу математики.

Тема 3. Засоби реалізації міжпредметних зв’язків. Інтегровані уроки. Позаурочні заходи (міжпредметні семінари, диспути, конференції, написання реферативних робіт). Мета інтегрованого уроку. Основні вимоги до організації інтегрованого уроку. Структура інтегрованого уроку. Етапи проведення інтегрованого уроку. Технологія проведення інтегрованого уроку. Особливості інтегрованих уроків, порівняльний аналіз уроків. Особливості позаурочних заходів (міжпредметних семінарів, диспутів, конференцій, написання реферативних робіт).

Тема 4. Способи інтеграції навчання математики в ЗЗСО. Використання реальних ситуацій (прикладних задач та ілюстративних прикладів) в навчанні математики. Поєднання навчання математики з навчанням природничих та економічних дисциплін. Використання мультимедійних ресурсів (інтерактивних дощок, онлайн-ігор та інших технологій), які допоможуть зробити уроки математики більш цікавими та інноваційними.

Тема 5. Організація і управління проектною діяльністю учнів. Означення проектної технології навчання. Суть понять «метод проектів», «проект», «навчальний проект». Особливості організації і управління проектною діяльністю учнів під час навчання математики в базовій та старшій школі.

Змістовий модуль 2. Методика реалізації інтегрованого навчання математики в школі. Вітчизняний та зарубіжний досвід.

Тема 6. Реалізація інтегрованого навчання математики в 5-6 класах НУШ. Аналіз підручників Джона Ендрю Біоса «Математика. 5 клас», «Математика. 6 клас» та інтегрованих модулів з окремих тем: «Історія походження натуральних чисел та написання цифр», «Застосування математичних знань у побуті», «Математика у творах мистецтва», «Математика в історії», «Математика та основи здорового способу життя» та ін. на предмет реалізації інтегрованого навчання математики в 5-6 класах.

Тема 7. Реалізація інтегрованого навчання математики в 7-8 класах НУШ. Аналіз інтегрованих курсів «Математика. 7 клас», «Математика. 8 клас» (авт. Школьний О., Нелін Є., Миляник А., Простакова Ю.), «Математика. 7 клас», «Математика. 8 клас» (авт. Істер О.) на предмет реалізації інтегрованого навчання математики в 7-9 класах. Ознайомлення з кейсами практичних завдань, запропонованими у підручниках.

Тема 8. Реалізація інтегрованого навчання математики в старшій школі. Вітчизняний та зарубіжний досвід. Інтегровані уроки математики. Досвід підготовки до них та методика проведення у вітчизняній школі (Уроки на теми: Застосування показникової функції (11 кл.), Застосування визначеного інтегралу (11 кл.), Штучні супутники Землі (урок математики, географії, фізики та астрономії) (11 кл.) та ін.). Аналіз інтегрованих курсів «Математика» X-XII класів естонської школи на предмет реалізації інтегрованого навчання математики та інтегрованих курсів інших країн.

Тема 9. Реалізація інтегрованого навчання математики під час проведення позаурочної роботи в 7-8 класах. Вчимося застосовувати математику. Теорія ймовірностей, статистика, дискретна математика для учнів 7-8 класів. Інформація і таблиці. Стовпчасті та кругові діаграми. Графіки. Початкові відомості про статистику. Середнє арифметичне. Мода і медіана. Експеримент і випадкові події. Відносна частота та ймовірність випадкової події. Графи. Шляхи на графах. Множина та її елементи. Операції над множинами. Вимірювання розкиду даних. Діаграма розсіювання. Дерева. Класичне означення ймовірності. Операції над випадковими подіями. Умовна ймовірність. Залежні й незалежні події.

Тема 10. Реалізація інтегрованого навчання математики під час проведення позаурочної роботи в 9-11 класах. Вчимося застосовувати математику. Фінансова математика, теорія ймовірностей, статистика для учнів 9-11 класів. Елементи фінансової математики. Депозити. Інфляція. Кредити. Статистичне дослідження. Подвійний сліпий дослід. Коефіцієнт кореляції. Основні правила комбінаторики. Перестановки, розміщення, комбінації. Розв'язування задач з теорії ймовірностей із застосуванням комбінаторики. Умовна ймовірність і формула Байєса. Геометрична ймовірність. Схема Бернуллі. Серія випробувань Бернуллі до першого успіху. Випадкова величина. Математичне сподівання випадкової величини. Дисперсія випадкової величини. Закон великих чисел.

У результаті вивчення дисципліни здобувачі вищої освіти другого магістерського рівня повинні:

знати: дидактичну суть інтеграції; види інтеграції (повна, тематична, інтеграція видів навчальної діяльності) та способи реалізації в процесі навчання математики; засоби інтеграції, які використовуються під час навчання курсів «Математика» в базовій та старшій школі; суть поняття «міжпредметні зв'язки», види (типи) міжпредметних зв'язків та способи їх реалізації в процесі навчання математики; суть поняття «інтегрований урок» його мету, основні вимоги до організації інтегрованого уроку, структуру інтегрованого уроку, етапи проведення інтегрованого уроку, технологію проведення та особливості інтегрованого уроку.

вміти: організовувати та проводити інтегровані уроки математики, інтегровані позаурочні заняття, уроки з міжпредметними зв'язками в базовій та старшій школі; підвищувати зацікавленість та мотивацію навчання на уроках математики; сприяти розвитку критичного мислення учнів та формуванню навичок вирішення проблем; створювати творчу атмосферу в класі, використовуючи реальні ситуації (прикладні задачі та ілюстративні приклади); використовувати мультимедійні ресурси; створювати проекти.

Рекомендованими методами навчання є:словесні, наочні, практичні, пояснювально-ілюстративний, репродуктивний, частково-пошуковий, дослідницький, проблемний виклад, інтерактивні методи навчання (відповідь на запитання і опитування думок студентів, дискусії, мозковий штурм, відпрацювання навичок), активні методи навчання (моделювання професійної діяльності, навчання інших), інноваційні методи (компетентнісний, заняття на основі ІКТ), практичні методи навчання (практичні роботи, вправи, творчі роботи), методи дистанційного навчання (відео конференції), самостійна робота, робота з джерелами інформації (література, Інтернет) контроль та самоконтроль та інші.

Рекомендованими формами навчання є: лекція, практичне заняття, лекційно-практичне заняття, консультація, фронтальне опитування, тестування.

На опрацювання змістового модуля 1 «Навчання математики в контексті інтеграційних процесів» відводиться 3 лекційні, 3 практичні заняття та самостійна робота. Здобувачі вищої освіти знайомляться з

теоретичними основами курсу, запропонованим конспектом інтегрованого уроку «Застосування показникової функції» (11 кл.), розв'язують прикладні задачі, представлені в ньому [6], [7], доповнюють конспект задачами пов'язаними з застосуванням показникової функції в демографії, медицині, інформатиці. Розглядаючи способи інтеграції навчання математики в ЗЗСО магістри вчаться використанню реальних ситуацій (прикладних задач та ілюстративних прикладів) в навчанні теми «Похідна та її застосування» курсу алгебри і початків аналізу старшої школи [6], [7], поєднанню навчання математики з навчанням економічних дисциплін, використанню мультимедійних ресурсів які допоможуть зробити уроки математики більш цікавими та інноваційними.Ознайомлюються з запропонованою тематикоюпроектів з математикидля учнів 10-11 класів старшої школи та прикладом навчального проекту «І ВСЕ ЦЕ ТРИГОНОМЕТРІЯ» (10 кл). та виконують поставлені в ньому завдання.

На опрацювання змістового модуля 2 «Методика реалізації інтегрованого навчання математики в школі. Вітчизняний та зарубіжний досвід» відводяться 1 лекційне, 1 практичне та 4 лекційно-практичні заняття і самостійна робота. Під час його вивчення магістранти опрацьовують відповідні теми з вказаних в програмі підручників та посібників, виконують завдання, які мають безпосереднє відношення до тематики навчальної дисципліни.

1. *Акуленко І. А.* Методична лабораторія майбутнього вчителя математики профільної школи: навчально-методичний посібник до проведення лабораторних занять з курсу «Методика навчання математики в профільній школі» / за заг. ред. Н. А. Тарасенкової. Черкаси: видавець Чабаненко Ю., 2013. 132 с.
2. *Анікушин А. В., Номіровський Д. А., Якір М. С.* Вчимося застосовувати математику. Фінансова математика, теорія ймовірностей, статистика для учнів 9–11 класів: підручник. Харків: Гімназія, 2025. 304 с.
3. *Бенджамін А.* Магія математики. Як знайти image і навіщо це потрібно / пер. з англ. М. Гоцацюка. Київ: КМ-БУКС, 2018. 352 с.
4. *Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Якір М. С.* Вчимося застосовувати математику. Теорія ймовірностей, статистика, дискретна математика для учнів 7–8 класів: підручник. Харків: Гімназія, 2024. 304 с.
5. *Бахчетжиоглу О. О., де Конінг О. А.* Модельна навчальна програма інтегрованого курсу «Математика. 10–12 класи. Профільна середня освіта. Основний рівень» для закладів загальної середньої освіти. Рекомендовано Міністерством освіти і науки України (наказ від 27.08.2026 № 1498). 2026. 67 с.
6. *Соколенко Л. О.* Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу: навчальний посібник. Чернігів: Сіверянська думка, 2002. 128 с.
7. *Соколенко Л. О., Філон Л. Г., Швець В. О.* Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум, навчальний посібник. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2010. 128 с.
8. *Строгац С.* Екскурсія математикою. Як через готелі, риб, камінці і пасажирів зрозуміти цю науку / пер. з англ. А. Дудченко. Київ: Наш формат, 2019. 256 с.
9. *Черненко Н. А.* Математика + Інтегровані уроки. Київ: Редакція газет природничо-математичного циклу, 2012. 120 с.
10. *Чернецька Т. І.* Сучасний урок: теорія і практика моделювання: навчальний посібник. Київ: ТОВ «Праймдрук», 2011. 352 с.

THE ROLE OF THE COURCE «INTEGRATION OF MATHEMATICS TEACHING» IN THE TRAINING OF HIGHER EDUCATIONSTUDENTS MAJORING IN SECONDARY EDUCATION (MATHEMATICS)

The article analyzes the state of solving the problem of integration of mathematics teaching in basic and profile secondary schools, as reflected in scientific and educational and methodological literature.On the bases of which the curriculums of the academic discipline «Integration of Mathematics Teaching» intended for training for higher education students master. The teaching methods and forms used during the course are outlined.

УДК 37.018.43:004.9:51

ІНТЕГРАЦІЯ ГРАФІЧНИХ ПЛАНШЕТІВ ТА ІНТЕРАКТИВНИХ ПЛАТФОРМ (CLEVERMATH) У ПРОЦЕС ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ ПІД ЧАС ДИСТАНЦІЙНОГО НАВЧАННЯ

Анастасія СОКОЛЮК
Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне Україна
ansokoliuk@gmail.com
Наталія ГЕНСІЦЬКА-АНТОНЮК
Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне Україна
nataliia.hensitska-antoniuk@rshu.edu.ua

Цифровізація освіти зумовлює необхідність пошуку нових методів та засобів організації навчального процесу, особливо в умовах змішаного та дистанційного навчання [1, с. 464]. Математика як навчальний предмет має особливу специфіку, оскільки її засвоєння передбачає не лише сприймання готової інформації, а й виконання ряду важливих математичних дій: обчислення, перетворення, побудов, дослідження залежностей, формулювання припущень та обґрунтування отриманих результатів.

Під час традиційного уроку, значну роль у цьому процесі відіграє дошка. Учитель може демонструвати послідовність розв’язання задачі, виділяти формули, робити необхідні записи та реагувати на труднощі, які виникають в учнів під час виконання вправ. Учні, у свою чергу, можуть виконувати записи у зошиті та демонструвати результати своєї роботи. У дистанційному форматі значна частина цієї взаємодії втрачається або потребує спеціальних цифрових засобів.

Одним із таких засобів є графічний планшет, який дає змогу вчителю здійснювати рукописні математичні записи безпосередньо на екрані та демонструвати їх учням у режимі реального часу. Не менш важливим є використання інтерактивних освітніх платформ таких як CleverMath, які можуть забезпечувати можливість виведення на екран математичних записів, створення рисунків до задач і ведення обрахунків [2, с.84]. Поєднання цих інструментів створює сприятливі умови для формування більш діяльнісного характеру дистанційного навчання математики.

Одним із ключових завдань сучасної освіти є формування в учнів різних компетентностей. Зокрема в математиці є формування здатності застосовувати математичні знання, вміння та навички для розв’язання практичних і навчальних завдань. Математична компетентність передбачає здатність використовувати математичний апарат у різних ситуаціях, аналізувати інформацію, встановлювати закономірності, обґрунтувати власні міркування та оцінювати результати.

В умовах дистанційного навчання формування такої компетентності потребує особливої уваги до організації активної діяльності учнів. Одностороння передача навчальної інформації через відеоконференції або електронні матеріали не завжди забезпечує достатній рівень залучення школярів до навчального процесу. Тому цифрові технології доцільно використовувати не лише як засоби демонстрації матеріалу, а передусім як інструменти організації діяльності [2, с.82].

Графічний планшет у цьому контексті виконує функцію цифрової дошки. Учитель може записувати формули, виконувати алгебраїчні перетворення, будувати схеми, графіки та геометричні рисунки. Важливою перевагою є можливість демонструвати не тільки кінцевий результат, а весь процес розв’язування. Це особливо актуально під час пояснення нової теми або розбору типових помилок.

Наприклад, під час розв’язування квадратного рівняння учитель може послідовно записувати кожен етап визначення коефіцієнтів, обчислення дискримінанта, застосування формули для знаходження коренів та перевірку отриманих значень (рис. 1). Учні бачать логіку виконання математичних дій, а не лише готову відповідь. Аналогічно під час вивчення функцій можна поступово будувати координатну систему, позначити точки, проводити графік і коментувати характер зміни функції (рис. 2).

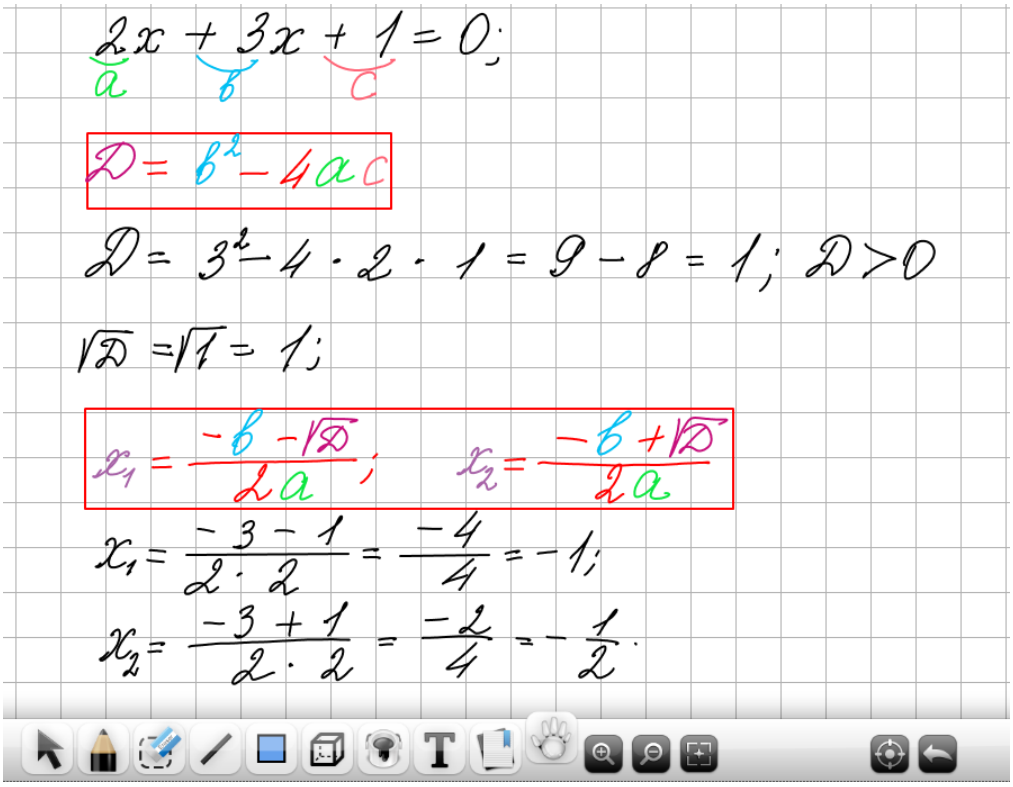


Рис. 6. Розв'язання квадратного рівняння

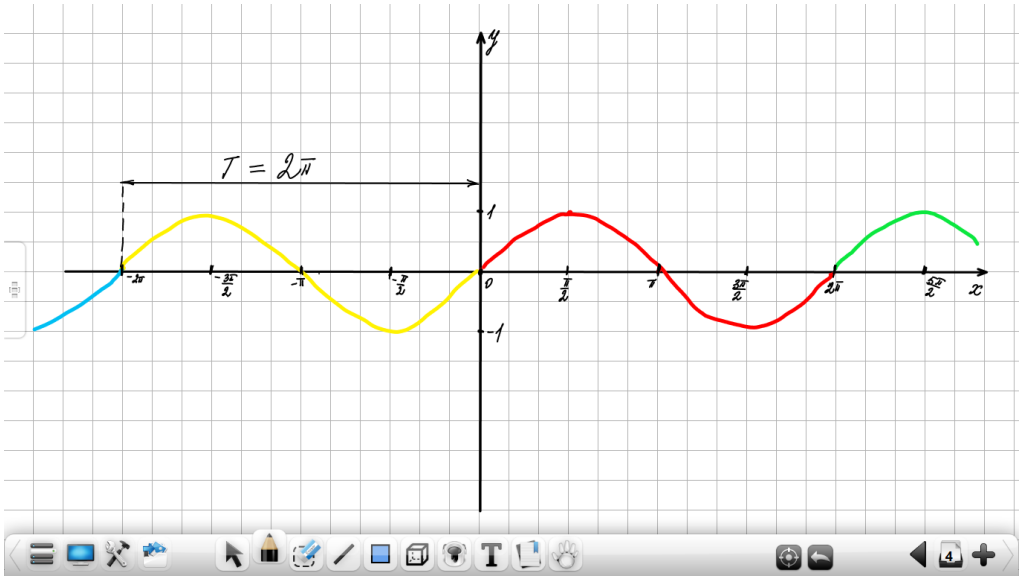


Рис.7. Графік функції $y = sinx$

Таким чином, графічний планшет сприяє візуалізації математичного мислення та дає змогу частково відтворити в дистанційному форматі ті способи взаємодії, які є природними для традиційного уроку.

Зокрема інтерактивні освітні платформи можуть доповнювати пояснення вчителя практичною діяльністю учнів. Використання CleverMath доцільно розглядати як один із компонентів цифрового освітнього середовища, у якому учень має можливість безпосередньо взаємодіяти з математичним матеріалом.

Важливою перевагою інтерактивного формату є можливість організувати різні види навчальних завдань: обчислювальні вправи, роботу з графіками та геометричними фігурами. Залежно від теми уроку цифрові вправи можуть використовуватись на різних етапах навчальної діяльності. Саме тому поєднання інтерактивної платформи з графічним планшетом є методично доцільним: платформа може забезпечувати виконання

інтерактивних вправ, тоді як планшет – демонстрацію математичних міркувань, побудову, способи розв'язування.

Насамперед ефективність використання цифрових засобів значною мірою залежить не від кількості технологій, а від логіки їх педагогічного застосування. Графічний планшет і CleverMath доцільно використовувати не ізольовано, а як взаємопов'язані інструменти.

Наприклад, під час уроку з теми «Лінійна функція» учитель за допомогою графічного планшету може пояснити поняття коефіцієнтів функції, показати алгоритм побудови її графіка та продемонструвати вплив зміни параметрів на положення прямої (рис. 3).

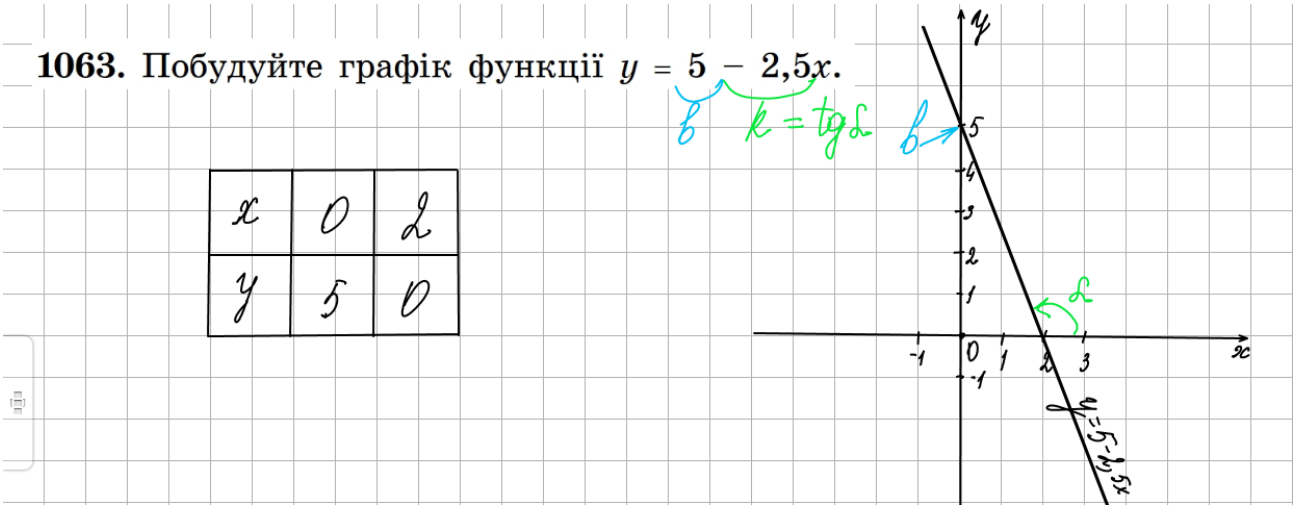


Рис. 8. Завдання до теми «Лінійна функція»

Інший приклад – вивчення геометрії. Учитель за допомогою графічного планшету може виконати побудову геометричної фігури, позначити відомі величини, нанести допоміжні елементи та пояснити логіку доведення (рис. 4-5).

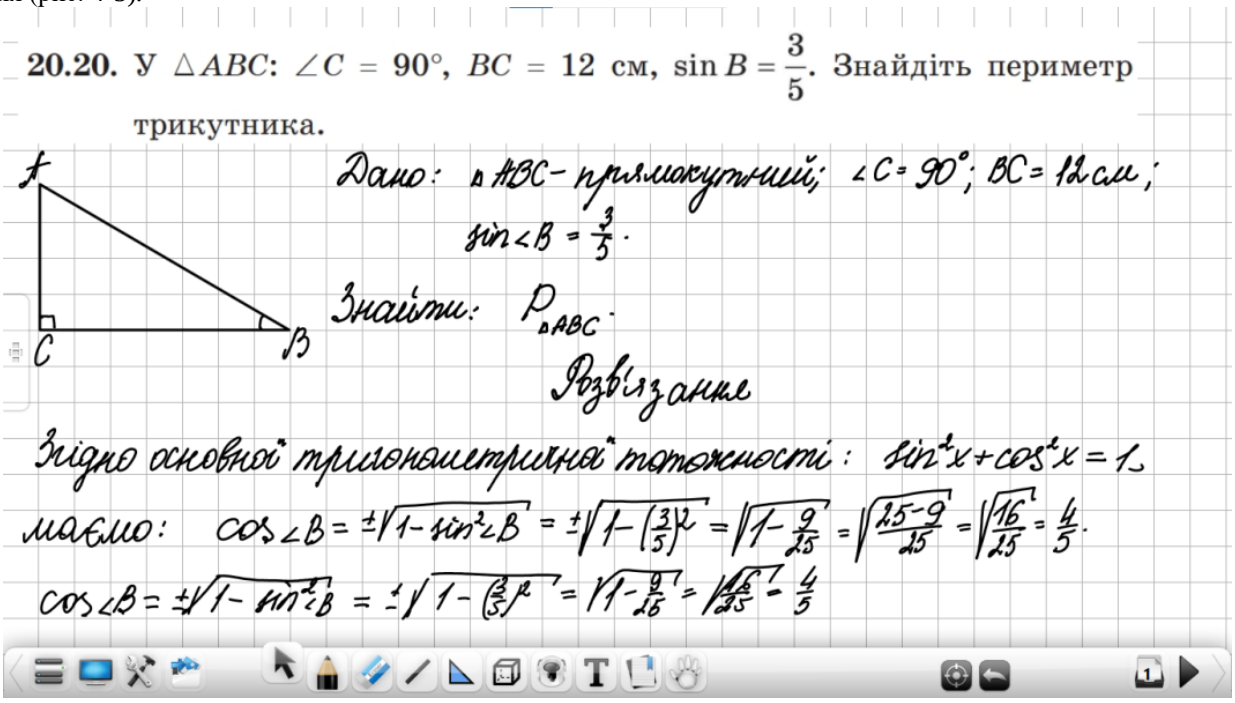


Рис.9. Приклад розв'язання задачі з геометрії

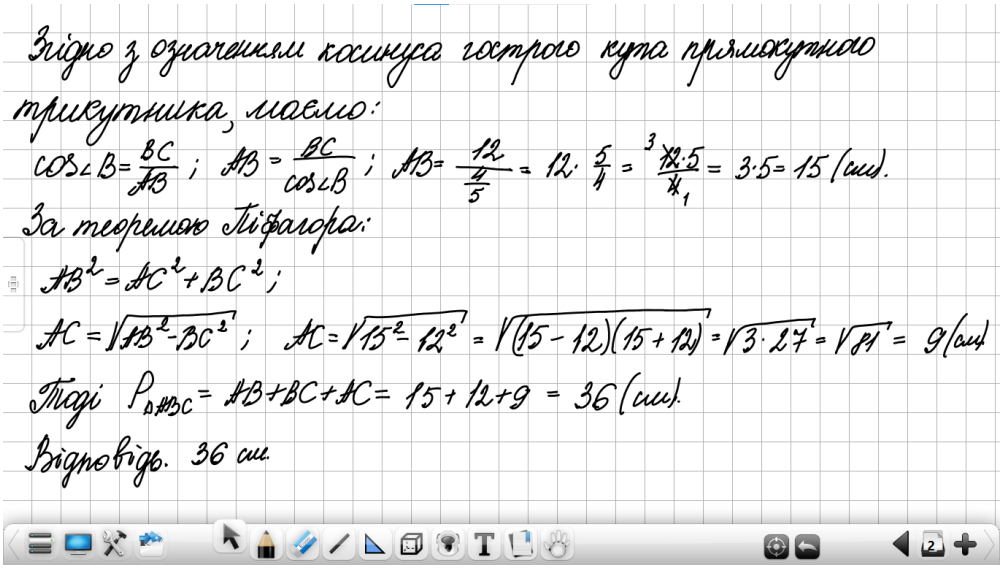


Рис.10. Продовження розв'язання задачі з геометрії

Під час вивчення алгебри планшет може бути використаний для демонстрації перетворень виразів, розв’язання рівнянь та нерівностей. CleverMath при цьому може застосовуватися для індивідуального тренування та перевірки засвоєння відповідних алгоритмів.

Інтегроване використання графічного планшету та CleverMath має низку педагогічних переваг. Насамперед це підвищення наочності навчання. Математичні об’єкти та операції стають більш доступними для сприймання, оскільки учні бачать процес їх побудови та перетворення. Другою перевагою є забезпечення активної взаємодії. Учень отримує можливість не лише слухати пояснення, а виконувати завдання, перевіряти себе та отримувати зворотній зв’язок. Важливою умовою ефективності є чітке визначення мети використання кожного цифрового інструмента.

Загалом інтеграція графічних планшетів та інтерактивної платформи CleverMath є перспективним напрямом удосконалення дистанційного навчання математики. Поєднання рукописного цифрового введення, візуалізація математичних міркувань та оперативного зворотнього зв’язку створює умови для більш активної участі учнів у навчальному процесі. Графічний планшет дає змогу наблизити дистанційне пояснення математики до традиційної роботи біля дошки: учитель може послідовно виконувати математичні записи, будувати графіки та схеми, демонструвати алгоритми та аналізувати помилки. CleverMath, у свою чергу, може використовуватися для організації практичної діяльності учнів, закріплення матеріалу та забезпечення інтерактивної взаємодії.

1. *БіденкоВ. Ю.* Роль інтерактивних технологій у формуванні математичної компетентності. //XIII Всеукраїнська науково-практична конференція «Наукові ініціативи сьогодення України: правові, економічні, соціальні та поведінкові аспекти». 2025. С. 464-472.
2. *Демидчик А. М.* Учитель математики як наставник і новатор у новій українській школі: від теорії до практики // Плекаємо особистість : наук.-метод. альманах. Вип. 9. Полтава, Лубни: Держ. закл. «Луган. нац. ун-т імені Тараса Шевченка», 2025. С. 81–86.

THE INTEGRATION OF GRAPHIC TABLETS AND INTERACTIVE PLATFORMS (CLEVERMATH) INTO THE PROCESS OF DEVELOPING MATHEMATICAL COMPETENCE DURING DISTANCE LEARNING

This paper examines the possibilities for integrating graphics tablets and the CleverMath interactive platform into the teaching of mathematics in a distance learning context. It justifies the use of digital tools to facilitate active interaction between pupils and the teacher, visualise mathematical objects and processes, provide immediate feedback, and develop mathematical competence. The methodological potential of the graphics tablet and the CleverMath platform is outlined, the advantages of their combined use are identified, and examples are given of how to organise pupils’ learning activities in mathematics lessons.

УДК 373.5.091.322.7:51

ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧНІ ЗАСАДИ УЗАГАЛЬНЕННЯ Й СИСТЕМАТИЗАЦІЇ МАТЕМАТИЧНИХ ЗНАНЬ І ДОСВІДУ УЧНІВСТВА НА ЗАКЛЮЧНОМУ ЕТАПІ БАЗОВОЇ СЕРЕДНЬОЇ ОСВІТИ

НінаТАРАСЕНКОВА
Черкаський національний університет ім. Богдана Хмельницького, м. Черкаси, Україна
email: ntaras7@ukr.net
Ірина АКУЛЕНКО
Черкаський національний університет ім. Богдана Хмельницького, м. Черкаси, Україна
email: akulenkoira@ukr.net

Сучасна модернізація базової середньої освіти, детермінована впровадженням концептуальних засад Нової української школи, ініціює нагальну потребу в ґрунтовній ревізії фундаментальних дидактичних категорій, серед яких особливе місце посідають процеси узагальнення та систематизації суб'єктного досвіду й знань учнівства через призму компетентнісної орієнтації. Поширені міркування щодо нібито нівелювання значущості класичних розумових процедур в умовах пріоритизації діяльнісного компонента навчання є фундаментально безпідставними, оскільки розвинена математична компетентність базується на здатності ідентифікувати інваріантні структурні відношення у проблемних ситуаціях, що є імпліцитно неможливим без оперування згорнутими абстрактними схемами. Математична компетентність у єдності її ключового та предметного вимірів ґрунтується на здатності суб'єкта розпізнавати глибинну математичну структуру проблемної ситуації, що принципово неможливо без сформованого абстрактного мислення, оперування згорнутими мисленнєвими схемами, що формуються в процесі узагальнення, та системного бачення внутрішньо- і міжпредметних зв'язків.

Понад те, безпрецедентне масштабування технологій генеративного штучного інтелекту критично посилює вагомість системного бачення навчального матеріалу, адже винятково за умови сформованості вищих рівнів узагальнення особистість здатна проєктувати релевантні аналітичні запити та здійснювати критичну валідацію згенерованих результатів, не перетворюючись на пасивного споживача інформаційного контенту. Зважаючи на те, що 9-й клас виступає завершальним етапом базової школи, виникає необхідність інтеграції розрізнених змістових ліній алгебраїчної та геометричної пропедевтики в синергетично цілісну систему для запобігання фрагментації знань та підготовки до профільного навчання і повсякденної практичної життєдіяльності. За відсутності системного узагальнення випускник базової школи ризикує залишитися з хаотичним набором ізольованих «острівців знань», що підриває базові цілі концепції НУШ.

Мета статті– здійснити теоретико-методологічне обґрунтування та розробити комплексний методичний підхід для організації процесів узагальнення математичного досвіду та знань здобувачів освіти на завершальному етапі базової школи.

На перетині когнітивної психології, нейронаук [1, 2, 3] та предметної дидактики концептуалізовано фундаментальні засади формування узагальнювальних процедур. Доведено, що повноцінне засвоєння узагальненого способу дії вимагає одночасної когнітивної взаємодії інваріантних структур та специфічних рис об'єктів засвоєння, що уможливлює перенесення знань на нові ситуації винятково через формування загальної моделі орієнтовної основи діяльності. Встановлено, що розвиток здатності до теоретичного узагальнення детермінується не пасивним сприйняттям готових вербальних пояснень, а активною когнітивною реструктуризацією, під час якої учені самостійно виявляють приховані зв'язки між різнопланових контекстами.Обґрунтовано, що узагальнення й систематизація як прийоми розумової діяльності виступають передумовою навчання навчатися, оскільки, якщо учні/учениці систематично узагальнюють структуру різних задач, структуру способів дій із їхнього розв'язування, то вони швидше опановують ті способи діяльності й мислення, що формують їхню здатність до подальшого навчання та ефективної життєдіяльності.

Відтак, якщо вчитель на уроці лише розглядає загальне правило побудови графіка функції $y = f(x \pm a) \pm b$ без конкретних прикладів (задіяна лише медіальна префронтальна кора головного мозку), або розглядає лише способи розв'язування окремих прикладів без виведення загального правила (задіяно гіпокампальні структури), то узагальнення поняття або способу дії не відбувається, позаяк потрібна взаємодія обох рівнів.Якщоучень/учениця запам'ятали побудову графіка методом геометричних перетворень як конкретну послідовність дій з конкретними числами – вони не зможуть перенести цей метод на новий тип функції. Потрібне формування загальної схеми.Такий тип завдань – порівняй різні графіки функцій і знайди спільну структуру – є нейробіологічно обґрунтованим інструментом розвитку здатності до узагальнення. У такому випадку відбувається*когнітивна реструктуризація*наявних знань учнівства в нові мисленнєві структури. Вербальне пояснення прихованої неявної структури може формувати нейронну основу для узагальнення, але не завжди.

Ключовим є те, чи учень активно скористався цим поясненням для перебудови власної репрезентації, чи виконав після пояснення відповідні завдання, що вимагають виведення нової структури в нових умовах. Додатково у процесі узагальнення необхідно враховувати й те наскільки різні поняття є незалежними вимірами, а не змішаними в уявленнях учнів про них.

На прикладі змістової лінії «Функції та їхні графіки» (тема «Перетворення графіків функцій» в 9-му класі) спроєктовано багаторівневий варіативний методичний концепт, згідно з яким емпіричний рівень реалізується через двобічні стратегії індуктивного та дедуктивного переходів між візуально-графічними образами та алгебраїчними інтерпретаціями, тоді як теоретичний рівень розкривається через усвідомлення інваріантного характеру впливу арифметичних операцій, що здійснюються з аргументом або із значенням функції, на побудову графіка функції. Обґрунтовано дидактичну доцільність переходу від сприйняття коефіцієнтів (наприклад, k та b у формулі лінійної функції $y = kx + b$ або a, b, c у формулі квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$), як ізольованих констант, що визначають специфічні властивості суто конкретної лінії до їхнього трактування як узагальнених зовнішніх і внутрішніх просторових модифікаторів графіків функцій. Зовнішні модифікатори (діють на всю функцію: $f(x) + b$ або $kf(x)$), змінюють простір за вертикаллю. Внутрішні модифікатори (діють безпосередньо на аргумент: $f(x – a)$ або $f(kx)$), змінюють простір за горизонталлю. Ще одним напрямом узагальнення є поняття «критичного (опорного) вузла геометричної структури», детальне ознайомлення з яким ефективно здійснюється засобами проєктної діяльностіу ході виконання учнівством проєкту «Перетворення графіків і критичні опорні вузли геометричної структури» із дотриманням загальних дидактичних вимог до організації проєктної діяльності учнівства, які обґрунтовані в роботі [4].

Отже, узагальнення й систематизація в парадигмі сучасного компетентнісно орієнтованого навчання математики функціонують не як фінальний рутинний етап вивчення програмового матеріалу, а як стрижневий механізм конструювання теоретичного мислення та розвитку метакогнітивних здібностей учнівства. Цілеспрямована організація цих когнітивних процесів у 9 класі із застосуванням науково обґрунтованих стратегій гарантує подолання фрагментарності знань, забезпечуючи міцне підґрунтя для формування системної математичної картини світу, спроможності до безперервного навчання та успішної адаптації здобувачів освіти до високотехнологічного середовища

1. *Wu C. M., Meder B., & Schulz E.* Unifying Principles of Generalization: Past, Present, and Future // Annual Review of Psychology, 2025.76, С.275–302.https://doi.org/10.1146/annurev-psych-021524-110810
2. *Yu K., Vanpaemel W., Tuerlinckx F., Zaman J.* The probabilistic and dynamic nature of perception in human generalization behavior // iScience. 2025. № 28(4):112228. https://doi.org/10.1016/j.isci.2025.112228
3. *Luettgau L., Chen N., Erdmann T., Veselic S., Kurth-Nelson, Z., Moran, R., Dolan, R. J.* A neural mechanism for compositional generalization of structure in humans.eLife.2025.14:RP107162.https://doi.org/10.7554/eLife.107162.1
4. *Тарасенкова, Н. А., Акуленко, І. А., Сердюк, З. О.* Навчання математики в базовій школі із застосуванням проєктів: дидактичні основи організації та впровадження. Вісник Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького Серія «Педагогічні науки». 2025. № 4. С. 183-191.https://doi.org/10.31651/2524-2660-2025-4-183-191.

THEORETICAL AND METHODOLOGICAL FOUNDATIONS OF GENERALIZING AND SYSTEMATIZING STUDENTS' MATHEMATICAL KNOWLEDGE AND EXPERIENCE AT THE FINAL STAGE OF BASIC SECONDARY EDUCATION

This study aims to provide a theoretical substantiation and design a comprehensive methodological approach to organizing the generalization and systematization of mathematical knowledge and experience among 9th-grade students at the final stage of basic secondary education. The study employs an interdisciplinary synthesis of mathematics didactics, cognitive psychology, and neuroscience, using theoretical modeling and structural-functional design. A two-tier (empirical and theoretical) generalization framework was elaborated through the topic of function graph transformations. The model conceptualizes parameters as spatial modifiers and introduces the integrative category of «critical nodes of a geometric structure,» fostering systemic thinking and preventing knowledge fragmentation in modern digital environments.

УДК 37.09:004

АЛГОРИТМІЧНЕ МИСЛЕННЯ ЯК КАТАЛІЗАТОР СТАЛОГО РОЗВИТКУ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ В СЕРЕДНІЙ ШКОЛІ

Маріан БИРКА
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна
m.byrka@chnu.edu.ua
Олеся ЧЕПИШКО
Кам'янський ліцей Кам'янської територіальної громади Чернівецького району Чернівецької області, м.Чернівці, Україна
chepyshkoolesia@gmail.com

Концепція сталого розвитку математичної освіти в середній школі передбачає створення такої дидактичної системи навчання інформатики, яка забезпечує довговічність, гнучкість та придатність набутих здобувачами середньої освіти знань для практичного застосування у майбутньому.

Основними принципами сталого розвитку сучасної шкільної математичної освітивважаємо: 1) перехід до компетентнісної парадигми (від запам'ятовування правил до формування математичної компетентності); 2) забезпеченняпрактичності та контекстуалізація навчання (вивченняматематичних понять через реальні життєві ситуації); 3) забезпечення міжпредметної інтеграції та STEM-підходу (математика як ключовий інструмент вивчення інших дисциплін); 4) врахування індивідуальних освітніх потреб і можливостей здобувачів освіти (рівнева та профільна диференціація навчання); 5) реалізація навчання через дію (від пасивного слухання й запам'ятовування до самостійного вивчення і дослідження навчальної інформації); 6) наступність і неперервність розвитку компетентностей(від простих логічних ігор до комплексного аналізу даних) [3].

Провідним інструментом забезпечення сталого розвитку в межах шкільного курсу математики вважаємоалгоритмічне мислення, адже воно виступає інтегруючою ланкою між теоретичною математикою, яка є природним середовищем для зародження логіки та формалізації послідовності дій та практичним інструментарієм інформатики, в якій ці дії трансформуються в алгоритми.

Мета дослідження – обґрунтувати роль алгоритмічного мислення як каталізатора сталого розвитку математичної освіти в середній школі.

Загалом, алгоритмічне мислення це специфічний тип розумової діяльності, що дозволяє розв'язувати комплексні задачі шляхом побудови чіткої, логічної та кінцевої послідовності дій.

Для забезпечення сталого розвитку математичної освіти в середній школі пропонуємо вчителям математики ЗЗСО постійно і свідомо використовувати універсальну послідовність з розробки алгоритму, яка реалізується у такі п'ять кроків: «1) чітке формулювання очікуваних результатів, які будуть отримані після вирішення проблеми; 2) визначення всіх властивостей завдання (проблеми) та деталізація обмежень і ресурсів (час, матеріально-технічне забезпечення, фінанси тощо); 3) виділення та впорядкування основних дій, які необхідні для вирішення поставленого завдання (проблеми); 4) реалізація визначеної послідовності дій з урахуванням властивостей та обмежень проблеми; 5) співставлення отриманих результатів з бажаними та у разі потреби, корегування сукупності або послідовності визначених дій» [1, с. 100].

Пропонована універсальна послідовність базується на моделі алгоритмічного мислення, яка розкриває цей феномен як інтегрований комплекспростіших видів мислення: *абстрактного, логічного, образного, концептуального*та *конструктивного* [2, с. 7].Так, «*абстрактне* та *концептуальне мислення* необхідні для виконання першого та другого кроків запропонованої універсальної послідовності розробки алгоритму; для виконання третього кроку необхідно застосувати *логічне, конструктивне* та *образне мислення*; для виконання четвертого і п'ятого кроків необхідне *концептуальне, логічне, конструктивне* та *образне мислення* [2, с. 7].

Таким чином, у математичному контексті,алгоритмічне мисленняможна розглядатияк здатність особистості трансформувати абстрактну математичну проблему у чітку, зрозумілу та логічно обґрунтовану послідовність кроків (алгоритм), яка гарантовано веде до розв'язання цієї проблеми або цілого класу подібних задач.При цьому, сталий розвиток математичної освіти передбачає, що учні мають не просто виконувати готові алгоритмирозв'язання певної математичної проблеми, а шукати йпроєктувати власніальтернативні, нестандартні алгоритмишляхів розв'язання, оптимізуючи їх ефективність за цільовими параметрами (простотою реалізації,логікою розв'язання, кількістю кроків, відтворюваністю тощо).

Висновки.Отже, формування і розвиток алгоритмічного мислення в середній школі дозволяє учневі вийти за межі пасивного копіювання дій учителя, оскільки фокус навчання зміщується зі знаходження відповіді

до конкретної вправи на створення загального методу, моделі чи алгоритму, спроможного опрацювати будь-які валідне вхідні дані, що є фундаментальною умовою і каталізатором забезпечення сталого розвитку математичної освіти. При цьому, алгоритмічне мислення зміщує фокус математичної освіти із пасивного накопичення статичних знань на формування динамічного операційного інструментарію та паттернів мислення, які не застаріють із появою нових технологій, а навпаки стануть належною базою для їх освоєння. Відтак, дозволить підготувати учнів середньої до викликів високотехнологічного майбутнього, зберігаючи при цьому фундаментальну глибину математичної науки.

1. *Бирка М.Ф.* Алгоритмічне мислення як інструмент ефективної професійної діяльності сучасного вчителя у світі VUCA // Педагогіка формування творчої особистості у вищій і загальноосвітній школах. 2019. Вип. 66. Т. 1. С. 97-102. DOI:https://doi.org/10.32840/1992-5786.2019.66-1.20.
2. *Byrka M.F., Sushchenko A.V., Svatiev A.V., Mazin V.M., Veritov O.I.* A NewDimensionofLearninginHigherEducation: AlgorithmicThinking // Propósitos y Representaciones. 2021. Issue 9(SPE2), e990. DOI: http://dx.doi.org/10.20511/pyr2021.v9nSPE2.990.
3. *Chaikovska H., Yankovych O., Levchyk I., Kuzma I., Rozhko-Pavlyshyn T.* Formation of sustainable development competenci esinprimary school children // Journal of Education Cultureand Society. 2021. № 2. Pp. 341–360. DOI:https://doi.org/10.15503.jecs2021.2.341.360.

ALGORITHMIC THINKING FOR SUSTAINABILITY OF THE MATHEMATICAL EDUCATION IN SECONDARY SCHOOL

We consider algorithmic thinking to be the leading tool for ensuring sustainable development within the school mathematics course, as it acts as an integrating link between theoretical mathematics, which is a natural environment for the emergence of logic and formalization of a sequence of actions, and the practical tools of computer science, in which these actions are transformed into algorithms.

In general, algorithmic thinking is a specific type of mental activity that allows solving complex problems by building a clear, logical and finite sequence of actions.

To ensure the sustainable development of mathematics education in secondary school, we suggest that mathematics teachers of the secondary school constantly and consciously use the universal sequence for developing an algorithm, which is implemented in five steps and requires the student to comprehensively apply simpler types of thinking: abstract, logical, figurative, conceptual and constructive.

Thus, in a mathematical context, algorithmic thinking can be considered as the ability of an individual to transform an abstract mathematical problem into a clear, understandable and logically justified sequence of steps (algorithm), which is guaranteed to lead to the solution of this problem or a whole class of similar problems. At the same time, the sustainable development of mathematical education assumes that students should not simply perform ready-made algorithms for solving a certain mathematical problem, but should search for and design their own alternative, non-standard algorithms for solving solutions, optimizing their effectiveness according to target parameters (ease of implementation, solution logic, number of steps, reproducibility, etc.).

УДК 373.5.091.33:51

ВИКОРИСТАННЯ НАВЧАЛЬНИХ КВЕСТІВ ДЛЯ ПІДВИЩЕННЯ МОТИВАЦІЇ УЧНІВ 5-6 КЛАСІВ ДО ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИКИ

Лариса ХОХЛОВА
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка,
м. Тернопіль, Україна
larysa_khokhlova@tnpu.edu.ua
Тетяна КОМАРЕЦЬКА
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка,
м. Тернопіль, Україна
komaretska_tm@fizmat.tnpu.edu.ua

Постановка проблеми. Перехід учнів із початкової школи НУШ до середньої школи (5-6 класи) має супровід у вигляді збільшення матеріалу із різних навчальних предметів, у тому числі й з математики. Вони бачать, що замість простих задач й прикладів, у них з’являються абстрактні дії, які їм невідомі, а вони, у свою чергу, викликають зниження пізнавального інтересу, появу психологічного бар’єру перед складними

математичними діями та логічними задачами. Традиційні методи навчання, які є репродуктивними, не завжди можуть забезпечити належну залученість здобувачів освіти до тем, які пропонує математика середньої ланки НУШ. Тому, частіше говорять за впровадження навчальних квестів, які поєднують елементи ігор, проблемного навчання та когнітивного пошуку, перетворюючи засвоєння матеріалу (поняття, задачі, приклади) на захопливий та цікавий, для учнів, процес.

Виклад основного матеріалу. В сучасній педагогіці, під навчальним квестом треба розуміти цілеспрямовану систему дидактичних ігрових завдань, які об'єднані єдиним сюжетом або пошуковою метою. Однак цю думку різні дослідники тлумачать по різному, бо у всіх є різні думки щодо того, як повинен виглядати квести у середній ланці освіти. На думку В. Гришко та А. Цевух, навчальний квест – «сучасна інтегративна форма організації освітнього процесу, де поєднуються дослідницька діяльність, ігрові елементи та розв'язання проблемних завдань» [**Error! Reference source not found.**]. Дана точка зору практично схожа на нашу, єдине, що її відрізняє – розв'язання проблемних завдань. Автори визначають, що для побудови навчального квесту потрібно мати ідею, а потім з цієї ідеї формувати завдання та дії для учнів.

Тоді, як навчальні статті, як от сайт Нової Української школи зазначив, що квест – «гра, під час якої потрібно знайти вирішення для загадок і зробити низку завдань, щоб досягнути мети» [**Error! Reference source not found.**]. Тоді, як навчальний квест – гра, яка передбачає дію із учнями середньої чи іншої вікової ланки на уроках, із використанням мети та завдань. Виходить, що впровадження квест-технологій під час вивчення математики в 5-6 дозволяє змістити акцент із механічного запам'ятовування на їх активне практичне застосування, а її пошуковий характер змінює роль учня з пасивного слухача на суб'єкта пізнання.

В літературі, можна виділити ряд основних функцій навчальних квестів на уроках математики:

1. Навчальна (освітня): поглиблення, закріплення та систематизація знань через практичне виконання завдань і головоломок;
2. Розвивальна: стимулювання розвитку логічного, критичного та креативного мислення; пам'яті, уваги, уяви та уміння ввести аналіз дій та ситуацій;
3. Мотиваційна: підвищення інтересу до навчання та пізнавальної активності завдяки ігровій формі;

Залежно від місця проведення та матеріально-технічного обладнання закладів освіти, застосовують різні типи квестів, характеристика яких наведено у табл.1.

Таблиця 1

Класифікація та характеристика навчальних квестів

Тип квесту	Формат проведення	Переваги	Приклад з математики
Урочний	Дистанційний або змішаний	Розвиває цифрову грамотність Дозволяє працювати у власному темпі Легко автоматизувати	Обчислення значень виразів для отримання QR-підказок
Веб-квест	Офлайн/онлайн	Високий рівень азарту Стимулює мислення Узагальнює тему	Пошук математичних закономірностей, інтерактиви
Позакласний	Шкільний простір (коридори, бібліотека, подвір'я)	Фізична активність Міжпредметні зв'язки	Вимір реальних об'єктів
Лінійний квест	Офлайн (за станціями)	Рухова активність Розвиток командної взаємодії Вчить орієнтуванню у просторі	Координатна площина

Для забезпечення максимальної педагогічної ефективності квест-технологій було проведено обробку наукових джерел, в яких описано ефективність математичних квестів для учнів 5-6 класів (рис.1) [**Error! Reference source not found.**;**Error! Reference source not found.**]

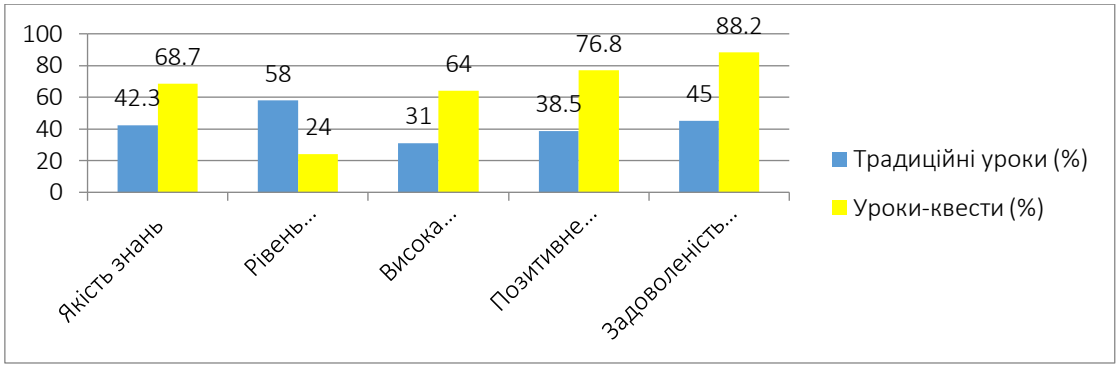


Рис.1. Ефективність математичних квестів у 5-6 класах

Висновки. Систематичне використання навчальних квестів на уроках математики у 5-6 класах сприяє зміні пасивного стану на активну когнітивну діяльність. Завдяки поєднанню ігрових елементів, математичного змісту та командної взаємодії, учні мають підвищений рівень знань, зниження рівня навчальної тривожності, а також вони задоволені навчальним процесом. Перспектива подальших досліджень полягає у розробці адаптивних веб-квестів та завдань для змішаного навчання.

1. *Гришко В. І., Цевух, А. І.* Навчальний квест як інструмент формування критичного мислення у процесі професійної підготовки майбутніх учителів історії. // Педагогічна Академія: наукові записки,2025. Т. 24.
2. Квест,як форма навчання вдома. URL: https://nus.org.ua/2020/04/15/kvest-yak-forma-navchannya-vdoma/
3. *Акın А.*The effectiven essofweb-based Mathematic sinstruction (WBMI) on K-16 students' mathematics learning: A meta-analytic research. // Education and Information Technologies, 2026. V.27. N.6.P. 8015- 8040.
4. *Yang K. H.TheWebQuestmodeleffectson mathematic scurriculum learning inelementary school students. // Computers&Education, 2024. V. 72.P. 158-166.*

USING EDUCATIONAL QUESTS TO INCREASE THE MOTIVATION OF 5TH AND 6TH – GRADE STUDENTS TO STUDY MATHEMATICS

The purpose of this study is to justify the effectiveness of using educational quests to increase learning motivation and cognitive activity among 5th and 6th-grade students during mathematics classes in the context of the New Ukrainian School (NUS) reform.

The work employs theoretical analysis and synthesis of pedagogical literature on quest technology, taxonomy and classification of educational quests (classroom, web-quests, extracurricular, linear), as well as generalisation of research data regarding their impact on students' engagement and learning outcomes.

The study demonstrates that integrating quest technologies transforms students from passive listeners into active learners, significantly reducing learning anxiety associated with complex mathematical operations. Main types and functions of mathematical quests were identified, showing that systematic use of game-based problem solving enhances logical and critical thinking, boosts motivation, and improves knowledge retention through practical application and teamwork.

.

УДК 373.5.016:51:37.091.313

ЗАСТОСУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ЦІКАВОЇ МАТЕМАТИКИ В ПОЗАУРОЧНІЙ РОБОТІ ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

Володимир ЧОРНОКОЖА
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, Україна
chornokozha.volodymyr@chnu.edu.ua

Сучасна математична освіта спрямована не лише на формування в учнів системи предметних знань, але й на розвиток уміння шукати зв'язки між повсякденним життям та математикою, а потім застосовувати математичні знання для розв'язування практичних завдань, логічно міркувати, аргументувати свою думку, аналізувати та працювати з інформацією. Відповідно до рекомендацій Міністерства освіти і науки України,

математична компетентність передбачає здатність застосовувати математичні знання для розв'язання проблем повсякденного життя [1].

У реаліях сучасної освіти підвищити рівень зацікавленості учнів математикою може бути не так вже й легко, але одним із дієвих засобів для цього є використання елементів цікавої математики.

Мета: підбір системи задач цікавої математики, які сприятимуть всебічному розвитку математичної компетентності школярів, формуванню логічного та критичного мислення, розвитку пізнавального інтересу до математики.

Методи: аналіз і узагальнення науково-методичної літератури, навчальних програм та підручників, систематизація і класифікація задач цікавої математики, добір та моделювання завдань відповідно до вікової категорії учнів, педагогічне спостереження.

Поняття «цікава математика» у сучасній методиці навчання трактується як сукупність нестандартних математичних задач, явищ, ігор, парадоксів, логічних вправ та головоломок, які виходять за межі типового шкільного курсу, але при цьому спираються на базові математичні знання учнів.

Позаурочна робота з математики – це заняття або заходи, які проводяться у позаурочний час, ґрунтуються на принципі добровільної участі, мають на меті підвищення рівня математичного розвитку учнів і цікавості до предмета за рахунок поглиблення і розширення базового змісту програми[2]. Тут вчитель має більше можливостей для експериментування зі змістом і формами навчальної діяльності. Такий вид роботи можна організовувати у формі гуртків, факультативних занять, тематичних днів, квестів, турнірів, конкурсів, вікторин та дослідницьких проєктів.

Важливо, щоб форма роботи, обрана вчителем, відповідала меті заняття. Наприклад, на початку навчальної діяльності доцільно запропонувати учням коротку математичну загадку або парадокс, щоб викликати пізнавальний інтерес. Під час основної частини можна організувати командне розв'язування практичних задач. Завершити заняття можна рефлексією або завданням для самостійного дослідження. Таким чином спочатку учень зустрічається з проблемою, яка викликає здивування або запитання, після чого вчитель спрямовує його до пошуку способу розв'язання цього завдання за допомогою математичних знань і допомагає дійти до логічних висновків. В такому випадку цікава задача стає не просто розвагою, а засобом розвитку вміння аналізувати, шукати зв'язки між математикою і реальним життям та логічно міркувати.

Як зазначає Дж. Пойа, «Ваша задача може бути й невеликою, але якщо вона пробуджує вашу допитливість і залучає ваші творчі здібності, а ви розв'язуєте її власними зусиллями, то ви можете відчути радість математичного відкриття» [3].

У процесі дослідження відповідно до поставленої мети було розроблено та впорядковано систему задач цікавої математики для учнів 5-9 класів. Розглянемо задачу «Чому бджоли будують шестикутники?», яку можна запропонувати учням 9 класу в позаурочний час.

Чи знали ви, що коли бджоли будують свої комірки, ми ще їх називаємо медовими сотами, або стільниками, вони не використовують круги, квадрати чи довільні фігури? Їхні комірки завжди мають форму правильних шестикутників. Але чому саме шестикутник?Нехай кожна комірка має форму правильного шестикутника зі стороною 5 мм. Скільки міліметрів воскової стінки припадає на одну комірку? Яку площу займає одна така комірка? Уявіть, що бджоли побудували стільник на восковій пластині прямокутної форми розміром $10\text{ см} \times 15\text{ см}$. Скільки таких комірок може розміститися на цій пластині?

Як ви думаєте, чому саме шестикутник виявився таким зручним для бджіл? Чи можна було б побудувати такі самі стільники з квадратних або трикутних комірок?

Розв'язання

1. Правильний шестикутник має шість рівних сторін, тому:
$$P = 6a = 6 \cdot 5 = 30\text{ мм}.$$
2. Площа правильного шестикутника обчислюється за формулою:
$$S_к = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 5^2 = 37{,}5\sqrt{3} \approx 64{,}95\text{ мм}^2.$$

Отже, площа однієї комірки приблизно дорівнює 65 мм².

3. Розміри пластини – $10\text{ см} \times 15\text{ см}$, тому її площа:
$$S_п = 10 \cdot 15 = 150\text{ см}^2 = 15\,000\text{ мм}^2.$$

Тоді приблизна кількість комірок:

$$N \approx 15\,000 : 64{,}95 \approx 231.$$

То чому ж саме шестикутники?

Щоб з'ясувати, чому бджолині соти мають саме шестикутну форму, порівняємо рівносторонній трикутник, квадрат і правильний шестикутник, площа кожного з яких становить приблизно 65 мм². Для порівняння використаємо периметр фігури. Чим менший периметр при однаковій площі, тим менше матеріалу потрібно для виготовлення її стінок.

1. З формули площі рівностороннього трикутника знаходимо довжину його сторони:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad a = \sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}} \approx 12{,}25 \text{ мм}.$$

Тоді периметр:

$$P = 3a = 3 \cdot 12{,}25 \approx 36{,}75 \text{ мм}.$$

2. Площа квадрата:

$$S = a^2, \text{ тому } a = \sqrt{S} = \sqrt{65} \approx 8{,}06 \text{ мм}.$$

Периметр:

$$P = 4a = 4 \cdot 8{,}06 \approx 32{,}24 \text{ мм}.$$

Висновок: Правильні шестикутники можуть повністю заповнити площину прямокутного стільника без проміжків, що дозволяє ефективно використовувати простір, оскільки між комірками не утворюється порожнього простору. Водночас при однаковій площі шестикутник має менший периметр, ніж квадрат або рівносторонній трикутник. Отже, для побудови стінок такої комірки потрібно менше матеріалу.

Така задача демонструє застосування математики в природі та створює міжпредметні зв'язки з біологією.

Використання елементів цікавої математики в позаурочній роботі вчителя математики є одним із перспективних способів урізноманітнення математичної освіти та створення умов для активної пізнавальної діяльності учнів. Їх педагогічний потенціал полягає передусім у здатності перетворити математичний матеріал із сукупності формул і алгоритмів на засіб дослідження навколишнього світу. Такі завдання в позаурочній роботі вчителя сприяють не лише засвоєнню та поглибленню математичних знань, але й розвитку вміння пошуку нестандартних шляхів розв'язання. Важливим результатом застосування елементів цікавої математики є також формування позитивного ставлення учнів до предмета. В емоційно сприятливій атмосфері та з цікавими завданнями, бажання досліджувати світ за допомогою математики зростає.

1. Про деякі питання державних стандартів повної загальної середньої освіти: Постанова 1. Про деякі питання державних стандартів повної загальної середньої освіти: Постанова Кабінету Міністрів України від 30.09.2020 № 898. Офіційний вебпортал Верховної Ради України. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/898-2020-п *(дата звернення: 23.09.2026).*
2. Методика навчання математики в поняттях, схемах і таблицях: навчально-методичний посібник / уклад. Л. А. Благодир. Умань: ВПЦ «Візаві», 2018. 133 с.
3. *Polya G.* How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method. Princeton: Princeton University Press, 2014. P. 5.

APPLICATION OF ELEMENTS OF RECREATIONAL MATHEMATICS
IN THE EXTRACURRICULAR WORK OF A MATHEMATICS TEACHER

The paper examines the specific features of applying elements of recreational mathematics in the extracurricular activities of a mathematics teacher. The study analyzes the concept of «recreational mathematics» and its pedagogical potential for developing students' mathematical and logical thinking, increasing their motivation to learn, and fostering mathematical competence. An example of a practice-oriented interdisciplinary problem, «Why do bees build hexagons?», is presented along with its solution. The problem demonstrates the connection between mathematics and biology and illustrates the application of mathematical principles in nature.

УДК 372.851

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПІДГОТОВКИ ДО НМТ З МАТЕМАТИКИ: ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ

Олександр ШКОЛЬНИЙ
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, м. Київ, Україна
o.v.shkolnyi@udu.edu.ua

Наразі актуальність досліджень, присвячених методиці підготовки до Зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) якості знань з математики, яке наразі проводиться у форматі Національного мультипредметного тесту (НМТ), на нашу думку, не викликає сумнівів. Авторський колектив у складі Олександр та Олена Школьні, Юрій та Ліліана Захарійченко протягом більше 20 останніх років активно публікує дослідження присвячені цій тематиці. Теоретичні основи та окремі практичні аспекти підготовки до ЗНО з математики висвітлено в монографії [1]. Для практичної реалізації пропонованої нами методики ми використовуємо навчальні посібники нашого колективу [2]-[4]. Цією доповіддю ми продовжуємо серію публікацій, присвячених типовим задачам, які ми вважаємо корисними під час підготовки до НМТ з математики.

Шкільний курс математики під час систематизації знань і умінь у процесі підготовки до НМТ нами розбито на 10 тематичних блоків (розділів): «Числа і вирази», «Функції та їх графіки», «Рівняння та системи рівнянь», «Нерівності та системи нерівностей», «Текстові задачі», «Елементи математичного аналізу», «Планіметрія», «Стереометрія», «Координати і вектори», «Елементи стохастики». У свою чергу, розділ «Рівняння та системи рівнянь» природно розбити на підрозділи «Цілі рівняння», «Дробові раціональні рівняння», «Ірраціональні рівняння», «Тригонометричні рівняння», «Показникові рівняння» та «Логарифмічні рівняння». У кожному з наведених підрозділів, що також природно, розглядаються й системи відповідних рівнянь. Розглянемо дві типові задачі з підрозділу «Логарифмічні рівняння», подані в двох різних формах тестових завдань – із альтернативами та з короткою відповіддю.

Задача 1.Укажіть множину розв'язків рівняння $2 \cdot \log_4 x = 3$.

А	Б	В	Г	Д
$\{-9; 9\}$	$\{8\}$	$\{40{,}5\}$	$\{32\}$	$\{-8; 8\}$

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на 2: $\log_4 x = \frac{3}{2}$. Тоді за означенням логарифма $x = 4^{\frac{3}{2}}$ або $x = \sqrt{4^3} = 8$. Отже, правильна відповідь – Б.

Методичний коментар. Це рівняння є типовим логарифмічним рівнянням, яке зводиться до найпростішого логарифмічного рівняння виду $\log_a f(x) = b$, де $a, b \in R, a > 0,\ a \neq 1, x$ – змінна. Для таких найпростіших логарифмічних рівнянь записувати ОДЗ змінної $(f(x) > 0)$ не обов'язково, бо ця умова виконується автоматично внаслідок того, що вираз a^b за вказаних обмежень завжди є додатним. Однак окремі учні та учениці можуть спробувати розв'язувати це рівняння іншим способом, використовуючи властивість логарифма $n \cdot \log_a b = \log_a(b^n)$. Тоді вони отримають рівняння $\log_4(x^2) = 3$, звідки $x^2 = 4^3 = 64,\ x = \pm 8$, тобто «правильною» є відповідь Д. Варто звернути увагу таких здобувачів освіти, що вказана властивість логарифма правильна лише за умови $a, b, n \in R,\ a > 0,\ b > 0, a \neq 1$, а отже, за такого способу розв'язання (а він теж є цілком допустимим) необхідно враховувати додатково ще й умову $x > 0$. Після врахування цієї умови отримуємо, що корінь $x = -8$ є стороннім, а отже, не належить множині розв'язків початкового рівняння.

Зауважимо також, що дистрактори до цього тестового завдання враховують типові помилки учнів. Дистрактор А отримується внаслідок таких хибних міркувань: $\log_4(x^2) = 3,\ x^2 = 3^4 = 81,\ x = \pm 9$ (тут не врахована умова $x > 0$ і допущено помилку в означенні логарифма). Дистрактор В: $2 \cdot x = 3^4, x = \frac{81}{2} = 40{,}5$. Дистрактор Г: $2 \cdot x = 4^3, x = \frac{64}{2} = 32$. Звернемо увагу також на те, що вимога в завданні на розв'язування рівняння може звучати не лише як «Розв'яжіть рівняння», а й так, як зроблено в цьому завданні. У такому випадку відповіді в альтернативах є множинами, а отже, такий запис може бути дещо незвичним для майбутніх учасників та учасниць тестування. Тому бажано готувати їх як до різних способів формулювання завдань на розв'язування рівнянь, так і до різних способів подання відповідей до них.

Задача 2.Розв'яжіть рівняння $\log_5(x^3 + 7x^2) = \log_5(9x + 63)$. Якщо рівняння має один корінь, то запишіть *його* у відповідь; якщо рівняння має кілька коренів, то запишіть у відповідь їх *добуток*; якщо рівняння не має коренів, то запишіть у відповідь число 999.

Розв'язання.Запишемо ОДЗ змінної цього рівняння: $\begin{cases} x^3+7x^2>0, \\ 9x+63>0. \end{cases}$На цій ОДЗ початкове рівняння рівносильне цілому рівнянню $x^3+7x^2=9x+63$, звідки $x^2(x+7)-9(x+7)=0$, $(x^2-9)(x+7)=0$, тобто $x_1=3$, $x_2=-3$, $x_3=-7$. Із цих трьох коренів цілого рівняння числа 2 і –2 належать ОДЗ, а число –7 – не належить.Отже, початкове логарифмічне рівняння має лише два корені $x_1=3$, $x_2=-3$, а шуканий добуток: $3\cdot(-3)=-9$. Відповідь: –9.

Методичний коментар.Наведене в цьому завданні рівняння належить до найпростіших логарифмічних рівнянь виду $\log_a f(x)=\log_a g(x)$,де $a\in R,\ a>0,\ a\neq 1, x-$змінна. Для його розв'язання треба розв'язати рівняння $f(x)=g(x)$ на ОДЗ, що визначається системою нерівностей$\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0. \end{cases}$При цьому важливо наголосити для учнів та учениць, що розв'язувати систему не обов'язково, можна лише підставити отримані корені рівняння $f(x)=g(x)$ (якщо вони існують) у кожну з її нерівностей. Власне, саме цим способом ми і розв'язали задачу 2.

Також важливо наголосити для здобувачів освіти, що іноді рівняння $f(x)=g(x)$ може не мати дійсних коренів (наприклад, рівняння $\log_5(x^2+10)=\log_5 6$ зведеться до рівняння $x^2=-4$, яке не має дійсних коренів), а також корені рівняння $f(x)=g(x)$ можуть не належати ОДЗ (наприклад, так буде для рівняння $\log_5 x=\log_5(2x+10)$, бо корінь рівняння $x=2x+10, x=-10$не задовольняє умову $x>0$). У цьому випадку початкове логарифмічне рівняння не матиме коренів. Власне, саме для цього умова задачі й була формульована в дещо незвичному та розлогому вигляді: дійсний корінь рівняння міг бути один, їх могло бути кілька або ж взагалі могло не бути. Під час підготовки до НМТ за математики вчителям варто розглянути всі можливі випадки щодо кількості коренів логарифмічних рівнянь.

Наголосимо, що для учнів та учениць, які вивчали математику в школі поглиблено і знайомі з комплексними числами, слід зауважити, що на НМТ за математики завдання «Розв'яжіть рівняння» або «Знайдіть множину розв'язків рівняння» означає пошук лише дійсних коренів цього рівняння.

Підсумовуючи, зауважимо, що під час підготовки здобувачів освіти до НМТ з математики важливо звертати їх увагу на суттєві особливості розв'язування тестових завдань різних форм подання для окремої теми шкільного курсу математики. Для того, щоб досягти цієї мети варто серед усіх задач розділу чи підрозділу виокремити типові задачі та добитися від учнів та учениць їх свідомого та впевненого розв'язання. Це дозволить вчителю або вчительці в подальшому, спираючись на такі задачі, розвинути успіх, закріпити матеріал і добитися впевненості у власних силах у майбутнього учасника чи учасниці тестування, а також забезпечить формування всіх ключових компетентностей, передбачених Державними стандартами та іншими українськими державними документами в сфері освіти.

1. *Школьний О.В.* Основи теорії та методики оцінювання навчальних досягнень з математики учнів старшої школи в Україні: Монографія. Київ, вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2015. 424 с.
2. *Захарійченко Ю.О., Школьний О.В. Захарійченко Л.І., Школьна О.В.*Повний курс математики в тестах. Енциклопедія тестових завдань: У 2 ч. Ч. 1: Різнорівневі завдання. 11 вид. Харків: Ранок, 2021. 496 с.
3. *Захарійченко Ю.О., Школьний О.В. Захарійченко Л.І., Школьна О.В.* Повний курс математики в тестах. Енциклопедія тестових завдань: У 2 ч. Ч. 2: Теоретичні відомості. Тематичні та підсумкові тести. 4 вид. Харків: Ранок, 2020. 192 с.
4. *Захарійченко Ю.О., Школьний О.В. Захарійченко Л.І., Школьна О.В.* Сучасна підготовка до ЗНО з математики. Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2021. 232 с.

TYPICAL PROBLEMS FOR PREPARATION TO NMT IN MATHEMATICS: LOGARITHMIC EQUATIONS

In the report we examine typical problems that, in the author's view, are suitable for use when preparing for the National Multi-Subject Test in mathematics. Two problems on this topic are presented, accompanied by solutions and methodological commentary for them. We are convinced that the proposed tasks will facilitate the effective preparation of Ukrainian students for the final mathematics test and will ensure the development of educational competencies stipulated by Ukrainian legislation in the field of education.

УДК 376.091:51

ФОРМУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ УЯВЛЕНЬ ПРО ПЕРЕРІЗИ ФІГУР В УЧНІВ З ОСОБЛИВИМИ ОСВІТНІМИ ПОТРЕБАМИ

Світлана ЯЦЕНКО
Український державний університет імені Михайла Драгоманова, м. Київ, Україна
s.ye.yatsenko@udu.edu.ua

Формування геометричних уявлень про перерізи фігур є важливою складовою навчання геометрії, оскільки пов’язане з розвитком просторового мислення, умінням уявляти взаємне розміщення об’єктів та встановлювати зв’язок між просторовими фігурами і їхніми плоскими зображеннями. Для учнів з особливими освітніми потребами актуальним є добір таких способів подання геометричного матеріалу, які забезпечують доступність його сприймання, можливість практичної взаємодії з моделями та поступовий перехід від конкретних дій до графічного й абстрактного представлення.

Мета дослідження – теоретично обґрунтувати та визначити методичні особливості формування геометричних уявлень про перерізи фігур в учнів з особливими освітніми потребами.

Методи дослідження: аналіз і узагальнення психолого-педагогічної та методичної літератури з проблем навчання математики та просторового мислення; аналіз нормативних документів у сфері інклюзивної освіти; вивчення й узагальнення методичних підходів до використання предметних, графічних і цифрових моделей у навчанні геометрії.

Просторове міркування має істотне значення для математичного мислення, а під час вивчення геометрії важливим є поєднання візуалізації з аналізом властивостей геометричних об’єктів [4; 5].

Для учнів з особливими освітніми потребами (ООП) засвоєння просторових понять може потребувати додаткових способів представлення навчальної інформації та спеціальної організації навчальної діяльності. Водночас учні з ООП є неоднорідною групою, тому добір методів, засобів і форм підтримки має здійснюватися з урахуванням індивідуальних освітніх потреб і труднощів конкретного учня, а не лише на підставі належності до певної категорії.

Ефективним методичним підходом є поєднання конкретного, репрезентативного та абстрактного рівнів представлення математичного матеріалу. Такий підхід, відомий як Concrete–Representational–Abstract (CRA), передбачає поступовий перехід від роботи з реальними або предметними моделями до їх графічного представлення та математичної символізації. Дослідження засвідчують доцільність CRA-підходу в навчанні математики учнів із математичними труднощами та учнів з інвалідністю [1; 2].Тому під час формування уявлень про перерізи фігур доцільно використовувати об’ємні моделі, паперові та картонні макети, геометричні конструктори, схеми, рисунки, динамічні цифрові моделі, а також практичні дії з об’єктами. Наприклад, під час вивчення перерізу куба площиною учень може спочатку дослідити модель куба, змінювати положення умовної «площини перерізу», визначати точки її перетину з ребрами, а потім відтворювати отриману фігуру на рисунку.

Особливого значення набуває поступовий перехід від маніпулювання моделлю до її графічного та символічного опису. Робота з моделлю не повинна обмежуватися демонстрацією. Важливо залучати учня до активної дії та вербалізації результату: повернути модель, змінити положення площини, визначити точки перетину, описати отриману фігуру, порівняти кілька варіантів перерізу, сформулювати припущення та перевірити його. Саме поєднання конкретної дії, графічного представлення та абстрактного математичного опису є одним із ключових положень CRA-підходу [1; 2].

Наприклад, учитель може запропонувати учням дослідити, які фігури можуть утворюватися внаслідок перерізу куба площиною. Учень спочатку працює з моделлю, потім розглядає відповідне зображення, а після цього формулює висновок. Така організація діяльності допомагає пов’язати просторовий образ, практичну дію, графічне представлення та математичне мовлення. Дослідження просторового міркування учнів показують важливість уміння працювати з двовимірними представленнями тривимірних геометричних об’єктів та поєднувати просторові міркування з предметними геометричними знаннями [4].

Важливим засобом підтримки є візуалізація. Проте її доцільно розглядати не як універсальний засіб для всіх учнів з ООП, а як один із варіантів доступного представлення математичної інформації. Опорні схеми, послідовності рисунків, кольорове виділення елементів фігури та графічні алгоритми можуть допомагати учням встановлювати зв’язки між просторовим об’єктом і його математичним описом.Наприклад, під час побудови перерізу куба можна послідовно виділяти точки перетину площини з ребрами, з’єднувати відповідні точки та позначати отриманий многокутник. Така організація інформації дає змогу зменшити кількість одночасно опрацьовуваних елементів і зробити послідовність побудови більш зрозумілою.

Доцільним є також використання динамічних геометричних середовищ. Вони дають змогу демонструвати зміну просторової конфігурації, яку складно уявити за статичним рисунком. Водночас цифрова візуалізація не повинна замінювати практичну діяльність. Доцільно поєднувати реальні моделі та цифрові засоби, щоб учень міг досліджувати один і той самий геометричний об'єкт у різних формах. Дослідження просторової візуалізації засвідчують можливості використання як фізичних маніпулятивів, так і динамічних геометричних середовищ у розвитку просторових уявлень [3].

Важливим компонентом формування геометричних уявлень є математичне мовлення. Учень має не лише визначити форму отриманого перерізу, а й уміти пояснити, через які точки та ребра проходить січна площина, які елементи утворюють переріз і чому отримано саме таку фігуру. Для цього доцільно використовувати короткі запитання, графічні опори, словники математичних термінів, завершення речень та роботу в парах.

Важливо також створювати умови для поступового підвищення самостійності учня. Підтримка не повинна зводитися до постійного виконання дій замість нього. Доцільніше використовувати навідні запитання, графічні та предметні опори, покрокові інструкції та зразки виконання окремих дій, поступово зменшуючи обсяг допомоги в міру сформованості відповідного способу діяльності. Така логіка узгоджується з підходами до градуйованої підтримки, представленими в дослідженнях CRA [1; 2].

Окремої уваги потребує організація підтримки учня. Відповідно до чинного Порядку організації інклюзивного навчання в закладах загальної середньої освіти, рівні підтримки визначаються як обсяг тимчасової або постійної підтримки учнів в освітньому процесі відповідно до їхніх особливих освітніх потреб [6]. Освітній процес для учнів з ООП організовується з урахуванням висновку інклюзивно-ресурсного центру, категорії та ступеня прояву освітніх труднощів, рівня підтримки та індивідуальної програми розвитку [6].

Тому неправильно ототожнювати рівні підтримки з рівнями складності навчального завдання або ступенями самостійності учня. Учень із певним рівнем підтримки може виконувати окреме математичне завдання самостійно, але потребувати додаткової допомоги в іншому виді діяльності. Відповідно, характер педагогічної підтримки має визначатися конкретними освітніми потребами учня та змістом навчального завдання, а не лише номером рівня підтримки [6].

Під час формування уявлень про перерізи фігур підтримка може реалізовуватися через:

- використання об'ємної моделі;
- збільшення або спрощення графічного зображення;
- кольорове виділення січної площини та її сліду;
- покрокову інструкцію;
- готовий графічний зразок;
- навідні запитання;
- спільне виконання окремих етапів побудови;
- використання цифрової динамічної моделі;
- надання додаткового часу;
- альтернативний спосіб демонстрації результату.

При цьому обсяг допомоги доцільно поступово зменшувати, якщо учень набуває необхідних умінь. Це сприяє переходу від виконання дій за зразком до їх самостійного застосування.

Для формування уявлень про перерізи доцільно передбачити такі етапи:

1. Мотиваційно-практичний етап — створення реальної або уявної ситуації, у якій виникає потреба дослідити переріз предмета.

2. Предметно-діяльнісний етап — робота з моделлю: обертання, переміщення, умовне «розрізання» фігури.

3. Візуально-графічний етап – перехід від моделі до рисунка та схеми.

4. Вербальний етап – опис учнем отриманої фігури та послідовності дій.

5. Абстрактний етап – формулювання математичних властивостей і виконання відповідних побудов без безпосередньої опори на модель.

6. Етап перенесення – застосування сформованого способу дії до іншої просторової фігури або нової конфігурації.

Така послідовність відповідає логіці переходу від конкретного досвіду до його репрезентації та абстрактного математичного опису, що є основою CRA-підходу [1; 2].

Наприклад, під час вивчення перерізу куба вчитель може продемонструвати модель куба з пластиліну або іншого безпечного матеріалу, показати положення січної площини та запропонувати учням спрогнозувати форму перерізу. Після цього учні перевіряють припущення за допомогою моделі або цифрової візуалізації, визначають точки перетину площини з ребрами куба та відтворюють отриманий многокутник на площині.

Демонстрація перерізу реальних об’єктів дає змогу зробити просторові відношення доступнішими для безпосереднього дослідження. Водночас сам факт використання моделі не гарантує формування математичного поняття: важливо організувати перехід від практичної дії до усвідомленого математичного опису та узагальнення [1; 4].

Таким чином, формування геометричних уявлень про перерізи фігур в учнів з ООП доцільно здійснювати на основі доступного представлення інформації, практичного моделювання, поетапного переходу від конкретного до абстрактного, розвитку математичного мовлення, використання цифрової візуалізації та індивідуалізації підтримки. Водночас підтримка має бути не самоціллю, а засобом активної участі учня в математичній діяльності та поступового підвищення його самостійності [1; 2; 6].

1. *Agrawal, J., & Morin, L. (2016).* Evidence-Based Practices: Applications of Concrete Representational Abstract Framework across Math Concepts for Students with Mathematics Disabilities. Learning Disabilities Research & Practice, 31(1), 34–44. https://doi.org/10.1111/ldrp.12093.
2. *Bouck, E. C., Satsangi, R., & Park, J. (2018).* The Concrete–Representational–Abstract Approach for Students With Learning Disabilities: An Evidence-Based Practice Synthesis. Remedial and Special Education, 39(4), 211–228. https://doi.org/10.1177/0741932517721712.
3. *Baki, A., Kosa, T., & Guven, B. (2011).* A comparative study of the effects of using dynamic geometry software and physical manipulatives on the spatial visualisation skills of pre-service mathematics teachers. British Journal of Educational Technology, 42(2), 291–310. https://doi.org/10.1111/j.1467-8535.2009.01012.
4. *Fujita, T., Kondo, Y., Kumakura, H., Kunimune, S., & Jones, K. (2020).* Spatial reasoning skills about 2D representations of 3D geometrical shapes in grades 4 to 9. Mathematics Education Research Journal, 32, 235–255. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00335-w.
5. *Mix, K. S., & Battista, M. T. (Eds.). (2018).* Visualizing Mathematics: The Role of Spatial Reasoning in Mathematical Thought. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-98767-5.
6. *Кабінет Міністрів України. (2021).* Про затвердження Порядку організації інклюзивного навчання у закладах загальної середньої освіти: Постанова від 15.09.2021 № 957 (у редакції постанови Кабінету Міністрів України від 05.02.2026 № 129).

FORMATION OF GEOMETRIC CONCEPTS OF CROSS-SECTIONS OF FIGURES IN STUDENTS WITH SPECIAL EDUCATIONAL NEEDS

The study focuses on the formation of geometric concepts of cross-sections of figures in students with special educational needs. The purpose of the study is to theoretically substantiate and identify methodological features of teaching cross-sections of geometric figures to such students. The research methods include analysis and generalization of psychological, pedagogical, and methodological literature on mathematics education and spatial reasoning; analysis of regulatory documents on inclusive education; and examination and generalization of methodological approaches to the use of concrete, graphical, and digital models in geometry teaching. The principal results consist in substantiating a gradual transition from practical work with three-dimensional models to graphical representations, verbal descriptions, and abstract geometric concepts. The use of paper and solid models, diagrams, step-by-step instructions, and dynamic digital representations is proposed as a means of making the study of cross-sections more accessible. Particular attention is paid to individualized support and the gradual development of students’ independence in solving geometric tasks.

UDC 372.851:374.7

MATHEMATICAL COMPETENCE AS A FOUNDATION OF DATA LITERACY: CONTINUITY OF DEVELOPMENT FROM SCHOOL TO ADULT LEARNING

Roksolana MILIAN
Relish Labs LLC (Home Chef), Chicago, USA
roksolana.milian@gmail.com

Mathematical knowledge and skills do not lose their significance once formal education ends, although the contexts of their application change. Contemporary professional and everyday environments require the constant use of numerical and statistical information: people analyze tables and graphs, compare indicators, work with percentages, forecasts, and other quantitative characteristics, and assess the credibility of conclusions drawn from data. The spread of digital tools and artificial intelligence systems further intensifies this trend: the result of a calculation becomes available instantly, while responsibility for interpreting and evaluating it remains with the person.

At the same time, mathematics education research mostly considers the development of mathematical competence within school or university learning, while adult education often treats data literacy as a new skill separate from mathematics. As a result, the connection between mathematical competence formed at school and an adult's ability to work with data remains insufficiently understood. This calls for viewing the development of mathematical competence as a continuous process that begins in school and continues throughout a person's professional life. The aim of this study is to theoretically substantiate mathematical competence as a foundation of data literacy and to outline the continuity of its development from school learning to adult learning on the basis of a four-component model. The study uses theoretical analysis and generalization of the scientific literature, comparison, and conceptual modeling.

Our previous studies substantiated the structure of mathematical competence and its logical component and defined criteria and indicators of its formation in basic school students [1; 2; 3]. They also demonstrated the connection between work with data and the logical component of mathematical competence: data analysis involves mental operations such as analysis, comparison, classification, generalization, interpretation, and justification of conclusions [4]. These findings suggest that work with data provides a practical context for the manifestation of mathematical competence and may serve as one of the contexts in which its development continues beyond formal mathematics learning.

International research views adults' statistical literacy as a combination of knowledge and dispositional elements, including a critical stance toward quantitative claims [5], and data literacy as the ability to read, analyze, and interpret data and to argue on their basis [6]. In adult education, self-directed learning is a key concept, which D. Garrison links to self-management, self-monitoring, and motivation [7], while M. Eraut emphasizes the importance of informal learning that occurs directly in the course of professional work [8]. However, these lines of research are rarely connected with school mathematics methodology.

In our research, mathematical competence is considered through interrelated components: motivational-value, cognitive, activity-based, and reflective-evaluative [1; 2; 3]. The motivational-value component concerns awareness of the significance of mathematical knowledge and of the need to apply it. The cognitive component covers mathematical knowledge, concepts, modes of reasoning, and problem-solving methods. The activity-based component manifests itself in the ability to apply mathematical knowledge when solving practical tasks. The reflective-evaluative component involves analyzing the results obtained, evaluating the correctness of the chosen methods, and adjusting one's own activity.

Table 1.

Components of mathematical competence in school mathematics and in adults' work with data

Component	In school mathematics	In adults' work with data
Motivational-value	awareness of the significance of mathematical knowledge	awareness of a professional need for quantitative knowledge; readiness to question data and conclusions
Cognitive	mastery of concepts, logical operations, modes of reasoning	understanding of indicators, variability, the difference between correlation and causation; rethinking existing knowledge in a new context
Activity-based	solving mathematical and practical problems	applying knowledge to real data, constructing comparisons, interpreting graphs and results
Reflective-evaluative	checking solutions, self-monitoring	evaluating data quality, the soundness of conclusions, and the limits of their applicability

The model was developed for school students, but its structure makes it possible to trace how each component can manifest itself at later stages of a person's life, as presented in Table 1.

Crucially, transferring the model to adult education is possible only if the components are treated not as a sequence of instructional steps but as dimensions of competence. The professional environment does not reproduce classroom conditions: a real professional problem takes the place of a teacher-formulated task; colleagues, documentation, and digital resources serve as learning resources; practical activity replaces the exercise; and the consequences of decisions, rather than assessment, become the trigger for reflection.

Under these conditions, the development of an adult's quantitative literacy becomes cyclical: it begins with a practical quantitative problem and, through the search for knowledge, its application, verification, and reflection, leads to renewed ways of acting that are then brought to the next problem (see Fig. 1). Each component of mathematical competence supports a particular phase of this cycle: the motivational-value component explains why a learning need arises, the cognitive component ensures the acquisition of new content, the activity-based component its practical application, and the reflective-evaluative component the verification and rethinking of the experience gained. Fig. 1 also shows the school form of each phase: the cycle is not new to the adult learner but reproduces, under different conditions, a structure already experienced in school mathematics.

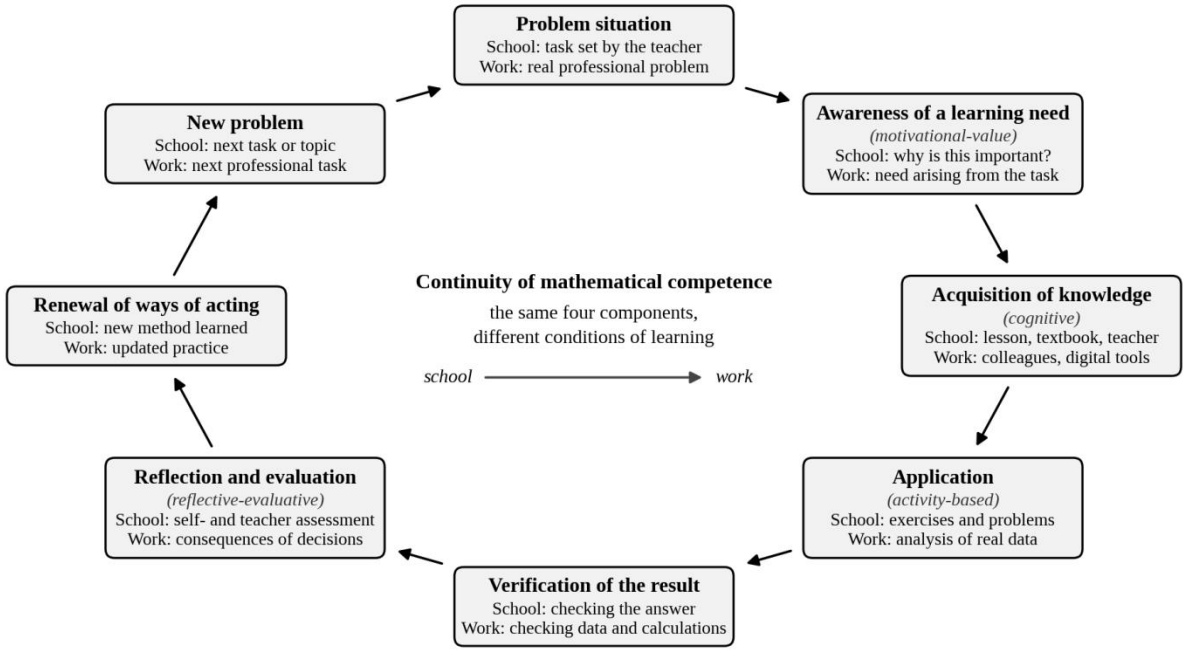


Fig. 1. Cycle of mathematical competence development in school learning and in adults' self-directed learning at work

This cycle does not necessarily take place in isolation: professional dialogue, mutual learning, and collaboration can be important resources for competence development, as research on the professional development of mathematics teachers also confirms [9].

A typical professional episode illustrates the cycle. An analyst is asked to estimate the effect of a new marketing campaign and compares an indicator before and after its launch. When reviewing the result, the analyst notices that the indicator also changes for reasons unrelated to the campaign, such as seasonal fluctuations, so a simple before-and-after comparison may overstate or understate the effect. This recognition creates a learning need: the analyst studies a method that relies on a comparison group, applies it to real data, checks its assumptions, and then reuses it in later tasks. The key moment of the episode is a reflective-evaluative question: is this comparison valid?

This perspective has direct implications for mathematics methodology. If mathematical competence continues to develop beyond school, then the task of school education is not only to build subject knowledge but also to lay the foundations for further independent learning. This involves using tasks based on real data; tasks that require students to evaluate someone else's conclusion or to identify an incorrect comparison or incomplete data; and systematic reflection on the credibility of the results obtained.

Consider, for example, the following task on percentages. Two shops sell the same item at the same price: the first offers a 30% discount, while the second offers «buy two, get the third free». «Students determine which offer is more favorable for a family buying three items and then evaluate a classmate's claim that «the 30% discount is always better.» The everyday context supports the motivational-value component; working with percentages and ratios engages the cognitive component; calculating the cost for different numbers of items represents the activity-based component. The reflective-evaluative component is engaged when students discover that the answer depends on the conditions: for three items the second offer saves one third of the cost, while for two items only the first offer gives any saving. Thus the classmate's generalization is unjustified. In essence, this is the same question the analyst had to ask: under what conditions is a comparison valid?

The reflective-evaluative component therefore becomes especially important: as calculations are increasingly performed by digital tools and artificial intelligence systems, the ability to judge whether a result is appropriate and well-founded remains with the person. In the classroom, this ability can be developed through tasks in which students evaluate a ready-made solution instead of producing their own. For example, students receive a solution generated by an AI tool stating that if a price first rises by 20% and then falls by 20%, it returns to its original value. The solution looks convincing, and the reasoning seems plausible, but the conclusion is wrong: the second percentage is taken from a larger base, so the final price is 96% of the original. Students must find the error, explain its cause, and suggest a way to check such results in the future, for instance by substituting a specific price. Such tasks shift the focus from obtaining an answer to evaluating its credibility and prepare students for working with automated results in their future professional and everyday lives.

In conclusion, an adult's mathematical competence is not solely the product of formal mathematics education, but school learning lays its foundation. The four-component model (motivational-value, cognitive, activity-based, and reflective-evaluative components) makes it possible to trace the continuity of mathematical competence development from school learning to adults' work with data, as the parallel between the school task and the professional episode shows. It can serve as a theoretical basis for connecting mathematics methodology with adult education. Applying the model to adult education requires empirical verification. Promising directions for further research include studying how adults independently identify quantitative learning needs and developing school tasks aimed at strengthening the reflective-evaluative component in work with data.

1. *Bachynska R.S.* Problem as a means of forming the logical component of mathematical competence of basic school students. *Suchasni informatsiini tekhnolohii ta innovatsiini metodyky navchannia u pidhotovtsi fakhivtsiv*. 2018. Vol. 51. Pp. 29–33. (In Ukrainian.)
2. *Matiash, O., Mykhailenko, L., Milian, R., Voievoda, A., Nakonechna, L., Kateryniuk, H.* The place and role of problems combinations in the methodical system of the pupils' logical thinking. *IJCSNS International Journal of Computer Science and Network Security*. 2022. Vol. 22, No. 5. Pp. 463–469. https://doi.org/10.22937/IJCSNS.2022.22.5.65
3. *Milian R.* Pupils' logical component of mathematical competence formation in base secondary school. PhD thesis. Vinnytsia Mykhailo Kotsiubynskyi State Pedagogical University: Vinnytsia, Ukraine, 2021. (In Ukrainian.)
4. *Milian R.* Data-based work and the logical component of mathematical competence: the American experience. *Didaktyka matematyky: teoriia, dosvid, innovatsii*. 2026. No. 5. Pp. 67–78. https://doi.org/10.31652/3041-2277-2026-5-67-78 (In Ukrainian.)
5. *Gal I.* Adults' statistical literacy: meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*. 2002. Vol. 70, No. 1. Pp. 1–25.
6. *Wolff A., Gooch D., Cavero Montaner J.J., Rashid U., Kortuem G.* Creating an understanding of data literacy for a data-driven society. *The Journal of Community Informatics*. 2016. Vol. 12, No. 3. Pp. 9–26.
7. *Garrison D.R.* Self-directed learning: toward a comprehensive model. *Adult Education Quarterly*. 1997. Vol. 48, No. 1. Pp. 18–33.
8. *Eraut M.* Informal learning in the workplace. *Studies in Continuing Education*. 2004. Vol. 26, No. 2. Pp. 247–273.
9. *Mykhailenko L., Matiash O., Milian R., Kalashnikov I., Horiashyn A.* Mathematics teacher's methodical competence development in the conditions of the university and school partnership. *Journal of Higher Education Theory and Practice*. 2022. Vol. 22, No. 12. Pp. 87–103.

МАТЕМАТИЧНА КОМПЕТЕНТНІСТЬ ЯК ОСНОВА ГРАМОТНОСТІ В РОБОТІ З ДАНИМИ: НЕПЕРЕРВНІСТЬ РОЗВИТКУ ВІД ШКОЛИ ДО НАВЧАННЯ ДОРОСЛИХ

У роботі теоретично обґрунтовано математичну компетентність як основу грамотності у сфері роботи з даними. На основі чотирикомпонентної моделі математичної компетентності (мотиваційно-ціннісний, когнітивний, діяльнісний та рефлексивно-оцінювальний компоненти) розглянуто неперервність її прояву від шкільного навчання до роботи дорослого з даними та запропоновано цикл самоспрямованого розвитку кількісної грамотності. Використано методи теоретичного аналізу, узагальнення, порівняння та концептуального моделювання. Наведено приклади шкільного завдання та професійного епізоду, що ілюструють можливість прояву компонентів математичної компетентності в різних контекстах. Окреслено наслідки для методики навчання математики, зокрема посилення ролі рефлексивно-оцінювального компонента в умовах поширення цифрових інструментів і систем штучного інтелекту.

СЕКЦІЯ ІІІ
ІННОВАЦІЙНІ ІНСТРУМЕНТИ НАВЧАННЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

УДК 378.147:004:51

ДОСВІД ВПРОВАДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ДЛЯ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ З КУРСУ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»

АндрійАЛІЛУЙКО
Західноукраїнський національний університет, м. Тернопіль, Україна
aliluyko82@gmail.com

Сучасна вища математична освіта стикається з проблемою формального засвоєння студентами складних просторових об'єктів та абстрактних понять (таких як подвійні інтеграли, градієнт, екстремуми функцій багатьох змінних). Традиційні методи викладання з використанням статичного креслення на дошці часто не дозволяють сформувати у студентів глибоке геометричне розуміння цих концептів. Впровадження засобів динамічної геометрії (GeoGebra, Desmos) [1, 2] є актуальним рішенням для подолання цього когнітивного бар'єру завдяки можливостям інтерактивної 3D-візуалізації у реальному часі.

Метою дослідження є емпірична перевірка та порівняння рівня розуміння студентами абстрактних понять математичного аналізу за умов традиційного підходу та після впровадження методики застосування динамічної геометрії. *Для досягнення мети* у дослідженні використано методи педагогічного експерименту (задача зіставлення і порівняння). Для статистичної обробки даних та перевірки висунутих гіпотез застосовано U-критерій Манна-Уітні та t-критерій Стьюдента для незалежних вибірок.

Методика впровадження динамічної геометрії на лекційних та практичних заняттях базувалася на кількох ключових підходах. Під час вивчення екстремумів функцій багатьох змінних використовувалися інтерактивні повзунки для зміни параметрів поверхні $z = f(x, y)$, що дозволяло студентам візуально відрізняти точки локального максимуму від сідлових точок під різними кутами огляду. Поняття градієнта пояснювалося через одночасну побудову 3D-поверхні та її ліній рівня на 2D-площині, де вектор градієнта динамічно перебудовувався перпендикулярно до ліній рівня, вказуючи напрям найшвидшого зростання функції. Для візуалізації подвійних інтегралів моделювалися циліндричні тіла, об'єм яких обчислювався, з можливістю динамічної зміни області інтегрування на площині *Oxy*, що суттєво спростило пояснення алгоритму зміни порядку інтегрування.

Для перевірки ефективності методики було проведено експеримент із залученням двох груп студентів (експериментальної та контрольної). Проблема доведення відсутності відмінностей характерна для формуючих експериментів, коли необхідно довести еквівалентність експериментальної та контрольної груп до експерименту. Дослідження будувалося за таким планом:

$$G_1 \to E \to G_2$$
$$G_1^* \to\to\to G_2^*$$

де G_1 та G_2 – оцінювання рівня розуміння математичних понять студентами експериментальної групи (група, для якої впроваджувалися засоби динамічної геометрії) до та після експерименту; G_1^* та G_2^* – оцінювання рівня розуміння математичних понять студентами контрольної групи (група, у якій навчання здійснювалося за класичними методами) до та після експерименту; E –експериментальний вплив (застосування 3D-моделювання).

Для того, щоб результати експерименту були валідними, необхідно щоб була виконана умова $G_1 = G_1^*$. Це і є задача виявлення відмінностей в рівні прояву ознаки. Вирішити цю задачу можна, наприклад, за допомогою статистичного*U*-критерію Манна-Уітні.

Перед вивченням теми студенти обох груп ($n_1 = 12$ та $n_2 = 15$) пройшли вхідне тестування на просторову уяву (20-бальна шкала).

Було висунуто дві гіпотези: H_0 – відмінності між показниками груп випадкові (відсутні), отже, групи подібні і одну з них можна взяти як контрольну; H_1 – відмінності між показниками груп достовірні, значимі.

За результатами вхідного тестування було перевірено гіпотезу H_0 про те, що відмінності між показниками груп є випадковими. Встановленняеквівалентності експериментальної та контрольної груп до експерименту дозволило коректно розпочати формуючий етап.

Після вивчення тем із застосуванням GeoGebra в експериментальній групі, а в контрольній – традиційне креслення, було проведено підсумкове оцінювання. Середній бал у експериментальній групі склав $\bar{x}_{експ.} = 18,2$, а в контрольній – $\bar{x}_{контр.} = 14,4$.

Для критерію сформульовано статистичні гіпотези: H_0 – відмінності між $\overline{x}_{експ.}$ та $\overline{x}_{контр.}$ випадкові. Експеримент не вдався; H_1 – відмінності достовірні, значимі. Успішність зросла завдяки впровадженню динамічної геометрії.

Порівняння результатів за допомогою *t*-критерію Стьюдента показало статистично значуще зростання успішності в експериментальній групі ($t_{емп.} \approx 4,79$). Отримане емпіричне значення перевищує критичне табличне ($t_{емп.} > t_{крит.} = 3,73$ при рівні значимості $p = 0,001$), що свідчить про невипадковість позитивних змін.

Статистично доведено доцільність інтеграції 3D-моделювання у навчальний процес. Розроблені динамічні моделі та алгоритми візуалізації можуть бути безпосередньо включені до навчально-методичних посібників[3], практикумів з вищої математики та структурованих наборів завдань для самостійної роботи студентів.

Впровадження динамічної геометрії достовірно покращує засвоєння складних математичних понять. Застосування методів математичної статистики надійно підтвердило ефективність заміни традиційних статичних методів на інтерактивні візуалізації під час вивчення просторових математичних моделей.

10. GeoGebra : [сайт]. URL: https://www.geogebra.org (дата звернення: 29.09.2026).
11. Desmos : [сайт]. URL: https://www.desmos.com (дата звернення: 29.09.2026).
12. *Алілуйко А.М.* Алгебра і початки аналізу: навч. посіб. для студентів ВНЗ I-II рівнів акредитації. Тернопіль: ТНЕУ, 2018. 134 с.

EXPERIENCE IN IMPLEMENTING DYNAMIC GEOMETRY FOR VISUALIZING EDUCATIONAL MATERIALS IN THE “HIGHER MATHEMATICS”COURSE

This study evaluates the effectiveness of dynamic geometry systems versus traditional methods for teaching mathematical analysis concepts. A pedagogical experiment was conducted using the Mann-Whitney U-test and Student’s t-test to compare student performance. The results demonstrate a statistically significant improvement in the experimental group, confirming that interactive 3D visualization significantly enhances the comprehension of complex spatial models.

УДК 378.011.3-051:51:53:004

ІННОВАЦІЙНІ ЦИФРОВІ ІНСТРУМЕНТИ НАВЧАННЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН У ПРОФЕСІЙНІЙ ПІДГОТОВЦІ МАЙБУТНІХ ПЕДАГОГІВ ЄС ТА УКРАЇНИ: КОМПАРАТИВНИЙ АНАЛІЗ

Олена БЕСПАРТОЧНА
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, м. Кременчук, Україна
bespartochnay@ukr.net

Актуальність.Цифрова трансформація освітнього процесу вимагає оновлення змісту навчання та методів викладання для підготовки майбутніх вчителів, особливо у галузі фізики та математики. Використання цифрових лабораторій, віртуальних симуляцій, інтерактивних навчальних середовищ, інструментів математичного моделювання, хмарних сервісів та технологій штучного інтелекту відкриває нові можливості для візуалізації складних явищ і процесів, проведення експериментів, розв’язання прикладних задач, а також організації самостійного навчання та дослідницької діяльності учнів. Водночас ефективність цих інструментів залежить від їхнього педагогічно обґрунтованого вибору та від того, чи готові майбутні вчителі використовувати цифрові технології відповідно до змісту навчальних дисциплін та визначених результатів навчання. У країнах ЄС характерною рисою є систематичне включення цифрової грамотності до підготовки вчителів, тоді як в Україні цифровізація відбувається в умовах необхідності забезпечення гнучкості та безперервності освітнього процесу. З огляду на це доцільно провести порівняльний аналіз підходів до використання цифрових інструментів у навчанні фізики та математики в ЄС та Україні.

Метою даного дослідження є проведення порівняльного аналізу інноваційних цифрових інструментів, що використовуються у навчанні фізики та математики в рамках підготовки майбутніх вчителів у країнах Європейського Союзу (ЄС) та в Україні. Крім того, метою є виявлення основних напрямків їхнього використання, педагогічних можливостей та особливостей інтеграції в освітній процес, а також визначення перспектив використання європейського досвіду в підготовці вчителів в Україні.

Методи дослідження.Для досягнення поставлених цілей було проведено аналіз та систематизацію наукових праць, а також нормативно-стратегічних документів у сфері цифровізації освіти. Крім того, за допомогою порівняльного методу було зіставлено підходи до використання цифрових інструментів у підготовці

майбутніх вчителів у країнах ЄС та Україні, а шляхом узагальнення визначено спільні тенденції та відмінності. За допомогою методу систематизації було проведено класифікацію основних видів цифрових інструментів та сфер їхнього педагогічного застосування.

Основні результати дослідження. У сучасних дослідженнях питання цифровізації підготовки вчителів розглядаються, насамперед, з точки зору формування цифрової грамотності та здатності майбутніх вчителів інтегрувати цифрові технології в навчальний процес на основі педагогічних принципів. Важливим концептуальним орієнтиром у європейській освіті є рамкова концепція «DigCompEdu», розроблена К. Редекером та редагована Й. Пуніє. У цій концептуальній основі 22 цифрові компетентності освітян класифіковано за шістьма сферами (професійна взаємодія, цифрові ресурси, навчання та викладання, оцінювання, розвиток здібностей учнів та формування цифрових компетентностей учнів). При цьому акцент робиться не на самому опануванні окремих технічних засобів, а на їхньому використанні для вдосконалення освітнього процесу та інноваційних перетворень [9].

Під час підготовки майбутніх вчителів фізики та математики особливо важливим є інтегрування елементів змісту навчальних дисциплін, педагогіки та технологій. Такий підхід узгоджується з концепцією TPACK, і в рамках цієї концепції для ефективного використання технологій необхідна взаємопов'язаність технічних знань із змістом навчальних дисциплін та педагогічними методами. У найновішому дослідженні С. Альбу та М. Ліндмаєра, присвяченому цифровій компетентності майбутніх вчителів математики, цифрові навички розглядаються вже не як просто загальні технічні вміння, а як компетентності, пов'язані з використанням конкретних математичних інструментів, зокрема комп'ютерних алгебраїчних систем, динамічної геометрії та програм для роботи з електронними таблицями. Автори розробили метод оцінювання на основі результатів діяльності для оцінки здатності майбутніх вчителів математики використовувати ці інструменти у своїй професійній діяльності [7].

У фізичній освіті великі можливості відкривають віртуальні лабораторії та комп'ютерне моделювання. Т. де Йонг, М. С. Лінн та З. С. Захарія проаналізували досвід використання фізичних та віртуальних лабораторій і зазначили, що навіть за умов обмеженого доступу до реального обладнання цифрове середовище дає змогу моделювати наукові явища, проводити експериментальні дослідження та обробляти дані. Водночас автори наголошують, що замість протиставлення віртуальних і фізичних лабораторій доцільно поєднувати їх відповідно до навчальних цілей [8].

Українські дослідження також підтверджують важливість цифрових технологій у підготовці майбутніх вчителів фізики. Зокрема, Я. Міненко та М. Чумак розглядають цифрову грамотність як важливий чинник професійного успіху майбутніх вчителів фізики та називають віртуальні лабораторії, симуляційні середовища, цифрове обладнання, датчики, інтерактивні демонстрації та засоби автоматичного вимірювання важливими інструментами професійної діяльності. А. Юрченко, Ю. Ховорстіна, В. Шамонія та О. Семеніхіна досліджують стан використання цифрових технологій у фізичній освіті в Україні, зокрема віртуальних лабораторій та комп'ютерного моделювання. Це набуває особливого значення в умовах обмеженого доступу до традиційного експериментального обладнання [6].

У власному дослідженні було проаналізовано можливості цифрових інструментів, зазначає, що вони є потужною рушійною силою, яка сприяє якісному оновленню освітнього процесу. Підкреслюємо, що такі засоби «збагачують традиційні методи навчання інноваційними підходами, формами та прийомами, створюють позитивний емоційний фон у процесі навчання, залучають учнів до активної взаємодії з інформацією, а також забезпечують двосторонню комунікацію між усіма учасниками освітнього процесу та створюють умови для творчої співпраці та командної роботи» [4].

Для глибшого розуміння особливостей функціонування цифрових інструментів у досліджуваній галузі доцільно конкретно роз'яснити сутність поняття «академічна мобільність». З юридичної точки зору, відповідно до Закону України «Про вищу освіту» (2014 р.), це поняття тлумачиться як «можливість учасників освітнього процесу проходити навчання, викладання, стажування або здійснювати наукову діяльність в інших закладах вищої освіти (наукових установах) на території України або за її межами» [1].

Розвиваючи цю думку, О. Антонов та О. Антонова розглядають академічну мобільність як особливу організаційну форму освітнього процесу. На думку дослідників, академічна мобільність надає студентам та викладачам можливість навчатися, проходити практику або займатися науковою діяльністю в інших закладах вищої освіти в країні чи за кордоном, а отже, створює основу для особистісного та професійного самореалізації [2].

Сучасна практика академічної мобільності дедалі більше залежить від цифрової інфраструктури, яка забезпечує постійну комунікацію, швидкий обмін науковим та методологічним контентом, а також прозорість

оцінювання та визнання навчальних досягнень, впровадження цифрових інструментів надає навчальному процесу гнучкості, адаптивності та високої доступності [3]. Це дає змогу створити високотехнологічне навчальне середовище, доповнити традиційні методи викладання інтерактивними та імітаційними моделями (що є надзвичайно важливим у галузі фізики та математики) та забезпечити високу ефективність програм мобільності, зокрема у віртуальному форматі[5].

З метою систематичного аналізу спільних тенденцій, відмінностей та особливостей використання інноваційних інструментів у сфері освіти ЄС та України ми систематизували та склали порівняльну таблицю 1.

Таблиця 1.

Компаративний аналіз цифрових інструментів навчання фізико-математичних дисциплін у професійній підготовці майбутніх педагогів ЄС та України

Критерій	Європейський Союз	Україна
Особливості освітнього контексту	Планомірне та системне залучення цифрових інструментів у навчальний процес. Основний вектор – планова модернізація підготовки фахівців.	Впровадження цифрових технологій як вимушений та необхідний крок для забезпечення гнучкості й безперервності навчання в екстремальних умовах.
Теоретична та методологічна база	Опора на стандартизовані європейські рамки (DigCompEdu, модель TPACK). Оцінювання навичок відбувається через розв'язання конкретних практичних завдань.	Адаптація та імплементація концепцій TPACK і DigCompEdu з акцентом на підвищення рівня професійної грамотності педагога.
Критерій	**Європейський Союз**	**Україна**
Ключовий інструментарій	Математичний напрям: середовища динамічної математики (GeoGebra), комп’ютерна алгебра, електронні таблиці. Фізичний напрям: віртуальні лабораторії, симуляції, моделювальні системи. Загальнодидактичний: штучний інтелект, освітня аналітика, хмарні сервіси.	Математичний напрям: динамічні математичні середовища (GeoGebra), засоби моделювання. Фізичний напрям: віртуальні лабораторні практикуми, інтерактивні демонстрації, датчики та цифрові вимірювальні комплекси. Загальнодидактичний: хмарні навчальні платформи.
Специфіка застосування лабораторного комплексу (з фізики)	Гібридний підхід: розумне поєднання реального фізичного експерименту з комп’ютерним моделюванням залежно від дидактичних цілей.	Превалювання віртуального експерименту: активне застосування симуляцій через відсутність або обмеженість доступу до реальної лабораторної бази.
Орієнтири у підготовці студентів	Формування предметно-орієнтованих цифрових компетентностей (уміння працювати з фаховим софтом, аналіз даних навчальної діяльності).	Напрацювання практичного досвіду роботи з інструментами, опанування базового функціоналу програмних продуктів для забезпечення освітнього процесу.
Практична реалізація	Акцент на інтенсивності та різноманітності цифрових засобів, що безпосередньо підвищує рівень цифровізації вчителя.	Покрокове освоєння та інтеграція інтерактивних матеріалів, датчиків і віртуальних симуляцій у практику майбутніх учителів.

Наукова цінність цього дослідження полягає в тому, що воно теоретично узагальнило та систематизувало концептуальний підхід до використання інноваційних цифрових інструментів у процесі підготовки майбутніх вчителів фізики та математики в Україні та країнах Європейського Союзу (ЄС). У рамках цього дослідження було проведено всебічний порівняльний аналіз адаптації та впровадження міжнародних моделей цифрової компетентності, зокрема таких концептуальних рамок, як DigCompEdu та TPACK, у контексті викладання фізики та математики. У цьому дослідженні з академічної точки зору глибоко досліджуються особливості застосування спеціалізованого програмного забезпечення (динамічні математичні середовища, комп’ютерна алгебра, системи віртуальних лабораторій, цифрові датчики, симулятори тощо) у залежності від освітнього контексту. Крім того, у дослідженні висвітлено педагогічний потенціал цифрових технологій не лише як суто технічних засобів навчання, а й як стратегічних ресурсів та інфраструктурної основи для забезпечення гнучкості освітнього процесу, розвитку цифрової культури та реалізації програм віртуальної академічної мобільності для майбутніх викладачів, які прагнуть працювати у сфері вищої освіти.

Практичне значення отриманих результатів полягає в тому, що їх можна безпосередньо впровадити в освітній процес вищих навчальних закладів з метою модернізації змісту навчання та методики викладання для підготовки майбутніх викладачів фізики та математики.

Створені матеріали порівняльного аналізу та систематизовані дані стануть орієнтиром для впровадження передового європейського досвіду, зокрема щодо поєднання практичних та віртуальних експериментів, а також використання критеріїв оцінювання цифрових навичок на основі практичної діяльності. Результати цього дослідження можуть бути використані для перегляду освітніх та професійних програм, розробки навчальних планів з методики викладання фізики та математики, а також з питань застосування цифрових технологій у навчанні; для створення методичних посібників та навчальних матеріалів для лабораторних занять; а також для планування спеціальних курсів у системі післядипломної освіти та проведення курсів підвищення кваліфікації для викладачів.

Висновки. Цифровізація підготовки навчання фізико-математичних дисциплін в країнах ЄС має системний та інституційний характер і ґрунтується на стандартизованих концептуальних рамках. Водночас у сфері освіти України, в умовах ускладнення ситуації з функціонуванням вищих навчальних закладів, цей процес набуває яскраво вираженого адаптивного та доповнювального характеру, що зумовлено необхідністю забезпечення гнучкості та безперервності навчання.

Водночас у методиці викладання фізики європейська практика робить акцент на концептуальному синергічному ефекті реальних та віртуальних експериментів, тоді як в Україні як основні інноваційні ресурси все активніше використовуються системи віртуальних лабораторій, середовища моделювання та цифрові датчики.

1. *Абрамова О. В., Бурдун В., Вдовенков В.* Педагогічні особливості застосування сучасних освітніх технологій в процесі едукації здобувачів освіти. Modern approaches to ensuring sustainable development: Katowice, 2023. С. 107-113.
2. *Антонов О. В., Антонова О. Є.* Вплив сучасних моделей штучного інтелекту на розвиток критичного мислення майбутніх фахівців. Актуальні питання у сучасній науці. 2025. № 11 (37). С. 255–268.
3. Беспарточна О. І, Гайкова А. Р. Трендові інновації в освіті. Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції «Розвиток педагогічної майстерності майбутнього педагога в умовах освітніх трансформацій». Глухів, 2022. С.29–32. (https://tpgnpu.ho.ua/images/my_images/doc_pdf/vidavnictvo/2022/-zbirnik_maket_SG-13-05-2022.pdf)
4. *Беспарточна О. І, Гайкова А. Р.* Забезпечення якості та удосконалення вищої освіти в сучасних умовах. Матеріали IV Міжнародної науково-практичної конференції «Актуальні проблеми педагогічної освіти: реалії, нові ідеї та перспективи» (Львів, 5–6 травня 2022 р.). С.173–176.
5. *Горбатюк Р. М., Волкова Н. В., Бубняк Ю. Р.* Формування готовності здобувачів вищої освіти до використання цифрових технологій у професійній діяльності. Актуальні проблеми та перспективи технологічної і професійної освіти : матеріали міжнар. наук.-практ. конф. Тернопіль : ТНПУ, 2023. С. 210.
6. Фізико-математична освіта : науковий журнал. URL: https://fmo-journal.org/index.php/fmo/article/view/303 (дата звернення: 25.09.2026).
7. *Albu S., Lindmeier M.* Performance-based assessment of prospective mathematics teachers' digital competencies. Journal für Mathematik-Didaktik. 2024. Vol. 45. Art. 251. DOI: https://doi.org/10.1007/s13138-024-00251-7.
8. *de Jong T., Linn M. C., Zacharia Z. C.* Physical and virtual laboratories in science and engineering education. Science. 2013. Vol. 340, No. 6130. P. 305–308. DOI: https://doi.org/10.1126/science.1230579.
9. Digital Competence Framework for Educators (DigCompEdu) / European Commission, Joint Research Centre. URL: https://joint-research-centre.ec.europa.eu/scientific-activities/key-competences-lifelong-learning/digcompedu_en (date of access: 25.09.2026).

INNOVATIVE DIGITAL TOOLS FOR TEACHING PHYSICS AND MATHEMATICS IN THE PROFESSIONAL TRAINING OF FUTURE TEACHERS: EU AND UKRAINIAN EXPERIENCES

The article conducts a comparative pedagogical analysis of the application of innovative digital tools in the professional training of future physics and mathematics teachers in the European Union and Ukraine. The purpose of the study is to identify key trends, pedagogical opportunities, and practical features of integrating digital technologies into higher teacher education across both educational spaces, as well as to outline prospects for adapting European experience in Ukraine.

The research employs methods of systematic analysis, synthesis, and comparative-pedagogical deduction to categorize digital learning environments and compare legislative and conceptual frameworks. The study utilizes

international models, specifically DigCompEdu and TPACK, as theoretical benchmarks for evaluating digital competence.

The principal results demonstrate that while the EU relies on a systematic, framework-driven approach prioritizing subject-specific digital competence and a balance between physical and virtual experiments, Ukrainian practice exhibits an adaptive and compensatory character aimed at maintaining educational continuity amidst challenging operational conditions. Common ground is identified in the widespread adoption of dynamic mathematics environments (such as GeoGebra) and computer algebra systems. Furthermore, specialized digital tools, virtual laboratories, and interactive simulations are shown to serve not only as instructional resources but also as essential infrastructure for fostering digital culture and enabling virtual academic mobility.

УДК 373.5:514

ВИКОРИСТАННЯ ІНСТРУМЕНТІВ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Андрій БОЙКО
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль, Україна
boyko.a1@tnpu.edu.ua

Стрімкий розвиток цифрових технологій та глобальне цифрове перетворення освітнього середовища ставлять перед сучасною шкільною математичною освітою нові фундаментальні виклики [3; 4]. Традиційні методи викладання та оцінювання результатів навчання потребують суттєвої переорієнтації, оскільки здобувачі освіти отримують відкритий доступ до потужних обчислювальних та генеративних систем [1; 4]. У цьому контексті інтеграція інструментів штучного інтелекту у навчальний процес з математики перестає бути додатковим технічним засобом і стає системним фактором трансформації педагогічної практики, відкриваючи широкі можливості для персоналізації, розбудови дослідницьких середовищ та підвищення ефективності опанування точних наук [1; 3].

Аналізуючи фундаментальні виклики цифрової трансформації освітнього простору, М. П. Шишкіна зазначає, що «впровадження технологій штучного інтелекту в освітній процес створює умови для проектування освітнього середовища нового типу, де комп’ютерні системи виступають інтелектуальними партнерами суб’єктів навчання» [4]. Дослідниця підкреслює, що «сучасний учитель має бути готовим до критичного осмислення та адаптації інструментів штучного інтелекту відповідно до педагогічних цілей» [4]. Завдяки цьому штучний інтелект стає не просто допоміжним технічним засобом, а повноцінним компонентом відкритого освітнього середовища, який стимулює переосмислення стандартних методичних підходів до викладання математичних дисциплін.

Розвиваючи концепцію системної адаптації освітнього середовища, С.О. Семеріков розкриває потенціал штучного інтелекту в контексті персоналізації освітнього процесу та оптимізації підготовки вчителів. Науковець стверджує, що «персоналізація навчання на основі штучного інтелекту передбачає побудову адаптивної освітньої траєкторії, яка враховує індивідуальні когнітивні стилі, темп засвоєння матеріалу та поточний рівень навчальних досягнень здобувача освіти». На відміну від традиційних статичних підручників, адаптивні ШІ-сервіси здатні аналізувати помилки учня в режимі реального часу, диференціювати рівень складності математичних задач та надавати градуйовані підказки. Як зауважує С. О. Семеріков, «інтелектуальні навчальні системи мають спрямовувати хід міркувань учня через формулювання навідних запитань, не надаючи готової відповіді». Це створює підґрунтя для побудови гнучких освітніх траєкторій, де кожен учень опановує складні математичні концепції у власному ритмі.

Персоналізація навчання тісно переплітається з практичними методами активного залучення учнів до пізнавальної діяльності. Деталізуючи методичні аспекти застосування ШІ безпосередньо у навчанні математики, О.О. Гриб'юк наголошує, що «використання технологій штучного інтелекту вчителями математики в процесі дослідницького навчання є потужним чинником мотивації навчально-пізнавальної діяльності учнів». Дослідниця обґрунтовує думку про те, що «інтеграція ШІ з середовищами динамічної математики перетворює навчальний процес із пасивного засвоєння готових знань на активний процес формулювання гіпотез, комп'ютерного експериментування та самостійного відкриття математичних закономірностей». Учні отримують можливість будувати інтерактивні моделі складних геометричних об’єктів, візуалізувати динаміку функціональних залежностей та здійснювати стохастичний аналіз даних. За переконанням О. О. Гриб'юк, «дослідницьке навчання із застосуванням інструментів ШІ дозволяє учням глибше усвідомити практичну цінність математичного апарату», що істотно підвищує їхню внутрішню мотивацію до навчання [1].

Водночас розширення дослідницьких можливостей учнів висуває підвищені вимоги до їхньої здатності критично оцінювати інформацію, отриману за допомогою цифрових інструментів. У цьому контексті В. В. Коваленко акцентує увагу на тому, що «використання засобів штучного інтелекту потребує цілеспрямованого формування цифрової компетентності як учнів, так і вчителів, зокрема в частині критичного оцінювання згенерованих даних». При розв'язуванні математичних задач інструменти штучного інтелекту, зокрема генеративні чат-боти та спеціалізовані обчислювальні алгоритми, можуть слугувати ефективними асистентами для пошуку альтернативних способів доведення теорем або оптимізації математичних обчислень. Проте авторка зауважує, що «освітяни та здобувачі освіти повинні усвідомлювати обмеження сучасних моделей ШІ, виявляти логічні й обчислювальні помилки та зіставляти отримані результати з фундаментальними математичними законами» [2].

Враховуючи наукові напрацювання сучасних вчених та педагогів можна прийти до висновку, що ефективне впровадження штучного інтелекту на уроках математики потребує збалансованого підходу. З одного боку, штучний інтелект надає вчителю потужний інструментарій для розширення методичного арсеналу, а саме оптимізації підготовки до уроків, створення різнорівневих карток завдань, розробки інтерактивних тестів та формулювання прикладних міждисциплінарних задач [2; 3]. З іншого боку, надзвичайно важливо зберігати пріоритет самостійного логіко-математичного мислення здобувачів освіти, щоб інструменти ШІ не замінювали інтелектуальну працю учнів і не зводили вивчення предмета до механічного отримання відповідей [1]. Неменше суттєвим аспектом залишається дотримання норм академічної доброчесності та етичних принципів використання генеративних сервісів у навчальній діяльності [2; 4].

Таким чином, упровадження інструментів штучного інтелекту на уроках математики виступає потужним каталізатором модернізації шкільної освіти. Комплексне поєднання дослідницького навчання, персоналізованих освітніх траєкторій та критичного аналізу результатів функціонування ШІ дозволяє не лише підвищити якість засвоєння математичних знань, а й формує у здобувачів освіти ключові компетентності, необхідні для успішної самореалізації в високотехнологічному цифровому суспільстві.

1. *Гриб'юк О. О.* Використання технологій штучного інтелекту вчителями математики в процесі дослідницького навчання для мотивації навчально-пізнавальної діяльності учнів / О. О. Гриб'юк // Використання відкритого освітнього середовища з елементами штучного інтелекту для професійного розвитку вчителів : метод. рек. / за ред. М. П. Шишкіної. – Київ : Інститут цифровізації освіти НАПН України, 2024. – С. 35–48.
2. *Коваленко В. В.* Штучний інтелект у процесі розвитку цифрової компетентності освітян / В. В. Коваленко // Використання відкритого освітнього середовища з елементами штучного інтелекту для професійного розвитку вчителів : метод. рек. / за ред. М. П. Шишкіної. – Київ : Інститут цифровізації освіти НАПН України, 2024. – С. 26–37.
3. *Семеріков С. О.* Оптимізація підготовки та перепідготовки вчителів для епохи персоналізованого навчання на основі штучного інтелекту / С. О. Семеріков // Використання відкритого освітнього середовища з елементами штучного інтелекту для професійного розвитку вчителів : метод. рек. / за ред. М. П. Шишкіної. – Київ : Інститут цифровізації освіти НАПН України, 2024. – С. 10–25.
4. *Шишкіна М. П.* Нові виклики для вчителів / М. П. Шишкіна // Використання відкритого освітнього середовища з елементами штучного інтелекту для професійного розвитку вчителів : метод. рек. / за ред. М. П. Шишкіної. – Київ : Інститут цифровізації освіти НАПН України, 2024. – С. 6–9.

THE USE OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE TOOLS IN MATHEMATICS LESSONS

English abstract. The purpose of the work is to analyze the pedagogical potential and methodological features of integrating artificial intelligence (AI) tools into school mathematics education in the context of digital educational transformation. The study employs methods of analytical synthesis, pedagogical generalization, and systemic analysis of modern approaches to personalized, inquiry-based, and adaptive learning. The principal results demonstrate that AI serves as an interactive catalyst for modernizing pedagogical practices by providing adaptive learning trajectories, automating differentiation, and supporting dynamic mathematical modeling. The paper emphasizes the necessity of developing digital literacy and critical thinking to evaluate AI-generated outputs, maintain academic integrity, and preserve the priority of students' independent logical reasoning.

УДК 372.851

ПРИКЛАДНА СПРЯМОВАНІСТЬ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ ЯК ЗАСІБ ПІДВИЩЕННЯ МОТИВАЦІЇ

Марта ВИННИЦЬКА
Тернопільський Національний Педагогічний Університет м. Тернопіль, Україна
martavynnytska@gmail.com

Система математичної освіти України сьогодні стикається з низкою викликів, серед яких значні освітні втрати, спричинені війною, результати міжнародного дослідження PISA-2022, відповідно до яких 42 % українських підлітків не досягли базового рівня математичної грамотності, а також недостатні результати НМТ з математики протягом останніх років. Важливим чинником зниження зацікавленості учнів у вивченні математики є недостатній зв'язок навчального матеріалу з повсякденним життям. Надмірна абстрактність теоретичних відомостей, перевага завдань алгоритмічного характеру та обмежена кількість практичних задач ускладнюють усвідомлення учнями значущості математичних знань, сприяють виникненню математичної тривожності й послаблюють пізнавальний інтерес до предмета. Водночас концепція Нової української школи та Державний стандарт базової середньої освіти передбачають посилення компетентнісного підходу, спрямованого на розвиток здатності застосовувати математичні знання для вирішення практичних завдань і життєвих ситуацій. Тому впровадження прикладної спрямованості в навчання математики є актуальним напрямом підвищення внутрішньої мотивації учнів та вдосконалення освітнього процесу.

Мета дослідження: здійснити теоретичне обґрунтування та визначити методичні шляхи впровадження прикладної спрямованості навчання математики для підвищення мотивації учнів в умовах актуальних викликів сучасної освіти.

Основний зміст. Прикладна спрямованість математичної освіти передбачає організацію змісту навчання, добір методів, форм і засобів роботи таким чином, щоб продемонструвати взаємозв'язок математики з повсякденним життям, майбутньою професійною діяльністю та іншими галузями знань. Її реалізація спрямована на засвоєння учнями системи математичних знань і формування здатності використовувати їх для розв'язання практичних завдань.

До основних засобів забезпечення прикладної спрямованості належать:

Практико-орієнтовані задачі, зміст яких відображає знайомі учням життєві ситуації: розрахунок витрат, складання бюджету, проведення вимірювань, опрацювання даних, розв'язання побутових і професійних проблем.

Математичне моделювання, що передбачає послідовне переведення реальної ситуації на математичну мову, використання відповідних математичних методів і подальше тлумачення та оцінювання отриманих результатів.

Проєктна діяльність і STEM-завдання, які забезпечують застосування математичних знань у процесі виконання дослідницьких, творчих і міжпредметних завдань.

Проблемно-пошукові ситуації та мотиваційні задачі, які доцільно використовувати на початковому етапі вивчення нової теми для зацікавлення учнів і демонстрації практичної необхідності відповідних знань.

Регулярне застосування зазначених підходів сприяє усвідомленню практичної цінності математики, зменшенню математичної тривожності, розвитку пізнавального інтересу та посиленню внутрішньої мотивації школярів. Крім того, воно забезпечує формування математичної грамотності відповідно до підходів PISA, яка охоплює здатність формулювати математичні проблеми, застосовувати відповідні знання й інструменти та інтерпретувати отримані результати в контекстах реального життя.

Важливе значення прикладна спрямованість має на різних етапах навчання. У 5–6 класах вона допомагає закласти міцну основу для розуміння базових математичних понять і сформувати позитивне ставлення до предмета. У старших класах її застосування дає змогу пов'язати математичні знання з професійним самовизначенням учнів та їхніми майбутніми освітніми потребами. За умов воєнного стану й організації змішаного навчання особливої актуальності набувають короткі практичні навчальні блоки та використання цифрових засобів математичного моделювання, зокрема GeoGebra і Desmos. Такі інструменти сприяють візуалізації навчального матеріалу, підтриманню зацікавленості учнів і забезпеченню послідовності засвоєння знань.

Висновки. Прикладна спрямованість навчання математики є дієвим засобом підвищення навчальної мотивації учнів, особливо в умовах значних освітніх втрат і послаблення інтересу до математичних

дисциплін.Послідовне використання практико-орієнтованих задач, математичного моделювання та проєктної діяльності допомагає учням усвідомити значущість математичних знань у повсякденному житті, зменшує математичну тривожність і сприяє розвитку математичної грамотності.Упровадження прикладного підходу узгоджується з положеннями концепції Нової української школи та компетентнісними орієнтирами PISA, забезпечуючи практичну спрямованість навчання й активну участь учнів в освітньому процесі.Ефективність реалізації прикладної спрямованості залежить від належного методичного забезпечення, зокрема наявності тематичних добірок практичних задач і навчальних проєктів, професійного розвитку педагогів та адаптації навчальних програм до актуальних освітніх потреб.

1. *Бурда М. І., Васильєва Д. В., Волошена В. В.* Прикладна спрямованість навчання математики в гімназії : методичний посібник. Київ : Видавничий дім «Освіта», 2024. 161 с.
2. *Насадюк Т. О.* Методика реалізації прикладної спрямованості навчання математики учнів 5–6 класів : дис. … д-ра філософії : 011. Київ, 2023.
3. OECD. PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning and Equity in Education. Paris : OECD Publishing, 2023.
4. *Лип'ятських А. В.*Чому діти не знають математику і що з цим робити: дослідження EdEra та Tokarev Foundation. Київ : EdEra, 2025.

УДК 378.1:004.8

ВИКОРИСТАННЯ ГЕНЕРАТИВНОГО ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ В НАУКОВО-ДОСЛІДНИЦЬКІЙ ДІЯЛЬНОСТІ СТУДЕНТІВ

Галина ГЕНСЕРУК
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль, Україна
genseruk@tnpu.edu.ua
Сергій МАРТИНЮК
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль, Україна
sergmart65@tnpu.edu.ua

Розвиток цифрових технологій зумовлює трансформацію організації освітнього процесу та науково-дослідницької діяльності у закладах вищої освіти. Однією із інноваційних технологій останніх років є генеративний штучний інтелект. Використання інструментів генеративного штучного інтелекту відкриває нові можливості для організації науково-дослідницької діяльності студентів, зокрема: визначення перспективних напрямів досліджень, формулювання дослідницьких запитань, пошук наукових публікацій за темою дослідження, систематизація теоретичного матеріалу, опрацьовування та представлення результатів експериментального дослідження. Водночас використання технологій штучного інтелекту супроводжується низкою проблем, оскільки згенеровані відповіді можуть містити недостовірні відомості, вигадані посилання, помилкові інтерпретації наукових результатів. Використання таких інструментів без критичної оцінки створює ризик формального виконання дослідницьких завдань, зниження самостійної роботи студентів і порушення принципів академічної доброчесності.

В контексті цього актуальним є дослідження можливостей генеративного штучного інтелекту для наукової-дослідницької діяльності студентів та обґрунтування умов їх відповідального та доброчесного використання.

Проблема використання штучного інтелекту в освітньому процесі та науковій діяльності протягом останніх років активно вивчається вітчизняними та закордонними науковцями. В їхньому колі наукових інтересів розглядаються питання ефективної інтеграції технологій штучного інтелекту в освітній процес та етичних аспектів їх використання, трансформації академічного письма.

Юсуф А. та інші у своєму дослідженні пропонують систематичний огляд публікацій, присвячених використанню генеративного штучного інтелекту в освіті та дослідженнях. У роботі виокремлено основні напрями наукової дискусії: практичне застосування технологій, їхній потенційний вплив, етичні ризики, досвід користувачів, інституційне впровадження та розвиток професійних компетентностей. Дослідники наголошують на значному потенціалі GenAI для підтримки навчання, письма, професійного розвитку й міждисциплінарної взаємодії [2].

Важливим документом для формування принципів критичного та відповідального застосування генеративного штучного інтелекту є рекомендації ЮНЕСКО, у яких обґрунтовано людиноцентричний підхід до

використання штучного інтелекту, необхідність захисту персональних даних, дотримання етичних принципів, розвитку потенціалу науковців [3].

Особливості використання технологій штучного інтелекту у проєктній діяльності майбутніх фахівців в умовах цифрової трансформації освіти розглянуто українськими науковцями [1]. Авторами обґрунтовано сучасні підходи до організації проєктного навчання та визначено роль штучного інтелекту у формуванні практичних навичок, самостійності, командної взаємодії та здатності до прийняття рішень.

Генеративний штучний інтелект доцільно розглядати як сукупність технологій, здатних створювати новий інформаційний контент на основі закономірностей, засвоєних під час навчання на великих масивах даних. У студентській науковій діяльності такі технології можуть застосовуватися на різних етапах дослідницького процесу. На початковому етапі дослідження інтелектуальні системи допомагають визначити актуальність проблеми, сформулювати мету й завдання, конкретизувати об’єкт і предмет дослідження, запропонувати можливі гіпотези та дослідницькі запитання. Взаємодія з чат-ботом дає змогу розглянути проблему з різних позицій і сформувати попередню структуру майбутньої наукової роботи. Проте остаточний вибір теми, обґрунтування її актуальності й визначення наукової новизни мають ґрунтуватися на самостійному аналізі наукових джерел.

Другим важливим напрямом є пошук та аналіз наукової літератури. Сучасні системи на основі штучного інтелекту можуть допомагати знаходити публікації за запитами, узагальнювати їхній зміст, порівнювати методологію досліджень і виокремлювати результати, що стосуються визначеної проблеми. Це скорочує час на попереднє опрацювання літератури, однак не скасовує необхідності читання першоджерел.

Третій напрям охоплює підготовку наукового тексту. Штучний інтелект може використовуватися для формування плану статті, вдосконалення логічної структури викладу, мовного редагування, перекладу термінології, перевірки зв’язності тексту та підготовки анотації. Важливо розрізняти мовну допомогу й створення змісту дослідження замість автора. Науковий текст має відображати реальні результати роботи студента, а наведені твердження повинні підтверджуватися перевіреними джерелами.

Четвертим напрямом є підтримка практичної та експериментальної діяльності. Генеративні моделі можуть допомагати розробляти програмний код, пояснювати алгоритми, пропонувати способи візуалізації даних, створювати шаблони таблиць і надавати рекомендації щодо застосування методів статистичного аналізу. У фізико-математичних, технічних та інформаційних дослідженнях такі можливості сприяють моделюванню процесів і автоматизації рутинних операцій. Водночас результати обчислень, формули, програмний код і статистичні висновки потребують незалежної перевірки.

Отже, генеративний штучний інтелект може підтримувати дослідницький процес на всіх його етапах – від пошуку проблеми до представлення результатів. Його ефективність залежить від характеру завдання, якості вихідних даних, точності запитів і здатності студента критично оцінювати отриману інформацію.

1. *Генсерук, Г., Бойко, М., Мартинюк, С., & Мушиньскі, А.* Технології штучного інтелекту у проєктній діяльності майбутніх фахівців. Наукові записки М. Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка. Серія: педагогіка, 2026, (1), 54-63.
2. *Yusuf, A., Pervin, N., Román-González, M., & Noor, N. M.*. Generative AI in education and research: A systematic mapping review. *Review of Education*, 2024, 12, e3489.
3. *Miao F., Holmes W.*Guidance for Generative AI in Education and Research. Paris: UNESCO, 2023. 48 p.

GENERATIVE ARTIFICIAL INTELLIGENCE IN STUDENT RESEARCH: OPPORTUNITIES AND RESPONSIBLE USE

This paper explores the potential of generative artificial intelligence to support students’ research activities in higher education. It outlines key applications, including formulating research questions, searching for and analysing academic literature, preparing scientific texts, and supporting data analysis and the presentation of results. Particular attention is paid to risks associated with inaccurate information, fabricated references, reduced student independence, and breaches of academic integrity. The paper emphasises that responsible use requires critical evaluation of AI-generated content, verification against original sources, and students’ accountability for their research. Generative AI is therefore considered a tool for supporting, rather than replacing, independent research.

УДК 373.5.016:51:37.091.33

ВИКОРИСТАННЯ STEM-ПРОЄКТІВ ПРИ ВИВЧЕННІ ТЕМИ «ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ»

ВікторіяГИКАВА
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль, Україна
hikavavika@gmail.com

Сучасна освітня політика України ґрунтується на компетентнісному підході, який передбачає не лише засвоєння учнями теоретичного матеріалу, а й формування здатності застосовувати його для вирішення повсякденних життєвих проблем. Провідним напрямом реалізації цього підходу є оновлення природничо-математичної освіти шляхом упровадження STEM-технологій. Відповідно до Концепції розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти), ухваленої Кабінетом Міністрів України (розпорядження від 5 серпня 2020 р. № 960-р), у навчальному процесі акценти змінено на проєктну діяльність і вирішення проблемних завдань, розвиток логічного мислення, цифрової грамотності, дослідницьких навичок та вміння опрацьовувати інформацію [1].

STEM-підхід об'єднує природничі науки, технології, інженерію та математику, спрямовуючи школярів на цілісне використання отриманих знань у процесі вивчення довкілля та вирішення реальних і проблемних завдань. Головним здобутком такого формату навчання стає формування в учнів здатності аналізувати інформацію, мислити нестандартно, проводити дослідження, ефективно спілкуватися, а також упевнено працювати з числовими даними та розуміти закони природи. Серед усіх складових інтегрованої STEM-освіти математика набуває виняткового значення, оскільки вона є фундаментом для побудови моделей та вивчення закономірностей, властивих реальним процесам. З огляду на це, під час STEM-занять важливо, щоб математичні вміння не сприймалися лише як засіб для простих підрахунків, а слугували основою для власних пошуків, експериментів і розв'язання життєвих ситуацій [2-3].

Значними прикладними можливостями вирізняється тема «Похідна та її застосування»: завдяки ідеї похідної можна відстежувати швидкість зміни різних величин, досліджувати переміщення об’єктів та знаходити найкращі параметри. Водночас у процесі навчання цього матеріалу учні часто не сприймають, як математичні операції співвідносяться з життєвими подіями, що ускладнює розуміння практичної цінності поданого матеріалу. Через це пошук таких способів організації навчання, які сприяють активній дослідницькій діяльності школярів, набуває особливої актуальності.Відповідно до навчальних програм з математики, розміщених на офіційному сайті Міністерства освіти і науки України, тема «Похідна та її застосування» вивчається у 10 класі в межах курсу «Алгебра і початки аналізу». На стандартному рівні тему опрацьовують протягом чотирнадцяти годин. Головний акцент зроблено на розумінні похідної, її геометричному й фізичному змісті, засвоєнні правил диференціювання, аналізу монотонності та екстремумів функцій, визначенні найбільших і найменших величин, а також на розв’язанні простих задач прикладного характеру. Тобто вже на цьому етапі навчальна програма орієнтує на практичне використання похідної, зокрема для моделювання реальних явищ. Для поглибленого рівня відведено п’ятдесят годин, що дозволяє суттєво розширити спектр застосувань похідної. Крім основних понять, тут вивчають похідні складених та обернених функцій, похідні вищих порядків, опуклість графіка та точки перегину, а також застосування похідної для повного аналізу функцій, розв’язування рівнянь і нерівностей, обґрунтування математичних тверджень [4].

Основним завданням роботи було розроблення STEM-проєктів, які забезпечують практичну складову вивчення похідної, сприяють кращому засвоєнню навчального матеріалу та демонструють можливості застосування похідної для дослідження реальних процесів. Під час розроблення проєктів враховувалася необхідність їх доступності для учнів та можливості використання без встановлення додаткового програмного забезпечення. З цією метою для реалізації проєктів обрано мову програмування Python та хмарне середовище Google Colab, яке дає змогу виконувати програмний код безпосередньо у веббраузері.

Перший STEM-проєкт «Оптимальна коробка» присвячений дослідженню задачі оптимізації, що має практичне застосування у виробництві та проєктуванні пакувальних виробів. Предметною областю проєкту є моделювання процесу виготовлення коробки з прямокутного аркуша картону та визначення таких параметрів, за яких її об’єм буде максимальним. Для побудови математичної моделі розглядається прямокутний аркуш картону довжиною L та шириною W. У чотирьох кутах аркуша вирізаються квадрати зі стороною x, після чого краї заготовки згинаються. У результаті утворюється коробка з довжиною $L - 2x$, шириною $W - 2x$ та висотою x. Її об'єм визначається формулою:

$$V(x) = x(L - 2x)(W - 2x), \qquad 0 < x < \frac{\min(L, W)}{2}. \tag{1}$$

Для знаходження оптимального розміру вирізаних квадратів використовується похідна функції об'єму $V'(x)$. Учень досліджує функцію $V(x)$, знаходить її критичні точки та визначає значення x, за якого об'єм коробки набуває максимального значення. Графік залежності об'єму коробки від розміру вирізаного квадрата зображено на рис. 1.

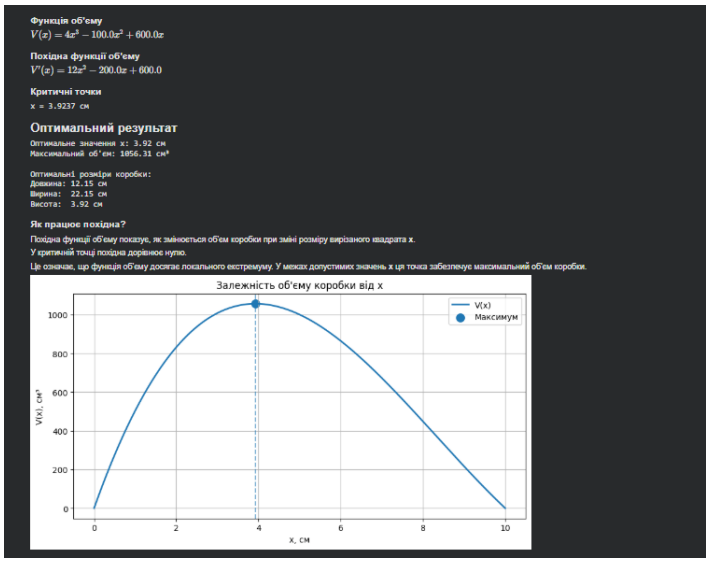


Рис. 1. Залежність об’єму коробки від x

Таким чином, математичне поняття похідної безпосередньо використовується для розв'язання практичної задачі на оптимізацію. У результаті виконання проєкту учень не лише знаходить максимальне значення функції аналітично, а й може візуально перевірити отриманий результат, порівнюючи різні значення x за допомогою повзунка та переглядаючи наочно, як змінюється розмір коробки, що показано на рис. 2.Це дає змогу простежити зв'язок між математичною моделлю, графічним представленням і реальною геометричною конструкцією.

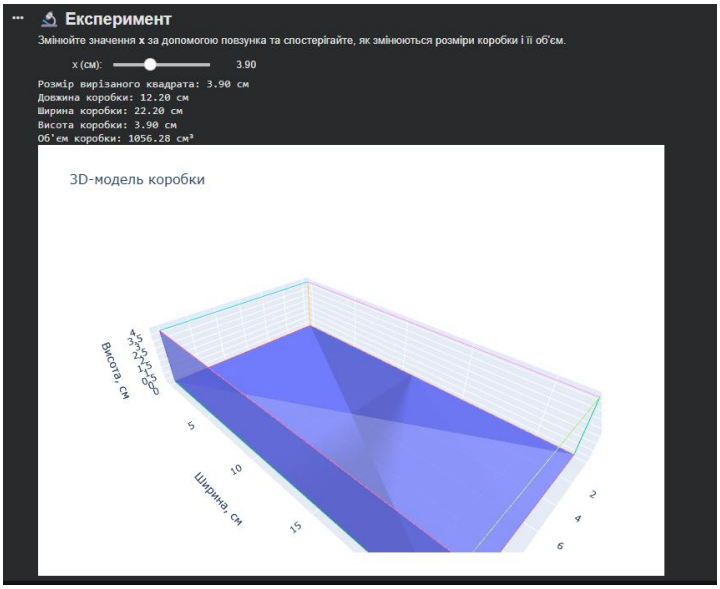


Рис. 2. Модель коробки

Другий STEM-проєкт «Температура та похідна» присвячений дослідженню швидкості зміни величини на прикладі природного процесу, що має практичне застосування в метеорології та аналізі часових рядів. Для побудови математичної моделі використано спрощену навчальну функцію періодичного процесу:

$$T(t) = 20 + 5\sin t, \tag{2}$$

де T(t) - температура в момент часу t. Ця модель не претендує на точний опис реальних метеорологічних вимірювань, а слугує для наочної демонстрації математичного змісту похідної. Швидкість зміни температури визначається похідною:

$$T'(t) = 5\cos t. \tag{3}$$

Учень досліджує функцію $T(t)$ та її похідну $T'(t)$, визначає моменти часу, коли похідна дорівнює нулю, а також з'ясовує, коли температура зростає, а коли спадає. Таким чином, математичне поняття похідної безпосередньо використовується для аналізу динаміки реального процесу. У результаті виконання проєкту учень не лише обчислює похідну аналітично, а й може за допомогою повзунка інтерактивно змінювати момент часу t, досліджуючи, як змінюється температура та швидкість її зміни, і візуально прослідкувати, як екстремуми на графіку температури відповідають нульовим значенням похідної. Це дає змогу простежити зв'язок між графіком функції, графіком її похідної та фізичним змістом досліджуваного процесу, що демонструється на рис. 3.

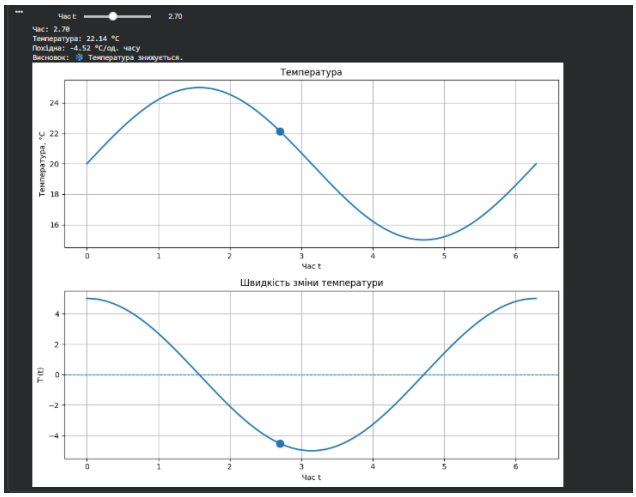


Рис. 3. Дослідження швидкості зміни температури

Третій STEM-проєкт «Рух автомобіля та похідна» присвячений дослідженню механічного руху та демонстрації фізичного змісту першої й другої похідних, що має практичне застосування в кінематиці та технічних розрахунках. Предметною областю проєкту є моделювання прямолінійного руху автомобіля та визначення його швидкості й прискорення в довільний момент часу. Для побудови математичної моделі розглядається функція шляху:

$$s(t) = 5t^2 + 2t, \tag{4}$$

де $s(t)$- пройдений шлях у момент часу t. Швидкість руху визначається першою похідною функції шляху:

$$v(t)=s'(t) = 10t + 2, \tag{5}$$

а прискорення – другою похідною:

$$a(t) = s''(t) = 10 \tag{6}$$

Учень досліджує функцію $s(t)$та обидві її похідні, визначає значення шляху, швидкості й прискорення для обраного моменту часу, а також аналізує характер руху. У результаті виконання проєкту учень не лише обчислює похідні аналітично, а й може візуально порівняти графіки шляху, швидкості та прискорення, а також сформулювати висновок про те, що рух є рівноприскореним, оскільки прискорення залишається сталим. За допомогою повзунка учень може інтерактивно обирати момент часу t та досліджувати, як змінюються шлях, швидкість і прискорення автомобіля в реальному часі, що показано на рис. 5. Це дає змогу простежити зв'язок між математичною моделлю, графічним представленням і фізичним явищем.

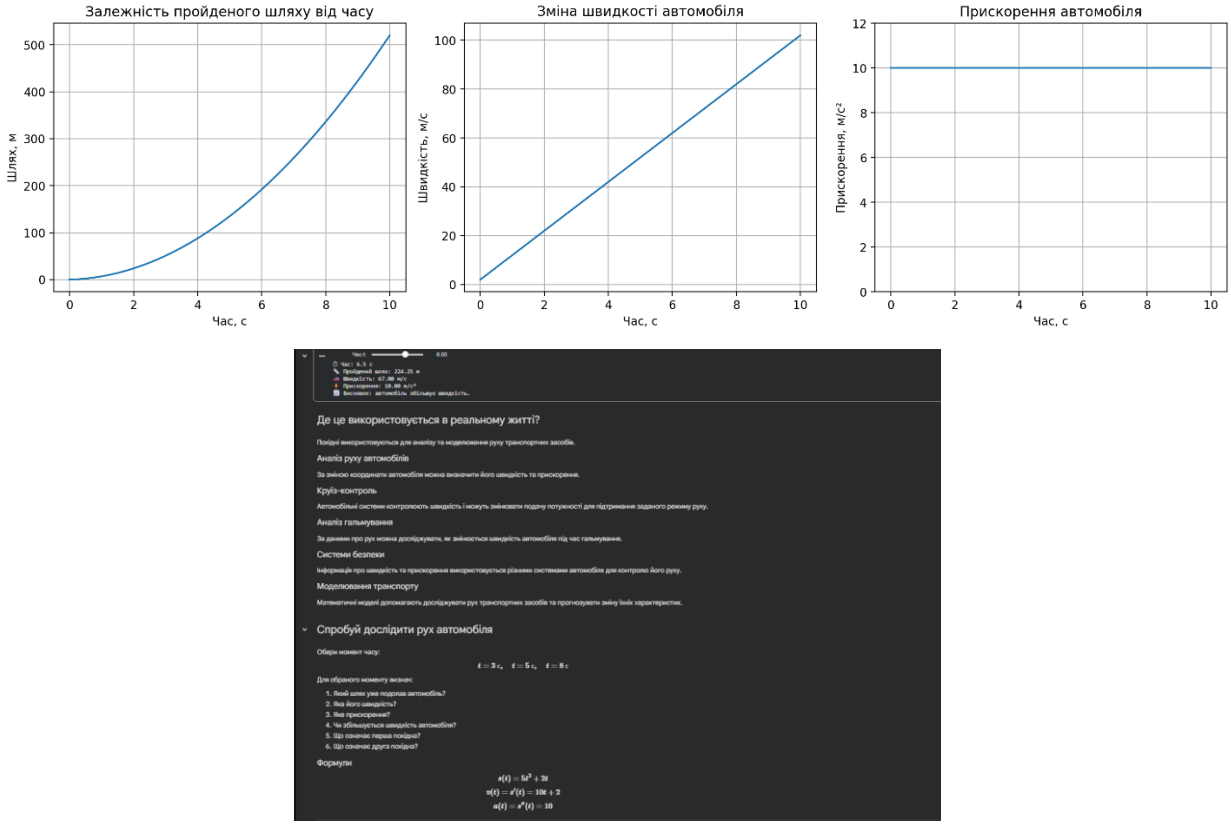


Рис. 5. Дослідження параметрів руху в обраний момент часу

Розроблені STEM-проєкти демонструють, що похідна може бути не лише предметом формального обчислення, а й інструментом дослідження реальних процесів – оптимізаційних, природних і фізичних. Поєднання математичного моделювання з програмною реалізацією дає змогу учневі побачити цілісний ланцюжок від постановки практичної задачі до інтерпретації математичного результату. Таким чином, використання STEM-проєктів під час вивчення теми «Похідна та її застосування» є перспективним напрямом підвищення практичної спрямованості навчання математики та потребує подальшої апробації в освітньому процесі.

1. Про схвалення Концепції розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти) : розпорядження Кабінету Міністрів України від 5 серп. 2020 р. № 960-р. URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/960-2020-%D1%80#Text (дата звернення: 24.09.2026).
2. *Goos M., Carreira S., Namukasa I. K.* Mathematics and interdisciplinary STEM education: recent developments and future directions. ZDM – Mathematics Education. 2023. Vol. 55. P. 1199–1217. DOI: 10.1007/s11858-023-01533-z.
3. *Hidayat A., Firmanti P.* Navigating the tech frontier: a systematic review of technology integration in mathematics education. Cogent Education. 2024. Vol. 11, No. 1. 2373559. DOI: 10.1080/2331186X.2024.2373559.
4. Навчальні програми для 10–11 класів / Міністерство освіти і науки України. URL: https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv (дата звернення: 28.09.2026).

USE OF STEM PROJECTS IN TEACHING THE TOPIC "DERIVATIVE AND ITSAPPLICATIONS"

The purpose of the work is to demonstrate the possibilities of using interactive STEM projects implemented in Python within the Google Colab environment to help high school students (grades 10–11) develop a practical understanding of the derivative and its applications. The methods used include analysis of regulatory documents and scientific-methodological literature on STEM education, mathematical modelling of real-life processes, design of learning tasks, and their software implementation with computational results verified against analytical solutions. Three STEM projects were developed, each illustrating a different application of the derivative: an optimization project, in which the derivative is used to find the box dimensions that maximize its volume; a temperature-modelling project, in

which the derivative represents the rate of temperature change over time; and a motion project, in which the first and second derivatives represent velocity and acceleration, respectively. The projects are intended as classroom tools rather than as the subject of a completed pedagogical experiment; their effectiveness in improving students' understanding and motivation requires further empirical verification.

УДК 378.147:52

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В КОМПЕТЕНТНІСНО-ОРІЄНТОВАНИХ ЗАВДАННЯХ З АСТРОНОМІЇ ЯК ЗАСІБ ІНТЕГРАЦІЇ ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ

Олександр ГОРОШКЕВИЧ
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль, Україна
ab270991hoo@gmail.com

Астрономія належить до дисциплін, у яких математичний апарат є не допоміжним інструментом, а мовою опису явищ: від сферичної тригонометрії в задачах орієнтування на небесній сфері до статистичної обробки спостережень у зоряній астрономії. У підготовці майбутніх учителів астрономії та фізики цей потенціал часто залишається нереалізованим: студенти підставляють дані у готову формулу, не обґрунтовуючи вибір моделі й не оцінюючи достовірність результату. Компетентнісно-орієнтовані завдання (КОЗ) дають змогу змінити цю практику, оскільки вимагають інтеграції знань, умінь і досвіду в проблемній ситуації, наближеній до реального наукового контексту [1, 3].

Мета роботи – показати, як математичне моделювання може бути системно закладене в структуру КОЗ з астрономії та запропонувати приклад такого завдання.

Структура КОЗ включає проблемну ситуацію, контекст, формулювання завдання, ресурси та критерії оцінювання [1]. Математична складова вбудовується в неї як послідовність чотирьох дій: 1) формалізація – вибір математичної моделі та обґрунтування припущень; 2) розв’язання – аналітичне або числове; 3) інтерпретація – перехід від числового результату до астрономічного висновку з оцінкою похибки; 4) верифікація – зіставлення результату з даними відкритих астрономічних баз [2]. Саме третя й четверта дії відрізняють КОЗ від традиційної обчислювальної задачі [3].

Приклад завдання. Проблемна ситуація: у відкритій базі даних для зорі подано тригонометричний паралакс p та видиму зоряну величину m. Потрібно оцінити відстань до зорі та її абсолютну зоряну величину, а також визначити, наскільки надійними є ці оцінки. Контекст – обробка даних астрометричного каталогу.

Відстань d (у парсеках) та абсолютна зоряна величина M пов’язані з величинами p (у кутових секундах) і m співвідношеннями

$$d = \frac{1}{p}, \tag{1}$$

$$M = m + 5 - 5lg\ d. \tag{2}$$

Оскільки паралакс відомий із похибкою σ_p, студентам пропонується вивести формули поширення похибки. З формули (1) для малих відносних похибок маємо

$$\sigma_d = \frac{\sigma_p}{p^2}, \tag{3}$$

$$\sigma_M = \frac{5}{ln\ 10} \cdot \frac{\sigma_p}{p}. \tag{4}$$

Наприклад, для $p = 0{,}100'' \pm 0{,}005''$ та $m = 8{,}0$ отримуємо $d = 10$ пк $\pm$ 0,5 пк, $M = 8{,}0 \pm 0{,}11$. Далі студенти відповідають на проблемне запитання: чи можна за такої точності однозначно віднести зорю до певного спектрального класу та які спостереження потрібні, щоб зменшити неточність удвічі. Так формується вміння не лише обчислювати, а й аргументувати висновок, що відповідає математичній та дослідницькій компетентностям.

Оцінювання математичної складової пропонується здійснювати за чотирма показниками, що відповідають діям моделювання (табл. 1).

Таблиця 1.

Показники оцінювання математичної складової КОЗ

Дія	Що демонструє студент	Показник
Формалізація	Обирає модель, формулює припущення	Обґрунтованість моделі
Розв’язання	Виконує перетворення та обчислення	Коректність викладок
Інтерпретація	Оцінює похибку, формулює висновок	Аргументованість висновку
Верифікація	Порівнює результат із даними бази	Критичність оцінювання

Висновки. Вбудовування математичного моделювання в структуру КОЗ перетворює астрономічну задачу на засіб інтеграції математичної, фізичної та дослідницької підготовки майбутнього вчителя. Перспективою подальшої роботи є добір аналогічних завдань з інших розділів курсу (сферична астрономія, небесна механіка, зоряні системи) та експериментальна перевірка запропонованих показників оцінювання.

1. *Горошкевич О. О., Мохун С. В.* Компетентнісно-орієнтовані завдання з астрономії міжпредметного змісту. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи: матеріали XIV міжнар. наук.-практ. інтернет-конф., Тернопіль, 7–8 листопада 2024 р. С. 201–204.
2. *Горошкевич О. О., Мохун С. В.* Використання відкритих астрономічних баз даних під час проєктування компетентнісно-орієнтованих завдань. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи: матеріали XVII міжнар. наук.-практ. інтернет-конф., Тернопіль, 9 квітня 2026 р. С. 162–165.
3. *Горошкевич О. О., Годун П. І.* Компетентнісно-орієнтоване та традиційне завдання: порівняльний аналіз функціональних характеристик. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи: матеріали XVI міжнар. наук.-практ. інтернет-конф., М. Тернопіль, 6–7 листопада 2025 р. С. 283–285.

MATHEMATICAL MODELLING IN COMPETENCE-ORIENTED ASTRONOMY TASKS AS A MEANS OF INTEGRATING NATURAL-SCIENCE AND MATHEMATICAL TRAINING

The paper shows how mathematical modelling can be built into the structure of competence-oriented tasks in astronomy for pre-service teachers. A four-step cycle (formalisation, solution, interpretation, verification against open astronomical databases) is proposed, illustrated by a task on estimating stellar distance and absolute magnitude with error propagation, and accompanied by assessment indicators for the mathematical component.

УДК: 373.5.016:51:37.091.313:004

МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ: МЕТОДОЛОГІЯ ІНТЕГРОВАНОГО НАВЧАННЯ ТА ІСТОРИКО-ФІЗИЧНИЙ КОНТЕКСТ

Юрій ДРОГОБИЦЬКИЙ
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль, Україна
drohobytskiy@tnpu.edu.ua

Теоретична фізика виступає гносеологічним мостом між фундаментальними математичними формалізмами та абстракціями й об’єктивною фізичною реальністю. Закони природи виражаються мовою математичних моделей, що робить математичний апарат не просто технічним інструментом розрахунку, а мовою формування наукового фізичного мислення та концептуалізації знань. Однак у традиційній університетській практиці часто виникає розрив: математичні дисципліни викладаються як відірвані від практики алгоритми чи абстрактні теореми, тоді як фізичні курси вимагають миттєвого оперування складним апаратом без належного усвідомлення його меж застосування.

Мета даного дослідження – систематизувати ключові класи математичних методів теоретичної фізики та обґрунтувати методичну систему їх інтегрованого навчання. В основу підходу покладено принцип «від фізичної проблеми – до математичного формалізму, аналітичного розв’язку та його критичної інтерпретації».

Історико-науковий аналіз виявляє закономірність: критичні зрушення у розумінні фізичного світу практично завжди ставали каталізаторами створення абсолютно нових розділів математики. Розглянемо лише деякі історичні прецеденти:

• Ряди Фур'є: Спроба Ж. Фур'є розв'язати задачу теплопровідності в конденсованих середовищах зумовила ідею подання функцій у вигляді тригонометричних рядів. Це не лише дозволило розв'язувати крайові задачі теплопровідності та хвильових процесів, а й фундаментально збагатило математичний аналіз, давши поштовх розвитку гармонічного аналізу.

• Варіаційне числення та принцип найменшої дії: Класична задача про брахістохрону (пошук кривої найшвишого спуску під дією поля тяжіння) виявила недостатність стандартного диференціального числення. Пошук розв'язку Л. Ейлером та Ж.-Л. Лагранжем заклало основи варіаційного числення. У сучасній фізиці цей апарат трансформувався у принцип найменшої дії, який є базовим для класичної механіки, електродинаміки, квантової теорії та загальної теорії відносності.

• Диференціальна геометрія та загальна теорія відносності: Перехід від евклідового простору до викривленого простору А. Ейнштейном вимагав застосування тензорного числення. Фізична потреба опису гравітації як геометрії простору-часу перетворила тензорний аналіз із вузької галузі диференціальної геометрії на фундаментальний інструмент теоретичної фізики.

• Функціональний аналіз та квантова механіка: Створення квантової механіки Гейзенбергом та Шредінгером вимагала використання операторного числення, гільбертових просторів нескінченної вимірності, спектральної теорії та теорії груп. Це яскравий приклад того, як абстрактні алгебраїчні і геометричні структури виявилися єдиною можливою мовою опису мікросвіту.

Для запобігання «формалізму» (коли студент вміє обчислювати інтеграли чи розв'язувати диференціальні рівняння, але не розуміє їх фізичного змісту) пропонується наступний алгоритм вивчення та використання кожного математичного методу:

1. Фізична постановка задачі та побудова її ідеальної моделі.

2. Математична формалізація

3. Аналітичне або чисельне розв'язання (вибір оптиматичного математичного інструментарію).

4. Фізична інтерпретація результату

5. Верифікація та межі застосовності (граничні переходи, аналіз розмірностей, аналіз симетрій).

Сучасний освітній процес вимагає переосмислення ролі математичної строгості та обчислювальної практики:

• Співвідношення строгості та фізичного змісту: Строгі теореми існування та єдиності розв'язків є важливими для розуміння строгої математичної теорії. Проте громіздке відтворення їхніх доведень у фізичних курсах має поступатися місцем формуванню навичок знаходження розв'язків та якісного аналізу задач.

• Критичні інструменти верифікації: Здобувачі вищої освіти повинні досконало володіти методами якісного дослідження: перевірка розмірностей, дослідження асимптотик у граничних випадках (наприклад, $t \to \infty$, малі коливання, релятивістська границя $v \ll c$, квазікласичне наближення $\hbar \to 0$) та перевірка вимог симетрії системи.

• Комп'ютерні системи символьних обчислень (Wolfram Mathematica, Maple) та мови програмування (Python із бібліотеками NumPy, SciPy, Matplotlib) мають інтегруватися як лабораторії для дослідження. Вони дозволяють валідувати складні аналітичні наближення, проводити аналіз складних систем, візуалізувати та проводити чисельні експерименти там, де точний аналітичний розв'язок відсутній.

Навчання математичних методів теоретичної фізики є ефективним лише за умови збереження контекстуального зв'язку між абстрактним математичним формалізмом та фізичною сутністю досліджуваних явищ. Запропонований п'ятиетапний методологічний алгоритм у поєднанні з історико-фізичними екскурсами та сучасними цифровими технологіями забезпечує формування у студентів фундаментальної дослідницької компетентності, здатності до критичної верифікації результатів та готовності до розв'язання актуальних задач сучасної фізики.

MATHEMATICAL FRAMEWORK OF THEORETICAL PHYSICS: INTEGRATED TEACHING METHODOLOGY AND HISTORICAL-PHYSICAL CONTEXT

Theoretical physics connects mathematical formalism with physical reality. This paper systematizes key classes of mathematical methods used in theoretical physics and outlines an integrated teaching methodology. The proposed approach proceeds from a physical problem to its mathematical formulation, analytical or numerical solution, interpretation, and verification. Historical examples, a five-step learning sequence, mathematical rigor, and digital tools are discussed as means of developing students' ability to analyze and solve contemporary physics problems.

УДК 37.016:51:004

ЦИФРОВІ ІНСТРУМЕНТИ ЯК ЗАСІБ ОРГАНІЗАЦІЇ МАТЕМАТИЧНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ УЧНІВ

Юлія ЗАЯЦЬ
Тернопільська загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів №28, м. Тернополь, Україна
yulia.zayats@gmail.com

Дуже швидкий розвиток сучасних цифрових технологій та надзвичайно різкі зміни в освітньому середовищі нашого століття, вимагають від нас більш прискіпливіше ставитись до якості та спрямованості шкільної математичної освіти. В сучасному світі, виникає потреба у випускниках навчальних закладів, які не обмежуються механічними відтвореннями формул чи типовим відтворенням алгоритмів розв'язування задач. Зараз, у пріоритеті наступні ключові компетентності: критичне та логічне мислення, дослідницькі навички, здатність аналізувати складні структури, виявляти закономірності, розробляти та випробовувати математичні моделі реальних процесів.

«Заїжджена» методика навчання математики часто створює перешкоди між високим рівнем абстракції математичних понять та звичайною пізнавальністю учнів. Формальний виклад матеріалу без пошукового залучення учнів позбавляє їх відчуття задоволення від власного відкриття. У такому контексті, цифрові інструменти постають не лише сучасним технічним засобом чи заміною старому канцелярському приладдю, а й середовищем для проведення математичного досліду, експерименту для їхньої пошукової діяльності.

Використовуючи сучасне програмне середовище , кожен учасник начального процесу має змогу перетворити абстрактні об'єкти (функції, геометричні фігури, параметричні рівняння) на інтерактивні об'єкти, із якими можна проводити різні маніпуляції в режимі реальності. Це надає здобувачам освіти інтуїтивну основу для більш змістовного доведення чи аналізу, за допомогою реалізації концепції Inquiry-Based Learning (навчання на основі дослідження) та STEM-освіти.

Дуже активно обговорюють вітчизняні і зарубіжні науковці про впровадження в процес навчання на уроках математики цифрових засобів. Теоретико-методичні засади комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики детально висвітлено у працях М. Жалдака, Ю. Триуса, О. Скафи, В. Клочка, С. Семерікова та ін. Науковці переконують, що цифрове середовище міняє структуру навчального процесу, мотивуючи дітей до самостійної пізнавальної діяльності суб'єктів навчання.

Однак постійною залишається проблема впровадження цифрових інструментів у навчальний процес. Проблематика впровадження систем динамічної геометрії (DGS) та систем комп'ютерної алгебри (CAS) досліджувалася в роботах В. Ракети, І. Лов'янової, О. Чашечникової, а також закордонних дослідників (М. Гоенварт, В. Пехекне, Ж.-М. Лаборде). Зокрема, засновник середовища GeoGebra Маркус Гоенварт наголошує на тому, що поєднання динамічного геометричного креслення із числово-алгебраїчним представленням створює полікодове середовище, яке стимулює формування математичних гіпотез.

Хоча існує багато джерел, в яких описано цю тему,але поки що недостатньо досліджено, як поетапно організувати математичне дослідження учнів за допомогою цифрових інструментів. Важливо зрозуміти, як поєднати різні можливості цих інструментів: створення наочних зображень, виконання обчислень і спільне обговорення результатів. Також потрібно дослідити, як поєднувати комп'ютерні експерименти з математичними доведеннями, адже наочний приклад допомагає зрозуміти певне твердження, але не замінює його повного математичного доведення.

Цифрові інструменти, які сьогодні можуть використовувати вчителі математики та учні, є досить різноманітними. Для ефективного проведення дослідницької роботи їх можна поділити на групи залежно від того, для чого вони призначені та які можливості надають:

1. Системи динамічної геометрії та візуалізації (Dynamic Geometry Systems, DGS): програмні середовища (GeoGebra, Desmos, Cabri Geometry, DG), вони дозволяють створювати геометричні конфігурації, змінювати їхні параметри та відстежувати властивості об'єктів.
2. Системи комп'ютерної алгебри (Computer Algebra Systems, CAS): інструменти (GeoGebra CAS, WolframAlpha, Symbolab, Maxima), вони призначені для виконання символьних та чисельних обрахунків, розв'язування рівнянь, аналітичного диференціювання та інтегрування, спрощення складних виразів. Вони допомагають учневі звільнитися від рутинних технічних обчислень, тим самим надаючи змогу учням зосередитися на суті дослідження та пошуку закономірностей даних.
3. Засоби 3D-моделювання та доповненої реальності (AR): програми та мобільні застосунки (GeoGebra 3D Calculator, Cabri 3D, PhET Interactive Simulations), що дають змогу досліджувати об'єми, перерізи, поверхні

обертання у тривимірному просторі. Використання даних технологій дозволяє накладати математичні ою'ємні моделі на об'єкти реальності, що підсилює міжпредметну STEM-спрямованість дослідження.

4. Цифрові середовища колективної взаємодії та рефлексії: інтерактивні онлайнові дошки (Miro, Padlet, Canva Whiteboard), вони дозволяють організувати синхронну та асинхронну роботу учнів у групах під час обговорення ідей, фіксування результатів, срільного створення карт, презентації та підведення підсумків проекту.

Організація математичного дослідження в цифровому середовищі має відбуватися послідовно та за певним планом, а не бути просто випадковим спостереженням. На основі діяльнісного підходу ми розробили модель, яка складається з п'яти основних етапів:

1. Мотиваційно-проблемний (постановка проблеми та ознайомлення з об'єктом). Вчителем створюється проблемна ситуація у роза'язанні задачі, або формується задача, яка потребує побудови динамічної моделі. Учні ознайомлюються з математичним об'єктом, аналізують його початковий стан та визначають ключові змінні.
2. Експерементально-пошуковий (комп'ютерний експеримент та висунення гіпотез). Учні за допомогою цифрових інструментів проводять експерименти над об'єктом: змінюють величини довжин, кутів , значення коефіцієнтів у рівняннях.На основі спостережень в учасників виникає гіпотеза- здогадка, на основі логічних висновків стосовно наявності математичної залежності чи інваріанта.
3. Аналітично-доказовий (формалізація та строге доведення). На даному етапі учні переходять від спостереження до математичного обґрунтування. Вони перевіряють, чи виконується їхнє припущення для різних випадків, після чого під керівництвом вчителя будують математичне доведення сформульованого твердження.
4. Модельно-узагальнюючий (узагальнення та систематизація). Сформульоване та доведене твердження узагальнюється на більш широкий клас об'єктів (наприклад, від часткового випадку рівнобедреного трикутника до довільного трикутника, або від квадратичної функції до довільного многочлена). Будується остаточна математична модель вивченого явища.
5. Презентаційно-рефлексивний (представлення результатів та рефлексія). Учні представляють результати своєї роботи у вигляді цифрового звіту або короткої презентації, пояснюють свої висновки однокласникам і аналізують власну роботу. Вони також оцінюють, наскільки ефективними були використані цифрові інструменти та способи дослідження.

Виконуючи аналіз наукових праць є змога визначити кілька можливих труднощів, які вчитель має враховувати під час використання цифрових інструментів:

1. Хибне уявлення про доведення. Учень може вважати, що якщо певне твердження підтверджується на екрані під час зміни положення об'єкта, то його не потрібно доводити математично. Тому вчитель має пояснювати, що комп'ютерний експеримент допомагає висунути припущення та перевірити його, але для підтвердження математичного твердження необхідне логічне доведення.
2. Труднощі з використанням програми. Іноді учні більше зосереджуються на тому, як працювати з інтерфейсом програми, ніж на розв'язанні математичної задачі. Щоб уникнути цього, на початку роботи вчитель може використовувати заздалегідь підготовлені цифрові моделі та шаблони.
3. Поверхневе виконання завдань.Учні можуть просто змінювати параметри на екрані, не намагаючись зрозуміти, чому відбуваються певні зміни. Щоб запобігти цьому, учитель має пропонувати чіткі інструкції та запитання, які спонукають учнів аналізувати результати й робити власні висновки.

У статті розглянуто та обґрунтовано можливості використання цифрових інструментів, зокрема GeoGebra, Desmos і систем комп'ютерної алгебри (CAS), для організації математичних досліджень учнів. Ці інструменти допомагають перейти від простого засвоєння готових знань до активного дослідження, висування припущень і їх перевірки. Завдяки цьому учні краще розуміють математичні закономірності та вчаться самостійно знаходити відповіді.

Запропонована п'ятиетапна модель, яка охоплює мотивацію, експеримент, формулювання математичних висновків, узагальнення та рефлексію, допомагає вчителю послідовно організовувати дослідницьку діяльність на уроках алгебри й геометрії. Важливою умовою ефективності такого навчання є поєднання роботи з цифровими інструментами з математичними поясненнями та доведеннями.

Надалі доцільно дослідити можливості використання інструментів штучного інтелекту для врахування індивідуальних потреб учнів під час математичних досліджень, а також розробити критерії оцінювання дослідницьких умінь учнів у цифровому середовищі.

1. *Жалдак М. І.* Комп'ютер на уроках математики : посібник для вчителів. Київ : Техніка, 2003. 304 с.
2. *Триус Ю. В.* Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математичних дисциплін у вищих навчальних закладах : дис. ... д-ра пед. наук : 13.00.02. Київ, 2005. 649 с.

3. *Скафа О. І.* Евристичне навчання математики: теорія і методика : монографія. Донецьк : ДонНУ, 2004. 439 с.
4. *Ракета В. М.* Застосування систем динамічної геометрії у процесі навчання математики учнів основної школи. Освітній простір. Глобальні та регіональні контексти. 2023. Вип. 10. С. 45–52. URL: https://oip-journal.org/index.php/oip/article/view/612 (дата звернення: 05.10.2026).
5. *Чашечникова ОС., Зайцева О.В.* Розвиток пізнавальної активності та самостійності учнів у процесі навчання геометрії засобами ІСТ. Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 3. Фізика і математика у вищій та школі. 2021. Вип. 24. С. 87–94.
6. *Hohenwarter M., Hohenwarter J., Fuchs K.* Refurbishing Mathematics Instruction via GeoGebra. Mathematics Teaching and Learning in the Digital Age. 2018. Vol. 12, No. 3. P. 112–125.
7. *Семеріков С. О.* Фундаменталізація навчання інформатичних дисциплін у вищій школі : монографія / наук. ред. М. І. Жалдак. Кривий Ріг : КДПУ, 2009. 508 с.
8. Цифрові інструменти як засіб реалізації STEM-підходу під час навчання математики. Педагогічна академія: науковий журнал. 2024. Вип. 4. С. 115–123. URL: https://pedagogical-academy.com/index.php/journal/article/view/1751 (дата звернення: 05.10.2026).
9. *Лов'янова І. В.* Методичні засади формування дослідницької компетентності майбутніх учителів математики засобами цифрових технологій. Академічне бачення. 2023. Вип. 18. С. 34–41. URL: https://academy-vision.org/index.php/av/article/view/2494 (дата звернення: 05.10.2026).
10. Інформаційно-цифрові технології в організації самостійної дослідницької роботи учнів з математики. Scientific Research and Education. 2022. Vol. 3, No. 2. P. 56–64. URL: https://journals.uran.ua/sr_edu/article/view/350989 (дата звернення: 05.10.2026).

УДК 37.016:51:004:37.091.313

ІНТЕГРАЦІЯ МАТЕМАТИКИ ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ У МІЖДИСЦИПЛІНАРНІЙ ПРОЄКТНІЙ ДІЯЛЬНОСТІ

Оксана КВАС
Галицький фаховий коледж імені В’ячеслава Чорновола, м. Тернопіль, Україна
oksanakvas05@gmail.com

Сучасна школа функціонує в умовах стрімкого розвитку цифрових технологій, що істотно змінює підходи до організації освітнього процесу.

Учень сьогодні має доступ до значного обсягу інформації, цифрових інструментів моделювання, онлайн-сервісів для спільної роботи та засобів візуалізації даних. За таких умов перед учителем математики постає завдання не лише сформувати систему предметних знань, а й показати практичну цінність математичних методів для розв’язання проблем, що виходять за межі одного навчального предмета.

Традиційне вивчення математики нерідко передбачає розв’язування типових вправ за заданим алгоритмом. Водночас реальні проблеми, з якими людина стикається в повсякденному житті, професійній діяльності чи суспільстві, не поділяються на «математичні», «фізичні», «інформатичні» або «економічні». Для їх дослідження необхідно поєднувати знання з різних галузей.

Саме тому особливої актуальності набувають міждисциплінарні проєкти, у яких математика стає інструментом дослідження реальних об'єктів і процесів.

Цифрове освітнє середовище розширює можливості такої діяльності, забезпечуючи учнів інструментами для проведення розрахунків, побудови графіків, аналізу даних, створення моделей, презентацій та інтерактивних продуктів.

Міждисциплінарний підхід у навчанні математики

Міждисциплінарність передбачає встановлення змістових і практичних зв’язків між різними навчальними дисциплінами. У такому підході математичні поняття не розглядаються ізольовано, а використовуються як засіб дослідження певного явища або проблеми.

Наприклад, під час вивчення відсотків учні можуть досліджувати сімейний бюджет; під час опрацювання статистики – аналізувати результати соціологічного опитування; під час вивчення функцій – моделювати залежність між фізичними величинами; під час вивчення геометрії – проєктувати елементи архітектурного або ландшафтного простору.

Такий підхід змінює роль математичного завдання. Воно перестає бути лише вправою для закріплення формули й перетворюється на інструмент отримання, аналізу та інтерпретації інформації.

Важливим результатом міждисциплінарної діяльності є також формування математичного моделювання. Учень має визначити, які реальні величини є суттєвими для поставленої проблеми, встановити зв'язки між ними, побудувати математичну модель, виконати необхідні обчислення та пояснити отриманий результат у контексті досліджуваної ситуації.

Цифрове освітнє середовище як простір для проєктної діяльності

Цифровізація освіти створює нові можливості для організації математичних проєктів. Учні можуть працювати з електронними таблицями, графічними та геометричними середовищами, системами комп'ютерної математики, онлайн-дошками, платформами для спільної роботи, засобами створення презентацій та інтерактивних матеріалів.

Особливо важливими є цифрові інструменти, які дають змогу швидко переходити від абстрактної математичної моделі до її візуального представлення. Наприклад, результати статистичного дослідження можна подати у вигляді діаграм, функціональну залежність – за допомогою графіка, геометричну модель – у вигляді динамічної конструкції.

Цифрові технології також спрощують командну роботу. Кілька учнів можуть одночасно збирати дані, редагувати таблицю, обговорювати результати та готувати спільний цифровий продукт. Учитель при цьому може виконувати роль консультанта й координатора, поступово передаючи учням більшу частину відповідальності за результат [3].

Приклади міждисциплінарних математичних проєктів

1. «Математика сімейного бюджету»

Проєкт поєднує математику, економіку, інформатику та громадянську освіту.

Учням пропонується створити модель умовного сімейного бюджету. Вони визначають доходи й витрати, розраховують частки різних категорій видатків, аналізують можливості заощадження та моделюють зміни бюджету за різних умов.

Для виконання проєкту можна використовувати електронні таблиці. Учні створюють таблицю доходів і витрат, застосовують формули, будують кругові або стовпчасті діаграми, а потім формулюють висновки.

У цьому проєкті математичні знання безпосередньо пов'язуються з фінансовою грамотністю та цифровими навичками.

2. «Екологічний моніторинг у цифрах»

Проєкт може об'єднувати математику, біологію, географію, інформатику та екологію.

Учні збирають дані про певний екологічний показник, наприклад кількість побутових відходів, використання води або споживання електроенергії. Отримані дані систематизуються, обчислюються середні значення, відсоткові співвідношення та динаміка показників.

На наступному етапі учні створюють цифрові діаграми й графіки та формулюють висновки щодо тенденцій, які спостерігаються.

Особливістю такого проєкту є робота з реальними даними. Учень не просто виконує математичні операції, а має зрозуміти, що саме означає отримане число.

3. «Математика архітектури»

Цей проєкт поєднує математику, мистецтво, технології, інформатику та історію.

Учні досліджують геометричні форми, які використовуються в архітектурі, визначають симетрію, пропорції, площі та об'єми окремих елементів. На основі отриманих результатів вони можуть створити власну цифрову модель будівлі або її фрагмента.

Проєкт дає змогу показати, що геометрія є не лише системою теоретичних понять, а й мовою опису простору.

4. «Статистика нашого класу»

У межах проєкту учні проводять невелике дослідження серед однокласників. Темою може бути використання цифрових пристроїв, читацькі вподобання, спосіб проведення вільного часу, тривалість сну або інша нейтральна тема.

Після збору даних учні визначають частоти, середні значення, за потреби – медіану та моду, будують діаграми й аналізують результати.

Важливою складовою є обговорення коректності висновків. Учні мають зрозуміти, що статистичні дані потребують правильного трактування, а невелика вибірка не завжди дає змогу робити висновки про всю популяцію.

5. «Подорож, спланована математично»

Проєкт інтегрує математику, географію, інформатику та іноземну мову. Учні планують умовну подорож: визначають відстані, час у дорозі, витрати на транспорт і проживання, аналізують кілька маршрутів та складають бюджет.

Для цього можуть використовувати цифрові карти, електронні таблиці та засоби презентації. Математичними інструментами стають масштаб, пропорції, відсотки, одиниці вимірювання, середня швидкість та арифметичні обчислення.

Етапи реалізації міждисциплінарного проєкту

Ефективність проєктної діяльності значною мірою залежить від чіткої організації її етапів.

Перший етап – постановка проблеми. Учитель пропонує ситуацію, яка має практичне значення та не зводиться до виконання однієї стандартної вправи.

Другий етап – планування дослідження. Учні визначають мету, завдання, необхідні дані, способи їх отримання та цифрові інструменти.

Третій етап – збір і опрацювання інформації. На цьому етапі учні працюють із джерелами, проводять вимірювання або опитування, систематизують отримані дані.

Четвертий етап – математичний аналіз. Учні виконують обчислення, будують таблиці, графіки, діаграми чи математичні моделі.

П’ятий етап – створення цифрового продукту. Результати можуть бути представлені як презентація, інтерактивна інфографіка, електронна таблиця, відео, цифровий плакат або вебсторінка.

Шостий етап – презентація та обговорення. Учні представляють результати, аргументують свої висновки та відповідають на запитання.

Сьомий етап – рефлексія. Учасники оцінюють не лише кінцевий продукт, а й власний внесок у командну роботу, труднощі, способи їх подолання та набуті компетентності.

Роль учителя в організації проєктної діяльності

У міждисциплінарному цифровому проєкті змінюється традиційна роль учителя. Він виступає не тільки джерелом готової інформації, а передусім організатором навчального середовища.

Учитель визначає проблему, допомагає сформулювати завдання, добирає відповідні цифрові інструменти, консультує учнів щодо математичних методів і контролює коректність отриманих результатів.

Водночас важливо не перетворювати проєкт на детально запрограмовану послідовність дій. Якщо всі рішення заздалегідь приймає педагог, учні втрачають можливість розвивати самостійність і дослідницькі навички [2].

Доцільним є поступове збільшення рівня самостійності: від виконання проєктів за чітким алгоритмом до самостійного визначення проблеми, способів збору даних і формату представлення результатів.

Формування компетентностей учнів

Міждисциплінарні математичні проєкти сприяють комплексному розвитку компетентностей.

Насамперед формується математична компетентність – уміння використовувати математичні поняття, методи, моделі та обчислення для аналізу практичних ситуацій.

Не менш важливою є цифрова компетентність. Учні вчаться працювати з даними, використовувати цифрові інструменти, створювати електронний контент і презентувати результати.

Проєктна робота розвиває дослідницьку компетентність, оскільки учні формулюють запитання, збирають інформацію, аналізують її та формулюють висновки.

Командне виконання завдань сприяє розвитку комунікативних і соціальних навичок. Учні розподіляють ролі, домовляються, аргументують власну позицію та відповідають за частину спільного результату.

Проблеми та ризики

Попри значний потенціал, використання міждисциплінарних цифрових проєктів має певні труднощі.

Однією з них є ризик, що цифровий інструмент стане самоціллю.

Учні можуть зосередитися на оформленні презентації чи використанні ефектів замість математичного змісту. Тому педагогові важливо оцінювати передусім якість дослідження, математичних розрахунків, аргументації та висновків.

Інша проблема пов'язана з нерівномірним рівнем цифрових навичок учнів. Частина школярів може добре володіти певними програмами, тоді як іншим потрібна додаткова підтримка.

Важливо також навчати учнів критично працювати з інформацією. Під час використання онлайн-джерел необхідно звертати увагу на достовірність даних, авторство, дату публікації та відповідність інформації меті дослідження.

Окремої уваги потребує використання інструментів штучного інтелекту. Вони можуть допомагати генерувати ідеї, пояснювати математичні поняття або структурувати інформацію, однак результат їхньої роботи має перевірятися учнями. Основною метою проєкту повинно залишатися формування власного розуміння та вміння застосовувати математичні методи.

Висновки. Міждисциплінарні проєкти з математики є ефективним засобом поєднання предметного навчання з реальними практичними завданнями. Їх використання дає змогу продемонструвати учням прикладне значення математики та сформувати здатність використовувати математичні знання для аналізу складних ситуацій.

Цифрове освітнє середовище розширює можливості проєктної діяльності завдяки доступу до інструментів збору й аналізу даних, математичного моделювання, візуалізації та спільної роботи. Водночас ефективність цифрових технологій залежить не від кількості використаних сервісів, а від того, наскільки обґрунтовано вони застосовуються для досягнення навчальної мети [4].

Перспективним напрямом є створення проєктів, у яких математика інтегрується з інформатикою, природничими науками, технологіями, економікою, географією, мистецтвом та іншими освітніми галузями. Такий підхід сприяє формуванню учня, здатного не лише виконувати математичні операції, а й бачити математичні закономірності в навколишньому світі, працювати з даними, будувати моделі, аргументувати висновки та використовувати цифрові технології для розв'язання реальних проблем.

Отже, міждисциплінарний проєкт у цифровому освітньому просторі може розглядатися не просто як додатковий метод навчання математики, а як комплексна форма організації пізнавальної діяльності, що поєднує математичне моделювання, дослідження, цифрові технології, комунікацію та практичне застосування знань..

1. *Биков В. Ю., Спірін О. М., Пінчук О. П.* Проблеми та завдання сучасного етапу інформатизації освіти. Інформаційні технології і засоби навчання. 2017. Т. 60, № 4. С. 1–12.
2. Державний стандарт базової середньої освіти : затверджено постановою Кабінету Міністрів України від 30 вересня 2020 р. № 898. Київ, 2020.
3. Закон України «Про освіту» від 05.09.2017 № 2145-VIII. Відомості Верховної Ради України. 2017. № 38–39. Ст. 380.
4. *Морзе Н. В., Глазунова О. Г., Вембер В. П.* Основи інформаційно- комунікаційних технологій. Київ : Київський університет імені Бориса Грінченка, 2010. 240 с.

INTEGRATING MATHEMATICS AND DIGITAL TECHNOLOGIES IN INTERDISCIPLINARY PROJECT-BASED LEARNING

This paper explores the integration of mathematics and digital technologies in interdisciplinary project-based learning at school. It examines how mathematical modelling, data analysis, visualisation, and digital collaboration can connect mathematical concepts with real-world problems. Illustrative projects address family budgeting, environmental monitoring, architecture, classroom statistics, and travel planning. The paper outlines the stages of project implementation and discusses the teacher's role in supporting inquiry, teamwork, and students' growing independence. Particular attention is paid to developing mathematical, digital, research, and communication competencies. Potential challenges include unequal digital skills, excessive emphasis on presentation rather than mathematical content, and the need to critically evaluate online information and AI-generated outputs. The paper emphasises that digital tools should serve clearly defined learning objectives and support meaningful mathematical reasoning.

УДК 378.147:004

ВІД ВІЗУАЛІЗАЦІЇ ДО АНАЛІЗУ: ФОРМУВАННЯ КОМПЕТЕНТНОСТІ РОБОТИ З ДАНИМИ У МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ ІНФОРМАТИКИ

Наталія КИРИЛАХА
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, м. Кременчук, Україна
natalykiril582@gmail.com

Актуальність. Стрімке зростання обсягів інформації, з якою щоденно стикається сучасна людина, перетворює здатність працювати з нею на одну з необхідних компетентностей освіченої особистості. Йдеться вже не лише про пошук та отримання інформації, а про вміння відбирати й опрацьовувати дані, аналізувати їх, критично оцінювати, інтерпретувати отримані результати, візуально їх представляти та використовувати у професійній і суспільній діяльності. Особливого значення формування таких умінь набуває у професійній підготовці майбутніх учителів інформатики, які мають не лише самі володіти сучасними технологіями роботи з даними, а й бути готовими формувати відповідні навички в учнів. Необхідність такої підготовки узгоджується з європейськими підходами до професійної цифрової компетентності педагога, зокрема рамкою DigCompEdu, у якій робота з цифровими ресурсами, використання цифрових технологій у навчанні та оцінюванні розглядаються як важливі складові діяльності сучасного педагога [13].

В умовах цифрової трансформації освіти, швидкого розвитку технологій аналізу й візуалізації даних та поширення засобів штучного інтелекту традиційне розуміння цифрової підготовки вчителя інформатики потребує розширення. Важливого значення набуває формування компетентності роботи з даними, що поєднує здатність здійснювати їх пошук і відбір, опрацювання, візуалізацію, застосовувати математико-статистичні методи аналізу, критично оцінювати та змістовно інтерпретувати отримані результати. Цілеспрямоване формування зазначеної компетентності робить доцільним і необхідним включення до професійної підготовки майбутніх учителів інформатики освітніх компонент, орієнтованих на аналіз і візуалізацію даних. Слід зазначити, що актуальною вимогою наразі є пошук такої методики їх вивчення, за якої опанування сучасних цифрових інструментів поєднується з розвитком математичного, статистичного й критичного мислення здобувачів освіти.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Теоретико-методологічні засади використання інформаційних технологій у професійній підготовці вчителя закладено у працях представників української наукової школи інформатизації освіти. Зокрема, М. І. Жалдак розглядає інформаційно-комунікаційні технології як інструментарій збирання, систематизації, зберігання, опрацювання, передавання та подання даних і наголошує на тому, що використання комп'ютерних засобів має сприяти не механізації навчальної діяльності, а вивільненню часу для постановки проблем, побудови моделей, встановлення закономірностей, аналізу та узагальнення отриманих результатів [1]. Особливо значущою в сучасних умовах є сформульована науковцем ідея про пріоритет постановки задачі, висування гіпотези та осмислення результату над виконанням операційно-технічних процедур, значна частина яких може бути автоматизована. Подальший розвиток компетентнісного підходу до цифрової підготовки педагогів відображено у працях Н. В. Морзе та інших українських дослідників, а в сучасних дослідженнях С. Петренко, Л. Петренко, Г. Вернидуб інформаційно-цифрова компетентність розглядається як необхідна складова професійної діяльності вчителя, що поєднує технологічні знання й уміння, цифрову грамотність та відповідальне використання цифрових технологій [7].

Сучасний етап розвитку проблеми характеризується переходом від загального формування цифрової компетентності до розвитку спеціалізованих умінь роботи з даними. Н. С. Павлова обґрунтовує систему проєктування цифрового освітнього середовища фахової підготовки майбутніх учителів інформатики, у якому технологічна складова поєднується з психолого-педагогічною та професійною [6]. Безпосередньо проблематику аналізу й візуалізації даних у професійній підготовці майбутніх учителів розвиває Г. В. Луценко, який пов’язує роботу з даними з формуванням статистичних вибірок, вибором методів статистичного опрацювання, критичним аналізом отриманих результатів та їх візуалізацією [2, 3].Таким чином, аналіз наукових праць засвідчує поступовий перехід від розуміння цифрових технологій як засобу опрацювання інформації до формування комплексної компетентності роботи з даними. Водночас потребує подальшого дослідження методичне обґрунтування послідовності використання різних цифрових засобів – від візуального представлення та інтерактивного дослідження даних до застосування статистичних методів, програмування мовою R та критичного використання засобів генеративного ШІ у професійній підготовці майбутніх учителів інформатики.

За результатами систематичного огляду 83 емпіричних досліджень J. Lee та співавторів, грамотність учителя у роботі з даними охоплює не тільки знання про дані та технічні навички, а й уміння їх збирати,

аналізувати, інтерпретувати, оцінювати, представляти та використовувати для розв'язання професійних завдань [10].

Метою роботи є аналіз досвіду використання засобів візуалізації, інтерактивного і статистичного аналізу даних та елементів генеративного ШІ в межах вибіркової освітньої компоненти «Аналіз і візуалізація даних» з позицій формування компетентності роботи з даними майбутніх учителів інформатики.

Методи дослідження: аналіз науково-методичної літератури з проблем цифрової компетентності та грамотності роботи з даними; аналіз функціональних і дидактичних можливостей цифрових засобів візуалізації; педагогічне спостереження за виконанням здобувачами освіти лабораторних робіт; аналіз результатів їх навчальної діяльності; узагальнення досвіду організації практичної підготовки майбутніх учителів інформатики.

Основні результати дослідження.У межах даної роботи компетентність роботи з даними розглядається як комплексна характеристика підготовки майбутнього вчителя інформатики, що конкретизує окремі складові загальних і предметних компетентностей та програмних результатів навчання, визначених освітньо-професійною програмою [5]. Її формування передбачає здатність здійснювати пошук, аналіз та опрацювання інформації, працювати з числовими і графічними даними, використовувати сучасні цифрові та обчислювальні засоби, здійснювати комп'ютерний експеримент, аналізувати, інтерпретувати й узагальнювати його результати. У контексті вибіркової освітньої компоненти «Аналіз і візуалізація даних» ці положення конкретизуються у здатності здійснювати відбір та опрацювання даних, обирати доцільні способи їх візуального представлення, застосовувати методи статистичного аналізу, інтерпретувати отримані результати та критично оцінювати коректність використаних засобів і сформульованих висновків.

Візуалізація в цьому контексті виконує подвійну функцію. З одного боку, вона є засобом наочного представлення інформації, з іншого – інструментом дослідження даних, виявлення закономірностей, порівняння показників і формулювання висновків. Тому навчання візуалізації доцільно будувати не як ознайомлення з набором окремих програмних продуктів, а як послідовне ускладнення діяльності здобувачів – від представлення інформації до аналізу даних.



Рис. 1. Послідовне ускладнення діяльності з даними в межах освітньої компоненти «Аналіз і візуалізація даних»

Практична підготовка здобувачів у межах вибіркової освітньої компоненти «Аналіз і візуалізація даних» реалізує зазначену послідовність засобами Easel.ly, Infogram, Canva, Tableau та R. Цифрові інструменти розглядаються не як самоціль, а як засоби розв'язання завдань, що поступово ускладнюються (рис. 1).

На початковому етапі використовуються засоби інфографіки та візуального представлення інформації. Зокрема, використання Easel.ly спрямоване передусім на ознайомлення здобувачів освіти із принципами інфографічного представлення інформації: структуруванням матеріалу, визначенням інформаційної ієрархії, поєднанням текстових і графічних компонентів. На цьому етапі акцент робиться не стільки на аналізі великих масивів даних, скільки на перетворенні інформації у зрозумілу візуальну форму. Такий напрям підготовки майбутніх учителів узгоджується із сучасними дослідженнями освітньої інфографіки, у яких її створення розглядається як діяльність, що потребує поєднання цифрових, візуальних і педагогічних умінь [12]. Подальше використання Infogram дає можливість змістити акцент від композиційного оформлення інформації до безпосередньої візуалізації числових даних. Здобувачі працюють із таблицями, обирають типи діаграм відповідно до структури даних, порівнюють способи їх представлення та оцінюють інформативність побудованих візуалізацій. Принципово важливим є усвідомлення того, що вибір виду діаграми визначається не її зовнішньою привабливістю, а характером даних і завданням аналізу. Таким чином, робота з Easel.ly та Infogram орієнтує на структурування вихідної інформації, виділення суттєвих показників та вибір способу їх наочного подання. Подальше використання Canva дає змогу перейти від створення окремих візуальних об'єктів до цілісного представлення результатів аналізу. При цьому увага зосереджується не тільки на оформленні презентації, а й на відповідності способу візуалізації характеру даних та поставленому аналітичному завданню. Так, в одній із лабораторних робіт здобувачам пропонується представити результати аналізу динаміки популярності мов програмування за даними TIOBE, а під час захисту роботи – обґрунтувати вибір використаних способів представлення даних.

Наступний рівень роботи з даними пов’язаний із використанням Tableau. На відміну від статичного представлення вже отриманих результатів, інтерактивна візуалізація створює можливості для дослідження даних безпосередньо у процесі роботи з ними: вибору показників, фільтрації, порівняння окремих категорій, виявлення тенденцій і закономірностей. Тому навчальне завдання поступово змінюється від вимоги «побудувати певний тип діаграми» до послідовності «сформулювати запитання до даних – обрати необхідні показники – побудувати відповідну візуалізацію – дослідити отримане представлення – сформулювати висновок». Таким чином, акцент переноситься з технічного оволодіння інструментом та виконання заданої послідовності операцій на усвідомлений вибір засобу і розуміння мети його застосування.

Подальше поглиблення роботи з даними здійснюється засобами мови та середовища R і передбачає перехід від переважно візуального дослідження до застосування методів математичної статистики. У межах цього блоку передбачається опанування методів математичної статистики, засобів їх програмної реалізації та візуального представлення результатів у середовищі R. Серед запропонованих тем – методи кореляційного, регресійного та дисперсійного аналізу, кластеризації, аналізу часових рядів. Важливою умовою є проходження цілісної послідовності аналізу даних: від постановки задачі та обґрунтованого вибору статистичного методу до його програмної реалізації й змістовної інтерпретації отриманого результату. Такий підхід узгоджується з передбаченим освітньо-професійною програмою використанням комп'ютерних засобів статистичного аналізу даних [5].

Прикладом реалізації такого підходу є запропоноване здобувачам дослідження відкритого набору медичних даних щодо діагностування серцево-судинних захворювань, яке включало первинне опрацювання і групування даних, дослідження кореляційних зв’язків та побудову регресійних моделей засобами R. Наявність у наборі числових, категоріальних і бінарних ознак вимагала не лише програмної реалізації розрахунків, а й обґрунтованого вибору методів відповідно до типу даних і поставленої задачі. Зокрема, для дослідження залежності ймовірності діагностування захворювання від сукупності факторів було застосовано пробіт-регресію, що дало змогу поєднати математико-статистичне моделювання, програмну реалізацію, візуалізацію та змістовну інтерпретацію результатів. Таким чином, разом із здобувачами приходимо до висновку: R потрібний не для того, щоб навчитися писати команди R. Він потрібний як середовище, у якому математична статистика перетворюється на реальне дослідження даних.

Слід враховувати, що поширення генеративного штучного інтелекту суттєво змінює характер програмної реалізації методів аналізу даних. Засоби ШІ здатні генерувати та модифікувати програмний код мовою R, пояснювати його окремі фрагменти та допомагати у виявленні помилок. Водночас автоматизація написання коду не усуває необхідності розуміння сутності застосованого статистичного методу. Навпаки, вона дає можливість перенести частину уваги з відтворення синтаксичних конструкцій на змістовні етапи аналізу даних: постановку задачі, вибір адекватного статистичного методу, формулювання коректного запиту до ШІ, критичну перевірку згенерованого коду та інтерпретацію отриманого результату. Тому важливим завданням професійної підготовки стає формування у здобувачів ставлення до генеративного ШІ не як до заміни знань із програмування та математичної статистики, а як до інструменту аналітичної діяльності, використання якого потребує відповідних предметних знань і критичного мислення.

Наукова цінність роботиполягає у запропонованому підході до формування компетентності роботи з даними майбутніх учителів інформатики як послідовного переходу від структурування та візуального представлення інформації до інтерактивного дослідження даних, застосування математико-статистичних методів, програмної реалізації аналізу та критичної інтерпретації його результатів. Цифрові засоби трактуються не як самостійні об’єкти вивчення, а як інструменти розв’язання аналітичних задач від складності яких залежить вибір відповідного засобу. Визначено, що в умовах поширення генеративного штучного інтелекту особливого значення набуває зміщення акценту з відтворення програмного коду на постановку задачі, обґрунтований вибір методу аналізу, перевірку коректності згенерованого коду та змістовну інтерпретацію результатів..

Практичне значення отриманих результатів полягає в можливості використання запропонованої послідовності для побудови системи лабораторних робіт з аналізу і візуалізації даних за принципом поступового ускладнення аналітичної діяльності здобувачів освіти.

Висновки. Проведений аналіз досвіду викладання освітньої компоненти «Аналіз і візуалізація даних» дає підстави стверджувати, що формування компетентності роботи з даними майбутніх учителів інформатики має бути поетапним, послідовним і добре структурованим процесом, в якому змінюється не лише цифровий інструментарій, а насамперед характер навчально-дослідницької діяльності здобувачів освіти. Отже, перспективним напрямом розвитку підготовки майбутніх учителів інформатики є інтеграція засобів візуалізації, математико-статистичних методів, програмування та генеративного ШІ в єдиний процес пізнання.

1. *Жалдак М. І.* Система підготовки вчителя до використання інформаційно-комунікаційних технологій в навчальному процесі. *Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання* : зб. наук. пр. Київ : Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2011. Вип. 11 (18). С. 3–15.
2. *Луценко Г. В.* Використання сервісів відкритих даних у підготовці студентів до дослідницької діяльності. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми.* 2025. № 74. С. 49–57. DOI: 10.31652/2412-1142-2024-74-49-57.
3. *Луценко Г. В.* Розвиток інформаційної грамотності майбутніх учителів інформатики в курсі «Аналіз даних». *Цифрова компетентність вчителя нової української школи*. Київ : ІЦО НАПН України, 2024. С. 143–147.
4. *Овчарук О. В.* До питання розвитку цифрової компетентності вчителя у європейському баченні. Цифрова компетентність сучасного вчителя нової української школи: зб. тез доповідей учасників всеукр. наук.-практ. семінару (Київ, 12 березня 2019 р.) / за заг. ред., О.В. Овчарук. Київ.: Інститут інформаційних технологій і засобів навчання НАПН України: Київ, 2019. С. 64-67.
5. Освітньо-професійна програма першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю А 4.09 «Середня освіта (Інформатика)» та додатковою предметною спеціальністю А 4.04 «Середня освіта (Математика)» - галузь знань: «А - Освіта». Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, 2026. URL: https://ivm.krnu.org/opp-26-bakalavr
6. *Павлова Н. С.* Система проєктування цифрового освітнього середовища фахової підготовки майбутніх учителів інформатики : дис. … д-ра пед. наук : 13.00.10. Київ, 2025. 552 с.
7. *Петренко С., Петренко Л., Вернидуб Г.* Інформаційно-цифрова компетентність сучасного учителя. *Освіта. Інноватика. Практика,* 13(5), 41-45. URL: https://doi.org/10.31110/2616-650X-vol13i5-006
8. *Юрченко А.* Візуальний підхід як засіб подолання когнітивної складності. *Український педагогічний журнал*. 2025. № 4. С. 85–93.
9. Kohen-Vacs D., Usher M., Jansen M. *Integrating Generative AI into Programming Education: Student Perceptions and the Challenge of Correcting AI Errors*. International Journal of Artificial Intelligence in Education. 2025. Vol. 35. P. 3166–3184. DOI: 10.1007/s40593-025-00496-4.
10. *Lee J., Alonzo D., Beswick K. et al.* Dimensions of teachers' data literacy: A systematic review of literature from 1990 to 2021. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*. 2024. Vol. 36. P. 145–200.
11. Letteri I., Vittorini P. *Enhancing Student Feedback in Data Science Education: Harnessing the Power of AI-Generated Approaches*. International Journal of Artificial Intelligence in Education. 2025. Vol. 35. P. 3071–3094. DOI: 10.1007/s40593-025-00492-8.
12. *Olefirenko N. V., Ponomarova N. O., Andriievska V. M., Gulich O. O., Gaidus A. Y.* Enhancing teacher training for infographic creation and evaluation. *CTE Workshop Proceedings*. 2025. Vol. 12. P. 185–196. DOI: 10.55056/cte.919.
13. *Punie, Y., editor(s), Redecker, C.* European Framework for the Digital Competence of Educators: DigCompEdu , EUR 28775 EN, Publications Office of the European Union, Luxembourg, 2017, ISBN 978-92-79-73718-3 (print),978-92-79-73494-6 (pdf), doi:10.2760/178382 (print),10.2760/159770 (online), JRC107466.
14. R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna: R Foundation for Statistical Computing.

FROM VISUALIZATION TO ANALYSIS: DEVELOPING DATA COMPETENCE IN FUTURE COMPUTER SCIENCE TEACHERS

The paper analyzes the experience of using data visualization, interactive and statistical data analysis tools, and elements of generative AI within the elective course «Data Analysis and Visualization» in the professional training of future computer science teachers. The research methods include analysis of scientific and methodological literature on digital competence and data literacy, pedagogical observation, analysis of learning outcomes, and generalization of teaching experience. A methodological approach based on the gradual progression of data-related activities is presented: from structuring and visual representation of information using Easel.ly, Infogram and Canva to interactive data exploration in Tableau and statistical analysis in R. Particular attention is paid to the use of mathematical and statistical methods and to the changing role of programming in the context of generative AI. It is argued that AI-assisted code generation shifts the emphasis from reproducing programming syntax to problem formulation, appropriate method selection, critical verification of generated code, and meaningful interpretation of results. The proposed approach considers digital tools not as isolated objects of study but as instruments for solving increasingly complex data analysis tasks.

УДК 37.091.3:514:004.9

МОДЕЛЮВАННЯ НАВЧАЛЬНИХ ПРОЦЕСІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ІНТЕРАКТИВНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ІНСТРУМЕНТІВ

Оксана КОХАНОВСЬКА
Немирівський ліцей ім. академіка НАН України І.Ф.Кураса , Балтська ТГ, Україна
zaichukoksana81@gmail.com

У шкільній математичній освіті точність побудов традиційно пов’язана з роботою з реальними інструментами – лінійкою, циркулем, транспортиром. Проте за останні роки навчальний процес помітно змінився: учні дедалі частіше працюють у цифрових середовищах, а вчителі використовують онлайн-дошки для пояснення та демонстрації геометричних побудов.

Це породжує нову педагогічну задачу: як організувати навчання так, щоб цифрові інструменти не просто дублювали традиційні, а реально сприяли формуванню точності, алгоритмічності та просторового мислення?

Мета даної роботи провести аналіз інтерактивних геометричних інструментів онлайн-дошок для моделювання навчальних процесів та продемонструвати, як їхнє використання впливає на якість побудов і навчальну мотивацію учнів.

У дослідженні поєднано кілька підходів:

- педагогічне спостереження – традиційному та цифровому;
- аналіз типових помилок під час побудови найпростіших геометричних побудов;
- моделювання навчальних ситуацій, під час яких учні виконують побудови за допомогою інтерактивних інструментів;
- опитування школярів щодо зручності та зрозумілості цифрових інструментів;
- порівняння часу виконання завдань та рівня залучення.

Таке поєднання методів дозволяє не лише зафіксувати результати, а й побачити, як змінюється поведінка учнів у різних навчальних умовах.

Проведене моделювання показало кілька важливих тенденцій:

1. Учні почали рідше помилятися у вимірюванні кутів, а кола та дуги будують рівніше. Це пов’язано з тим, що інтерактивні інструменти мають чіткі фіксатори та обмеження, які не дозволяють «з’їхати» лінії чи неправильно прикласти транспортир.

2. У процесі роботи з онлайн-дошками учні запам’ятовують послідовність побудови: промінь – вимірювання – проведення другої сторони кута. Цифрове середовище «підказує» правильний порядок.

3. Школярі виконують побудови в онлайн-дошках із задоволенням, особливо коли завдання містять елементи інтерактивності: рухомі точки та промені.

4. Учні, котрі мають слабкі цифрові навички, спочатку витрачають більше часу , але після кількох занять їхня продуктивність вирівнюється.

5. Школярі, котрі працюють тільки в цифровому середовищі, як правило гірше виконують побудови на папері. Це свідчить про необхідність комбінованого підходу.

Теоретичне підґрунтя дослідження спирається на кілька взаємопов’язаних концепцій, які пояснюють, чому інтерактивні геометричні інструменти здатні змінювати характер навчальної діяльності учнів.

Передусім важливо звернутися до цифрової дидактики, яка розглядає цифрові засоби не як частину традиційного навчання, а як окремий тип навчального середовища зі своїми порядками. У межах цієї концепції інтерактивні інструменти виступають не просто креслярськими інструментами (лінійки чи транспортир), а засобами організації навчальної дії. Вони задають чіткі рамки, структурують кроки побудови, допомагають учневі утримувати логіку процесу. Це є дуже важливо для учнів, у яких ще не сформовані стійкі алгоритми геометричних побудов.

Ще одним компонентом є когнітивна теорія мультимодального навчання, згідно з якою поєднання – зорового, моторного, просторового каналів – підсилює розуміння матеріалу. Під час роботи з інтерактивними інструментами школяр не просто бачить фігуру, а має можливість взаємодіяти з нею: рухає точки, перевіряє кут,

коригує лінію. Така діяльність активізує роботу короткочасної пам'яті та сприяє формуванню стійких когнітивних схем, які потім переносяться на традиційні побудови на папері.

Важливим є також діяльнісний підхід, який підкреслює, що навчання відбувається через виконання дій, а не через пасивне спостереження. У цифровому середовищі школяр має можливість нескінченну кількість разів повторювати побудову, експериментувати із різними параметрами, перевіряти себе. Це зумовлює поступовому переходу від зовнішньої дії до внутрішнього алгоритму – тобто до справжнього розуміння.

Також варто зазначити, що цифрові інструменти відповідають принципам конструктивізму, згідно з яким знання формується через активне конструювання власного досвіду. Коли учень самостійно створює побудову, бачить наслідки кожного кроку, виправляє свої помилки, він не просто відтворює алгоритм, а будує власне розуміння геометричних залежностей.

Таким чином, інтерактивні геометричні інструменти мають потенціал не лише підвищувати точність побудов, а й змінювати сам характер навчальної діяльності – робити її більш усвідомленою, структурованою та мотивуючою.

Проведене дослідження показало, що інтерактивні геометричні інструменти онлайн-дошок можуть суттєво змінити характер навчальної діяльності учнів. Вони не лише підвищують точність побудов, а й допомагають учням краще усвідомити логіку геометричних побудов. Завдяки чітким параметрам, можливості миттєво перевірити результат та повторити побудову без додаткових витрат часу, учні швидше засвоюють алгоритми та менше помиляються у базових операціях.

Також при використанні цифрового контенту діє також й мотиваційна складова: робота в онлайн-дошках сприймається учнями як більш сучасна та цікава, що підвищує їхню активність на уроці. Учні охочіше експериментують, пробують різні варіанти побудови, не бояться помилитися – цифрове середовище створює для цього безпечні умови.

Також дослідження показало, що цифрові інструменти не можуть повністю замінити традиційні. Учні, які працюють лише в онлайн-середовищі, демонструють гірші результати під час побудов на папері. Це свідчить про необхідність комбінованого підходу, коли цифрові та традиційні інструменти взаємодоповнюють одне одного.

Окремої уваги потребує питання цифрової компетентності учнів. Діти з низьким рівнем володіння цифровими інструментами на початку демонструють підвищене когнітивне навантаження, що може впливати на якість виконання завдань. Тому важливо вводити інтерактивні інструменти поступово, з чіткими інструкціями та демонстраціями.

Можна зробити висновок, що інтерактивні геометричні інструменти онлайн-дошок є перспективним засобом розвитку графічної компетентності, просторового мислення та алгоритмічної культури учнів. Їхнє використання має бути методично продуманим, а навчальні сценарії – адаптованими до вікових особливостей та рівня цифрової підготовки школярів.

Перспективи подальших досліджень пов'язані з розробкою адаптивних цифрових модулів, які автоматично аналізують точність побудов, пропонують учневі індивідуальні підказки та дозволяють учителю отримувати аналітику щодо типових помилок. Це відкриває можливості для створення нових форм навчання, у яких цифрові інструменти стають не просто засобом побудови, а повноцінним елементом педагогічної підтримки.

.

1. *Mayer R.* Multimedia Learning. Cambridge University Press, 2021.
2. *Hohenwarter M.* Dynamic Geometry in Education. Journal of Mathematics Education, 2020.
3. *Кухаренко В. М.* Цифрова дидактика: теоретичні засади та практичні рішення. Харків, 2022.

MODELLING LEARNING PROCESSES USING INTERACTIVE GEOMETRIC TOOLS

The paper examines the potential of interactive geometric tools integrated into online whiteboards for improving the teaching and learning of geometry in secondary education. Particular attention is paid to their role in developing students' geometric construction skills, spatial reasoning, algorithmic thinking, and learning motivation. The study considers the use of traditional drawing instruments and digital environments, focusing on the accuracy of geometric constructions, the sequence of operations, and students' engagement in learning activities. The methodological framework combines pedagogical observation, analysis of common construction errors, modelling of learning situations, and consideration of students' perceptions of digital tools. The findings suggest that interactive geometric tools can facilitate more accurate constructions, support the understanding of geometric procedures, and encourage active participation through immediate feedback and opportunities for experimentation. However, the use of digital

environments may present challenges for students with limited digital skills and does not fully replace the practical experience gained through traditional geometric constructions. The paper emphasizes the importance of combining digital and conventional drawing tools to support the development of mathematical understanding and practical skills. It concludes that the effective integration of interactive geometric tools requires appropriate instructional strategies, gradual introduction, and consideration of students' individual learning needs.

УДК: 37.016:519.17

МЕТОДОЛОГІЧНІ ПРОБЛЕМИ ПРИ ВИВЧЕННІ ГРАФІВ

Юлія КРЕХОВЕЦЬКА
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль, Україна
krehovetska_yy@fizmat.tnpu.edu.ua
Інна ГРОД
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль, Україна
grodin@tnpu.edu.ua

У наш час теорія графів перетворилася в один із розділів математики, який бурхливо розвивається. Це пов'язане з динамічним розвитком комп'ютерного програмного забезпечення і вимогами швидко зростаючої галузі застосування. Теорія графів – це простий, але водночас потужний інструмент для встановлення відповідностей між об'єктами, розв'язання задачі впорядкування об'єктів і побудови моделей. Графи можуть використовуватися для розв'язання наступних задач: задач планування мереж; задач, що виникають при проєктуванні інтегральних схем, при дослідженні автоматів, логічних схем, блок-схем програм; проблем побудови систем зв'язку та вивчення процесів передачі інформації; задач вибору оптимальних маршрутів і потоків у мережах. Теорія графів використовується в економіці, статистиці, психології, біології та інших галузях. Методи графів широко застосовуються для розв'язання задач програмування. «Модель програм у формі керуючого графа, модель арифметичних виразів у вигляді орієнтованого дерева, синтаксичні дерева, сортувальні дерева, мережі Петрі та інші теоретичні побудови графів зробили значний внесок у розвиток програмування та його автоматизацію. Поява суперкомп'ютерів і мереж, а також проблема ефективної організації паралельних і розподілених обчислень на великих інформаційних масивах підтвердили тенденцію використання графів як найефективнішого засобу автоматизації програмування» [2]. Широке використання теорії графів і графових алгоритмів у програмуванні призвело до того, що теорія графів включена до навчальних програм університетів і технічних університетів як галузь дискретної математики.

Незважаючи на те, що теорія графів не має громіздкого математичного апарату, її легко пояснити, її моделі легко зрозуміти, у навчальних програмах з предметів «Математика» та «Інформатика» вивчення графів не передбачено. Однак ознайомитися з поняттям «граф» можливо вже в початковій школі. Мова графів надає ясності вивченню графів і може використовуватися для введення таких понять, як відношення, зв'язки, функції. Графи часто застосовують для розв'язання розважальних, олімпіадних та комбінаторних задач [1]. За допомогою графів можна описувати абсолютно різні об'єкти з однаковими структурними властивостями, будувати математичні моделі, алгоритми для розв'язання задач.

Термінологія теорії графів ще не однозначно встановлена. Спроби низки авторів уніфікувати позначки та спростити терміни ще не досягли успіху. Більшість спеціалістів по теорії графів використовують власну термінологію у книгах, статтях і лекціях.

Визначення графа відомих авторів були розглянуті та проаналізовані. У їх книгах можна виділити два основні підходи. У першому з них дається загальне визначення графа, а потім розглядаються неорієнтовані та орієнтовані графи як його окремі випадки. У другому підході визначення неорієнтованого графа та визначення орієнтованого графа вводяться окремо. Деякі автори визначають граф як сукупність двох множин: множина вершин і множина ребер. Інші автори визначають граф як сукупність множини вершин і бінарного відношення, заданого на цій множині, а у випадку орієнтованого графа – двох бінарних відношень [2].

Графи мають величезний понятійний апарат, різні форми візуалізації (проблема ізоморфізму графів). Важко буває зрозуміти, що два несхожі малюнки графів насправді є однаковими. Не є легким вибір правильної структури (матриця суміжності, список суміжності, складність покажчиків). При роботі з графами треба чітко усвідомлювати рекурсію та стеки, необхідно постійно відстежувати відвідані вершини, відомі класичні алгоритми важко збагнути без детального покрокового розбору.

Через експоненційну складність часто алгоритми можуть зависати. Не завжди вдається знайти швидке рішення для класичних задач (розфрбування графа), тому що для них може не існувати ефективного точного алгоритму у загальному вигляді.

Студенти, які йдуть в школу на практику і планують там працювати, повинні знати поняття графа, як його визначати та найпростіші властивості; знати поняття орієнтованого і неорієнтованого графів, плоского графа, планарного графа; мати можливість переходити від графічного представлення до матричного, і навпаки; знати поняття маршруту, циклу, зв'язності; знати поняття дерева та його основні властивості; бути здатним розв'язувати найпростіші завдання для знаходження маршрутів, циклів та довжини маршруту на графі, а також задачі з використанням дерев; вміти використовувати графи для розв'язання задач, включно з професійним напрямленим змістом.

У результаті навчальної діяльності учні повинні знати поняття графа, методи його визначення та найпростіші властивості, розуміти маршрут, зв'язність, дерево.

Розв’язування багатьох математичних задач спрощується, якщо вдається використати графи. Представлення даних у вигляді графа спрощує їх. Графові задачі дозволяють розвивати логічне мислення.

1. *Данильчук О. І., Грод І.М.* Про доцільність вивчення теорії графів у загальноосвітній школі. Сучасні цифрові технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи: матеріали XV Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції, м. Тернопіль, 10 квітня, 2025 р. Тернопіль: ТНПУ ім. Володимира Гнатюка, 2025. С. 42-44.
2. *Шевченко С.М., Жданова Ю.Д., Складанний П.М., Спасітєлєва С.О.* Математичні методи в кібербезпеці: графи та їх застосування в інформаційній та кібернетичній безпеці. Кібербезпека: освіта, наука, техніка. № 1 (13), 2021. С. 133-144.

GRAPH THEORY IN MATHEMATICS EDUCATION: SIGNIFICANCE, LEARNING CHALLENGES, AND PROSPECTIVE TEACHER PREPARATION

This paper discusses the educational value of graph theory and its relevance to school mathematics and prospective teacher preparation. It outlines applications of graphs in modelling, programming, network planning, and problem-solving. Particular attention is paid to learning challenges associated with terminology, graph representations, isomorphism, data structures, and graph algorithms. The paper identifies essential knowledge and skills for prospective teachers, including understanding directed and undirected graphs, paths, cycles, connectivity, and trees, as well as converting between graphical and matrix representations. It also considers opportunities for introducing basic graph concepts through accessible mathematical problems. The paper emphasises the potential of graph-based approaches to develop logical thinking, modelling skills, and the ability to recognise common structures across different practical situations.

УДК 378.016:52

МАТЕМАТИЧНИЙ ЗМІСТ АСТРОНОМІЧНИХ ЗАВДАНЬ ЯК РЕСУРС ФОРМУВАННЯ ЦИФРОВОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ

Роман КУЛЬЧИЦЬКИЙ
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль, Україна
romakulya@ukr.net

Астрономія як шкільний предмет і як навчальна дисципліна в підготовці вчителів фізики та астрономії (предметна спеціальність А4.08 Середня освіта (Фізика та астрономія)) має потужний математичний каркас: пропорції й подібність, тригонометрія, логарифмічні шкали, аналіз похибок. За обмеженої кількості годин і недостатньої матеріальної бази астрономічних кабінетів саме цифрові засоби (віртуальні планетарії, інтерактивні моделі, симулятори) дають змогу поєднати математичні розрахунки зі спостереженням і дослідженням.

Мета роботи – показати, як математичний зміст астрономічних завдань може стати основою для формування цифрової компетентності здобувачів вищої освіти.

Під цифровою компетентністю розуміємо здатність впевнено й критично використовувати цифрові технології для пошуку та опрацювання даних, створення цифрового контенту, розв’язання задач і комунікації. Раніше ми показали, що віртуальні моделі й середовище Stellarium сприяють розвитку цих умінь у майбутніх

учителів астрономії та реалізації міждисциплінарних зв'язків [2, 3]. У цій роботі акцентуємо увагу на математичній складовій завдань.

Розглянемо метод спектроскопічного паралакса, який добре ілюструє математичний потенціал цієї теми. Зі спектрального класу й класу світності зорі за діаграмою Герцшпрунга–Рессела визначають абсолютну зоряну величину M. Порівнявши її зі спостережуваною величиною m, знаходять відстань d (у парсеках) за модулем відстані:

$$m - M = 5\,lg\,d - 5, \tag{1}$$

Звідси

$$d = 10^{\frac{m-M+5}{5}}, \tag{2}$$

Показник степеня в формулі (2) містить величину m − M, тому студент на конкретному прикладі працює з логарифмічною та показниковою функціями, а також з оберненою залежністю між ними. Особливо цінним є аналіз похибок. Диференціюючи ln d з формули (2), отримуємо

$$\frac{\delta d}{d} = \frac{ln\,10}{5}\delta(m - M) \approx 0{,}46 \cdot \delta(m - M). \tag{3}$$

Отже, похибка у визначенні M на 0,5 зоряної величини призводить до відносної похибки відстані приблизно 23 %. Цей висновок студент може не лише отримати аналітично, а й відтворити в інтерактивній моделі, змінюючи параметри й одразу спостерігаючи наслідки [1].

Поєднання обчислень і роботи з цифровими інструментами ми пропонуємо структурувати за типами завдань (табл. 1). Кожен тип передбачає водночас математичні й цифрові дії, що відповідає компетентнісному підходу.

Таблиця 1. Типи астрономічних завдань і відповідні дії студентів

Тип завдання	Математичний зміст	«Цифрові» дії студента
Обчислювальні з перевіркою в моделі	Логарифмічні залежності, формули (1)–(2), дії зі степенями	Самостійний розрахунок і порівняння з результатом інтерактивної моделі
Дослідницькі	Аналіз чутливості: вплив похибки вибору M на відстань, формула (3)	Зміна параметрів моделі, фіксація даних, побудова графіків у таблицях
Проєктні	Побудова залежності d(m−M), вибір масштабу осей	Створення власної інтерактивної моделі чи електронної таблиці, її презентація

Така послідовність веде студента від відтворення формул до дослідження й створення власного цифрового продукту. Його математична обґрунтованість закладається не на рівні окремих операцій, а на рівні розуміння залежностей, що знижує ризик механічного користування готовою моделлю. Майбутній учитель, який пройшов цей шлях, здатен відтворювати подібні завдання для учнів і критично оцінювати цифрові ресурси.

Висновки. Математичний зміст астрономічних задач є природним ресурсом для розвитку цифрової компетентності: інтерактивні моделі й цифрові інструменти перетворюють розрахунок на дослідження. Подальша робота передбачає розроблення навчально-методичного комплексу таких завдань та експериментальну перевірку ефективності відповідної методики.

1. *Кульчицький Р. В., Мохун С. В.* Використання інтерактивних моделей для визначення відстаней до зір методом спектроскопічного паралакса // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи: матеріали XVII міжнар. наук.-практ. інтернет-конф. Тернопіль, 9 квітня 2026 р. С. 59–61.
2. *Кульчицький Р., Мохун С.* Використання віртуальних моделей для формування цифрової компетентності майбутніх учителів астрономії // Інноваційна педагогіка. 2025. Вип. 82, т. 1. С. 199–203. DOI: 10.32782/2663-6085/2025/82.1.36.
3. *Мохун С. В., Федчишин О. М., Кульчицький Р. В., Ляцук Д. В.* Віртуальне середовище Stellarium як засіб реалізації міждисциплінарних зв'язків в освітньому процесі // Наукові записки Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка. Серія: Педагогіка. 2024. № 1. С. 55–63. DOI: 10.32782/2415-3605.24.1.7.

MATHEMATICAL CONTENT OF ASTRONOMY TASKS AS A RESOURCE FOR DEVELOPING DIGITAL COMPETENCE OF FUTURE TEACHERS

The paper shows how the mathematical content of astronomy tasks (logarithmic scales, exponential dependences, error analysis) can serve as a basis for developing digital competence of future physics and astronomy teachers. Using the spectroscopic parallax method as an example, a typology of tasks combining calculations with interactive models and digital tools is proposed: computational tasks verified in a model, research tasks and project tasks. Methods: analysis of scientific and methodological literature, content analysis of tasks and pedagogical modelling.

УДК 378.147:53:51

МАТЕМАТИЧНЕ ОПРАЦЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ЯК ЗАСІБ ІНТЕГРАЦІЇ РЕАЛЬНОГО ТА ВІРТУАЛЬНОГО ФІЗИЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ У ЗАКЛАДАХ ФАХОВОЇ ПЕРЕДВИЩОЇ ОСВІТИ

Дмитро ЛЯЩУК
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль, Україна
liashchuk@tnpu.edu.ua

Закон України «Про фахову передвищу освіту» [1] визначає результатом навчання професійну компетентність, яка включає здатність застосовувати знання у практичній діяльності. Для здобувачів технічних і природничих спеціальностей закладів фахової передвищої освіти (ЗФПО) її важливою складовою є вміння планувати й виконувати вимірювання та критично оцінювати їх результат. Водночас матеріально-технічна база лабораторій часто обмежена, і реальний експеримент доповнюють віртуальними симуляторами [2]. На практиці ці дві форми нерідко існують паралельно: віртуальна робота виконується як «ілюстрація», а реальна – як відтворення інструкції, без спільного способу зіставлення їхніх результатів.

Мета роботи – обґрунтувати доцільність використання математичного опрацювання результатів вимірювань (оцінювання невизначеностей і перевірки їх узгодженості) як засобу інтеграції реального та віртуального експерименту та описати відповідний фрагмент методики інтегрованого лабораторного заняття.

Інтегроване лабораторне заняття будуємо як послідовність дій здобувача:

1) *прогноз* – у віртуальному середовищі досліджують залежності, добирають діапазони параметрів і оцінюють очікуваний результат;

2) *вимірювання* на реальній установці (за потреби – з цифровими датчиками на базі Arduino);

3) *опрацювання* обох наборів даних: лінеаризація залежності, оцінювання невизначеностей, обчислення шуканої величини;

4) *зіставлення* результатів за формальним критерієм узгодженості;

5) *рефлексія* – пояснення розбіжностей і добір заходів для зменшення похибки. Ці дії відповідають когнітивному, операційно-діяльнісному, мотиваційно-ціннісному та рефлексивному компонентам професійної компетентності, які розглядаємо в дослідженні; окремі аспекти інтеграції реального та віртуального експерименту ми розглядали раніше [3; 4].

Розподіл функцій між реальним і віртуальним компонентами на кожному етапі подано в табл. 1.

Таблиця 1.

Функції реального і віртуального експерименту на етапах інтегрованого заняття

Етап	Віртуальний експеримент	Реальний експеримент	Компонент компетентності
Прогноз	Дослідження залежностей, добір діапазонів параметрів, оцінка очікуваного результату	–	Когнітивний
Вимірювання	Контрольні прогони за обраних параметрів	Збирання даних на установці, робота з приладами та датчиками	Операційно-діяльнісний
Опрацювання	Експорт і аналіз модельних даних	Побудова графіків, оцінювання невизначеностей, обчислення величини	Операційно-діяльнісний
Зіставлення	Ізольоване варіювання чинників для перевірки гіпотез	Перевірка критерію узгодженості результатів	Когнітивний, рефлексивний
Рефлексія	Повторні прогони для перевірки пропозицій щодо вдосконалення	Вдосконалення схеми вимірювання	Рефлексивний, мотиваційно-ціннісний

Проілюструємо підхід на роботі «Визначення прискорення вільного падіння за допомогою математичного маятника». Прискорення обчислюють за виміряними довжиною підвісу та періодом коливань. Оскільки період входить у розрахунок у квадраті, його похибка впливає на результат із подвоєною вагою й зазвичай домінує над похибкою вимірювання довжини [5]. Відносна похибка періоду зменшується обернено пропорційно до кількості коливань, час яких вимірюють, тому здобувач може обґрунтовано вибрати цю кількість. Для підвісу довжиною 1,000 м, похибки лінійки 1 мм і періоду близько 2,006 с розрахункові значення відносної невизначеності g наведено в табл. 2 та на рис. 1. Зі зростанням кількості коливань внесок часу швидко спадає і результат обмежується точністю лінійки; для ручного секундоміра (похибка 0,2 с з урахуванням часу реакції) за 10 коливань невизначеність становить близько 2 %, а для цифрового датчика – близько 0,2 %.

Таблиця 2.

Розрахункова відносна невизначеність g (%) залежно від кількості коливань

Кількість коливань	Ручний секундомір (±0,2 с)	Цифровий датчик (±0,02 с)
1	19,94	2,00
5	3,99	0,41
10	2,00	0,22
20	1,00	0,14
30	0,67	0,12

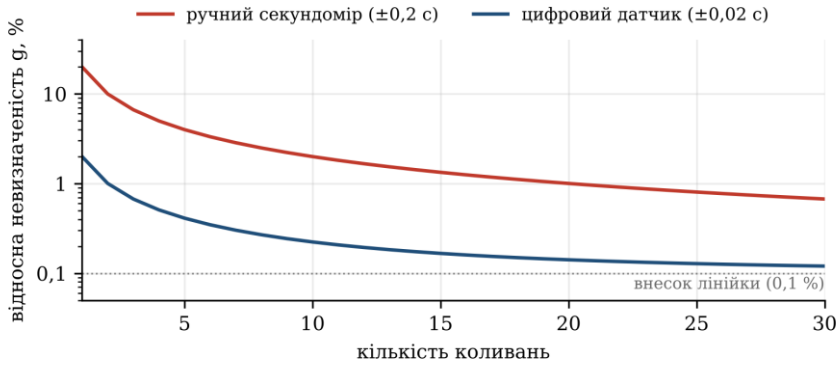


Рис. 1. Залежність відносної невизначеності g від кількості коливань (довжина підвісу 1 м, похибка лінійки 1 мм)

Результати реальної та віртуальної частин зіставляють за простим критерієм: модуль різниці двох результатів, поділений на їхню сумарну невизначеність (корінь із суми квадратів невизначеностей), не повинен перевищувати 2. Якщо цю умову виконано, результати вважають узгодженими в межах оцінених невизначеностей; якщо ні – здобувач шукає систематичну причину. Тут віртуальне середовище виконує діагностичну функцію: на відміну від реальної установки, в ній можна змінювати один чинник ізольовано. Наприклад, початковий кут відхилення 30° завищує період математичного маятника на 1,74 %, що занижує g приблизно на 3,5 %, – це перевищує невизначеність цифрового датчика, але непомітне для ручного секундоміра. Зіставивши прогін симуляції за кутів 5° і 30°, здобувач з'ясовує причину розбіжності, а не лише фіксує її.

Така організація робіт формує професійно значущі вміння: планувати вимірювання відповідно до необхідної точності, обирати засоби вимірювання, застосовувати стандартний підхід до оцінювання невизначеностей і обґрунтовувати висновок про відповідність результату вимогам. Реальний експеримент при цьому дає досвід роботи з обладнанням і систематичними похибками, віртуальний – можливість швидко перебирати режими й перевіряти припущення, а математичне опрацювання поєднує їх у єдину дослідницьку дію.

Висновки. Математичне опрацювання результатів вимірювань (оцінювання невизначеностей і критерій узгодженості) є ефективною основою інтеграції реального та віртуального фізичного експерименту в ЗФПО, оскільки перетворює дві паралельні форми роботи на один дослідницький цикл «прогноз – вимірювання – опрацювання – зіставлення – рефлексія». Подальша робота стосується експериментальної перевірки ефективності цієї методики та створення навчально-методичних матеріалів для викладачів ЗФПО.

1. Про фахову передвищу освіту: Закон України від 6 червня 2019 р. № 2745-VIII.
2. *Wieman C. E., Adams W. K., Perkins K. K.* PhET: Simulations That Enhance Learning // Science. 2008. Vol. 322, No. 5902. P. 682–683.
3. *Лящук Д. В., Федчишин О. М.* Теоретичні аспекти інтеграції реального та віртуального навчального фізичного експерименту в шкільному курсі фізики // Інноваційна педагогіка. 2024. Вип. 76. С. 144–147.
4. *Мохун С. В., Федчишин О. М., Кульчицький Р. В., Лящук Д. В.* Віртуальне середовище Stellarium як засіб реалізації міждисциплінарних зв'язків в освітньому процесі // Наукові записки Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка. Серія: Педагогіка. 2024. № 1. С. 55–63.
5. *Taylor J. R.* An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements. 2nd ed. Sausalito: University Science Books, 1997.

MATHEMATICAL PROCESSING OF RESULTS AS A MEANS OF INTEGRATING REAL AND VIRTUAL PHYSICS EXPERIMENTS IN PROFESSIONAL PRE-HIGHER EDUCATION

The paper proposes to use the mathematical processing of measurement results – uncertainty estimation and a formal consistency criterion – as the basis for integrating real and virtual physics experiments when developing professional competence of students of professional pre-higher education institutions. An integrated laboratory session is organised as a cycle «prediction – measurement – processing – comparison – reflection». The approach is illustrated by determining the acceleration of free fall with a simple pendulum: calculated relative uncertainties for manual timing and a digital sensor are given, and the role of the virtual environment in diagnosing systematic errors is shown.

УДК 37.016:51:004.8

ШТУЧНИЙ ІНТЕЛЕКТ У ПРОЄКТУВАННІ ПРОФЕСІЙНО-ОРІЄНТОВАНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ

Богдана МАЙКА
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль, Україна
maikabohdana05@gmail.com
Надія ПРОЦИК
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль, Україна
nprozuk@tnpu.edu.ua

Стрімкий розвиток технологій штучного інтелекту (ШІ) зумовлює пошук нових способів їх використання в освітньому процесі. Одним із перспективних напрямів є застосування ШІ під час підготовки навчальних матеріалів, зокрема математичних задач. Особливого значення це набуває у професійній освіті, де важливо не лише сформувати математичні знання та вміння здобувачів освіти, а й показати можливості їх

застосування в майбутній професійній діяльності. Одним із засобів реалізації такого зв'язку є професійно-орієнтовані математичні задачі. Водночас використання генеративного ШІ для їх проєктування потребує критичного оцінювання отриманого результату, оскільки згенерована задача має бути не лише математично правильною, а й відповідати реальним умовам професійної діяльності. *Мета дослідження*– проаналізувати можливості ШІ для проєктування професійно-орієнтованих математичних задач та визначити умови його доцільного використання в цьому процесі.

Генеративний ШІ належить до технологій штучного інтелекту, здатних створювати новий контент у відповідь на запити користувача. У сфері освіти його можливості охоплюють генерування навчальних матеріалів, завдань, тестів та інших ресурсів, які можуть бути адаптовані до визначеної теми, рівня складності й освітніх потреб [2; 3]. У навчанні математики це відкриває можливості для оперативного створення різних типів задач, зокрема таких, зміст яких пов'язаний із майбутньою професійною діяльністю здобувачів освіти.

Водночас використання генеративного ШІ в освітньому процесі має певні обмеження. Згенерований контент може містити фактичні неточності, некоректні твердження або недостовірні посилання, тому результати роботи ШІ потребують обов'язкової перевірки користувачем [2]. Особливо важливо враховувати це під час проєктування професійно-орієнтованих математичних задач.

А. Коломієць, В. Клочко та О. Стахова пов'язують сутність професійно-орієнтованих задач із проблемними ситуаціями майбутньої професійної діяльності, розв'язання яких передбачає застосування знань і методів відповідної навчальної дисципліни [1]. Науковці наголошують, що зміст таких задач має бути наближеним до реальних умов професійної діяльності, розкривати практичну значущість математичних знань, а використані числові дані – відповідати реальним показникам [1]. Отже, професійна спрямованість математичної задачі визначається не лише професійним контекстом її умови, а насамперед можливістю застосування математичних знань для розв'язання реальної або наближеної до реальної професійної проблеми.

Для практичного дослідження можливостей генеративного ШІ було обрано професійну діяльність у будівельній галузі, оскільки вона передбачає безпосереднє застосування математичних знань під час виконання низки практичних завдань, зокрема обчислення площ і об'ємів та визначення необхідної кількості будівельних матеріалів. Математичною основою для проєктування задач обрано тему «Площі та об'єми», зміст якої дає змогу моделювати ситуації, наближені до практичної діяльності фахівців будівельного профілю.

Для практичного дослідження можливостей генеративного ШІ було обрано професійну діяльність у будівельній галузі та математичну тему «Площі та об'єми». За допомогою генеративної моделі Gemini було створено професійно-орієнтовані математичні задачі, результати генерації яких надалі проаналізовано з погляду математичної коректності та відповідності змодельованих ситуацій реальним умовам професійної діяльності.

Задача 1. Оштукатурювання стін. Майстру-оздоблювачу необхідно визначити кількість штукатурки для кімнати розміром 4 × 5 м і висотою 2,7 м. У кімнаті є двері розміром 0,9 × 2 м та вікно розміром 1,5 × 1,5 м. Одного мішка штукатурки достатньо для покриття 3 м² поверхні. Необхідно визначити площу стін, що підлягає оштукатурюванню, та кількість мішків матеріалу.

Згенероване Gemini розв'язання передбачало визначення загальної площі стін із подальшим відніманням площі дверей і вікна. У результаті отримано площу 44,55 м² та визначено потребу в 15 мішках штукатурки. Математична модель і виконані обчислення є коректними. Задача також має виражене професійне спрямування, оскільки математичні обчислення використовуються для розв'язання практичного завдання – визначення необхідної кількості матеріалу. Водночас згенерована умова не враховує можливого запасу штукатурки та залежності її витрати від товщини шару нанесення. Тому отриманий результат математично відповідає заданим вихідним даним, однак потребує уточнення для повнішого відтворення реальної професійної ситуації.

Задача 2. Розрахунок об'єму бетонної стяжки. Необхідно виконати бетонну стяжку підлоги в гаражі розміром 6 × 4 м. Товщина шару бетону становить 10 см. Потрібно визначити об'єм бетонної суміші, необхідної для виконання робіт.

Для розв'язання задачі Gemini запропонував визначити площу підлоги та помножити її на товщину шару, попередньо переведену в метри. У результаті отримано 2,4 м³ бетонної суміші. Запропонована математична модель є правильною, а задача демонструє практичне застосування обчислення об'єму в будівельній діяльності. Разом із тим отриманий результат відображає лише теоретично необхідний об'єм матеріалу та не враховує можливих технологічних втрат і запасу бетонної суміші. Крім того, професійний зміст задачі можна поглибити, доповнивши її необхідністю визначення вартості матеріалу або порівняння декількох варіантів його закупівлі.

Проведений аналіз показує, що Gemini здатний генерувати математично коректні задачі, зміст яких пов'язаний із конкретними ситуаціями професійної діяльності. Водночас професійний контекст у таких задачах може бути представлений спрощено: ШІ правильно вибудовує математичну модель, однак не завжди враховує

технологічні особливості виконання відповідних робіт. Це зумовлює необхідність критичного аналізу та, за потреби, уточнення згенерованих умов перед їх використанням у навчальному процесі.

Висновки. Отже, генеративний ШІ може бути ефективним допоміжним інструментом для проєктування професійно-орієнтованих математичних задач, оскільки дає змогу швидко створювати завдання з урахуванням заданої математичної теми та професійного контексту. Водночас результати генерації не доцільно використовувати без попередньої перевірки й адаптації. Необхідними умовами їх використання в освітньому процесі є перевірка математичної коректності, реалістичності професійної ситуації та достовірності вихідних даних. Таким чином, генеративний ШІ доцільно розглядати як інструмент підтримки діяльності викладача, тоді як оцінювання, уточнення та остаточний добір змісту навчальних задач залишаються завданням педагога.

1. *Коломієць А., Клочко В., Стахова О.* Професійно-орієнтовані задачі як компонент фундаментальної математичної підготовки студентів технічних університетів та коледжів. *Педагогічний дискурс.* 2019. Вип. 26. С. 85–93. DOI: 10.31475/ped.dys.2019.26.13.
2. Міністерство освіти і науки України. Штучний інтелект у закладах вищої освіти: рекомендації для викладачів, студентів і працівників ЗВО. 2025. URL: https://mon.gov.ua/news/shtuchnyi-intelekt-u-zakladakh-vyshchoi-osvity-rekomendatsii-dlia-vykladachiv-studentiv-i-pratsivnykiv-zvo (дата звернення: 03.10.2026).
3. *Miao F., Holmes W.* Guidance for generative AI in education and research. Paris : UNESCO, 2023. 44 p. URL: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000386693 (date of access: 02.10.2026).
4. *Holubok V.* Artificial intelligence in education: applications, benefits, and challenges. Штучний інтелект в освіті. Частина 1 : монографія / за ред. А. Яцишин. Київ : ІЦО НАПН України, 2025. С. 70–79. DOI: 10.33407/lib.NAES.id/747998. URL: https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/747998/ (дата звернення: 03.10.2026).

ARTIFICIAL INTELLIGENCE IN DESIGNING PROFESSIONALLY ORIENTED MATHEMATICAL PROBLEMS

The study aims to analyse the potential of generative artificial intelligence for designing professionally oriented mathematical problems and to identify the conditions for its appropriate use. The research methods included the analysis of relevant scientific literature, the generation of mathematical problems using Gemini, and the analysis of the generated problems in terms of mathematical correctness and their relevance to real-world professional situations. The study shows that generative AI can be used as an effective supporting tool for designing mathematical problems related to professional contexts. However, AI-generated problems may simplify certain aspects of professional practice and therefore require critical evaluation and adaptation before being used in the educational process.

УДК 004.056.55:530.145

ВИКОРИСТАННЯ ФРЕЙМВОРКУ GOOGLE CIRQ ЯК ІННОВАЦІЙНОГО ІНСТРУМЕНТУ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ОСНОВ КВАНТОВОЇ КРИПТОГРАФІЇ

Віталій МАСИЧ
Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації імені Героїв Крут, м. Київ, Україна
masych.vitaliy@gmail.com
Богдан КОСТЮК
Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації імені Героїв Крут, м. Київ, Україна
bohdansteam2000@gmail.com

Традиційний навчальний процес у вищих військових навчальних закладах зіштовхується зі стійким методичним парадоксом під час викладання спеціальних розділів криптографічного захисту. Курсанти блискуче опановують абстрактні конструкції лінійної алгебри, вільно оперують унітарними перетвореннями у гільбертовому просторі $\mathbb{C}^2$ та знаходять власні вектори матриць [1], проте виявляються абсолютно безпорадними, коли виникає потреба пов'язати ці формальні конструкції з реальними фізичними процесами у військових каналах зв'язку [4]. Теорія залишається застиглим кресленням на папері. Бракує живої інженерної практики. Адже майбутній фахівець кібербезпеки зобов'язаний чітко розрізняти, чим детермінований цифровий потік відрізняється від квантового розподілу ключів (КРК), особливо коли бойовий порядок зазнає нищівного радіоелектронного придушення противником.

Традиційні армійські шифратори використовують псевдовипадкові генератори чисел (ПВГЧ) на основі регістрів зсуву з лінійним зворотним зв'язком або складніших криптографічних примітивів. Будь-який ПВГЧ детермінований за своєю природою. Знаючи внутрішній стан генератора та початкове значення (seed),

супротивник із достатнім обчислювальним ресурсом повністю відновлює ключову послідовність. Квантова механіка ламає цей детермінізм дощенту. Квантова суперпозиція виступає джерелом істинно випадкових чисел (ДІВЧ), чия непередбачуваність гарантується законами мікросвіту, а не складністю математичної функції. Проти квантової випадковості безсилий навіть найпотужніший суперкомп'ютер ворога. Закони фізики підкупити неможливо.

Проте продемонструвати ці процеси на фізичному кремнієвому чи оптичному рівні у навчальних класах практично нереально через колосальну вартість кріогенного обладнання. Вихід полягає у використанні спеціалізованих емуляторів. Ми зупинили свій вибір на бібліотеці Google Cirq [2], яка спочатку проектувалася для роботи з процесорами архітектури NISQ (Noisy Intermediate-Scale Quantum). Cirq не приховує квантову алгебру за графічним інтерфейсом, а змушує дослідника безпосередньо маніпулювати тензорними добутками векторів мовою Python. При цьому середовище хмарних обчислень Google Colab дозволяє проводити повноцінні лабораторні досліди на стандартних робочих станціях без додаткових апаратних витрат.

У цій роботі ми реалізуємо цілісний програмний контур квантового розподілу ключів, використовуючи математичний апарат унітарних операторів, створення заплутаних пар Ейнштейна–Подольського–Розена (ЕПР) та проєкційного вимірювання фон Неймана для емуляції радіоелектронного перехоплення. Методологічну основу становлять матричний аналіз квантових станів, симуляція часової еволюції кубітових регістрів, а також статистична оцінка ентропії згенерованих шістнадцяткових послідовностей за допомогою закону великих чисел.

Еволюція однокубітового стану та унітарний оператор Адамара. Початковий стан інформаційного кубіта q_1 задаємо канонічним базисним вектором $|0\rangle = \binom{1}{0} \in \mathbb{C}^2$. Фізично це відповідає системі з фіксованим спіном або поляризацією фотона. Для переходу в неперервну суперпозицію ми застосовуємо оператор Адамара через виклик `cirq.H(q1)`. На рівні лінійної алгебри відбувається множення початкового вектора на унітарну Ермітову матрицю Адамара (1)[3]:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} \quad (1)$$

Дія оператора Адамара переводить базисний стовпчик у симетричну суперпозицію двох станів (2)

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\binom{1}{0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \equiv |+\rangle \quad (2)$$

Геометрично на сфері Блоха ця трансформація еквівалентна повороту вектора стану навколо осі $\frac{X+Z}{\sqrt{2}}$ на кут π. Координати вектора фіксуються в точці перетину екватора зі сферою. Комплексні амплітуди ймовірностей стають строго еквівалентними: $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Густина ймовірності фіксації результату вимірювання за правилом Борна дорівнює $P(0) = P(1) = |\alpha|^2 = \frac{1}{2}$. Система перебуває у стані абсолютної невизначеності. Наш запуск симулятора Cirq підтверджує цей висновок: розподіл відліків вирівнюється рівно навпіл.

Кодовий блок створення квантового каналу:

```
circuit.append(cirq.H(q1))
    circuit.append(cirq.CNOT(q1, q2))
```

Тут програмний код не маскує обчислювальний процес, а слугує буквальним стенографуванням матричних операцій. Курсанти бачать лінійну алгебру безпосередньо у роботі емулятора.

Тензорний добуток та синтез заплутаного стану Белла. Для організації захищеної лінії зв'язку між пунктом управління (штабом) та польовим терміналом ми створюємо корельовану пару. Об'єднаний простір двох кубітів утворюється за допомогою тензорного добутку гільбертових просторів $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \cong \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{C}^4$. Початковий стан системи є факторизованим і дорівнює $\left(H \otimes I\right)|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$. На цю систему накладається оператор керованого заперечення CNOT, що формує заплутаний стан Белла (3)

$$\text{CNOT} \cdot (H \otimes I)|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \equiv |\Phi^+\rangle \quad (3)$$

Оператор CNOT діє у чотиривимірному просторі та описується унітарною матрицею 4×4(4) у стандартному базисі обчислень $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$:

$$U_{\text{CNOT}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \quad (4)$$

Механіка оператора CNOT не інвертує стан другого кубіта, якщо контрольний кубіт перебуває у базисному $|0\rangle$, проте змінює його на протилежний (дія вентиля Паулі X), коли контрольний дорівнює $|1\rangle$. На базисних станах перетворення виглядають детерміновано: $|00\rangle \mapsto |00\rangle$, $|01\rangle \mapsto |01\rangle$, проте $|10\rangle \mapsto |11\rangle$ та $|11\rangle \mapsto |10\rangle$. Але коли перший кубіт передається у стані суперпозиції після вентиля Адамара, оператор CNOT діє одночасно на обидві складові розкладу. В результаті формується стан Белла $|\Phi^+\rangle$. Цей вектор принципово неможливо факторизувати у вигляді добутку окремих векторів: $|\Phi^+\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$. Система стає нерозривною. Жоден кубіт більше не має власного ізольованого стану, а вимірювання першого кубіта миттєво редукує стан другого, якою б не була фізична відстань між абонентами [5].

Проєкційне вимірювання фон Неймана як математична модель атаки РЕБ. Кульмінацією розробленого лабораторного комплексу є модель несанкціонованого доступу в канал передачі (man-in-the-middle). У програмі задається прапорець `REB_ACTIVE = True`. Противник намагається перехопити носій інформації та здійснює вимірювання проміжного кубіта q_1. Математично цей процес описується дією проєкційних операторів фон Неймана $P_0 = |0\rangle\langle 0|$ або $P_1 = |1\rangle\langle 1|$ на заплутану суперпозицію (5):

$$P_1|\Phi^+\rangle = P_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \longrightarrow |11\rangle \tag{5}$$

Проєкційне вимірювання незворотно руйнує квантову когерентність. Вектор стану колапсує до одного з власних підпросторів. Заплутаність між кубітами безповоротно зникає. Наступні операції декодування діють уже на звичайний класичний стан, що робить відновлення вихідного секретного біта на терміналі q_2 неможливим. Будь-яка спроба підглянути за квантовим станом залишає грубий слід. Це прямий прояв теореми про неможливість клонування невідомого квантового стану (No-Cloning Theorem). Супротивник фізично не здатний зняти копію з кубіта, не спровокувавши колапсу хвильової функції.

Блок перехоплення у схемі Cirq:

```
if REB_ACTIVE:
    circuit.append(cirq.measure(q1, key='enemy_intercept'))
```

```
LOCATION: [CLASSIFIED - KURSK OPERATIONAL ZONE]
WARNING: HIGH ELECTRONIC WARFARE ACTIVITY DETECTED (РЕБ)
PROTOCOL: QUANTUM ENTANGLEMENT (EPR PAIRS)
======================================================================
[SYSTEM] Ініціалізація з'єднання з Google Quantum AI...
[SYSTEM] Калібрування кубітів (Sycamore)... OK

РОЗПОЧАТО ГЕНЕРАЦІЮ КЛЮЧА ШИФРУВАННЯ (8 БІТ):
[ПРОЦЕС] Генерація сегменту 8/8: [========] 1
----------------------------------------------------------------------
[ШТАБ]     ВІДПРАВЛЕНО: (BIN) 01110111 | (HEX) 0x77
[ПЕРЕДОВА] ОТРИМАНО:    (BIN) 01110111 | (HEX) 0x77
----------------------------------------------------------------------
СТАТУС: ✅ УСПІШНО. КЛЮЧІ СПІВПАДАЮТЬ.
КАНАЛ ЗАХИЩЕНО. ВТРУЧАННЯ ВІДСУТНЄ.
======================================================================
Фрагмент квантової схеми (Зверніть увагу на блок M посередині при РЕБ):
0: ──X──────────────────────────@──H──────M('a')──@──────────────────────
                                │                 │
1: ──H──@──M('enemy_intercept')──X──M('b')──@─────┼──────────────────────
        │                                   │     │
2: ─────X───────────────────────────────────X─────@──M('received')──────
```

Рис. 1. Результат емуляції квантового каналу та схема з точкою перехоплення в Cirq

Особливу дидактичну цінність має візуалізація квантового кола командою print(circuit) (наведено на рис. 1). На екран термінала виводиться наочна ASCII-діаграма. Курсант бачить паралельні лінії кубітів 0: ——, 1: —— та 2: ——, на які послідовно нанизані блоки операцій. Символ H позначає вентиль Адамара. Символ @ показує керуючий вузол CNOT, а знак X – цільовий. Вузол вимірювання відображається позначкою M. Завдяки цій текстовій графіці абстрактна матрична алгебра перетворюється на звичну радіоелектронну принципову схему. Відразу видно просторово-часову розгортку проходження сигналів і точне місце ворожої атаки.Особливу дидактичну цінність має візуалізація квантового кола командою print(circuit), результати якої наведено на рис. 1. На екран термінала виводиться наочна ASCII-діаграма

Порівняння результатів симуляції для стабільних умов та в режимі активної протидії РЕБ у табл. 1.

Таблиця 1.

Порівняння результатів передачі 8-бітного ключа

Режим	BIN (надіслано)	BIN (отримано)	Статус
REB_ACTIVE = False	10110100 (0xB4)	10110100 (0xB4)	Ключі збігаються
REB_ACTIVE = True	10110100 (0xB4)	11001011 (0xCB)	Ключ зруйновано

Створений модельний комплекс на базі Google Cirq переводить викладання квантової інформатики у площину практичного інженерного експерименту. Курсанти на власні очі спостерігають тріаду фундаментальних математичних операцій: унітарну трансформацію матрицею Адамара 2×2 за формулою (1), створення нерозривної кореляції у чотиривимірному тензорному просторі через матрицю CNOT 4×4 за формулою (4) та незворотну редукцію вектора стану під час проєкційного вимірювання за формулою (5). Кожен математичний крок підтверджується зміною вихідного коду програми.

Окрему методичну цінність має можливість багаторазової симуляції через параметр repetitions=1000. Замість абстрактного обчислення ймовірностей курсанти збирають повноцінний статистичний масив експериментів. Закон великих чисел працює бездоганно: емпірична частота фіксації бітів сходиться до теоретичних значень матриць з похибкою менше одного відсотка. При включенні режиму РЕБ статистика наочно демонструє зростання коефіцієнта помилок у квантовому біті (QBER) далеко за межі критичного порогу 11%, що є прямим математичним критерієм негайного скидання скомпрометованого ключа.

Такий дидактичний підхід докорінно трансформує сприйняття вищої математики. Формули більше не виглядають мертвими символами. Вони перетворюються на дієвий алгоритм кіберзахисту. Запропонований шаблон схеми `cirq.Circuit()` є повністю відкритим і легко масштабується до 16, 64 чи 128 бітів у ході виконання навчальних лабораторних завдань та дослідницьких робіт курсантів.

1. *Nielsen M. A., Chuang I. L.* Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 702 p.
2. *Cirq Developers.* Cirq. Google Quantum AI, 2023. URL: https://quantumai.google/cirq.(дата звернення: 06.10.2026).
3. *Bennett C. H., Brassard G.* Quantum Cryptography: Public Key Distribution and Coin Tossing // Proceedings of IEEE ICCSSP. 1984. P. 175–179.
4. *Watrous J.* The Theory of Quantum Information. Cambridge: Cambridge University Press, 2018. 598 p.
5. *Preskill J.* Lecture Notes on Quantum Computation. California Institute of Technology, 2022. URL: http://theory.caltech.edu/~preskill/ph229.(дата звернення: 06.10.2026)

USING GOOGLE CIRQ FRAMEWORK AS AN INNOVATIVE TOOL FOR SIMULATION OF THE MATHEMATICAL FOUNDATIONS OF QUANTUM CRYPTOGRAPHY

This paper demonstrates the application of the Google Cirq framework in Google Colab for teaching the mathematical foundations of quantum key distribution (QKD). We present three applied models. First, the Hadamard gate generates true random numbers (TRNG) in $\mathbb{C}^2$, overcoming the fundamental weaknesses of classical pseudo-random number generators. Second, the 4×4 CNOT unitary operator is used to synthesize entangled Bell pairs in $\mathbb{C}^4$. Third, an electronic-warfare interception model based on projective von Neumann measurement is implemented, illustrating wave function collapse and entanglement degradation. The software visualization generates an ASCII circuit diagram reflecting the signal path and interception point. Repeated statistical simulations validate the law of large numbers and detect excessive quantum bit error rates, practically proving how the no-cloning theorem secures military communication channels.

УДК: 373.5.016:53:51

РОЗВИТОК КРИТИЧНОГО МИСЛЕННЯ НА УРОКАХ ФІЗИКИ В 9 КЛАСІ НУШ ЧЕРЕЗ РЕАЛІЗАЦІЮ МІЖПРЕДМЕТНИХ ЗВ'ЯЗКІВ З МАТЕМАТИКОЮ

Віктор МАЦЮК
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль, Україна
mvm279@i.ua

Постановка проблеми: Формування цілісної всебічно розвиненої особистості, здатної до критичного мислення, є одним із ключових і наскрізних завдань Нової української школи. У 9 класі завершується перший концентр вивчення фізики, учні вивчають механіку, магнітні та електромагнітні явища, будову атома і атомного ядра і т.д., які вимагають значного абстрагування для розуміння суті природних процесів, аналізу, моделювання та перевірки гіпотез. Для цього під час вивчення, практично, кожної теми в тій чи іншій мірі органічно використовується математичний апарат.

Виклад основного матеріалу: У 9 класі теми з фізики та математики ідеально перетинаються. Наприклад, вивчення векторів та функцій у геометрії й алгебрі збігається з дослідженням рівноприскореного руху, сил та імпульсу у фізиці.

Вивчаючи тему «Рівноприскорений рух, графіки руху» учні застосовують лінійну та квадратичну функції, вектори, системи координат. Тим самим розвивається уміння переходити від геометричного образу (графіка) до фізичного процесу і навпаки, розпізнавання помилок на графіках. При цьому варто долучити і інтерактивні цифрові інструменти (GeoGebra,PhET). Змінюючи коефіцієнти математичної функції (початкову швидкість, кут нахилу, тощо) учні спостерігають, як змінюється фізичний процес (координата, швидкість, і т.п.).

Розгляд теми «Взаємодія тіл. Закони Ньютона» неможливий без застосування векторів та їх проєкцій, операцій над векторам. В учнів формується розуміння, чому сила графічно зображається напрямленим відрізком, та вміння критично аналізувати сили, що справді діють на тіло без «зайвих» («уявних») сил.

Вивчення теми «Світлові явища. Геометрична оптика» вимагає знань з геометрії (подібність трикутників, кути) та тригонометрії. Учні вчаться будувати зображення у лінзах та дзеркалах на основі чітких геометричних співвідношень, а також доводити закони заломлення світла, використовуючи тригонометричні функції.

Тема «Ядерна фізика» передбачає використання степенів з від'ємними показниками та елементів прогресій.

Великий потенціал для розвитку критичного мислення учнів дає розв'язування прикладних фізичних задач та задач навчально-дослідницького спрямування. Ще в процесі аналізу умови задачі відбувається формалізація нематематичних понять, побудова числової моделі для її розв'язку, оцінювання допустимості і реальності отриманих результатів, вміння читати та критично аналізувати графічну інформацію[2].

Активно розвиває критичне мислення на уроках фізики і застосування різних форм STEM – активностей, зокрема виконання STEM – проєктів («Власна міні-ГЕС або вітрогенератор», «Розумний» електромагнітний замок для кабінету фізики», «Автоматичне освітлення «Розумний дім», «Смартфон-перископ або домашній проєктор», «Шумове забруднення мого мікрорайону», «Безпечна дистанція та гальмівний шлях авто» і т.п.). У 9 класі учні вже володіють апаратом для розв'язання квадратних рівнянь, побудови графіків та базового аналізу даних, що дозволяє проводити повноцінні STEM-дослідження. В процесі пошуку шляхів вирішення і виконання конкретних поставлених перед ними задач учні вчаться аналізувати інформацію та перевіряти гіпотези (порівнювати очікуваний математичний результат із реальними вимірюваннями і шукати причини похибок), а також приймати рішення в умовах обмежень (наприклад, виконуючи інженерні завдання, обирають матеріали, розраховують навантаження та аргументують свій вибір перед класом). У STEM-проєктах учні стикаються з розбіжностями між теорією (ідеальна математична модель) та практикою (фізичний експеримент із похибками). Вміння знайти причину відхилення (тертя, опір повітря, людський фактор) – це чиста практика критичного аналізу.Учні починають розуміти, що математика – це мова, якою говорить фізика та природа загалом.

Висновки: Міжпредметні зв'язки фізики і математики в 9 класі є базою для формування критичного мислення, оскільки вони переводять навчання з рівня запам'ятовування формул на рівень аналізу досліджуваних явищ і реальних процесів. Вони сприяють реалізації мети базової середньої освіти, закріпленої у Державному стандарті [1], формуванню та розвитку в учнів ряду ключових компетентностей: компетентності у галузі природничих наук, техніки і технологій; математичної компетентності; інформаційно-комунікаційної компетентності.

1. Державний стандарт базової середньої освіти (Постанова КМУ № 898 від 30.09.2020 року). URL:https://osvita.ua/legislation/Ser_osv/76886/#google_vignette
2. *Мацюк В .М.* Формування дослідницької компетентності учнів гімназій. Наукові записки Малої академії наук України, 2022. Випуск 2(24), С.73–81. https://doi.org/10.51707/2618-0529-2022-24-09

DEVELOPING CRITICAL THINKING IN GRADE 9 PHYSICS LESSONS IN THE NEW UKRAINIAN SCHOOL THROUGH CROSS-CURRICULAR LINKS WITH MATHEMATICS

This paper explores opportunities for developing students' critical thinking in Grade 9 physics lessons within the New Ukrainian School framework through cross-curricular links with mathematics. It discusses the use of functions, vectors, coordinate systems, geometric relationships, and mathematical modelling to analyse physical phenomena. Particular attention is paid to interpreting graphs, evaluating the plausibility of numerical results, testing hypotheses, and identifying discrepancies between theoretical predictions and experimental measurements. Digital tools, including GeoGebra and PhET, are considered alongside applied problems and STEM projects as resources for inquiry-based learning. The paper highlights how comparing idealised mathematical models with real physical processes can encourage evidence-based reasoning and informed decision-making. Cross-curricular integration is presented as an approach that supports a shift from memorising formulas towards analysing phenomena while fostering mathematical, scientific, and digital competencies.

УДК 378.147:51:53:004

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ЦИФРОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ ЯК ЗАСІБ ФОРМУВАННЯ ПРИРОДНИЧО-НАУКОВОЇ КАРТИНИ СВІТУ ЗДОБУВАЧІВ ФАХОВОЇ ПЕРЕДВИЩОЇ ОСВІТИ

Максим МОХУН
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль, Україна
mohunmax140801@gmail.com

Актуальність. Сучасні стандарти фахової передвищої освіти орієнтують заклади освіти на формування не лише предметних знань, а й ключових компетентностей: критичного мислення, здатності розв'язувати прикладні задачі, цифрової компетентності [1]. Природничо-наукова картина світу (ПНКС) інтегрує знання з фізики, хімії, біології та математики, причому математика виступає мовою, якою описують закони природи. Водночас у практиці викладання математичні й природничі знання нерідко залишаються розрізненими: формули запам'ятовують без усвідомлення їхнього змісту та меж застосування.

Аналіз освітньої практики свідчить про нестачу методик, які поєднують традиційне викладання з можливостями цифрового моделювання. Постає питання, як організувати навчальну діяльність так, щоб математичне моделювання було не ілюстрацією готового результату, а інструментом пізнання.

Мета роботи – показати дидактичний потенціал математичного моделювання в цифрових середовищах як засобу інтеграції математичних і природничих знань у процесі формування ПНКС.

Основні результати. Запропоновано будувати навчальну діяльність за послідовністю «спостереження → дані → модель → перевірка → інтерпретація». Здобувач не отримує готову формулу, а самостійно відтворює закономірність на основі наведених даних. Такий підхід узгоджується з досвідом використання візуальних і симуляційних засобів, зокрема Stellarium, у вивченні астрономічного компонента природничої освіти [2-4].

Розглянемо застосування цієї послідовності на прикладі третього закону Кеплера. На етапі спостереження студенти у Stellarium розглядають рух планет і порівнюють тривалість їхніх обертів навколо Сонця. На етапі даних вони заносять в електронну таблицю значення великої півосі a орбіти (в астрономічних одиницях) та періоду обертання T (у роках), узяті з відкритих довідкових джерел [5], і обчислюють відношення T^2/a^3 (табл. 2).

Таблиця 2.

Перевірка третього закону Кеплера для планет Сонячної системи (дані округлено)

Планета	a, а. о.	T, роки	T^2/a^3
Меркурій	0,387	0,241	1,00
Земля	1,000	1,000	1,00

Марс	1,524	1,881	1,00
Юпітер	5,203	11,86	1,00

Майже стале значення відношення підказує степеневу залежність $T \propto a^k$. На етапі моделі студенти логарифмують дані та за допомогою лінійної регресії (у таблиці, GeoGebra або Python) визначають кутовий коефіцієнт графіка в координатах lg a – lg T. Для восьми планет Сонячної системи він становить приблизно 1,50 (рис. 1), тобто $T^2 \propto a^3$. Таким чином, закон постає як результат власного дослідження здобувача, а не як завчена формула.

На етапі перевірки модель застосовують до нових об'єктів (наприклад, супутників Юпітера) і аналізують причини розбіжностей між розрахунковими та табличними значеннями. На етапі інтерпретації обговорюють межі застосування закону та його фізичний зміст: зв'язок між силою тяжіння та рухом тіл у полі тяжіння силового центру.

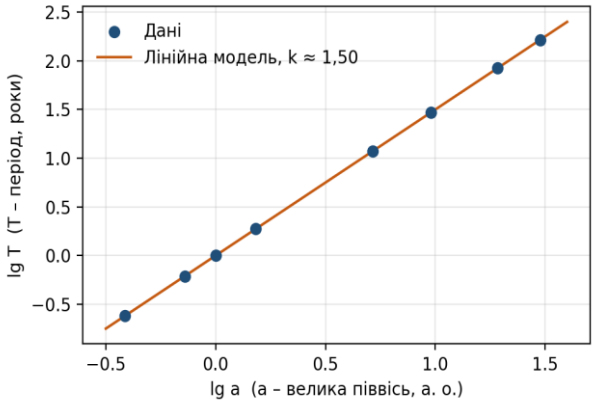


Рис. 1. Залежність періоду обертання планет від великої півосі орбіти в логарифмічних координатах

Дидактичне значення запропонованого підходу полягає в тому, що він охоплює всі компоненти ПНКС: когнітивний (розуміння зв'язку між математичним описом і природним явищем), операційно-діяльнісний (робота з даними, побудова й аналіз моделі) та мотиваційно-ціннісний (усвідомлення прикладного змісту математики у професійній діяльності). Паралельно розвивається цифрова компетентність здобувачів.

Висновки. Математичне моделювання в цифрових середовищах дає змогу поєднати математичну й природничу складові змісту освіти та зробити формування ПНКС діяльнісним. Запропонована послідовність етапів придатна для різних тем природничого циклу, а розглянутий приклад демонструє її реалізацію в навчанні. Перспективою подальших досліджень є експериментальна перевірка ефективності відповідних навчальних завдань у закладах фахової передвищої освіти.

1. *Про фахову передвищу освіту: Закон України від 06.06.2019 № 2745-VIII.* URL: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2745-19 (дата звернення: 30.09.2026).
2. *Мохун М. С., Калаур С. М.* Формування природничо-наукової картини світу у здобувачів фахової передвищої освіти засобами віртуального планетарію Stellarium // Інноваційна педагогіка. 2026. Вип. 94, т. 1. С. 277–281. DOI: 10.32782/ip/94.53.
3. *Мохун М. С., Мохун С. В.* Розвиток інструментів візуалізації в астрономії // Методологічне забезпечення підготовки фахівця природничо-математичного напряму в умовах STEM-освіти: матеріали міжнар. наук.-метод. конф., м. Кам'янець-Подільський, 16–17 жовт. 2025 р. С. 25–27.
4. *Мохун М. С., Калаур С. М.* Цифрові технології у викладанні астрономічного компонента як фундаменту природничо-наукової картини світу // Підготовка майбутніх учителів фізики, хімії, біології, природничих наук в контексті вимог Нової української школи: матеріали VIII міжнар. наук.-практ. конф., м. М. Тернопіль, 22 трав. 2026 р. С. 191–194.
5. *NASA.* Planetary Fact Sheet. URL: https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/ (дата звернення: 30.09.2026).

MATHEMATICAL MODELLING IN DIGITAL ENVIRONMENTS AS A MEANS OF DEVELOPING A NATURAL-SCIENCE WORLDVIEW AMONG STUDENTS OF PROFESSIONAL PRE-HIGHER EDUCATION

The paper examines the didactic potential of mathematical modelling in digital environments (spreadsheets, GeoGebra, Python, Stellarium) for integrating mathematical and natural-science knowledge. A sequence «observation –

data – model – verification – interpretation» is proposed, in which students reconstruct a law from data rather than memorise a formula. Kepler's third law and the exponential decay model are used as examples. The approach supports the cognitive, operational-activity and motivational-value components of the natural-science worldview and develops digital competence.

УДК 37.016:51:53:004.8

ШІ-ТЬЮТОР ІЗ «ЗАПОБІЖНИКАМИ» У НАВЧАННІ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН: ВІД ГОТОВОЇ ВІДПОВІДІ ДО КЕРОВАНОГО ДІАЛОГУ

Ростислав МОЦИК
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, Україна
rostislavkpnu@gmail.com
Юрій СМОРЖЕВСЬКИЙ
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, Україна
smorzhevskyi@kpnu.edu.ua

Постановка проблеми. Генеративні мовні моделі стали повсякденним інструментом студентів і викладачів, тож питання полягає вже не в тому, чи допускати штучний інтелект (ШІ) до вивчення фізико-математичних дисциплін, а в тому, як організувати його використання, щоб він розвивав мислення, а не підміняв його. Метааналіз Liu, Zhang та Wang (2026), що охопив 22 емпіричні дослідження (46 незалежних вибірок, N = 5232), виявив помірний позитивний вплив генеративного ШІ на результати навчання математики (g = 0,534), причому ефект залежить від способу інтеграції ШІ в навчальний процес, а не від рівня освіти чи тривалості втручання [2]. Водночас дослідження на матеріалі шкільної математики засвідчило: необмежений доступ до чат-бота підвищує успішність під час тренування, але після його вилучення результати перевірочного тесту погіршуються, тоді як версія з педагогічними «запобіжниками» цей негативний ефект пом'якшує [1]. У фізичній освіті ШІ-асистент для аналізу експериментальних даних підвищив мотивацію та знизив стрес майбутніх учителів (n = 50), проте статистично значущого приросту знань не забезпечив [3]. Рекомендації МОН і Мінцифри (2025) наголошують, що ШІ не замінює викладача, залишається під людським контролем і застосовується прозоро [4].

Отже, виникає потреба в методичній моделі, яка зберігає мотиваційні та продуктивні переваги ШІ й водночас запобігає перекладанню на нього самої розумової роботи (когнітивному розвантаженню). Мета тез – описати таку модель для фізико-математичних дисциплін у закладі вищої освіти.

Модель «керований діалог». Пропонуємо організовувати взаємодію студента з ШІ-тьютором у п'ять кроків. (1) Власна спроба до звернення: студент фіксує план розв'язання або гіпотезу, і лише потім звертається до ШІ. (2) Градуйовані підказки: інструкцією (системним промптом) тьютор налаштовується так, щоб не видавати готового розв'язку, а рухатися за рівнями – навідне запитання; нагадування принципу чи закону; аналогічний розібраний приклад; перевірка окремого кроку студента. (3) Незалежна верифікація: твердження ШІ перевіряються засобами з відтворюваним результатом – символьними та числовими обчисленнями (SymPy, NumPy у Jupyter/Colab), динамічною геометрією (GeoGebra), інтерактивними симуляціями (PhET), а також «фізичними» перевірками: розмірністю, граничними випадками, оцінкою порядку величини. (4) Рефлексія: пояснення розв'язку власними словами та короткий журнал взаємодії з ШІ (запити, прийняті й відхилені підказки). (5) Оцінювання без ШІ та «ШІ-стійкі» завдання: контрольна частина виконується без доступу до моделі, а частина завдань вимагає знайти й обґрунтувати помилку у відповіді ШІ, що водночас підтримує академічну доброчесність.

Приклад. Розглянемо задачу про нелінійні коливання математичного маятника. Студент самостійно виводить рівняння $\theta'' + (g/L)\cdot\sin\theta = 0$ та лінеаризує його ($\sin\theta \approx \theta$). ШІ-тьютор, не називаючи результату, запитує про межі застосовності наближення. Далі студент чисельно розв'язує рівняння в Python для різних початкових амплітуд, порівнює розв'язок із гармонічним, будує графіки й формулює висновок про залежність періоду коливань від амплітуди. ШІ використовується для уточнювальних запитань і пошуку помилок у коді, а не для отримання відповіді. Так в одному завданні поєднуються математичне моделювання, фізична інтерпретація та критична оцінка відповіді ШІ.

Перевірка ефективності. Для оцінювання моделі пропонується порівняти дві групи (керований діалог і вільне використання ШІ) за такими показниками: результат відкладеного тесту без доступу до ШІ (за логікою дослідження [1]), шкали мотивації та тривожності (за логікою дослідження [3]), якісний аналіз журналів взаємодії.

Висновки. Доказова база 2025–2026 рр. свідчить, що вплив ШІ на навчання фізико-математичних дисциплін визначається не самим фактом його використання, а способом інтеграції. Модель «керований діалог» зберігає мотиваційні переваги ШІ, повертає центр пізнавальної активності студентові та узгоджується з національними рекомендаціями щодо відповідального використання ШІ у закладах вищої освіти. Перспективою є апробація моделі на різних дисциплінах і порівняння її з вільним використанням ШІ.

1. *Bastani H., Bastani O., Sungu A., Ge H., Kabakcı Ö., Mariman R.* Generative AI without guardrails can harm learning: Evidence from high school mathematics. Proceedings of the National Academy of Sciences. 2025. Vol. 122. e2422633122. DOI: 10.1073/pnas.2422633122.
2. *Liu B., Zhang W., Wang F.* Can Generative Artificial Intelligence Effectively Enhance Students' Mathematics Learning Outcomes? A Meta-Analysis of Empirical Studies from 2023 to 2025. Education Sciences. 2026. Vol. 16, No. 1. Art. 140. URL: https://www.mdpi.com/2227-7102/16/1/140.
3. *Henze J., Lademann J., Becker-Genschow S., Bresges A.* AI-supported data analysis boosts student motivation and reduces stress in physics education. Frontiers in Education. 2026. DOI: 10.3389/feduc.2026.1719670.
4. Штучний інтелект у закладах вищої освіти: рекомендації для викладачів, студентів і працівників ЗВО. МОН України, Мінцифри, 2025. URL: https://mon.gov.ua/news/shtuchnyi-intelekt-u-zakladakh-vyshchoi-osvity-rekomendatsii-dlia-vykladachiv-studentiv-i-pratsivnykiv-zvo.

AN AI TUTOR WITH SAFEGUARDS IN TEACHING PHYSICS AND MATHEMATICS: FROM READY-MADE ANSWERS TO GUIDED DIALOGUE

The paper addresses how generative artificial intelligence can be integrated into the teaching of physics and mathematics in higher education so that it develops students' reasoning rather than replacing it. Drawing on recent empirical evidence, the authors propose a «guided dialogue» model of interaction with an AI tutor. The model has five steps: the student's own attempt before consulting the AI, graded hints instead of ready-made solutions, independent verification of AI output, reflection, and assessment without AI. The model is illustrated with the problem of nonlinear pendulum oscillations, and a design for evaluating its effectiveness is outlined.

УДК: 378.147:51:53:004.8.

ЦИФРОВІ ТЕХНОЛОГІЇ ЯК ІНСТРУМЕНТ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ СТУДЕНТІВ

Тетяна НАБОК
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, м. Кременчук, Україна
Анна ЗАМША
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, м. Кременчук, Україна
tetiana.nabok@gmail.com

Актуальність. Цифровізація освітнього процесу є однією з визначальних тенденцій розвитку сучасної вищої освіти. Використання цифрових технологій трансформує способи подання навчальних матеріалів, організацію самостійного навчання студентів, а також методи моніторингу та оцінювання результатів навчання. Цифрові інструменти відіграють особливо важливу роль у процесі вивчення математики, оскільки дають змогу поєднувати теоретичне вивчення математичних понять із їхньою візуалізацією за допомогою графіків, моделюванням та практичним застосуванням.

Формування математичної компетентності студентів вимагає не лише засвоєння математичних знань, понять та методів розв'язання задач, а й уміння застосовувати їх для аналізу та розв'язання практичних і професійно орієнтованих задач. У цьому контексті цифрові технології відкривають додаткові можливості для розвитку логічного та алгоритмічного мислення, математичного моделювання, дослідницьких навичок, а також уміння самостійно перевіряти отримані результати.

Сучасні цифрові інструменти, зокрема комп'ютерні математичні системи, інтерактивні математичні середовища, онлайн-платформи та інструменти графічної візуалізації, дають змогу динамічно представляти математичні об'єкти та досліджувати взаємозв'язки між ними. Наприклад, використання таких цифрових ресурсів, як GeoGebra чи Desmos, дозволяє візуально представляти функції, геометричні об'єкти, графіки та математичні залежності, що полегшує розуміння абстрактного навчального матеріалу.

Водночас ефективність цифрових технологій залежить не лише від їхньої доступності, а й від вибору відповідних інструментів відповідно до змісту математики та навчальних цілей. Надмірне використання цифрових інструментів без достатнього методологічного обґрунтування може призвести до зниження ролі

самостійного математичного мислення. Тому важливо чітко визначити потенціал цифрових технологій як «інструментів», що доповнюють традиційні методи математичної освіти та сприяють формуванню відповідних компетентностей.

Метою даного дослідження є з'ясування можливостей використання цифрових технологій як інструментів для формування математичних компетентностей студентів та визначення основних напрямків їхнього застосування в освітньому процесі.

Методи дослідження.Теоретичні методи включали аналіз, систематизацію та узагальнення наукової та педагогічної літератури щодо формування математичної компетентності учнів та використання цифрових технологій у навчальному процесі.

Основні результати дослідження. У сучасних умовах, коли відбувається цифровізація освіти, використання цифрових технологій у викладанні математики слід розглядати не лише як засіб урізноманітнення навчального процесу, а й як засіб формування у учнів здатності застосовувати математичні знання, методи та моделі для вирішення навчальних і практичних завдань. Компетентнісний підхід ґрунтується на інтеграції знань, умінь, способів мислення та здатності застосовувати їх у різних ситуаціях. У нормативно-правових документах України щодо освіти математична компетентність визначена як одна з основних компетентностей, а її формування пов'язане, зокрема, з логічно-алгоритмічним мисленням, математичним моделюванням, розв'язуванням задач та застосуванням математичних методів у практичній діяльності [4, 5].

Взаємозв'язок між математичною компетентністю та цифровою компетентністю є важливим. Цифрові інструменти дають змогу оперувати числовими даними, графіками, таблицями, математичними моделями та візуальними представленнями об'єктів. При цьому учні не обмежуються лише виконанням готових алгоритмів, а можуть змінювати параметри моделей, спостерігати за результатами цих змін, висувати гіпотези та перевіряти їх. Саме така діяльність сприяє переходу від простого відтворення математичних знань до дослідницького навчання [1, 2].

Одним із найпоширеніших цифрових інструментів у математичній освіті є GeoGebra. Це динамічне математичне середовище, що поєднує функції візуалізації геометричних, алгебраїчних та графічних об'єктів.

Згідно з систематичним оглядом, проведеним А. Йоханнесом та Х.-Л. Ченом, дослідження щодо використання GeoGebra в математичній освіті переважно стосуються геометрії та математичного аналізу, а серед основних результатів досліджень розглядаються навчальні досягнення, розвиток вищого мислення, ставлення учнів до навчання та сприйняття цифрових інструментів. Автори також зазначають, що в більшості досліджень при інтеграції GeoGebra в математичну освіту застосовується активний підхід або підхід, орієнтований на розв'язання задач [9].

Українські дослідники О. Гриб'юк та В. Юнчиктакож звертають увагу на науковий потенціал GeoGebra. На їхню думку, використання цієї системи під час розв'язування математичних задач дає змогу підвищити ефективність навчання та розвинути дослідницькі здібності учнів. Особливо важливу роль відіграє створення математичних моделей за допомогою комп'ютера та можливість їхнього застосування для розв'язування евристичних задач [2].

Використання цифрових технологій є особливо ефективним під час вивчення функцій та їх графіків. За допомогою GeoGebra та подібних середовищ учні можуть одночасно працювати з аналітичним виразом функції та її графічним зображенням. Наприклад, під час дослідження функції можна змінювати значення коефіцієнтів і безпосередньо спостерігати, як це впливає на положення та форму графіка. Такий підхід дає змогу виявити причинно-наслідковий зв'язок між алгебраїчними параметрами та геометричними властивостями функції [6, 10].

Експериментальні дослідження підтверджують освітній потенціал цього підходу. Х. Зулнаїді та С. Замрі у квазіекспериментальному дослідженні, в якому взяли участь 345 учнів, виявили, що використання GeoGebra сприяло підвищенню рівня засвоєння концептуальних та процедурних математичних знань порівняно з традиційними уроками. Автори також продемонстрували, що процедурні знання відіграють важливу роль у взаємозв'язку між концептуальними знаннями та результатами навчання [11].

Х. Зулнаїді, Е. Октавіка та Р. Хідаят у дослідженні, в якому взяли участь 80 учнів, виявили статистично значущу різницю в навчальних результатах між групою, що використовувала GeoGebra, та групою, що застосовувала традиційні методи навчання, під час вивчення функцій та границь. Дослідники підкреслюють, що візуальне представлення математичних понять та процедур за допомогою графіків полегшує їхнє розуміння та сприяє більш активній участі учасників у навчальному процесі [10].

Цифрові технології можна використовувати не лише для візуалізації, а й для математичного моделювання. Наприклад, під час розв'язування прикладних задач учні можуть спочатку визначити математичні залежності між змінними, побудувати відповідну модель у цифровому середовищі, проаналізувати отримані

графіки, перевірити значення різних параметрів і лише після цього зробити висновок. У цьому випадку цифрові інструменти не замінюють математичне міркування, а надають додаткові можливості для його реалізації [1, 2].

Використання цифрових інструментів для розвитку дослідницьких здібностей та алгоритмічних навичок становить окрему галузь. О. Гриб'юку своєму дослідженні щодо практичного застосування динамічної математичної системи «GeoGebra» розглядає її як засіб підтримки загальних та фахових здібностей студентів у процесі навчання. Автор підкреслює можливість використання динамічних математичних моделей для організації активної пізнавальної діяльності [1].

Крім того, перспективним є поєднання цифрового математичного середовища та комп'ютерно-підтримуваного спільного навчання. О. Біргін та Х. Акар провели дослідження щодо використання GeoGebra в рамках комп'ютерно-підтримуваного спільного навчання під час вивчення експоненційних та логарифмічних функцій. Результати квазіексперименту підтвердили, що цей підхід має статистично значущий вплив на результати навчання. Це свідчить про те, що цифрове середовище може виконувати не лише функцію особистого інструменту, а й слугувати майданчиком для спільного розв'язання математичних задач [6].

Водночас використання цифрових технологій не повинно обмежуватися лише автоматичним отриманням правильної відповіді. Я. Вассі та Г. Зергавзвертають увагу на те, що використання GeoGebra має певні обмеження. Зокрема, результати залежать від рівня цифрової грамотності користувача, попередньої підготовки та складності окремих операцій. Отже, з педагогічної точки зору бажано, щоб учні спочатку проводили математичний аналіз, висували гіпотези та визначали спосіб розв'язання, а вже потім використовували цифрові інструменти для моделювання, перевірки, візуалізації та дослідження отриманих результатів у цифровому середовищі [1, 8].

Наукова цінність даного дослідження полягає в систематизації теоретичних підходів щодо використання цифрових технологій у процесі математичної освіти студентів. У цій роботі було висвітлено основні можливості цифрових інструментів у візуалізації математичних об'єктів, математичному моделюванні, дослідницькій діяльності, розвитку логічного та алгоритмічного мислення, а також в організації самостійного навчання студентів. Завдяки узагальненню результатів досліджень вчених з Японії та інших країн вдалося визначити основні напрямки використання цифрових технологій як засобу формування математичної компетентності. Крім того, наукова цінність даної роботи полягає також у тому, що в ній обґрунтовано необхідність поєднання традиційних методів викладання математики з цифровими інструментами з урахуванням навчального змісту, поставлених освітніх цілей та рівня підготовки студентів.

Практичне значення отриманих результатів полягає у можливості використання узагальнених у роботі положень під час організації навчання математичних дисциплін у закладах вищої освіти.Запропоновані напрямки використання цифрових технологій можуть застосовуватися викладачами та студентами під час вивчення функцій, графіків, математичного аналізу, геометрії та інших розділів математики. Зокрема, використання таких цифрових інструментів, як GeoGebra, Desmos, WolframMathematica та Excel, може сприяти візуалізації математичних понять, моделюванню математичних процесів, перевірці результатів розв'язання задач та стимулюванню самостійного навчання.

Матеріали цього дослідження можуть бути використані студентами для підготовки до практичних занять, виконання індивідуальних та дослідницьких завдань, а також для вдосконалення навичок роботи з цифровим математичним середовищем. Конкретні висновки цього дослідження можуть бути використані викладачами при розробці практичних завдань, інтерактивних вправ та інструментів поточного оцінювання, які спрямовані не лише на засвоєння математичних знань, а й на розвиток умінь їх застосування в цифровому середовищі.

Висновки.Використання цифрових технологій не лише сприяє диверсифікації освітнього процесу, а й створює умови для візуалізації математичних понять, математичного моделювання, дослідницької діяльності, розвитку логічного та алгоритмічного мислення, а також практичного застосування математичних знань. З'ясувалося, що найважливішими напрямками використання цифрових технологій у математичній освіті є побудова та аналіз графіків функцій, моделювання математичних процесів, перевірка результатів розв'язання задач, організація самостійного навчання, автоматизація оцінювання навчальних досягнень та організація спільних навчальних заходів. У цьому контексті особливо великий потенціал мають динамічні математичні середовища, зокрема GeoGebra, які дають змогу поєднувати аналітичне, графічне та геометричне представлення математичних об'єктів.Аналіз наукових досліджень, проведених вченими в Японії та за кордоном, показує, що використання цифрових інструментів позитивно впливає на засвоєння математичних понять і процедур, активність учнів та вдосконалення їхніх дослідницьких навичок.

1. *Гриб'юк О. О.* Система динамічної математики GeoGebra як засіб підтримки загальних і спеціальних здібностей учнів у процесі дослідницького навчання: практичний досвід. Фізико-математична освіта. 2020. № 2 (24). С. 37–51.
2. *Гриб'юк О. О., Юнчик В. Л.* Research the lessons of mathematics with theuse of GEOGEBRA. Наукова молодь-2015 : матеріали III Всеукраїнської науково-практичної конференції молодих учених. Київ : Інститут інформаційних технологій і засобів навчання НАПН України, 2015. С. 1–4.
3. *Круглова Н. В., Диховичний О. О.* Applicationof ICT in creating template programs for generating higher mathematics testitems. Information Technologies and Learning Tools. 2025. Vol. 108, no. 4. P. 175–192.
4. *Михайленко Л. Ф., Андрієвська М. Ю.* Особливості формування інформаційно-комунікаційної компетентності учнів на уроках математики. Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання в підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми. 2023. № 70. С. 188–198. DOI: 10.31652/2412-1142-2023-70-188-198.
5. *Andrusiak I., Slyvka M.* The Scope and Structure of ICT and Digital. Competenciesin the New Ukrainian School. Сучасні дослідження з іноземної філології. 2022. № 3–4. С. 305–316. DOI: 10.32782/2617-3921.2022.21-22.305-315.
6. *Birgin O., Acar H.* The effect of computer-supported collaborativelearning using GeoGebras of ware on 11th grade students' mathematics achievementin exponential and logarithmic functions. International Journal of Mathematical Educationin Science and Technology. 2022. Vol. 53, no. 4. P. 872–889.
7. *Chytas C., van Borkulo S. P., Drijvers P., Barendsen E., Tolboom J. L. J.* Computational thinking in secondary mathematics education with "GeoGebra": Insights from aninterventionin calculus lessons. Digital Experiences in Mathematics Education. 2024. Vol. 10. P. 228–259.
8. *Wassie Y. A., Zergaw G. A.* Some of the potential affordances, challenges and limitations of using GeoGebra in mathematics education. EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education. 2019. Vol. 15, no. 8. Article em1734.
9. *Yohannes A., Chen H.-L.* GeoGebra in mathematics education: A systematic review of journal articles published from 2010 to 2020. Interactive Learning Environments. 2023. Vol. 31, no. 9. P. 5682–5697.
10. *Zulnaidi H., Oktavika E., Hidayat R.* Effect of use of GeoGebra on achievement of highschool mathematics students. Education and Information Technologies. 2020. Vol. 25. P. 51–72.
11. *Zulnaidi H., Zamri S. N. A.* The effectiveness of the GeoGebra software: The intermediary role of procedural knowledge on students' conceptual knowledge and their achievementin mathematics. EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education. 2017. Vol. 13, no. 6. P. 2155–2180.

DIGITAL TECHNOLOGIES AS A TOOL FOR DEVELOPING STUDENTS' MATHEMATICAL COMPETENCE

The article examines the use of digital technologies as a tool for developing students' mathematical competence. The purpose of the study is to identify the potential of digital technologies and determine the main areas of their application in mathematics education. The research employed theoretical methods, including analysis, systematization, comparison, and generalization of scientific and educational literature, as well as empirical observation and analysis of practical experience in using digital tools for mathematics learning. The study focuses on the use of dynamic mathematical environments, particularly GeoGebra, for visualizing mathematical concepts, modeling mathematical processes, studying functions and graphs, solving applied problems, and organizing students' independent and collaborative learning. The analysis of Ukrainian and international research demonstrates that appropriately selected digital tools can support the development of logical and algorithmic thinking, research skills, mathematical modeling abilities, and students' understanding of mathematical concepts and procedures. The main areas of digital technology application in mathematics education are identified as visualization, mathematical modeling, research activities, automated assessment, individualization of learning, and collaborative problem-solving. The study emphasizes that digital technologies should complement rather than replace mathematical reasoning and should be used in accordance with educational objectives, learning content, and students' level of preparation. The results can be applied in the organization of mathematics education and in the development of practical and research-oriented learning tasks.

УДК 37.09;004.43

ВИКОРИСТАННЯ PYTHON ДЛЯ ФОРМУВАННЯ ПРАКТИЧНИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ ПІД ЧАС НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

Тетяна ПИЛИПЮК
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Кам'янець-Подільський, Україна
pylypyuk.tetiana@kpnu.edu.ua

У тезах розглянуто можливості використання мови програмування Python як інструменту навчання математики у закладах вищої освіти. Виокремлено основні напрями використання Python: чисельні обчислення, математична візуалізація, дослідження функцій, чисельне розв'язування задач, математичне моделювання та аналіз даних. Запропоновано підхід до організації практичних занять, за якого програмний засіб є інструментом дослідження математичної проблеми, а отриманий результат потребує математичної інтерпретації.

Математична підготовка здобувачів вищої освіти передбачає не лише засвоєння теоретичних положень, формул і алгоритмів, а й формування здатності застосовувати математичний апарат для розв'язування практичних задач. Особливо актуальним це є для здобувачів вищої освіти спеціальностей галузі інформаційних технологій, оскільки математичні методи є основою алгоритмізації, моделювання, статистичного аналізу, машинного навчання та опрацювання даних.

Одним із шляхів посилення практичної спрямованості математичної освіти є використання програмування безпосередньо під час вивчення математичних дисциплін. У цьому контексті Python є зручним інструментом завдяки доступному синтаксису та значній кількості бібліотек для наукових і математичних обчислень.Педагогічно доцільнішим є підхід, за якого студент спочатку формулює математичну проблему, визначає спосіб її розв'язування, реалізує відповідний алгоритм, аналізує отриманий результат і співвідносить його з математичною моделлю.

Дослідження у сфері математичної освіти показують, що програмування може бути засобом розвитку таких математичних компетентностей, як розв'язування задач, дослідження, моделювання, математичне міркування, представлення, узагальнення та абстрагування.

Використання Python як інструменту практичного застосування математичних знань дозволяє організувати навчальну діяльність таким чином, щоб математичні поняття набували практичного змісту. Залежно від теми дисципліни можуть використовуватися бібліотеки NumPy, Matplotlib, SciPy та Pandas [1]. NumPy доцільно використовувати для роботи з масивами даних, виконання чисельних обчислень та реалізації математичних алгоритмів. Matplotlib забезпечує графічне представлення результатів і дає змогу досліджувати функціональні залежності. SciPy може застосовуватися для чисельного розв'язування рівнянь, задач оптимізації та інших наукових обчислень. Pandas є корисним інструментом для опрацювання та аналізу табличних даних.Такий набір інструментів дозволяє інтегрувати математичні знання з елементами програмування та аналізу даних. У результаті практичне заняття може бути організоване не навколо виконання однотипних розрахунків, а навколо дослідження певної математичної проблеми.

Значні можливості Python відкриває під час вивчення чисельних методів [2]. На практичних заняттях можна реалізовувати алгоритми методу половинного ділення, методу Ньютона, методу простих ітерацій, чисельного інтегрування та інших методів.Ще більш змістовним є порівняння декількох чисельних методів. Студент може визначити, який метод забезпечує задану точність, скільки ітерацій для цього потрібно та як початкове наближення впливає на результат.Таким чином, математична формула або алгоритм перетворюється на об'єкт практичного дослідження. Здобувач вищої освіти отримує можливість не тільки застосувати відомий метод, а й дослідити його властивості.

Особливе значення має використання Python для математичного моделювання, оскільки саме моделювання забезпечує зв'язок між математичною теорією та практичними ситуаціями.

Загальна схема навчального завдання може виглядати так (рис. 1):

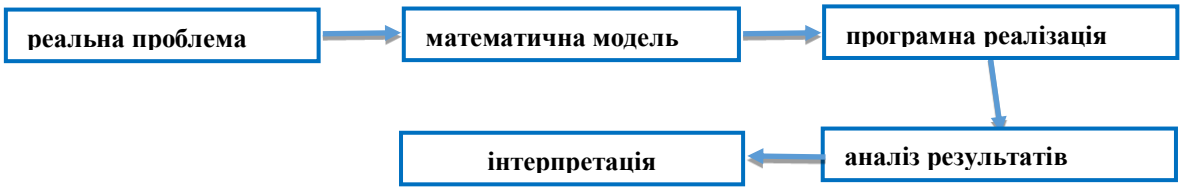


Рис. 1. Загальна схема навчального завдання

Наприклад, під час вивчення диференціальних рівнянь можна запропонувати модель зміни певної величини в часі. Наприклад, здобувач вищої освіти визначає математичну модель, встановлює початкові умови, отримує аналітичний або чисельний розв'язок, після чого реалізовує його засобами Python та досліджує залежність результату від параметрів.

Щодо методичних умов ефективного використання Python, то для результативного використання Python у математичній освіті важливо дотримуватися декількох методичних принципів.

По-перше, математична постановка задачі має передувати програмній реалізації. Студент повинен розуміти, що саме обчислюється та яким математичним методом.

По-друге, програмний код не повинен бути самоціллю. У навчальному завданні доцільно передбачати обов'язковий аналіз отриманого результату.

По-третє, ефективними є завдання, які передбачають експериментування: зміну параметрів, порівняння методів, дослідження похибки, побудову графіків та перевірку гіпотез.

По-четверте, доцільно поступово переходити від готового коду до самостійної розробки алгоритму. На початковому етапі здобувач вищої освіти може отримувати фрагмент програмної реалізації, а надалі – самостійно створювати програму на основі математичного алгоритму.

Такий підхід узгоджується із сучасними дослідженнями математичної освіти, у яких наголошується на необхідності розроблення спеціальних математичних задач із програмуванням, де основна увага залишається зосередженою на математичному змісті, а не на вивченні синтаксису програмування.

Таким чином, використання Python у навчанні математики створює умови для поєднання фундаментальної математичної підготовки з практичною діяльністю здобувачів вищої освіти. Програмування дозволяє перейти від виконання стандартних обчислювальних вправ до дослідження математичних моделей, проведення чисельних експериментів, візуалізації та аналізу результатів.

Практична цінність такого підходу полягає у формуванні здатності студентів застосовувати математичні знання для розв'язування прикладних задач, будувати алгоритми, аналізувати отримані результати та обґрунтовувати прийняті рішення.

Водночас Python доцільно розглядати не як заміну традиційним математичним методам, а як інструмент їх поглибленого вивчення. Найбільш продуктивною є модель, у якій *математична постановка, алгоритм, програмна реалізація, експеримент, аналіз та математична інтерпретація* утворюють єдиний навчальний цикл.

Отже, інтеграція Python у навчання математики може бути одним із дієвих засобів формування практичних, дослідницьких та цифрових компетентностей здобувачів вищої освіти, особливо під час підготовки фахівців, діяльність яких передбачає використання математичного моделювання, алгоритмів та аналізу даних.

1. *Горобець О. Ю.* Мова Python: для інженерних та наукових задач [Електронний ресурс] : підруч. для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 162 «Біотехнології та біоінженерія», магістра за спеціальністю за спеціальністю 162 «Біотехнології та біоінженерія», бакалавра за спеціальністю 104 «Фізика та астрономія» та магістра за спеціальністю 104 «Фізика та астрономія» / О. Ю. Горобець, С. В. Горобець, К. Ю. Хахно ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – 1-ше вид. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 277 с.
2. Програмування числових методів мовою Python: підруч./ А.В. Анісімов, А.Ю. Дорошенко, С.Д. Погорілий, Я.Ю. Дорогий ;за ред. А.В. Анісімова. Київ. : Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2014. – 640 с.

USING PYTHON TO FORM PRACTICAL COMPETENCES OF HIGHER EDUCATION STUDENTS DURING MATHEMATICS TEACHING

The potential of using the Python programming language as a tool for teaching mathematics in higher education institutions is explored. Key areas of Python's application are identified: numerical computation, mathematical visualization, function analysis, problem-solving, mathematical modeling, and data analysis. An approach to organizing practical classes is proposed wherein software acts as an instrument for investigating mathematical problems, while the generated results require mathematical interpretation

УДК 373.5.016:53

ФІЗИЧНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ НАВПАКИ ЯК ІНСТРУМЕНТ ФОРМУВАННЯ ВМІНЬ ПРОЄКТУВАТИ ДОСЛІДНИЦЬКУ УСТАНОВКУ

Наталія РАПІНДА
Галицький фаховий коледж імені В'ячеслава Чорновола, м. Тернопіль, Україна
natalarapindarobota@gmail.com

Під час виконання лабораторної роботи учні зазвичай отримують готові інструкції, складену установку, й перелік величин, які необхідно виміряти. Це дає змогу вимірювати необхідні фізичні величини, здійснювати обчислення але по суті вже багато чого виконано за учня. А саме: обрано обладнання, визначено параметри установки й послідовність дій учня. Для того щоб проведення лабораторних робіт було продуктивнішим можна запропонувати учням виконати зворотні дії: спочатку задати бажаний результат, а потім самостійно визначити, як його можна отримати і що для цього буде потрібно (мова йде про вибір приладів).

Такий підхід у роботі названо фізичним експериментом навпаки. Учень має перейти від цільового значення фізичної величини до вибору параметрів установки, а також спрогнозувати результат вимірювання, провести потрібний дослід і при потребі змінити своє рішення [1].

Мета роботи – описати методику організації фізичного експерименту навпаки, в якому учень проєктує установку відповідно до наперед заданого результату й перевіряє її роботу дослідним шляхом (інколи методом спроб та помилок).

Для досягнення мети поставлено такі завдання:

— визначити послідовність дій учня під час зворотного проєктування експерименту;
— розробити приклад завдання з нитяним маятником;
— запропонувати критерії оцінювання розрахунку, плану перевірки та пояснення отриманого результату.

Основна частина

Під час проведення експериментів на уроках фізики учні вчаться досліджувати: ставити запитання, перевіряти свої припущення та робити висновки.Вони не лише спостерігають за явищем, але й вимірюють фізичні величини, аналізують та пояснюють отриманий результат. Саме завдяки цьому знання формується в процесі роботи: від запитання й планування досліду – до вибору приладів, запису результатів вимірювань і висновку [2].

Фізичний експеримент спонукає учнів міркувати й досліджувати, підтримує їхній інтерес до явища а також допомагає глибше зрозуміти фізичні явища та закони [3]. Він - не просто ілюстрація теоретичних знань, але й в першу чергу - шлях до дослідницького навчання [1].

В запропонованому нами експерименті вчитель задає результат, але не повідомляє готових параметрів установки. Тоді робота учня проходить п'ять послідовних етапів:

— визначити досліджувану величину;
— розрахувати її значення;
— зібрати установку;
— провести вимірювання;
— пояснити та за потреби скоригувати результат.

Розрахунок на цьому шляху є своєрідним передбаченням, яке потрібно перевірити, а не завершенням завдання.

Відмінність запропонованого формату полягає насамперед у тому, хто ухвалює рішення під час підготовки та проведення досліду (табл. 1).

Таблиця 1.

Розподіл дослідницьких рішень у двох форматах лабораторної роботи

Дослідницьке рішення	Звичайна лабораторна робота	Фізичний експеримент навпаки
Який результат потрібно отримати	Учень визначає результат за готовою установкою	Учитель задає цільовий результат

Який параметр установки змінювати	Зазначено в інструкції	Учень обирає та обґрунтовує
Яке значення параметра встановити	Зазначено в інструкції	Учень розраховує
Як перевірити результат	Спосіб описано в інструкції	Учень планує вимірювання
Що робити в разі розбіжності	Учень пояснює результат за вказівками	Учень шукає причину й коригує установку

Отже, учитель визначає навчальну мету й доступне обладнання, а вже сам учень приймає ключові рішення щодо побудови та перевірки установки. Розглянемо, як це працює на прикладі нитяного маятника.

Як приклад пропонуємо учням сконструювати нитяний маятник (див. рис. 1), період коливань якого становитиме приблизно 1,5 с. Вони мають самостійно визначити, який параметр установки можна змінювати для досягнення цієї мети. За умови малих коливань період нитяного маятника можна знайти за формулою:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

де T – період коливань,l – довжина маятника, g – прискорення вільного падіння. Звідси довжина маятника становить:

$$l = \frac{gT^2}{4\pi^2}.$$

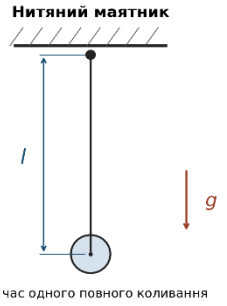


Рис. 1. Схема нитяного маятника

Перед складанням установки учні мають вирішити, що саме вважати довжиною маятника: відстань від точки підвісу до центра тягарця. Також вони визначають спосіб перевірки отриманого результату.

Під час вимірювання часу одного коливання секундомір може дати значну відносну похибку через вплив людського фактору. Тому необхідно виміряти час десяти повних коливань, а потім поділити його на десять. Для запланованого періоду орієнтиром буде час близько 15 с.

Після виготовлення маятника учні проводять вимірювання й порівнюють знайдений період із заданим. Якщо значення відрізняються, завдання не завершується висновком про те, що «не вийшло». Учні перевіряють спосіб вимірювання довжини, точність відліку часу та умови, за яких застосовано формулу. Після цього пропонують обґрунтовану зміну установки і ще раз повторюють дослід. Саме цей крок відрізняє проєктування експерименту від простої підстановки чисел у готову формулу.

Учнівський висновок можна побудувати за такою схемою:

- Який результат планували?
- Яку довжину обрали й чому?
- Що виміряли?
- Наскільки збіглися прогноз і вимірювання?
- Що змінили б під час повторного досліду?

Відповіді дозволяють учителю побачити не лише правильність обчислення учнів, але й те, чи розуміє він зв’язок між моделлю, конструкцією установки та виміряним результатом.

Оцінювання такої роботи доцільно здійснювати за чотирма критеріями:

1. обґрунтований вибір досліджуваного параметра;
2. правильність розрахунку й одиниць вимірювання;
3. спосіб перевірки;
4. пояснення розбіжності та запропоновані виправлення.

За кожним критерієм можна надати від нуля до двох балів. Високої оцінки заслуговує не лише близький до 1,5 с виміряний період, а й аргументоване пояснення ситуації, коли першої спроби виявилося недостатньо.

Практичне значення такого експерименту полягає в тому, що його можна виконати з простим обладнанням і пристосувати до інших тем фізики. Зокрема, учням можна запропонувати спроєктувати електричне коло із заданою силою струму за відомої напруги або підібрати певні умови руху тіла для досягнення

заданого часу чи проходження відстані. У кожному випадку важливо передбачити реальну перевірку: лише тоді учень зіставляє розрахункову модель із фізичним дослідом.

Дану модель експерименту можна виконувати як з реальними приладами, так і з віртуальними моделями (див. рис. 2). Для прикладу цей самий експеримент (або інші) можна виконувати на платформі PhET Interactive Simulations[4].

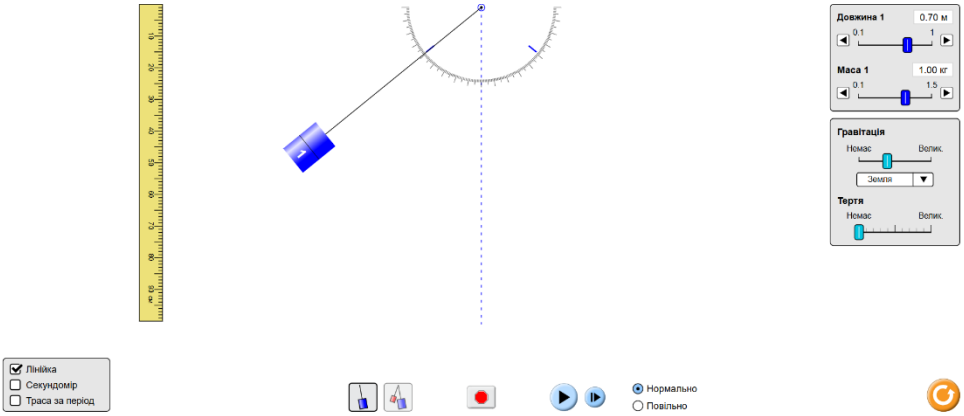


Рис. 2. Віртуальна модель досліду з нитяним маятником

Висновки. У роботі запропоновано методику фізичного експерименту навпаки та розроблено приклад завдання з нитяним маятником. Наперед заданий період коливань спонукає учня самостійно визначити параметр установки, розрахувати його значення, обрати спосіб вимірювання й перевірити прогноз. Послідовність «розрахунок – складання – вимірювання – корекція» робить предметом навчання сам процес проєктування досліду.

Розроблене завдання можна застосувати на заняттях із фізики або під час самостійної дослідницької роботи. Наступним етапом має стати його апробація та аналіз учнівських рішень, зокрема того, як вони пояснюють розбіжність між запланованим і виміряним періодами до й після серії таких кейсів.

1. *Лящук Д. В., Федчишин О. М.* Реальний фізичний експеримент у шкільному курсі фізики: дидактичний потенціал та виклики. Current scientific goals, approaches and challenges : collection of scientific papers «SCIENTIA» : proceedings of the IV International Scientific and Theoretical Conference (Dresden, Germany, 13 June 2025). Dresden, 2025. С. 249–256.
2. *Ткаченко В. М., Копилова М. С.* Навчальний фізичний експеримент як засіб формування ключових компетентностей учнів при вивчені теми «Електричний струм». *Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ*. 2026. Вип. 16. С. 23–29.
3. *Федчишин О. М.* Особливості реалізації експериментального методу навчання в класах гуманітарного спрямування: дис. канд. пед. Наук : 13.00.02 / НПУ імені М. П. Драгоманова. Київ, 2013. 266 с.
4. https://phet.colorado.edu/sims/html/pendulum-lab/latest/pendulum-lab_all.html?locale=uk

REVERSE PHYSICS EXPERIMENTS AS A TOOL FOR DEVELOPING EXPERIMENTAL SETUP DESIGN SKILLS

This paper proposes a reverse approach to physics experiments in which students design an experimental setup to achieve a predetermined outcome rather than follow ready-made instructions. The approach involves selecting an adjustable parameter, calculating its required value, assembling the setup, conducting measurements, and explaining discrepancies to guide further adjustments. A simple pendulum with a target oscillation period of approximately 1.5 seconds illustrates the proposed methodology. Particular attention is paid to measurement planning, the assumptions underlying the mathematical model, and the comparison of predicted and measured results. Four assessment criteria are proposed: justified parameter selection, calculation accuracy, verification procedures, and the explanation of discrepancies and suggested adjustments. The approach can be implemented using physical equipment or virtual simulations. Its educational value lies in making experimental design itself a learning objective; classroom implementation and evaluation remain areas for further research.

УДК 378:070

ГЕЙМІФІКАЦІЯ ПРИ НАВЧАННІ ПРОГРАМУВАННЯ

Оксана РОМАНИШИНА
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль, Україна
oksroman@tnpu.edu.ua

Програмування є однією зі складних для засвоєння галузей. Це потребує одночасного розвитку алгоритмічного, логічного й абстрактного мислення, уміння аналізувати проблеми, визначати послідовність дій і знаходити ефективні способи їх розв'язання. На початку вивчення мов програмування учні та студенти часто стикаються з труднощами під час опанування синтаксису мов програмування, алгоритмічних конструкцій, структур даних, принципів об'єктно-орієнтованого програмування та налагодження програмного коду. В подальшому стикаються із необхідністю самостійно знаходити помилки, аналізувати причини їх появи. Тому доцільним є пошук таких методів і засобів навчання, які сприятимуть підвищенню зацікавленості здобувачів освіти, активізації їхньої пізнавальної діяльності та формуванню стійкої мотивації до вивчення програмування.

Одним із перспективних підходів до розв'язання цього завдання є гейміфікація. Тому метою публікації є стисло розглянути особливості геймифікації при навчанні програмування. Для представлення розглядуваного питання використано сукупність взаємопов'язаних методів дослідження, зокрема методи аналізу та синтезу, порівняння, класифікації та узагальнення наукових підходів до проблеми дослідження.

Сутність геймифікації полягає у використанні ігрових елементів і механік у неігровому контексті, зокрема в освітньому процесі. Її застосування дає змогу зробити навчання більш інтерактивним, мотивувальним і орієнтованим на активну діяльність здобувачів освіти.Завдяки системі завдань, викликів, балів, рівнів, досягнень і зворотного зв'язку навчальний процес набуває ознак послідовного руху до визначеної мети. Водночас важливо розмежовувати гейміфікацію та навчання на основі ігор. Якщо гейміфікація передбачає використання окремих ігрових механік у традиційному освітньому процесі, то навчання на основі ігор передбачає використання самої гри як засобу досягнення навчальних результатів [1].

У науковій літературі, зокрема в роботі Г. Скасків, виокремлюють два основні типи гейміфікації: структурну та контентну. Структурна гейміфікація передбачає використання ігрових елементів для організації навчального процесу без істотної зміни змісту навчального матеріалу. До таких елементів належать бали, рівні, значки, таблиці лідерів, система досягнень і візуалізація прогресу. Наприклад, під час вивчення Python здобувачі освіти можуть отримувати бали за правильне виконання завдань, переходити на наступні рівні після опанування певних програмних конструкцій і відстежувати власний поступ. Контентна гейміфікація, навпаки, передбачає зміну способу подання навчального матеріалу через використання сюжету, персонажів, місій, проблемних ситуацій і тематичних викликів. У такому випадку програмістські задачі об'єднуються в цілісну історію, а написання коду стає засобом досягнення ігрової мети. Наприклад, для переходу до наступного етапу квесту необхідно розробити алгоритм, виправити помилки в програмі або створити фрагмент програмного продукту.

Застосування гейміфікації в навчанні програмування має значний дидактичний потенціал. Передусім вона сприяє підвищенню навчальної мотивації та пізнавальної активності, формуванню інтересу до розв'язування алгоритмічних задач і розвитку логічного мислення. Поетапне ускладнення завдань дає змогу поступово переходити від опанування базових конструкцій до розроблення складніших програм. Можливість повторних спроб і отримання оперативного зворотного зв'язку допомагає здобувачам освіти сприймати помилки не лише як ознаку невдалого результату, а і як необхідний етап пошуку правильного рішення. Це сприяє розвитку наполегливості, самостійності, рефлексії та готовності вдосконалювати власний програмний код. Як зазначає Мельник, гейміфікація може посилювати залученість здобувачів освіти, підтримувати їхню внутрішню мотивацію та стимулювати самостійне опанування навчального матеріалу, що особливо актуально під час вивчення абстрактних понять і розв'язування складних програмістських задач.

Практична реалізація гейміфікації в навчанні програмування передбачає використання різноманітних цифрових інструментів, які відрізняються за функціональними можливостями та призначенням. Одну групу становлять гейміфіковані онлайн-ресурси для створення тестів, вікторин і перевірки знань, зокрема Kahoot!, Quizizz і Quizlet. Вони дають змогу організовувати інтерактивне опитування, повторення понять, перевірку знань про синтаксис мов програмування та алгоритмічні конструкції. Використання таймерів, балів, рейтингів і миттєвого зворотного зв'язку активізує увагу учнів та студентів. Проте такі засоби доцільно застосовувати переважно для актуалізації, закріплення й контролю знань, доповнюючи їх практичними завданнями з написання та налагодження коду [1].

Іншу групу становлять онлайн-платформи для інтерактивного вивчення програмування, зокрема Codecademy. Такі ресурси пропонують навчальні модулі, які поєднують короткі теоретичні пояснення з

практичними вправами та виконанням програмного коду. Поділ матеріалу на невеликі етапи, відстеження прогресу, виконання завдань і можливість переходу до складніших тем підтримують поступове засвоєння навчального змісту. Залежно від конкретної платформи можуть використовуватися бали, серії послідовних занять, досягнення та інші механіки мотивації. Подібні ресурси є корисними для самостійної роботи, неформальної освіти й індивідуалізації навчання, оскільки дають змогу здобувачам освіти працювати у власному темпі та повертатися до складних тем за потреби.

Ще одним засобом реалізації гейміфікації є платформи для організації ігрової взаємодії та навчальних квестів, до яких належить Classcraft. Такий підхід передбачає побудову навчальної діяльності навколо ігрового сюжету, розподіл учасників на команди, визначення ролей і виконання послідовних завдань. Викладач або вчитель може виступати організатором ігрового процесу, створювати навчальні місії та інтегрувати до них відеоматеріали, онлайн-форми й інтерактивні вправи. Квести можуть охоплювати ціле заняття або його частину, а також використовуватися для самостійної та домашньої роботи. Під час навчання програмування такий формат дає змогу об'єднувати завдання з алгоритмізації, пошуку помилок, аналізу коду й розроблення програм у єдиний сюжет, водночас розвиваючи навички командної роботи та взаємодії [2].

Особливе місце посідають ігрові симулятори та спеціалізовані середовища для навчання програмування, які дають змогу опановувати алгоритмічні конструкції та практичні навички написання коду в ігровій формі. До таких засобів належать Kodable, Blockly Games, CheckiO, CodeMonkey, CodeCombat, Vim Adventures і «Скажені Кролики навчають програмувати». Вони відрізняються за цільовою аудиторією, мовами програмування та складністю завдань, однак спільною рисою є поєднання практичної діяльності з ігровим контекстом. Наприклад, у Blockly Games учасники розв'язують алгоритмічні задачі, використовуючи візуальні блоки команд; у CodeCombat програмування застосовується для керування персонажами та проходження рівнів; CheckiO пропонує задачі з програмування, які передбачають написання й перевірку коду. Такі симулятори допомагають сформувати початкове розуміння алгоритмів, умов, циклів, функцій і принципів налагодження, а також створюють умови для поступового переходу від візуального програмування до текстового коду [3].

Отже, гейміфікація є дієвим засобом урізноманітнення навчання програмування, підвищення мотивації та організації активної практичної діяльності. Її ефективність залежить не стільки від кількості використаних ігрових елементів, скільки від їхньої відповідності навчальним цілям, змісту дисципліни та рівню підготовки здобувачів освіти. Бали, рівні, квести, симулятори й цифрові платформи мають бути не самоціллю, а інструментами формування алгоритмічного мислення, розвитку навичок розв'язування проблем і набуття досвіду створення програмних продуктів. Тому під час проєктування гейміфікованого навчання важливо забезпечити баланс між ігровою мотивацією та змістовною діяльністю, передбачити поступове ускладнення завдань, своєчасний зворотний зв'язок і можливості для самостійного пошуку рішень.

1. *Мельник С. В.* Гейміфікація у вивченні мови програмування ELIXIR. Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології у виробництві та освіті: стан, досягнення, перспективи розвитку. Мат.Internet-конференції. Черкаси, 2025. С. 167-169.
2. *Скасків Г. М., ГоринХ. В.* Впровадження технологій гейміфікації при вивченні основ алгоритмізації та програмування. *Сучасні цифрові технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи*, Тернопіль. 2022, С.20-23.
3. *Тітова Л. О.* Гейміфікація у навчанні програмування. 2024. PhD Thesis. Видавництво ОНТУ. С105-107.

TITLE OF THE TALK IN ENGLISH

The article considers the didactic potential of gamification as a means of increasing motivation and efficiency in teaching programming. The main difficulties faced by pupils and students when mastering programming languages are outlined. Therefore, the purpose of the publication is to briefly examine the features of gamification in programming education. To present the issue under study, a set of interrelated research methods was used, including analysis, synthesis, comparison, classification, and generalization of scientific approaches to the research problem. The essence of gamification is defined, and it is differentiated from game-based learning. Structural and content gamification are characterized, with examples of their application in the educational process provided. The possibilities of using digital tools and platforms, such as Kahoot!, Quizizz, Quizlet, Codecademy, Classcraft, Blockly Games, CheckiO, and CodeCombat, for organizing interactive learning, performing practical tasks, and developing algorithmic thinking are analyzed. It is substantiated that the appropriate use of game mechanics, gradual task complexity, prompt feedback, and the opportunity for repeated attempts contribute to activating cognitive activity, developing independence, perseverance, and problem-solving skills. It is emphasized that the effectiveness of gamification depends on the alignment of game elements with educational goals, course content, and the level of students' background knowledge.

УДК 372.851

МЕТОДИКА ВИКОРИСТАННЯ ЦИФРОВИХ ІНСТРУМЕНТІВ ДЛЯ ВІЗУАЛІЗАЦІЇ ГРАФІКІВ ВИРОБНИЧИХ ПРОЦЕСІВ У НАВЧАННІ МАТЕМАТИКИ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ

Аліна РОМАШУК
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль, Україна
romaschuk04@gmail.com

Постановка проблеми. Сучасний етап розвитку шкільної математичної освіти вимагає посилення прикладного спрямування навчального матеріалу та його інтеграції з реальними життєвими й виробничими ситуаціями. Учні основної школи нерідко сприймають функціональну лінію та графіки функцій як абстрактні теоретичні конструкції, позбавлені практичного змісту. Водночас наочне відображення графіків виробничих процесів, таких як зміна обсягів випуску продукції, динаміка витрат ресурсів, продуктивність праці або завантаженість обладнання в часі, дає змогу продемонструвати дійсне значення математичного апарату. Застосування сучасних цифрових інструментів робить процес побудови та аналізу таких графічних моделей динамічним, інтерактивним та наочним, що є вагомим чинником підвищення якості засвоєння знань та розвитку аналітичних здібностей школярів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблема формування математичної та інформаційно-комунікаційної компетентностей за допомогою цифрових засобів висвітлена у працях Н. Бахмат, К. Ткаченко, О. Мартиненко, В. Щура, а питання впровадження мобільних додатків та адаптивних платформ досліджували Т. Вдовичин, Н. Винницька, О. Жигайло, Т. Кобильник, О. Сікора [1, с. 18]. Окрему увагу методиці використання імерсивних технологій та доповненої реальності приділено в роботах Ю. Носенко та І. Полященко [2, с. 38]. Практичним аспектам застосування динамічного середовища GeoGebra для візуалізації та математичного моделювання присвячено методичні розробки О. Чемерис, А. Прус та О. Фонарюк [3, с. 3]. Проте методичні особливості безпосередньої візуалізації графіків виробничих і технологічних процесів за допомогою цифрових калькуляторів у 5–9 класах потребують додаткового системного узагальнення.

Мета дослідження полягає в обґрунтуванні методичних засад використання цифрових інструментів візуалізації для побудови й дослідження графіків виробничих процесів на уроках математики в основній школі.

Виклад основного матеріалу. Засвоєння поняття функції та її графіка в основній школі є підґрунтям для формування математичної компетентності, яка передбачає здатність застосовувати математичні методи у практичній діяльності [1, с. 19]. Візуалізація графіків виробничих процесів дозволяє трансформувати абстрактні математичні формули у зрозумілі зорові образи. Завдяки використанню таких інтерактивних середовищ, як GeoGebra та Desmos, учні отримують можливість моделювати математичні явища та аналізувати часові залежності виробничих показників у режимі реального часу [1, с. 19].

Методика застосування цифрових калькуляторів під час розгляду виробничих задач передбачає інтеграцію декількох послідовних етапів. На першому етапі здійснюється математизація реальної ситуації, коли текстова умова виробничого завдання (наприклад, графік руху сировини чи зміна швидкості конвеєра) перекладається мовою функціональних залежностей або кусково-заданих функцій. На другому етапі учні використовують інструменти програмного середовища для побудови графічного зображення. Наприклад, у середовищі GeoGebra застосування повзунків та параметричних змінних дозволяє наочно продемонструвати, як саме зміна продуктивності обладнання чи часу роботи впливає на кутовий коефіцієнт прямої або форму кривої випуску продукції [3, с. 34].

На нашу думку, особливу методичну цінність має використання інтерактивних прапорців та динамічного аналізу функцій для дослідження критичних точок виробничого процесу. Школярі можуть легко визначати інтервали зростання й спадання продуктивності, точки екстремуму, а також точки перетину графіків, які у виробничому контексті відповідають моментам безубитковості або вирівнювання потужностей [3, с. 37]. Такий підхід перетворює пасивне креслення графіка в зошиті на активне дослідження, під час якого здобувачі освіти навчаються робити логічні висновки та ухвалювати обґрунтовані рішення на основі зчитаної з графіка інформації.

Використання технологічних моделей змішаного навчання, зокрема ротації станцій та «Перевернутого класу», підвищує ефективність засвоєння даного матеріалу [2, с. 40]. Під час організації ротаційної моделі одна з навчальних зон може бути повністю відведена під цифрову AR- чи GeoGebra-практику, де учні досліджують тривимірні або площинні графічні моделі процесів, тоді як в інших зонах відбувається теоретичне узагальнення з учителем або письмове розв'язування традиційних задач [2, с. 41]. Це забезпечує диференційований підхід, стимулює розвиток командної роботи та критичного мислення школярів.

Висновки. Впровадження цифрових інструментів для візуалізації графіків виробничих процесів у навчанні математики в основній школі є ефективним методичним шляхом розкриття прикладного потенціалу предмета. Застосування динамічних середовищ GeoGebra та Desmos дозволяє поєднати абстрактні математичні поняття з реальними економічними й технологічними явищами, сприяє розвитку просторової уяви, когнітивної гнучкості та цифрової грамотності учнів. Перспективи подальших досліджень полягають у розробці спеціалізованого комплексу прикладних задач виробничого змісту для конкретних розділів алгебри 7-9 класів.

1. *Ковальчук В., Винницька Н., Жигайло О.* Використання цифрових інструментів, дієвих практик в процесі формування математичної та інформаційно-комунікаційної компетентностей учнів. Молодь і ринок. 2025. № 4/236. С. 17-21.
2. *Носенко Ю., Полященко І.* Моделі уроків математики для базової та профільної школи з використанням технології доповненої реальності в умовах змішаного навчання. Нова педагогічна думка. 2025. Т. 123, № 3. С. 37-46.
3. *Чемерис О., Прус А., Фонарюк О.* Майстерня GeoGebra: практичний підхід до візуалізації математики : методичні рекомендації. Житомир : ЖДУ ім. І. Франка, 2024. 46 с.

METHODOLOGY OF USING DIGITAL TOOLS FOR VISUALIZING PRODUCTION PROCESS GRAPHS IN MATHEMATICS EDUCATION AT LOWER SECONDARY SCHOOL

This study examines methodological approaches to the use of digital tools for visualizing dynamic and production process graphs in lower secondary mathematics education. The research aims to substantiate the pedagogical foundations for integrating digital visualization tools, particularly GeoGebra and Desmos, into the teaching of functions and graph interpretation. The study employs theoretical analysis of educational literature, methodological generalization, and practical modeling of real-world production processes. The findings demonstrate that digital visualization enhances students' understanding of functional relationships, supports the development of mathematical and digital competencies, and strengthens the practical orientation of mathematics learning. Modeling production-related situations through interactive graphing environments promotes analytical thinking, increases learner engagement, and facilitates the interpretation of real-life data. The study concludes that the integration of digital graphing tools is an effective approach to connecting abstract mathematical concepts with practical economic and technological contexts in lower secondary education.

УДК 37.091.33:004.8

ГЕЙМІФІКАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ НА ОСНОВІ ШІ

Олександр РУДЮК
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль, Україна
rudyuk_oo@fizmat.tnpu.edu.ua
Інна ГРОД
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль, Україна
grodin@tnpu.edu.ua

У сучасній освіті все більшого значення набуває гейміфікація – використання елементів гри в навчальному процесі для підвищення мотивації, зацікавленості та активної участі учнів. Із розвитком штучного інтелекту (ШІ) можливості гейміфікації вийшли на новий рівень. Завдяки ШІ можливо створювати адаптивні, динамічні та персоналізовані навчальні середовища, які швидко реагують на дії користувача та генерують зміст у режимі реального часу. «Штучний інтелект зараз повсюдно використовується в розробці програмного забезпечення, тестуванні, кібербезпеці тощо. Вже з упевненістю можна сказати, що він став однією з найважливіших частин галузі» [1].

«У 1980-х роках після періоду спаду («AI winter») відбулося відродження інтересу до штучного інтелекту, пов'язане з розвитком експертних систем та зростанням обчислювальних можливостей комп'ютерів» [2].

Наша мета полягає у визначенні потенціалу технологій штучного інтелекту для формування адаптивного навчального середовища.

Одним із найпотужніших інструментів сучасного штучного інтелекту є мовні моделі OpenAI, зокрема серія GPT (Generative Pre-trained Transformer). Моделі GPT розроблені на основі трансформерної архітектури, яка забезпечує обробку природної мови, аналіз контексту, логіку мислення, побудову відповідей, генерацію тексту тощо.

Основні моделі OpenAI, що використовуються в освіті:

- GPT-3.5 / GPT-4 / GPT-4-turbo – великі мовні моделі, які пройшли попереднє навчання на величезних обсягах текстових даних, включаючи наукові, навчальні та енциклопедичні джерела.
- Codex – модель, оптимізована для генерації програмного коду та логіки, зокрема корисна для освітніх задач, де потрібно створювати автоматизовані системи, вікторини або інтерактивні завдання.
- DALL·E та Whisper – інші моделі OpenAI, які використовуються для генерації зображень і розпізнавання мовлення відповідно.

В нашому дослідженні було вибрано OpenAI. Причини:

1. *Гнучкість і потужність API*. OpenAI API дозволяє легко інтегрувати генерацію тексту в Python-програму, що ідеально підходить для створення інтелектуальної вікторини.
2. *Підтримка багаторівневої логіки*. Завдяки мовним моделям GPT можливо реалізувати ігровий сценарій: користувач відповідає на запитання, отримує підказки залежно від відповіді, система підраховує бали, враховуючи кількість використаних підказок.
3. *Якісний україномовний інтерфейс*. Моделі GPT справляються з українською мовою на високому рівні, що важливо для шкільної вікторини.
4. *Інтерактивність та реалізм*. ШІ може грати роль віртуального тьютора – ставити навідні питання, заохочувати, реагувати на помилки, що створює ефект спілкування.
5. *Реалізація гейміфікації*. Вікторина, побудована за участю OpenAI, має ігрову структуру: учень набирає бали, проходить рівні складності, отримує підказки – усе це формує додаткову мотивацію.

Все вище описане було використане для створення і апробації додатку для проведення вікторин. Теми можуть бути довільні, для цього створено певні блоки питань. У випадку неправильної відповіді система генерує підказки, створені моделлю OpenAI GPT-3.5 або GPT-4 через API. Тоді передбачено ще спроби отримати бали із врахуванням їх кількості.

Для реалізації додатку було обрано мову програмування Python, як одну із найпопулярніших, з використанням бібліотеки tkinter. Вибір зумовлений кількома ключовими чинниками:

1. *Широкий набір бібліотек та фреймворків.* Python має потужну екосистему для роботи зі штучним інтелектом та машинним навчанням, зокрема бібліотеки: (openai – для інтеграції з API OpenAI, transformers, torch, tensorflow – для роботи з нейромережами, tkinter – для створення графічного інтерфейсу).
2. *Простота синтаксису.* Python має зрозумілий, читабельний синтаксис, що особливо важливо для освітніх проєктів і швидкої реалізації ідей без зайвої складності.
3. *Гнучкість та масштабованість.* Python дозволяє швидко прототипувати, тестувати і вдосконалювати програмний продукт, а також легко адаптувати його до різних потреб користувача.
4. *Активна спільнота розробників.* Велика кількість готових рішень, прикладів коду, документації та активна підтримка з боку спільноти полегшують розробку та усунення можливих помилок.
5. *Кросплатформеність.* Програмне забезпечення на Python може бути легко запущене на різних операційних системах без значних змін у коді.

Створений інтелектуальний навчальний застосунок поєднує у собі алгоритми штучного інтелекту, взаємодію з користувачем і можливість подальшого розширення функціоналу.

Відповіді на поставлені запитання вписуються у відповідні віджети. У разі неправильної відповіді програма не дає правильну, модель OpenAI формулює підказку, яка акцентує увагу на ключових поняттях та скеровує до правильного варіанту.

Подальше доопрацювання програми може значно підвищити її ефективність та зручність для користувачів. Одним із напрямів удосконалення є розширення бази запитань, що дозволить охопити більше тем з різних курсів. Важливим кроком є впровадження обробки варіативних відповідей – система має розпізнавати синоніми або близькі формулювання. Також доцільно додати можливість вибору рівня складності (легкий, середній, складний), щоб адаптувати завдання під знання учня. Корисним буде створення особистого кабінету учня, де зберігатиметься статистика успішності, прогрес у навчанні та результати проходження тестів.

Створений додаток уже є повноцінним продуктом, який може використовуватися на уроках або в позакласній роботі. Але є ще чимало аспектів, які можна доопрацювати і покращити.

1. *Генсерук Г.Р., Грод І.М.* Вплив штучного інтелекту на систему освіти. Сучасні цифрові технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи: матеріали XV Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції, м. Тернопіль, 10 квітня, 2025 р. Тернопіль: ТНПУ ім. Володимира Гнатюка, 2025. С. 283-286.
2. *Toosi, A., Bottino, A., Saboury, B., Siegel, E., & Rahmim, A.* (2021). *A brief history of AI: How to prevent another winter (A critical review).* arXiv. https://arxiv.org/abs/2109.01517

AI-BASED GAMIFICATION OF THE LEARNING PROCESS

Artificial intelligence technologies are characterized by a wide range of dynamically expanding capabilities. The impact can be both positive and negative, depending on the areas of use. Our goal is to determine the potential of artificial intelligence technologies for the formation of an adaptive learning environment. The results of the study showed the relevance of the topic in view of the active implementation of AI in various fields of activity.

УДК 37.016:53:51

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЯК ЗАСІБ ФОРМУВАННЯ STEM-КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ У НАВЧАННІ ФІЗИКИ

Віталій РУЧАКОВСЬКИЙ
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль, Україна
13thwarrior@ukr.net

Сучасна середня освіта орієнтована на формування компетентностей, які учень здатен застосовувати в нестандартних життєвих ситуаціях. Концепція «Нова українська школа» [1] та Державний стандарт базової середньої освіти [2] виокремлюють природничу, математичну й інформаційно-цифрову компетентності, а STEM-підхід [3] розглядає їх у єдності. Фізика як навчальний предмет природно інтегрує експеримент, математичний апарат і технології. Проте на практиці математичний опис явища нерідко зводиться до підстановки даних у готову формулу, а комп'ютерне моделювання – до демонстрації, що послаблює дослідницьку та інженерну складові STEM-компетентності. *Мета роботи* – обґрунтувати методичні можливості математичного моделювання як засобу формування STEM-компетентностей учнів у процесі навчання фізики та узагальнити результати педагогічного експерименту.

Під математичним моделюванням у навчанні фізики розуміємо послідовність дій учня: виділення суттєвих чинників явища; побудова математичної моделі (рівняння, функціональної залежності); її розв'язання аналітичними або чисельними методами; експериментальна перевірка; оцінювання меж застосовності моделі та її уточнення. Ця послідовність збігається з дослідницьким циклом і циклом інженерного проєктування, тому забезпечує інтегративність – ключову ознаку STEM-підходу: математика надає апарат (функції, похідна, чисельні методи), інформатика – засоби обчислень (Python), інженерія – вимірювальні пристрої (датчики на базі Arduino), а фізика – предметний зміст. Модельні завдання в авторській методиці ускладнюються поступово: від аналізу табличних і графічних залежностей та їх апроксимації до чисельного розв'язання рівнянь руху з порівнянням результатів із даними вимірювань і комп'ютерними симуляціями PhET [5]. Інструменти штучного інтелекту доцільно залучати для пояснення результатів і налагодження коду, залишаючи за учнем постановку задачі та інтерпретацію [6].

Проілюструємо підхід на дослідницькій задачі «Коли коливання маятника можна вважати гармонічними?». Рух математичного маятника довжиною L описує рівняння

$$d^2\theta/dt^2 + (g/L)\sin\theta = 0 \qquad (1)$$

де g – прискорення вільного падіння. У шкільному курсі рівняння (1) замінюють лінійним ($\sin\theta \approx \theta$), що дає $T_0 = 2\pi\sqrt{(L/g)}$. Учні розв'язують (1) чисельно методом Рунге–Кутти в Python і бачать (рис. 1), що за початкового кута 60° розв'язок помітно відхиляється від гармонічного. Точне значення періоду $T/T_0 = (2/\pi)\cdot K(\sin(\theta_0/2))$, де K – повний еліптичний інтеграл першого роду, для $\theta_0 = 60°$ дорівнює 1,0732, тобто період більший на 7,3 %; результати для інших кутів подано в табл. 1. Наближення $T \approx T_0(1 + \theta_0^2/16 + 11\theta_0^4/3072)$ дає для 60° значення 1,0728, що узгоджується з точним результатом.

Таблиця 1. Відносне збільшення періоду математичного маятника залежно від початкового кута

Початковий кут θ_0, град	T/T_0 (точне)	T/T_0 (ряд)	Збільшення періоду, %
10	1,0019	1,0019	0,19
30	1,0174	1,0174	1,74
45	1,0400	1,0399	4,00
60	1,0732	1,0728	7,32
80	1,1375	1,1355	13,75

Далі учні вимірюють період коливань для кількох амплітуд (датчик на базі Arduino або відеоаналіз), порівнюють його з T_0 і зі значеннями, отриманими за моделлю, та формулюють висновок про межі застосовності лінійної моделі: за допустимої похибки 2 % початковий кут не повинен перевищувати близько 30°. Таким чином, учень не лише отримує результат, а й оцінює достовірність моделі, що є складовою дослідницької компетентності.

Результативність підходу забезпечують такі методичні умови: 1) задача допускає як аналітичне спрощення, так і чисельне розв'язання, що дозволяє порівнювати моделі різної складності; 2) результати моделювання обов'язково зіставляються з даними вимірювань або симуляцій, а розбіжності стають предметом обговорення; 3) обчислювальні інструменти (Python, електронні таблиці, PhET) використовуються як засоби дослідження, а не як «чорні скриньки»; 4) оцінювання охоплює не лише правильність відповіді, а й обґрунтування вибору моделі та аналіз похибок; 5) завдання виконуються в малих групах із розподілом ролей (експериментатор, програміст, аналітик), що відтворює командну роботу в інженерних проєктах.

Ефективність методики перевірено в педагогічному експерименті. Рівні сформованості STEM-компетентностей визначали за анкетою «STEM-компетентності сучасного учня» за трьома компонентами: предметно-інструментальним, дослідницько-пізнавальним та інженерно-технологічним. Інтегральний рівень компетентностей в експериментальній групі зріс на 27,8 %, у контрольній – на 7,9 %; різниця статистично значуща ($p < 0{,}05$). Приріст за окремими компонентами в експериментальній групі наведено в табл. 2.

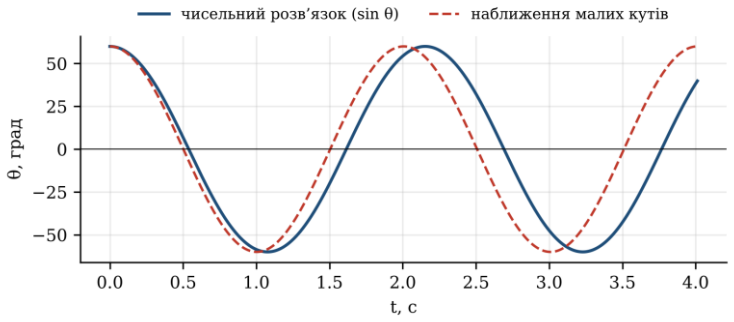


Рис. 1. Залежність кута відхилення $\theta(t)$ математичного маятника ($L = 1$ м, $\theta_0 = 60°$): чисельний розв'язок рівняння (1) і наближення малих кутів

Таблиця 2.

Приріст рівня сформованості STEM-компетентностей в експериментальній групі

Компонент компетентності	Приріст, %
Предметно-інструментальний	31,4
Дослідницько-пізнавальний	29,7
Інженерно-технологічний	26,3
Інтегральний рівень (контрольна група – 7,9)	27,8

Висновки. Математичне моделювання, організоване як послідовність «модель – розв'язання – вимірювання – оцінювання меж застосовності», поєднує математичний, інформаційно-цифровий, інженерний і фізичний складники навчальної діяльності та сприяє формуванню STEM-компетентностей учнів. Подальша робота стосується створення цифрового банку модельних дослідницьких задач із фізики та методичних рекомендацій для вчителів.

1. Нова українська школа: Концепція реалізації державної політики у сфері реформування загальної середньої освіти «Нова українська школа» на період до 2029 року: схвалено розпорядженням Кабінету Міністрів України від 14 грудня 2016 р. № 988-р.
2. Державний стандарт базової середньої освіти: постанова Кабінету Міністрів України від 30 вересня 2020 р. № 898.
3. *Bybee R. W.* The Case for STEM Education: Challenges and Opportunities. Arlington: NSTA Press, 2013.
4. *Федчишин О. М., Мохун С. В., Чопик П. І.* Методичні основи використання PHET-симуляцій у процесі вивчення фізики // Наукові записки М. Тернопільського національного педагогічного університету імені Володимира Гнатюка. Серія: Педагогіка. 2022. № 1. С. 16–24.
5. *Ручаковський В. П., Федчишин О. М.* Дидактичні можливості використання ChatGPT для організації індивідуалізованого навчання фізики // Інноваційна педагогіка. 2024. Вип. 73. С. 81–85.

MATHEMATICAL MODELLING AS A MEANS OF DEVELOPING STEM COMPETENCIES IN PHYSICS EDUCATION

The paper substantiates the methodological potential of mathematical modelling for developing students' STEM competencies in physics lessons. Modelling is treated as a sequence «model – solution – measurement – assessment of applicability limits», which integrates mathematics, computing, engineering and physics. The approach is illustrated by a research task on pendulum oscillations: students solve the nonlinear equation numerically in Python, compare the result with Arduino-based measurements and determine the range of validity of the linear model (about 30° for a 2 % error). In the pedagogical experiment, the integral level of STEM competencies increased by 27.8 % in the experimental group versus 7.9 % in the control group ($p < 0.05$).

УДК 378.147:51:004.42

ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ У МАЙБУТНІХ ІНЖЕНЕРІВ ЗАСОБАМИ СИСТЕМ КОМП'ЮТЕРНОЇ АЛГЕБРИ

Павло СКРИПКА
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, м. Кременчук, Україна
Олена КОБИЛЬСЬКА
Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, м. Кременчук, Україна
pavelassimak@gmail.com

Актуальність. Підготовка сучасного інженера вимагає оволодіння ним математичною компетентністю, що передбачає не лише знання інженером математичних формул, а й уміння застосовувати їх для розв'язання спеціальних технічних, виробничих та економічних задач [1].

Дане дослідження базувалось на визначенні математичної компетентності Нісса [2], згідно якої структуру математичної компетентності формує комплекс взаємопов'язаних компонентів: математичне мислення та логічне міркування; здатність до коректної постановки й розв'язання прикладних проблем; навички математичного моделювання, представлення даних та професійної комунікації; володіння математичною символікою і формалізмом, а також уміння ефективно залучати засоби комп'ютерної математики та комп'ютерні інструменти.

Так, в [1] представлено опитування інженерів і здобувачів інженерних спеціальностей, які визнавали і підтвердили в тій чи іншій формі необхідність усіх перерахованих Ніссом складових математичної компетенції. Наприклад, щодо компетентності використання допоміжних засобів та інструментів, вони називають математику інструментом для вирішення своїх інженерних проблем. В опитуванні [1], інженери виконують моделювання за допомогою певного програмного забезпечення або можуть використовувати математичні програми для вирішення деяких проблем, з якими вони зустрічаються у своїй інженерній діяльності.

З огляду на це побудова і зміст ОК «Вища математика» потребує чітко окресленої професійної спрямованості. Ефективним інструментом реалізації професійної спрямованості є залучення систем комп'ютерної алгебри (СКА) до викладання освітньої компоненти «Вища математика». СКА поєднують аналітичні обчислення, чисельні методи та візуалізацію. Для інженера комп'ютерна алгебра є не заміною математичного мислення, а засобом перевірки, дослідження та запису (документації) розв'язання.

Мета дослідження – обґрунтувати методику формування математичної компетентності майбутніх інженерів (на основі моделі М. Нісса) шляхом інтеграції систем комп'ютерної алгебри та прикладних професійних задач у процес викладання освітньої компоненти «Вища математика».

Основна частина. Математична компетентність майбутнього інженера формується тоді, коли математичні поняття переходять із рівня формального виконання вправ до рівня застосування. Наприклад, похідна може розглядатися не лише як операція диференціювання, а як інструмент аналізу швидкості зміни величини; інтеграл – як засіб визначення накопиченої величини, площі або роботи; система лінійних рівнянь – як математична модель взаємопов'язаних параметрів технічної чи виробничої системи; задача оптимізації – як пошук найкращого рішення за заданих обмежень.

Професійна орієнтація задач може бути реалізована для різних спеціальностей. Для інженерів це можуть бути розрахунки балок, напружень, теплопередачі, електричних кіл або параметрів конструкцій; для логістів – оптимізація маршрутів, розподіл вантажів, планування запасів та використання ресурсів. Такий підхід дозволяє студенту бачити, навіщо саме йому потрібні похідні, інтеграли, матриці, системи рівнянь, статистичні методи та оптимізація.

Використання систем комп'ютерної алгебри для розв'язування прикладних задач для конкретних тем освітньої компоненти "Вища математика" доцільно виділяти наступні ключові етапи: математична модель, аналітичне обґрунтування, комп'ютерний розрахунок, візуалізація, інтерпретація. Ключовим результатом має бути здатність здобувача пояснити, яку модель він побудував, чому обрав конкретний метод і що означає отриманий результат у професійній ситуації.

Демонстрація практичних задач

Задача 1. Тема «Системи лінійних рівнянь. (Спеціальность G3 «Електрична інженерія»)

Постановка задачі. Для заданої розгалуженої електричної схеми, що містить n вузлів та m віток із відомими опорами резисторів Ri та джерелами ЕРС Ei необхідно визначити сили струмів Ii в усіх вітках кола.

Математична модель. Використовуючи перший (для вузлів) та другий (для контурів) закони Кірхгофа, складається система лінійних алгебраїчни.х рівнянь (СЛАР) відносно невідомих струмів. У матричній формі система має вигляд: $A \cdot I = B, A -$ матриця коефіцієнтів, сформована на основі топології кола та значень опорів, $I -$вектор-стовпець шуканих струмів, $B -$вектор-стовпець, що містить значення ЕРС джерел живлення. Аналітичним обґрунтуванням є перевірка сумісності системи за допомогою теореми Кронекера-Капеллі та застосування методу оберненої матриці $I = A^{-1}B$ або методу Крамера.

Комп'ютерна реалізація та інтерпретація в MATLAB: Здобувачі записують матрицю A та вектор B у середовищі MATLAB. Здобувач інтерпретує отримані результати: знак «мінус» у знайденому значенні струму трактується як протилежний реальний напрямок струму у вітці відносно початково обраного на схемі, що розвиває розуміння фізичного змісту математичного формалізму.

Задача 2. Тема «Диференціальне числення та дослідження функцій» (Спеціальність G9 – «Прикладна механіка»)

Постановка задачі. Для дослідження міцності балки прямокутного перерізу, що вирізається з круглої колоди діаметром D, необхідно визначити такі розміри її поперечного перерізу (ширину x та висоту y), за яких опір згину буде максимальним. Відомо, що момент опору прямокутного бруса пропорційний його ширині та квадрату висоти $W(x, y) = k \cdot x \cdot y^2$.

Математична модель. Використовуючи теорему Піфагора, задача зводиться до знаходження глобального максимуму функції однієї змінної: $W(x) = kx(D^2 - x^2)$ на інтервалі $[0; D]$. Аналітичне обґрунтування вимагає знаходження похідної $W'(x) = k(D^2 - 3x^2)$ та визначення критичної точки $x = D/\sqrt{3}$.

Комп'ютерна реалізація та інтерпретація в Mathcad. Здобувачі створюють розрахунковий шаблон, де задають змінну D із контролем одиниць вимірювання . За допомогою символьного процесора Mathcad виконується диференціювання та аналітичний пошук екстремуму. Далі будується графік залежності W(x), візуально підтверджується точка максимуму, а за допомогою блоку Given/Maximize виконується чисельна перевірка. Студент інтерпретує результат:

Таблиця 1.

Етап розв'язання прикладної задачі

Етап розв'язання прикладної задачі	Компоненти моделі М. Нісса	Зміст діяльності здобувача та формувальні навички
1. Аналіз та побудова моделі *(Початковий етап)*	• Математичне мислення та міркування • Постановка проблем і моделювання	• Аналіз реального фізичного/технічного процесу. • Виділення суттєвих факторів та відкидання другорядних. • Переклад технічної ситуації мовою математики (диференціальні рівняння, системи рівнянь, функції оптимізації).
2. Аналітичне обґрунтування та кодування *(Перехід до СКА)*	• Символіка та формалізм • Використання допоміжних засобів та інструментів	• Формалізація виразів під синтаксис обраної СКА (PTC Mathcad, MATLAB). • Урахування операторів, векторно-матричних обчислень та одиниць вимірювання. • Свідомий вибір методів розрахунку (наприклад, чисельний метод ode45 або аналітичний розрахунок).
3. Обчислення та візуалізація *(Робота в СКА)*	• Представлення (репрезентація)	• Автоматизація рутинних математичних обчислень. • Наочне подання абстрактних результатів у вигляді 2D/3D графіків, фазових портретів, таблиць та анімацій.
4. Інтерпретація та рефлексія *(Фінальний етап)*	• Комунікація та інтерпретація • Математичне міркування *(вищого рівня)*	• Переклад математичних результатів мовою інженерних висновків (наприклад, оцінка міцності, оптимальності, затухання коливань). • Проведення комп'ютерного експерименту (дослідження впливу зміни початкових умов та параметрів на модель).

Практичне значення та висновки

У дослідженні обґрунтовано методику формування математичної компетентності майбутніх інженерів на основі моделі М. Нісса шляхом цілеспрямованої інтеграції систем комп'ютерної алгебри у процес розв'язання прикладних задач. Доведено, що досягнення цієї мети забезпечується впровадженням наскрізної структури розрахунків (модель, аналітичне обґрунтування, комп’ютерний розрахунок, візуалізація, інтерпретація), яка трансформує суто процедурні математичні знання здобувачів у професійно значущі навички.

1. Firouzian, Soheila & Ismail, Zaleha & Rahman, Roselainy & Yusof, Yudariah & Kashefi, Hamidreza & Firouzian, Fariba. (2014). Mathematical Competency of Engineers and Engineering Students. 216-219. 10.1109/LaTiCE.2014.49.
2. Niss M. Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. *Third International Mathematics Education Research Conference*. 2003. P. 115–124.

MATHEMATICAL COMPETENCE AND THE USE OF COMPUTER ALGEBRA SYSTEMS IN HIGHER MATHEMATICS EDUCATION FOR ENGINEERING STUDENTS

English abstract. Modern engineering work requires not only knowledge of mathematical formulas but also the ability to apply them to analyze real technical, production, and economic systems. When outlining the content of mathematical competence, we relied on the classical classification by M. Niss, according to which the structure of mathematical competence is formed by a set of interconnected components. Among them, the most important for a future engineer are: developed mathematical thinking and logical reasoning; the ability to correctly formulate and solve applied problems; skills in mathematical modeling, data representation, and professional communication. Special attention is also given to mastery of mathematical symbols and formalism, as well as the ability to effectively use computer mathematics tools and computer-based instruments.

УДК 37.016:52:004

ВИВЧЕННЯ АСТРОНОМІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ МОБІЛЬНИХ ЗАСТОСУНКІВ

Емілія СТАДНИК
Тернопільський національний педагогічний університет ім. В. Гнатюка, м. Тернопіль, Україна
emilia.stadnik07@gmail.com
Сергій МОХУН
Тернопільський національний педагогічний університет ім. В. Гнатюка, м. Тернопіль, Україна
mohun_sergey@ukr.net

Дослідження спрямоване на розв'язання проблем викладання астрономії в закладахосвіти в умовах обмеженої спостережної інфраструктури та міського світлового забруднення. Робота присвячена вивченню ефективності цифрового планетарію для підвищення концептуального розуміння учнями астрономічних понять у процесі навчання фізики [2, с. 957]. Тут розглянуто можливості використання мобільних застосунків у процесі вивчення астрономії. Проаналізовано освітній потенціал цифрових планетаріїв та інтерактивних симуляцій на прикладі Stellarium і Star Walk 2, а також можливості застосування SkySafari для моделювання астрономічних явищ. Визначено переваги мобільних технологій для візуалізації небесних тіл, дослідження їхнього руху, організації самостійної пізнавальної діяльності та проведення віртуальних спостережень. Обґрунтовано доцільність поєднання мобільних застосунків із теоретичним навчанням і реальними астрономічними спостереженнями.

Астрономія є частиною природничо-наукової освіти, яка дає змогу сформувати уявлення про будову Всесвіту, рух небесних тіл і закономірності космічних явищ. Водночас вивчення цієї науки має свої специфічні особливості. Значна частина навчального матеріалу пов'язана з об'єктами та процесами, які неможливо безпосередньо споглядати в аудиторії. Проведенню реальних спостережень можуть перешкоджати несприятливі погодні умови, час доби, світлове забруднення, а також відсутність телескопів і спеціалізованої інфраструктури [2, с. 958]. Сучасні інформаційно-комунікаційні технології створюють можливості для часткового подолання цих обмежень. Одним із перспективних напрямів є використання мобільних застосунків, які можуть виконувати функції цифрового планетарію та забезпечувати інтерактивне моделювання зоряного неба. Використання комп'ютерних і мобільних засобів дає змогу моделювати природні явища, зокрема вигляд нічного неба, хоча жодна цифрова симуляція не може повністю відтворити досвід реального спостереження [3, с. 222]. Одним із найбільш відомих програмних засобів для моделювання зоряного неба є Stellarium. Цей додаток дає змогу досліджувати сузір'я, визначати видимі небесні об'єкти для певної дати й географічного положення, а також спостерігати зміни вигляду неба в часі. Такі можливості роблять програму придатною для формування просторових і часових уявлень про астрономічні явища [3, с. 225]. Зокрема, модуль AstroCalc призначений для обчислення різних астрономічних явищ та ефемерид і може бути корисним під час планування спостережень та виконання навчальних дослідницьких завдань [3, с. 226]. Наукові результати підтверджують доцільність використання Stellarium в освітньому процесі. У дослідженні, проведеному серед 30 студентів курсу астрономії, експериментальна група навчалася із застосуванням Stellarium, а контрольна – без цифрового планетарію [2, с. 959]. Середній результат експериментальної групи до початку навчання становив 57,00 бала, а після використання Stellarium – 74,13 бала. У контрольній групі відповідні показники становили 52,93 та 60,73 бала. Автори повідомляють про статистично значуще покращення результатів експериментальної групи ($p < 0,05$) [2, с. 961-963]. Позитивні результати були отримані також за показниками сприйняття застосунку студентами. Серед оцінених характеристик були концептуальне розуміння, візуальна привабливість, мотивація до навчання, зручність використання та розуміння руху небесних тіл [2, с. 963]. На думку авторів дослідження [1], для освітніх цілей найкращим планетарієм є Stellarium. Ця програма пропонує безліч функцій, що дозволяють досліджувати нічне небо з неймовірною деталізацією. Це не просто віртуальний планетарій, а й машина часу, яка дозволяє досліджувати нічне небо в будь-який момент минулого чи майбутнього. Саме ця функція дозволяє пояснити явище прецесії земної осі, яке полягає в тому, що вісь добового обертання Землі приблизно за 26 000 років описує конус, а полюси світу на небі – кола з кутовим радіусом 23,5° (рис. 1) [1, с. 59].

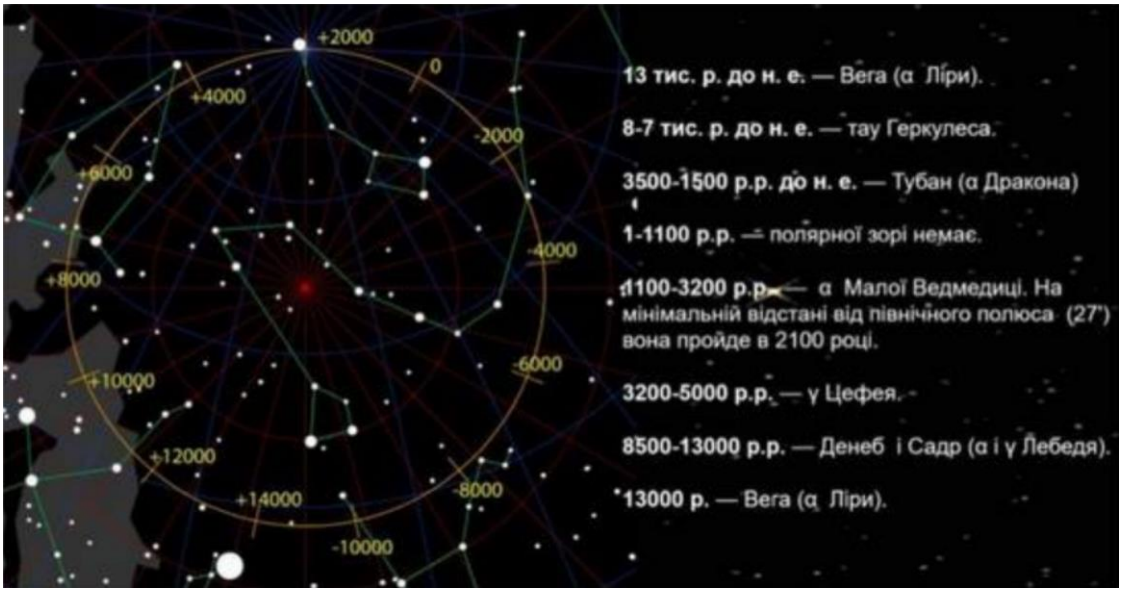
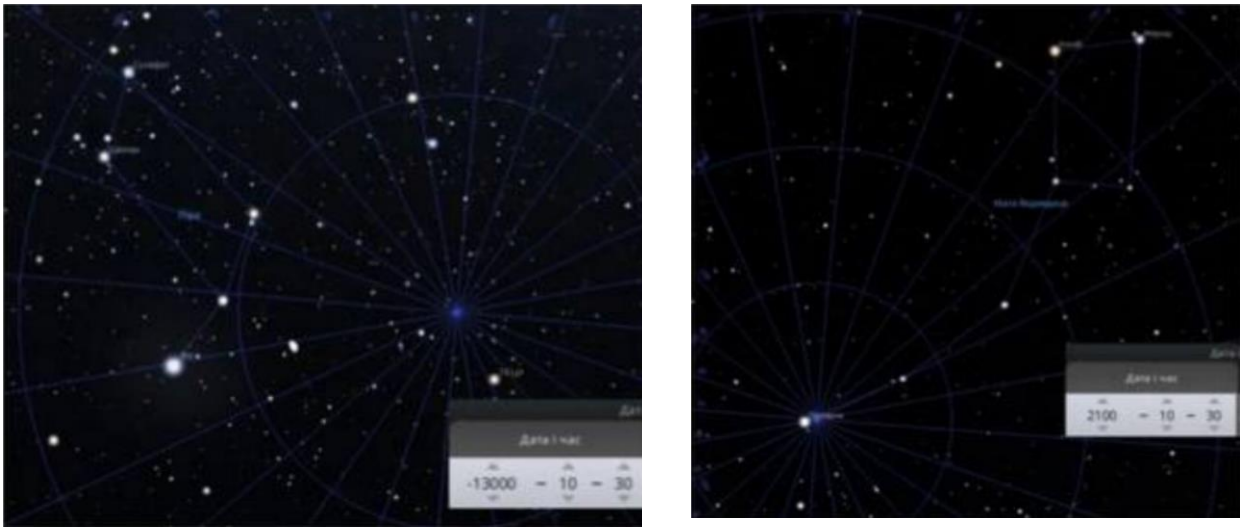


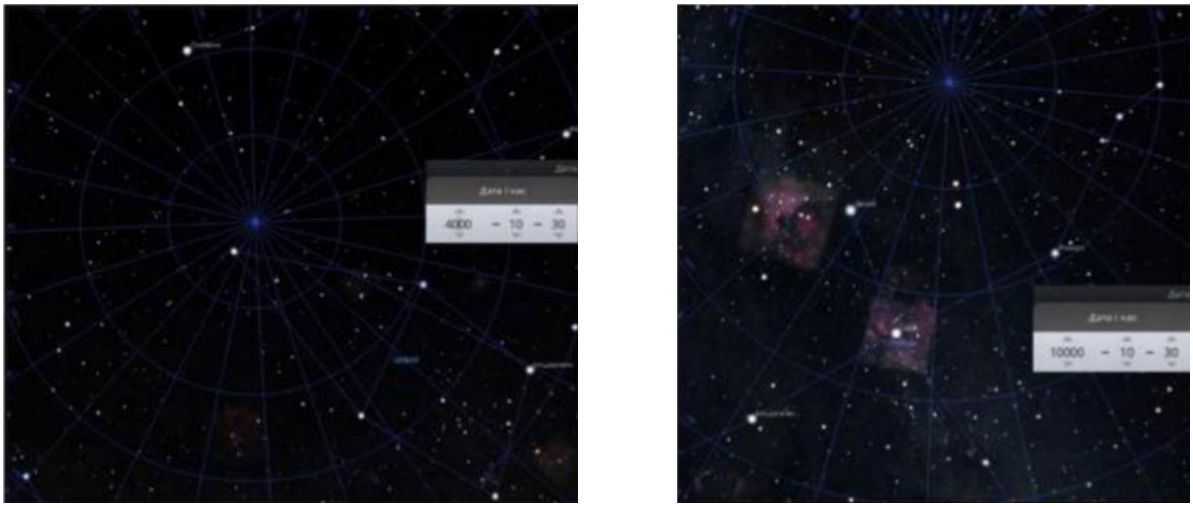
Рис. 1. Зміна положення полюса світу протягом 26 000 років [1, с. 59].

Перевіримо теоретичні розрахунки зміни положення полюса світу протягом 26 000 років у середовищі Stellarium. Для цього повернемося у далеке минуле (рис. 2а), поглянемо на сучасне небо (рис. 2б) та заглянемо у майбутнє (рис. 3) [1, с. 59].



а) б)

Рис. 2. Положення полюса світу у 13 000 р. до н. е. (а) та у 2100 р. н. е. (б) [1, с. 59].



а) б)

Рис. 3. Положення полюса світу у 4000 р. н. е. (а) та у 10 000 р. н. е. (б) [1, с. 60].

Здобувачам освіти можна запропонувати самостійно переконатися у прецесії земної осі за допомогою середовища Stellarium, надавши методичні рекомендації [1, с. 60]. Ще одним прикладом мобільного засобу навчання астрономії є Star Walk 2. Особливістю цієї програми є можливість пов'язати цифрове зображення небесної сфери з реальним напрямком спостереження. Програма відображає ту ділянку небесної сфери, на яку спрямований мобільний пристрій, а положення небесних тіл розраховується з урахуванням координат спостерігача та обраного моменту часу [4, с. 323]. Така функціональність створює умови для безпосереднього поєднання теоретичних знань із практичним спостереженням. Наприклад, під час заняття учень може спрямувати смартфон на певну ділянку неба, визначити розташовані там зорі та сузір'я, отримати інформацію про них і після цього порівняти цифрове зображення з реальним небом [4, с. 323]. Використання Star Walk 2 також сприяє підвищенню наочності навчального матеріалу. Учні отримують можливість взаємодіяти з інформацією безпосередньо під час спостереження, а не лише сприймати статичні зображення з підручника [4, с. 323-325]. Проведення уроків з астрономії з використанням інформаційно-комунікаційних технологій, зокрема мобільних пристроїв, забезпечує набуття вихованцями не лише предметних компетентностей, а й відкриває додаткові можливості для проведення лабораторних експериментів в умовах віртуальної реальності [4, с. 326]. Окремий інтерес становить використання SkySafari для моделювання астрономічних явищ. Мобільні планетарії такого типу дають змогу змінювати дату, час і розташування спостерігача та досліджувати зміну положення небесних тіл. Застосування SkySafari у навчанні може бути пов'язане не лише з ідентифікацією об'єктів, а й із вивченням механіки їхнього руху. Моделюючи положення планет у різні моменти часу, учні можуть досліджувати орбіти, періоди обертання та закономірності видимого руху небесних тіл. Такий підхід має особливе значення для тем, які важко пояснити лише за допомогою статичних схем. Зміна параметрів симуляції дозволяє спостерігати динаміку системи та встановлювати зв'язок між фізичними законами й спостережуваними астрономічними явищами.

Мобільні застосунки відкривають широкі можливості для вивчення астрономії, оскільки дозволяють моделювати зоряне небо, ідентифікувати небесні об'єкти, досліджувати їхній рух і проводити віртуальні спостереження. Stellarium може використовуватися як цифровий планетарій для візуалізації та моделювання астрономічних явищ. Експериментальне дослідження його застосування продемонструвало покращення результатів навчання студентів експериментальної групи [2, с. 961-963]. Star Walk 2 дає змогу поєднувати цифрове моделювання з безпосереднім спостереженням зоряного неба. Завдяки використанню координат спостерігача та часу програма може відображати відповідну ділянку небесної сфери на екрані мобільного пристрою [4, с. 323]. SkySafari може розглядатися як інструмент для інтерактивного моделювання та дослідження руху небесних тіл, зокрема під час вивчення механіки та закономірностей руху планет. Таким чином, найбільш продуктивним є не використання окремого застосунку як заміни традиційного навчання, а формування комбінованої моделі астрономічної освіти, у якій теоретичні знання, цифрове моделювання та реальні спостереження взаємодоповнюють одне одного. Такий підхід створює умови для розвитку самостійної пізнавальної активності, просторового мислення, уміння аналізувати результати спостережень та формулювати науково обґрунтовані висновки [2, с. 963-964; 4, с. 324-325].

1. *Кульчицький Р. В., Мохун С. В.* Практичне використання Stellarium для перевірки явища прецесії земної осі // Сучасні цифрові технології та інноваційні методики навчання: досвід, тенденції, перспективи. 2024.

№ 14. С. 58–60. URL: http://dspace.tnpu.edu.ua/bitstream/123456789/34585/1/Kulchytskyi.pdf (дата звернення: 30.09.2026).
2. *Nasution L. A. et al.* Effectiveness of Stellarium application in enhancing student's understanding: astronomy concepts in physics education // Jurnal Eduscience. 2025. Vol. 12, no. 4. P. 957–966. URL: https://doi.org/10.36987/jes.v12i4.7274 (дата звернення: 28.09.2026).
3. *Zotti G. et al.* The simulated sky: Stellarium for cultural astronomy research // Journal of Skyscape Archaeology. 2021. Vol. 6, no. 2. P. 221–258. URL: https://doi.org/10.1558/jsa.17822 (дата звернення: 28.09.2026).
4. *Tkachenko I.* Theory and practice using the Star Walk 2 programs in the educational process on astronomy // Physical and Mathematical Education. 2018. Vol. 15, no. 1. P. 322–326. URL: https://doi.org/10.31110/2413-1571-2018-015-1-062 (дата звернення: 28.09.2026).

LEARNING ASTRONOMY WITH MOBILE APPLICATIONS

The paper examines the use of mobile applications in studying astronomy under conditions of limited observational infrastructure and urban light pollution. The educational potential of digital planetariums and interactive simulations is analysed using Stellarium, Star Walk 2 and SkySafari as examples. The advantages of mobile technologies for visualising celestial objects, studying their motion, organising independent learning and conducting virtual observations are identified. The expediency of combining mobile applications with theoretical instruction and real astronomical observations is substantiated.

УДК 373.5:514

ВИКОРИСТАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ГЕЙМІФІКАЦІЇ ЯК ІНСТРУМЕНТУ АКТИВІЗАЦІЇ ПІЗНАВАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ ШКОЛЯРІВ У КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ

Андрій БОЙКО
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль, Україна
boyko.a1@tnpu.edu.ua
Анастасія ТОМКІВ
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль, Україна
tomkivna@gmail.com

Курс геометрії вимагає від школяра не лише запам'ятати означення й теореми, а й оперувати просторовими образами, встановлювати зв'язки між властивостями фігур, висувати припущення та обґрунтовувати їх. Саме на етапах побудови міркування і перенесення знань у нову ситуацію часто знижується навчальна активність. Учень може правильно відтворити правило, але не бачити, з чого почати розв'язання задачі. За таких умов гейміфікація може бути дидактичним способом організації послідовності пізнавальних дій, фіксації індивідуального поступу та надання своєчасного зворотного зв'язку.

Гейміфікацію доцільно розуміти як використання окремих елементів ігрового дизайну в неігровому навчальному середовищі. Вона відрізняється від дидактичної гри тим, що не перетворює весь урок на гру. Учні продовжують доводити теореми, виконувати побудови й розв'язувати задачі, однак працюють у системі коротких цілей, рівнів складності, правил, видимого поступу та змістовного зворотного зв'язку. У дослідженні гейміфікації навчання математики в середній школі акцентовано на ролі ігрових механік у підтриманні внутрішньої мотивації та пізнавального інтересу учнів [4, с. 182]. Результат визначає не наявність балів чи відзнак, а їх відповідність конкретній дидактичній меті.

У геометрії продуктивними є механіки, які спонукають учня виконувати змістовну математичну дію. Бал доцільно нараховувати не лише за правильну відповідь, а за визначення умови й вимоги задачі, коректний рисунок, вибір теореми, пояснення кроку доведення, знаходження помилки або запропонований альтернативний спосіб. Така організація зміщує увагу з кінцевого результату на процес міркування. У працях з гейміфікації природничо-математичних дисциплін для учнів закладів загальної середньої освіти підкреслено потребу поєднувати ігрові елементи з навчальними завданнями, а не використовувати їх як формальне заохочення [1, с. 74].

Рівні доцільно будувати за логікою поступового ускладнення. Під час вивчення ознак рівності трикутників перший рівень може передбачати розпізнавання відповідних елементів на рисунку, другий – вибір потрібної ознаки, третій – відновлення пропущених кроків доведення, четвертий – самостійне доведення, а п'ятий – створення задачі з наперед заданим способом розв'язання. Учень бачить найближчу досяжну ціль і розуміє, яку дію потрібно опанувати далі. Досвід застосування гейміфікованого STEM-підходу у викладанні

геометрії в середній школі свідчить, що дизайн завдань має підтримувати змістове навчання, співпрацю й рефлексію, а не зводитися до нарахування очок [2].

Практичним форматом є геометричний квест, у якому відповідь на одне завдання відкриває наступне. Наприклад, під час повторення теми «Чотирикутники» команди отримують план умовного міського простору. Щоб прокласти маршрут, вони послідовно доводять паралельність прямих, визначають вид чотирикутника, обчислюють невідомі кути й обґрунтовують найкоротший шлях. Ключ до наступного етапу видається лише після пояснення, тому випадково вгадане число не забезпечує просування. Сюжет у такому завданні виконує організаційну функцію, а не замінює математичний зміст.

Цифрові інструменти розширюють можливості гейміфікації, проте не є її обов'язковою умовою. У середовищі динамічної геометрії можна організувати серію дослідницьких місій: побудувати фігуру за умовою, змінити положення її вершин, зафіксувати інваріантну властивість, сформулювати гіпотезу та довести її. Використання GeoGebra під час вивчення геометрії у 7 класі дає можливість візуалізувати побудови й організовувати дослідницькі завдання [5]. За допомогою коротких інтерактивних опитувань учитель швидко визначає типові помилки й одразу пропонує коригувальне завдання. Змагання на швидкість доцільне лише для простих операцій, бо під час доведення або складної побудови воно може знижувати якість міркування.

Оцінювання результативності не варто обмежувати кількістю набраних балів. Учитель може порівняти частку учнів, які розпочали розв'язання без додаткової підказки, кількість обґрунтованих кроків, точність використання термінів, число альтернативних способів та якість самоперевірки. Корисними є короткі вхідні й вихідні завдання однакової складності, спостереження за участю в обговоренні та самооцінка учня. Такий підхід дає змогу відокремити короткочасний інтерес до ігрової механіки від реального розвитку геометричного мислення. Результати дослідження застосування елементів гейміфікації під час навчання стереометрії підтверджують доцільність оцінювати не лише мотивацію, а й зміни в навчальних діях і математичній компетентності учнів [3, с. 88].

Елементи гейміфікації активізують пізнавальну діяльність у курсі геометрії, якщо спрямовують школяра до спостереження, побудови, висунення гіпотези, доведення, пошуку помилки й рефлексії. Найбільшу цінність мають не зовнішні нагороди, а чітко організований поступ, можливість повторної спроби, вибір завдання та змістовний зворотний зв'язок. Гейміфікація не замінює систематичного вивчення геометрії, але допомагає зробити інтелектуальну роботу учня зрозумілою, посильною та особистісно значущою.

1. *Мар'єнко М. В., Борисюк І. Ю.* Гейміфікація освітнього процесу під час вивчення дисциплін природничо-математичного циклу учнями закладів загальної середньої освіти. Фізико-математична освіта. 2020. Вип. 4(26). С. 72–78. URL: https://doi.org/10.31110/2413-1571-2020-026-4-013 (дата звернення: 23.09.2026).
3. *Moral-Sánchez S. N., Sánchez-Compaña M. T., Romero I.* Geometry with a STEM and Gamification Approach: A Didactic Experience in Secondary Education. Mathematics. 2022. Vol. 10, No. 18. Art. 3252. URL: https://doi.org/10.3390/math10183252 (дата звернення: 22.09.2026).
4. *Тінькова Д. С.* Елементи гейміфікації у навчанні стереометрії учнів ЗП(ПТ)О машинобудівного профілю. Вісник Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького. Серія: Педагогічні науки. 2020. № 1. С. 84–89. URL: https://doi.org/10.31651/2524-2660-2020-1-84-89 (дата звернення: 23.09.2026).
5. *Турка Т., Стьопкін А., Чорна К.* Гейміфікація як засіб підвищення внутрішньої мотивації учнів у процесі навчання математики. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. 2026. № 16. С. 180–190. URL: https://doi.org/10.31865/2413-26672415-3079162026368748 (дата звернення: 22.09.2026).
6. *Шабанова Л. М.* Використання web-сервісу «GeoGebra» під час вивчення курсу геометрії 7 класу. Наукові записки молодих учених. 2023. № 12. URL: https://phm.cuspu.edu.ua/ojs/index.php/SNYS/article/view/2075 (дата звернення: 22.09.2026).

USING GAMIFICATION ELEMENTS AS A TOOL FOR ACTIVATING SCHOOLCHILDREN'S COGNITIVE ACTIVITY IN THE GEOMETRY COURSE

The paper considers the use of gamification elements in the geometry course at secondary school. Gamified tasks, levels and feedback are interpreted as tools for organizing meaningful cognitive activity rather than external rewards. Examples of a geometric quest and digital activities are proposed. The effectiveness of this approach should be assessed through students' reasoning, independence and mathematical competence.

УДК 373.5.016:53:004.8

МЕТОДИЧНА СИСТЕМА ПОБУДОВИ ТА КОРИГУВАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ОСВІТНІХ ТРАЄКТОРІЙ З ФІЗИКИ В НУШ З ВИКОРИСТАННЯМ МОДЕЛЕЙ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Ольга ФЕДЧИШИН
Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль, Україна
olga.fedchishin.77@gmail.com

Сучасний етап реформування загальної середньої освіти в Україні, пов'язаний із реалізацією концепції «Нова українська школа» (НУШ), актуалізує проблему персоналізації освітнього процесу та створення умов для реалізації індивідуальної освітньої траєкторії (ІОТ) здобувача освіти. ІОТ передбачає врахування освітніх потреб та інтересів учня, рівня сформованості компетентностей, темпу навчання, результатів навчальної діяльності та можливостей самостійного вибору способів і засобів навчання.

Особливо гостро ця проблема постає під час навчання фізики, оскільки засвоєння фізичних понять і законів потребує одночасного опрацювання теоретичного, математичного, графічного та експериментального матеріалу. Учні суттєво відрізняються за рівнем попередньої підготовки, темпом засвоєння матеріалу, здатністю до абстрактного й математичного моделювання, досвідом виконання експериментальних завдань та пізнавальними інтересами. Виникає суперечність між потребою в індивідуальному супроводі кожного учня та обмеженими часовими й методичними ресурсами вчителя в умовах класно-урочної системи.

Перспективним засобом підтримки персоналізації навчання є генеративний штучний інтелект (ШІ), зокрема великі мовні (LLM) та мультимодальні моделі. Вони дають змогу адаптувати навчальні матеріали, генерувати завдання різного рівня складності, організовувати діалогову підтримку, аналізувати текстову та візуальну інформацію, формувати персоналізований зворотний зв'язок і підтримувати рефлексію учня.

Водночас застосування ШІ не може розглядатися як автоматична заміна діяльності вчителя. Моделі можуть давати переконливі, але неправильні відповіді, тому методично доцільно використовувати ШІ як інструмент підтримки ІОТ, а не як автономного суб'єкта прийняття педагогічних рішень, а результати його роботи мають перевіряти учень і вчитель.

Проблема індивідуалізації навчання фізики із застосуванням цифрових технологій досліджується українськими та зарубіжними науковцями. О. Кузнєцова розглядає індивідуалізацію навчання фізики на основі персоналізованих завдань, самостійної роботи та регулювання темпу навчання в цифровому освітньому середовищі [2]. Хоча це дослідження стосується здобувачів вищої освіти, його положення є методично значущими для розроблення механізмів адаптації навчання фізики в школі.

Безпосереднє застосування ШІ у шкільному навчанні фізики розглядається як перспективний напрям модернізації методики. У наукових працях виокремлено інтелектуальні чатботи, адаптивні системи навчання, автоматизоване оцінювання, віртуальні лабораторії, симуляції та рекомендаційні алгоритми, використання яких пов'язується з персоналізацією освітніх траєкторій, водночас із необхідністю врахування технологічних, етичних і педагогічних ризиків. Дослідження можливостей інтелектуальних систем акцентують їх здатність аналізувати результати навчання, виявляти прогалини у знаннях та формувати персоналізовані завдання. Окремий напрям становить використання ШІ для створення адаптивних навчальних матеріалів, фізичних задач, тестів, інтерактивних симуляцій і віртуальних лабораторій. Можливості ChatGPT, Google Gemini та інших інструментів ШІ в освітньому середовищі НУШ, дидактичний потенціал ChatGPT і Gemini для організації індивідуалізованого навчання фізики розглянуто у працях [1, 3, 4]

У зарубіжних дослідженнях значну увагу приділено використанню LLM безпосередньо у фізичній освіті. S. Küchemann зі співавторами, вивчаючи розроблення фізичних завдань майбутніми вчителями за допомогою ChatGPT, засвідчили потенціал технології, а водночас і проблеми з якістю, специфічністю та контекстуалізацією сформованих завдань. G. Polverini та B. Gregorčič розглянули можливості prompt engineering для підвищення якості відповідей LLM у фізичних задачах [5].

Отже, наявні окремі методичні напрацювання щодо індивідуалізації навчання фізики, персоналізованого навчання та використання ШІ. Водночас недостатньо розробленою залишається цілісна методична система, яка поєднувала б діагностику навчальних потреб учня, проєктування ІОТ, адаптацію змісту та завдань, персоналізований зворотний зв'язок і рефлексію результатів у єдиному циклі навчання фізики в НУШ. Саме ця прогалина визначає мету дослідження.

Мета дослідження – теоретично обґрунтувати та розробити методичну систему побудови й динамічного коригування ІОТ учнів з фізики в умовах НУШ із використанням генеративних і мультимодальних моделей ШІ.

Використано такі методи: аналіз і систематизацію наукових праць з проблем індивідуалізації, персоналізації та цифровізації навчання фізики й застосування ШІ в освіті; моделювання структури методичної системи; педагогічне проєктування навчальних ситуацій; аналіз можливостей мультимодальних моделей ШІ під час роботи з текстовою, графічною та візуальною інформацією.

Запропоновану методичну систему розглянуто як відкриту динамічну систему, у якій ІОТ не задається одноразово, а формується й коригується відповідно до результатів навчальної діяльності учня. Її основу становить цикл: діагностика → проєктування → реалізація → формувальне оцінювання → рефлексія → коригування траєкторії. ШІ виконує функції інструментальної підтримки, тоді як учитель зберігає постановку навчальних цілей, педагогічний контроль, інтерпретацію результатів і прийняття остаточних методичних рішень. Система складається з чотирьох взаємопов'язаних блоків.

Цільово-діагностичний блок передбачає визначення очікуваних результатів навчання та початкового рівня сформованості предметних компетентностей учня. Діагностика охоплює знання фізичних понять і законів, уміння застосовувати формули, читати графіки, аналізувати експериментальні дані, розв'язувати задачі й аргументувати отримані результати. Підсумком є індивідуальний навчальний профіль, який використовують для проєктування траєкторії.

Змістово-варіативний блок передбачає формування набору взаємопов'язаних навчальних маршрутів відповідно до виявлених потреб. Доцільно виділити щонайменше три рівні:

– базово-підтримувальний – засвоєння ключових понять, величин, законів і способів їх застосування;

– поглиблено-дослідницький – розв'язування проблемних задач, аналіз графіків, експериментальних даних і моделювання;

– творчо-проєктний – STEM-завдання, дослідницькі проєкти, конструювання моделей та застосування фізичних знань у реальних ситуаціях.

Ці рівні не повинні перетворюватися на жорстке ранжування учнів: залежно від теми та результатів навчання учень може переходити між ними.

Процесуально-діяльнісний блок передбачає використання ШІ для:

– адаптації пояснення фізичного поняття;

– генерації завдань із заданими параметрами складності;

– створення аналогій та контекстних ситуацій;

– надання поетапних підказок;

– аналізу відповідей учня;

– роботи з графіками, схемами, фотографіями та іншими візуальними матеріалами;

– підготовки до лабораторного чи дослідницького завдання, зокрема в поєднанні натурного й віртуального експериментів.

Контрольно-рефлексивний блок містить формувальне оцінювання, самооцінювання та рефлексію учня. ШІ може допомагати класифікувати типові помилки, пропонувати додаткові завдання або запитання для самоперевірки, але остаточне оцінювання результату здійснює вчитель відповідно до визначених критеріїв. Розподіл функцій між ШІ, учнем і вчителем на етапах ІОТ узагальнено в табл. 1.

Таблиця 1.

Функціональні можливості моделей ШІ в побудові ІОТ з фізики

Етап ІОТ	Функції ШІ	Діяльність учня	Роль учителя
Діагностика	Аналіз відповідей, виявлення типових помилок, формування діагностичних завдань	Виконує завдання, пояснює власні міркування	Інтерпретує результати, визначає стартові потреби
Проєктування	Пропонування варіантів завдань і навчальних ресурсів відповідно до визначених потреб	Обирає доступні варіанти діяльності	Визначає цілі та затверджує траєкторію

Етап ІОТ	Функції ШІ	Діяльність учня	Роль учителя
Вивчення нового матеріалу	Адаптація пояснення, аналогії, приклади, запитання	Ставить запитання, перевіряє пояснення, формулює висновки	Коригує зміст і методику
Розв’язування задач	Генерація варіативних задач, підказки, покрокова підтримка	Розв’язує, аргументує, перевіряє результат	Контролює коректність і рівень самостійності
Експериментальна діяльність	Підготовка інструкцій, аналіз даних і візуальних матеріалів	Планує та виконує експеримент, аналізує результати	Забезпечує безпеку та достовірність експерименту
Оцінювання	Формування завдань для самоперевірки, аналіз типових помилок	Виконує самооцінювання	Здійснює педагогічне оцінювання
Рефлексія	Формування рефлексивних запитань, узагальнення результатів	Оцінює власний прогрес і визначає труднощі	Приймає рішення про коригування ІОТ

Для прикладу розглянемо тему «Закони Ньютона» (9 клас). Початкова діагностика виявляє, що учень розуміє поняття сили, але має труднощі з визначенням напрямів сил та побудовою їх векторних діаграм. На першому етапі система формує для нього траєкторію, орієнтовану на послідовність: візуалізація → прості контекстні ситуації → поетапні підказки → самостійне розв’язування → рефлексія.

ШІ може запропонувати ситуацію з рухом скейтбордиста, намалювати схему сил, поставити навідні запитання та кілька варіантів завдань. Проте учень має самостійно побудувати модель, а відповідь ШІ перевірити за законами фізики. Промпт для вчителя може бути сформульований так: *«Сформуй для учня 9 класу навчальне завдання з теми «Закони Ньютона». Учень розуміє основні поняття, але має труднощі з визначенням напрямів сил на схемі. Запропонуй реальну життєву ситуацію, три послідовні підказки без готового розв’язання та завдання на самостійну побудову векторної діаграми. Після відповіді учня не повідомляй правильну відповідь одразу, а постав запитання, які допоможуть йому самостійно виявити помилку».*

Запропонована система дозволяє розглядати ШІ не як окремий цифровий інструмент, а як компонент замкненого циклу персоналізованого навчання. Її відмінність полягає в поєднанні діагностики, проєктування, адаптації, формувального оцінювання та рефлексії. Такий підхід узгоджується із сучасними дослідженнями персоналізованого навчання з ШІ, у яких серед ключових напрямів виокремлюють адаптацію навчального контенту, персоналізовані навчальні маршрути та інтелектуальну підтримку здобувача освіти, а також із людиноцентрованим підходом до використання генеративного ШІ в освіті.

Водночас наявність генеративного ШІ не тотожна автоматичній персоналізації. Для побудови ІОТ необхідні педагогічні критерії, за якими визначаються стартовий рівень учня, освітні цілі, умови переходу між етапами, критерії успішності та підстави для коригування траєкторії.

Окремого врахування потребує достовірність відповідей ШІ. Дослідження засвідчують, що моделі можуть успішно генерувати завдання й пояснення, але допускають помилки, зокрема під час роботи з графіками та фізичними міркуваннями . Тому в запропонованій системі перевірка результатів ШІ є невід’ємною частиною навчальної діяльності, а не додатковою процедуро ю. Слід також зазначити, що одержані результати мають теоретико-методичний характер: емпірична перевірка ефективності системи ще не проводилася.

Висновки. Індивідуальна освітня траєкторія з фізики в НУШ доцільно розглядати як динамічний процес, у якому зміст, складність, темп і способи навчальної діяльності коригуються відповідно до результатів та освітніх потреб учня. Генеративні та мультимодальні моделі ШІ створюють нові можливості для підтримки такої траєкторії: діагностики труднощів, адаптації пояснень, генерації варіативних завдань, надання поетапних підказок, роботи з графічними та візуальними матеріалами, організації самооцінювання та рефлексії.

1. *Ілин М. М.* Інструменти штучного інтелекту як ресурс модернізації методики викладання фізики в закладах загальної середньої освіти // Наукові записки. Серія: Проблеми природничо-математичної, технологічної та професійної освіти. 2025. DOI: https://doi.org/10.32782/cusu-pmtp-2025-2-6

2. *Кузнєцова О. Я.* Методика індивідуалізації навчання студентів з фізики // Modern Engineering and Innovative Technologies. 2025. Issue 37, Part 3. С. 73–78. DOI: https://doi.org/10.30890/2567-5273.2025-37-03-054
3. *Ручаковський В., Федчишин О.* Дидактичні можливості використання ChatGPT для організації індивідуалізованого навчання фізики // Інноваційна педагогіка. 2024. Вип. 73. С. 81–85. DOI: https://doi.org/10.32782/2663-6085/2024/73.16
4. *Федчишин О. М., Халкіді О. Л.* Дидактичні можливості веб-додатку Gemini в освітньому процесі // Підготовка майбутніх учителів фізики, хімії, біології та природничих наук у контексті вимог Нової української школи : матеріали VI Міжнар. наук.-практ. конф. М. Тернопіль : ТНПУ ім. В. Гнатюка, 2024. С. 82–84.
5. *Küchemann S., Steinert S., Revenga N., Schweinberger M., Dinc Y., Avila K. E., Kuhn J.* Can ChatGPT support prospective teachers in physics task development? // Physical Review Physics Education Research. 2023. Vol. 19. Art. 020128. DOI: https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.19.020128

METHODOLOGICAL SYSTEM FOR DESIGNING AND ADJUSTING INDIVIDUAL EDUCATIONAL TRAJECTORIES IN PHYSICS IN THE NEW UKRAINIAN SCHOOL USING ARTIFICIAL INTELLIGENCE MODELS

This paper substantiates and develops a methodological system for designing and dynamically adjusting individual educational trajectories (IETs) in physics for students of the New Ukrainian School using generative and multimodal artificial intelligence (AI) models. The study relies on analysis and systematization of scientific publications, modelling of the system structure and pedagogical design of learning situations. The system is treated as an open dynamic cycle: diagnostics – design – implementation – formative assessment – reflection – adjustment. It comprises four interrelated blocks: goal-and-diagnostic, content-and-variative, process-and-activity, and control-and-reflective. AI performs the function of instrumental support, while the teacher retains goal setting, pedagogical control and final methodological decisions. The principles of the system, the distribution of functions among AI, the student and the teacher, and an example of a teacher prompt are presented. The results are theoretical and methodological in nature; experimental verification of the system is a prospect for further research.

UDC 004.8:37.091.3

USAGE GENERATIVE ARTIFICIAL INTELLIGENCE FOR PERSONALIZING TASKS

Anastasiia KRYTSKA
Ternopil National Pedagogical University, Ternopil, Ukraine
krytska_am@fizmat.tnpu.edu.ua
Hanna HOMENYUK
Ternopil National Pedagogical University, Ternopil, Ukraine
homenyuk_hanna@tnpu.edu.ua

The development of artificial intelligence (AI) creates new opportunities for improving the personalization of the educational process. Mathematics is a subject in which students often demonstrate different levels of prior knowledge, learning pace and ability to apple mathematical concepts. Therefore, the use of identical tasks for all students does not always correspond to their individual educational needs. One possible solution is to use AI tools to adapt learning materials according to students' levels of achievements. [1; 2]

Personalization of mathematics learning can be implemented through differentiated tasks that preserve a common learning objective but differ in complexity, amount of support and level of independent reasoning [3; 4]. AI can help teachers create such materials more efficiently. For example, one basic mathematical problem can be transformed inro several versions: a basic version with additional hints, an intermediate version required independent selection of a solution method, and an advanced version involving several reasoning steps or a practical context.

An important example of this approach is the use of Gemini Notebook (NotebookLM). The tool allows teachers to work with selected educational sources, such as textbooks, worksheets and methodological materials, and use them as a basis for creating new learning content [5]. This is particularly useful in mathematics because generated tasks can be connected with the educational materials that students actually use.



Fig. 1. Gemini Notebook Logo

For example, when teaching the topic “The Sine and Cosine Theorems” in Grade 9, a teacher can add relevant textbook materials to Gemini Notebook and formulate the prompt: “Create five non-standard practical problems on the topics ‘The Sine and Cosine Theorems’ for Grade 9 students. The problems should correspond to the provided materials, include medium and high levels of difficulty, and contain short hints for solving them.” (Fig. 2) The generated tasks may describe situations related to navigation, construction, distances or measurements. Thus, students apply mathematical knowledge in contexts that differ from standard textbook exercises (Fig. 3).

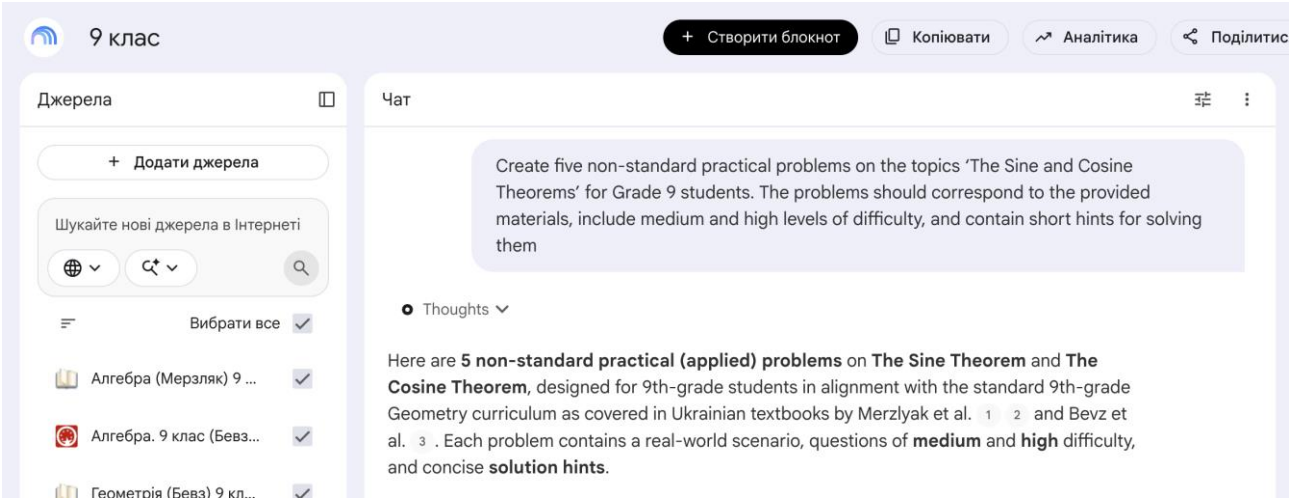


Fig. 2. Example of prompt input in Gemini Notebook

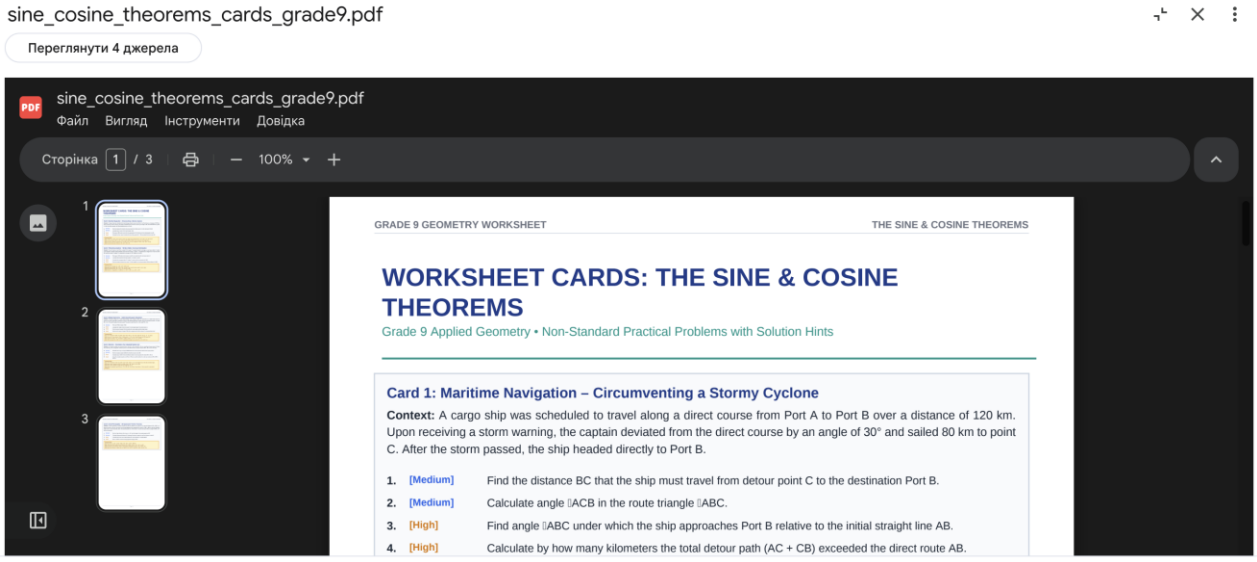


Fig. 3. Example of prompt output in Gemini Notebook (File with exersices)

Notebook can also be used to adapt the same task for different levels of achievement. A teacher can ask the system to create three versions of the problem while keeping the same learning objective. For students with an average level, the task can require independent selection of the appropriate theorem or formula. For advanced students, the same mathematical situation can be supplemented with an additional condition or a question requiring justification and deeper analysis [3; 4].

Another possibility is the creation of differentiated tests. The teacher can specify the number of questions and their level of difficulty, for example: “Create a 10-question test for Grade 9 on the Sine and Cosine Theorems. Include basic, medium and advanced questions. The first four question should test basic knowledge, the next four should require application of the theorems, and the final two should involve more complex reasoning.” Several versions of such a test can then be generated and reviewed by the teacher.

The tool can also support the preparation of didactic cards (Fig. 4). A card may contain a short theoretical explanation, formulas, an example, exercises and hints. Its content can be adjusted according to the needs of students. For learners who experience difficulties, the card may contain a detailed solution algorithm and additional examples. For advanced students, it may contain fewer hints and more complex or non-standard problems. In this way, the same learning topic can be presented at different levels of cognitive complexity.

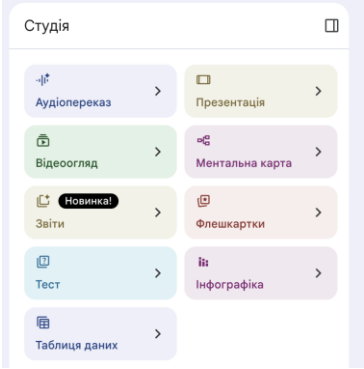


Fig. 4. Possibilities for creating various types of materials in Gemini Notebook

The practical possibilities of this approach were considered during the study of the topic “Derivative of a Function” in Grade 10. The work involved 15 students and lasted for two months. Diagnostic assessment demonstrated differences in students’ mathematical preparedness, so differentiated materials were used during the learning process. AI tools were applied to modify tasks, adapt their difficulty and create practice-oriented exercises. Gemini Notebook was used to work with educational sources and prepare tests and didactic cards.

The process of creating personalized materials consisted of several steps. The teacher fist selected the relevant educational sources and upload them to the notebook. Then the learning objective, grade and required level of difficulty were specified in the prompt. After the AI generated the material, the teacher checked its mathematical correctness, wording and correspondence to the curriculum. Only after this verification were the tasks used in the educational process [1; 2].

For example, students with the basic level could receive exercises focused on applying standard derivative formulas. Students with intermediate level could solve tasks requiring the combination of several differentiation rules, while students with high level could work with problems involving extrema, optimization and practical applications of derivatives. Thus, the differentiation concerned not only the number of tasks but also their cognitive complexity and the degree of support provided to the learner.

The use of Gemini Notebook demonstrates that artificial intelligence can become a practical instrument for preparing differentiated mathematics materials. Its main advantage is the ability to quickly transform existing educational content into tasks, tests and didactic cards suitable for students with different level of achievement [5]. At the same time, AI does not replace the teacher’s methodological decisions. The teacher determines the learning objectives, selects appropriate sources, formulates instructions, evaluates the generated content and decides how it should be used.

Therefore, the combination of teacher expertise and AI-supported generation of educational materials can contribute to a more flexible approach to mathematics instructions. Gemini Notebook makes it possible to reduce the routine work associated with preparing different versions of tasks while preserving common learning objectives and adapting the level of support and complexity to students’ needs. This creates additional conditions for personalized learning and more effective differentiation of mathematics education [1; 3; 4]

1. UNESCO. (2023). Guidance for generative AI in education and research. UNESCO.
2. UNESCO. (2021). AI and education: Guidance for policy-makers. UNESCO.
3. *Holmes, W., Bialik, M., & Fadel, C. (2019).* Artificial intelligence in education: Promises and implications for teaching and learning. Center for Curriculum Redesign.
4. *Luckin, R., Holmes, W., Griffiths, M., & Forcier, L. B. (2016*). Intelligence unleashed: An argument for AI in education. Pearson.
5. Google. (2024). NotebookLM: AI-powered research and writing assistant. Google.

ВИКОРИСТАННЯ ГЕНЕРАТИВНОГО ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ ДЛЯ ПЕРСОНАЛІЗАЦІЇ ЗАВДАНЬ

У тезах розглянуто можливості використання штучного інтелекту для диференціації навчальних завдань з математики відповідно до рівня підготовки учнів. Особливу увагу приділено використанню Gemini Notebook для роботи з навчальними джерелами, створення різнорівневих практичних завдань, тестів та дидактичних карток. Описано способи формування запитів до штучного інтелекту для зміни складності завдань, рівня підтримки та кількості етапів розв’язання за збереження спільної навчальної мети. Наведено приклади практичного використання інструменту під час навчання математики та визначено роль учителя у перевірці й педагогічному доборі згенерованих матеріалів.