

Міністерство освіти і науки України

Чернівецький національний університет

імені Юрія Федьковича

Г.М. Перун, Л.М. Мельничук

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ:
КОРОТКИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ І
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ
РОБОТИ. ЧАСТИНА 2

Навчальний посібник

Чернівці

Чернівецький національний університет

імені Юрія Федьковича

2026

УДК 517(076)

М 340

Друкується за ухвалою вченої ради факультету математики та інформатики
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича
(Протокол № 11 від 22 квітня 2026 року)

Рецензенти:

Маник Орест Миколайович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри термоелектрики та медичної медицини ННІФТКН Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича;

Дрінь Ірина Ігорівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри фінансів, обліку і оподаткування Чернівецького торговельно-економічного інституту Державного торговельно-економічного університету.

Перун Г.М., Мельничук Л.М.

М 340 Математичний аналіз: короткий конспект лекцій і завдання для самостійної роботи. Частина 2: навч. посіб. / Г.М. Перун, Л.М. Мельничук. Чернівці: Чернівецьк. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2026. 166 с.

У частині 2 навчального посібника наводяться основні теоретичні відомості, розв'язування типових прикладів, а також підібрані варіанти завдань для самостійної роботи з таких тем математичного аналізу: диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних, ряди.

Для студентів вищих навчальних закладів фізичних та інженерно-технічних спеціальностей.

УДК 517(076)

©Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, 2026

©Перун Г.М., Мельничук Л.М., 2026

ПЕРЕДМОВА

"Те, що сьогодні доведено, колись існувало тільки в уяві"

Вільям Блейк (англійський поет, художник, гравер)

Навчальний посібник "Математичний аналіз: короткий конспект лекцій та завдання для самостійних робіт. Частина 2" пропонується як додаткове джерело навчальної інформації для студентів фізичних та інженерно-технічних спеціальностей вузів, які слухають дисципліну "Математичний аналіз", а також для всіх студентів яким викладають розділи вищої математики, у складі яких є математичний аналіз.

Посібник містить теоретичні відомості з таких розділів: диференціальне числення функції багатьох змінних, інтегрування функції багатьох змінних, ряди. Вони є логічним продовженням одновимірного аналізу, якому присвячена Частина 1, і відкривають ширші можливості застосування математичного апарату до задач фізики, техніки, економіки.

Теоретичні основоположні питання ілюструються детально розв'язаними прикладами, які мають на меті закріпити теоретичні знання та показати сферу їх застосування, сформулювати практичні вміння розв'язування задач.

У посібнику є підбір рівноцінних завдань для самостійного розв'язування студентами як тренувальних вправ, і які можна пропонувати для варіантів підсумкових контрольних робіт.

Фундаментальні поняття, які висвітлюються в навчальному посібнику, почерпнуті з **перекладу небайдужих до математики і України під керівництвом Сергія Зінов'єва класичного підручника "Курс диференціального та інтегрального числення" (2022-02-24–2023-06-22), автором якого є український математик Григорій Михайлович Фіхтенгольц [1].**

РОЗДІЛ І. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Тема 1. Функція багатьох змінних

1. Основні поняття та означення теорії функцій багатьох змінних

Функція однієї змінної допомагає у вивченні явищ природи, які враховують один фактор, а звідси одну змінну. У багатьох задачах постає потреба у розгляді функцій, які залежать від двох та більше змінних, наприклад, $s = v \cdot t$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ і т.д.

Означення 1. Множину сукупностей m чисел $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ будемо називати m -вимірним простором.

Сукупність цих чисел визначатиме деяку точку M у m -вимірному просторі. Якщо $m = 2$, то простір двовимірний. Якщо, як відомо, ввести прямокутну декартову систему координат, то точка на площині буде визначатися двома числами x та y , або $M(x, y)$. Аналогічно, числа $x_1, x_2, \dots, x_m$ називатимуться координатами точки M .

Означення 2. Будемо називати m -вимірний простір евклідовим m -вимірним простором $\mathbb{E}^m (\mathbb{R}^m)$, якщо для двох довільних точок цього простору $M^1 (x_1^1, x_2^1, \dots, x_m^1)$ та $M^2 (x_1^2, x_2^2, \dots, x_m^2)$ введено поняття відстані між двома точками за формулою

$$\rho (M^1, M^2) = \sqrt{(x_1^2 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_2^1)^2 + \dots + (x_m^2 - x_m^1)^2}. \quad (1)$$

Означення 3. Будемо називати m -вимірною кулею в $\mathbb{E}^m$ сукупність точок цього простору, координати яких задовольняють співвідношення

$$\rho (M_0, M) \leq R, \quad (2)$$

де M_0 – центр кулі, $M_0 (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$, R – радіус кулі, M – довільна точка кулі, $M (x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Частинним випадком є простір $\mathbb{R}^2$, тоді

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq R, \quad (3)$$

а отже, маємо круг з центром в точці $M_0(x_0, y_0)$ радіуса R .

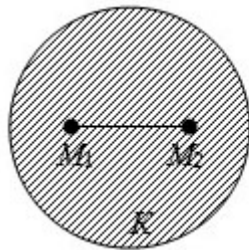
Куля називається відкритою, якщо $\rho(M_0, M) < R$, її називають *околом точки* M_0 , а m -вимірною сферою в $\mathbb{E}^m$ будемо називати сукупність точок M , координати яких задовольняють рівняння

$$\rho(M_0, M) = R. \quad (4)$$

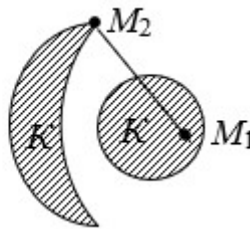
Розглянемо в $\mathbb{E}^m$ деяку множину K . Точка $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$, яка належить множині K , називається *внутрішньою точкою множини* K , якщо вона належить цій множині з деяким своїм околom.

Точка $M \in K$ буде називатися *граничною точкою* цієї множини, якщо в кожному околі цієї точки лежать як точки множини K , так і точки, які не належать множині K . Якщо *всі точки множини* K є *внутрішніми*, то таку множину називають *відкритою*, наприклад, на площині круг без самого кола. Множина, яка *містить всі свої граничні точки* називається *замкнутою*. Зрозуміло, що є множини, які є ні відкритими, ні замкнутими.

Означення 4. Множина K точок евклідового простору називається зв'язною, якщо дві довільні точки цієї множини можна сполучити неперервною лінією і кожна точка цієї лінії належить множині K .



зв'язна



не зв'язна

Означення 5. Якщо кожній точці M із множини $K \subset \mathbb{E}^m$ m -вимірного евклідового простору поставити у відповідність деяке дійсне число u , то кажуть, що задана функція багатьох змінних: $u = f(M)$, $M(x_1, x_2, \dots, x_m) \in K \subset \mathbb{E}^m$. Множина K при цьому є областю визначення функції.

Приклад 1. Знайти область визначення функції

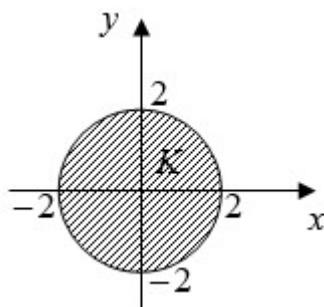
$$u = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Розв'язання. Запишемо функцію у вигляді

$$u = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}.$$

Оскільки функція містить квадратний корінь, то вона визначена для тих значень x та y , які задовольняють нерівність $4 - (x^2 + y^2) \geq 0$ або

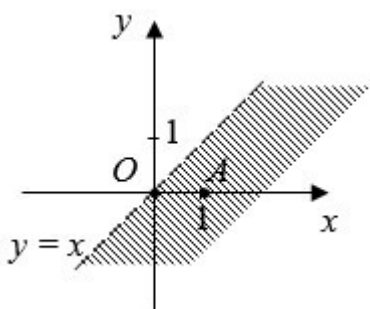
$x^2 + y^2 \leq 4$. З геометричної точки зору це означає, що функція визначена в точках, які лежать всередині кола $x^2 + y^2 = 4$ та на ньому. Отже, областю визначення функції, тобто множиною K , у даному випадку, є круг радіуса 2 з центром в $O(0; 0)$.



Приклад 2. Знайти область визначення функції

$$z = \ln(x - y).$$

Розв'язання. Оскільки логарифмічна функція визначена для аргумента строго більшого нуля, тому $x - y > 0$ або $y < x$. Точки площини XOY , координати яких задовольняють цю нерівність, розміщені під прямою $y = x$, але точки самої прямої $y = x$ розглядатись не можуть (виконується рівність нулеві аргумента



логарифма). Візьмемо довільну точку на одній з півплощин, на які поділила пряма $y = x$ координатну площину. Нехай $A(1; 0)$. Бачимо, що $x = 1$, $y = 0$, а $0 < 1$ виконується правильна нерівність, тому заштрихуємо півплощину нижче прямої $y = x$.

2. Поняття границі функції багатьох змінних

Означення 6. Впорядковану сукупність точок m -вимірного простору $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ будемо називати послідовністю в $\mathbb{E}^m$. Послідовність точок $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ m -вимірного простору називається збіжною до деякої точки $A(a_1, a_2, \dots, a_m)$, якщо для довільного як завгодно малого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер $N(\varepsilon)$, що для всіх номерів, для яких $n > N(\varepsilon)$, виконується нерівність

$$\rho(M_n, A) < \varepsilon.$$

Записується $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = A$ або $M_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A$.

Приклад 3. Знайти границю послідовності при $n \rightarrow \infty$

$$M_n \left(1; \frac{1}{n}; \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right).$$

Розв'язання. Розглянемо $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$, отже, $M_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A(1; 0; e)$.

Зауваження 1. Теорію числових послідовностей, вивчену раніше в одномірному випадку, будемо застосовувати у випадку точок m -вимірного простору.

Розглянемо тепер функцію $u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Нехай вона буде визначена в деякому околі точки $A(a_1, a_2, \dots, a_m)$.

Означення 7. Число b називається границею функції $u = f(M)$ і позначається $b = \lim_{M \rightarrow A} f(M)$ в процесі $M \rightarrow A$, якщо

для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon)$, що для будь-яких точок M таких, що $0 < \rho(M, A) < \delta$ виконується нерівність

$$|f(M) - b| < \varepsilon. \quad (5)$$

Рідше вживається такий запис, який розуміється безпосередньо,

$$b = \lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_m \rightarrow a_m}} f(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Означення 8. Число b називається границею функції $f(M)$ в процесі $M \rightarrow A$, якщо для довільної послідовності $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ з області визначення функції $f(M)$, що $M_n \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$, відповідна послідовність значень функції $f(M_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$ (прямує до b в процесі, коли $n \rightarrow \infty$).

Зауваження 2. Для границі функції багатьох змінних правильними є такі ж теореми, як і для границі функції однієї змінної.

Нехай $\lim_{M \rightarrow A} f(M) = b$; $\lim_{M \rightarrow A} g(M) = c$, тоді

1) $\lim_{M \rightarrow A} (f(M) \pm g(M)) = \lim_{M \rightarrow A} f(M) \pm \lim_{M \rightarrow A} g(M) = b \pm c$ (границя суми дорівнює сумі границь);

2) $\lim_{M \rightarrow A} (f(M) \cdot g(M)) = \lim_{M \rightarrow A} f(M) \cdot \lim_{M \rightarrow A} g(M) = b \cdot c$ (границя добутку дорівнює добутку границь);

3) $\lim_{M \rightarrow A} \left(\frac{f(M)}{g(M)} \right) = \frac{\lim_{M \rightarrow A} f(M)}{\lim_{M \rightarrow A} g(M)} = \frac{b}{c}$, $c \neq 0$ (границя частки

дорівнює частці границь при $c \neq 0$).

Приклад 4. Знайти границю

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}.$$

Розв'язання. Покладемо $x^2 + y^2 = t^2$. При $x \rightarrow 0$ і $y \rightarrow 0$ бачимо, що $t \rightarrow 0$, тому

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 1} - 1} = (*)$$

домножимо на $\sqrt{t^2 + 1} + 1$

$$(*) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 (\sqrt{t^2 + 1} + 1)}{t^2} = 1 + 1 = 2.$$

Приклад 5. Знайти границю

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{y}.$$

Розв'язання.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x \sin xy}{xy} \right) = \left| \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin xy}{xy} = 1 \right| = \lim_{x \rightarrow 3} x = 3.$$

Приклади 4 і 5 є прикладами границь функції двох змінних x та y . Правильною є теорема.

Теорема (про існування повторної границі функції двох змінних). Якщо

1) існує (скінченна або нескінченна) подвійна границя

$$A = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y);$$

2) при довільному $y \in Y$ існує скінченна границя за змінною x

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = \varphi(y),$$

тоді існує повторна границя

$$\lim_{y \rightarrow b} \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow b} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y).$$

Приклад 6. Для функції $f(x, y) = x \cdot \sin \frac{1}{y}$ вияснити, які повторні границі існують?

Розв'язання. Розглянемо спочатку таку границю $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{y} = 0$ (рівність нулевій завдяки добутку нескінченно малої величини на обмежену величину). Розглянемо тепер $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{y}$. Така повторна границя не існує, оскільки не існує границя функції однієї змінної $\lim_{y \rightarrow 0} \sin \frac{1}{y}$.

Зауваження 3. При перестановці двох граничних переходів потрібно бути дуже обережними, щоб не прийти до неправильних висновків.

3. Неперервність функцій багатьох змінних

Означення 9. Функція $u = f(M)$ називається неперервною в точці A , якщо $\lim_{M \rightarrow A} f(M) = f(A)$.

З означення випливає, що функція має бути визначеною в точці A , має існувати скінченна границя в деякому околі точки A і границя функції має дорівнювати значенню функції в точці A (аналогічно як і для функції однієї змінної).

Означення 10. Функція $u = f(M)$ називається неперервною на множині K , якщо вона є неперервною в кожній точці цієї множини.

Властивості неперервних функцій багатьох змінних

Теорема 1 (про збереження знаку неперервної функції). Якщо функція $u = f(M)$ є неперервною в точці A і $f(A) \neq 0$, то існує окіл точки A , в якому функція зберігає знак.

Для функції багатьох змінних виконуються аналоги теорем Вейєрштрасса.

Теорема 2 (I-ша теорема Вейєрштрасса). Якщо $u = f(M)$

неперервна на замкнутій обмеженій множині, то вона є обмеженою на цій множині.

Теорема 3 (II-га теорема Вейєрштрасса). Якщо функція неперервна на замкнутій обмеженій множині K , то на цій множині вона досягає своїх верхньої і нижньої меж ($m = \inf_K f(M)$; $M = \sup_K f(M)$).

Введемо поняття складеної функції багатьох змінних.

Нехай $x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k)$; $x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k)$; $\dots$; $x_m = \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k)$, які визначені на деякій множині T з k -вимірною евклідовою простору. Припустимо, що областю значень цих функцій є деяка множина $X \subset \mathbb{E}^m$. Будемо вважати, що на X задана функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, а отже будемо казати, що маємо складену функцію багатьох змінних

$$u = f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k)), \quad (6)$$

визначену на T . Якщо функції $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ неперервні в деякій точці $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) \in T$, а функція $f(x_1, \dots, x_m)$ неперервна в точці $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in X$, то функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ є неперервною функцією змінних $t_1, t_2, \dots, t_k$ в точці $(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$.

4. Частинні похідні та диференційовність функції багатьох змінних

Нехай $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ – довільна фіксована точка з області визначення функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Одній із змінних, наприклад, x_k надамо приросту Δx_k , $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ і розглянемо границю відношення приросту функції за аргументом x_k до приросту аргумента Δx_k :

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0 + \Delta x_k, x_{k+1}^0, \dots, x_m^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\Delta x_k} =$$

$$= \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta x_k f}{\Delta x_k}. \quad (7)$$

Якщо скінченна границя (7) існує, то називається *частинною похідною першого порядку функції u за змінною x_k в точці $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$* і позначається $u'_{x_k}(M_0)$, $\frac{\partial u}{\partial x_k}(M_0)$, $\frac{\partial u(M_0)}{\partial x_k}$, рідше $u_{x_k}(M_0)$.

Пам'ятаємо! *Частинна похідна функції багатьох змінних визначається як похідна функції однієї змінної за умови, що всі інші змінні є сталими.* Тому всі правила та формули для похідної функції однієї змінної правильні і для частинних похідних. Окремо для функції двох змінних:

$$z'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{z(x_0 + \Delta x, y_0) - z(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

$$z'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{z(x_0, y_0 + \Delta y) - z(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Геометрично частинна похідна z'_x функції двох змінних $z = z(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ дорівнює *тангенсу кута, утвореного дотичною, проведеною в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до лінії перетину поверхні $z = z(x, y)$ з площиною $y = y_0$ і додатним напрямком осі OX .*

Аналогічний геометричний зміст частинної похідної z'_y .

Частинні похідні $z'_x(x_0, y_0)$ і $z'_y(x_0, y_0)$ характеризують швидкість зміни функції $z = z(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$, причому $z'_x(x_0, y_0)$ задає швидкість зміни функції в напрямку прямої $y = y_0$ (відносно x), а $z'_y(x_0, y_0)$ – в напрямку прямої $x = x_0$ (відносно y).

Приклад 7. Знайти частинні похідні функцій 1) $z = x^3 + \sin(x - y^2) - xy$; 2) $z = e^{x^2 - 5y^3}$.

Розв'язання. 1) $z'_x = (x^3 + \sin(x - y^2) - xy)'_x = 3x^2 + \cos(x - y^2) - y$; $z'_y = 0 + \cos(x - y^2) \cdot (-2y) - x =$

$$-2y \cos(x - y^2) - x.$$

$$2) \ z'_x = \left(e^{x^2-5y^3} \right)'_x = e^{x^2-5y^3} (x^2 - 5y^3)'_x = e^{x^2-5y^3} \cdot (2x - 0) = 2xe^{x^2-5y^3};$$

$$z'_y = \left(e^{x^2-5y^3} \right)'_y = e^{x^2-5y^3} (x^2 - 5y^3)'_y = -15y^2 e^{x^2-5y^3}.$$

Користувались тим, що при диференціюванні по x , змінна y є const , а $(\text{const})' = 0$ і навпаки.

Повним приростом функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ в точці $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$, який відповідає приростам аргументів $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ називається різниця

$$\Delta u = f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0).$$

Функцію $u = f(M)$ називають диференційовною в точці M_0 , якщо в околі цієї точки її повний приріст можемо подати у вигляді

$$\Delta u = A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + A_m \cdot \Delta x_m + o(\rho), \quad (8)$$

де $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_m^2}$ – відстань між точками M_0 та M ; $A_1, A_2, \dots, A_m$ – числа, не залежні від $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$, а $o(\rho)$ – нескінченно мала величина відносно ρ .

Вираз $A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + A_m \cdot \Delta x_m$ – головна лінійна відносно $\Delta x_1, \dots, \Delta x_m$ частина приросту функції Δu .

Функція $u(M)$, диференційована в кожній точці деякої множини, називається диференційовною на цій множині. Якщо функція u диференційовна в деякій точці, то вона неперервна в цій точці і має там частинні похідні, причому

$$u'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = A_1; \ u'_{x_2}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = A_2; \ \dots;$$

$$u'_{x_m}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = A_m.$$

Функції, у яких всі частинні похідні неперервні, є неперервно диференційовними.

Якщо функція $u = u(x_1, x_2, \dots, x_m)$ диференційовна в точці $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$, то *головна лінійна відносно приростів аргументів частина її повного приросту (8) називається повним диференціалом функції* і позначається символом

$$du(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) = u'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \Delta x_1 + \\ + u'_{x_2}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \Delta x_2 + \dots + u'_{x_m}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \Delta x_m. \quad (9)$$

Прирости незалежних змінних $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ називають диференціалами незалежних змінних $x_1, x_2, \dots, x_m$ і позначають відповідно $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$. Тоді *диференціалом I -го порядку функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ називають співвідношення вигляду*

$$du = u'_{x_1} dx_1 + u'_{x_2} dx_2 + \dots + u'_{x_m} dx_m. \quad (10)$$

Вирази $u'_{x_1} dx_1, u'_{x_2} dx_2, \dots, u'_{x_m} dx_m$ називають частинними диференціалами функції u (аналог $dy = f'(x)dx$ – диференціал функції $y = f(x)$ однієї змінної).

З означення диференціала функції багатьох змінних випливає, що при малих $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ виконується співвідношення

$$\Delta u(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \approx du(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \quad (11)$$

і тоді

$$u(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) \approx u(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) + \\ + du(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0).$$

За останньою формулою знаходять наближені значення функції багатьох змінних.

Приклад 8. Знайти повний диференціал функції

$$z = \ln \sqrt{x^2 + 3y^2}.$$

Розв'язання. Згідно з (10), знайдемо частинні похідні

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln \sqrt{x^2 + 3y^2} \right)'_x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} \cdot \left(\sqrt{x^2 + 3y^2} \right)'_x =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3y^2}} \cdot (x^2 + 3y^2)'_x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} \times \\
&\quad \times \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3y^2}} \cdot (2x + 0) = \frac{x}{x^2 + 3y^2}; \\
z'_y &= \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\ln \sqrt{x^2 + 3y^2} \right)'_y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3y^2}} \times \\
&\quad \times (x^2 + 3y^2)'_y = \frac{1}{2(x^2 + 3y^2)} \cdot (0 + 6y) = \frac{3y}{x^2 + 3y^2}.
\end{aligned}$$

Запишемо формулу (10) для $z(x, y)$

$$dz = \frac{x}{x^2 + 3y^2} dx + \frac{3y}{x^2 + 3y^2} dy.$$

5. Диференціювання функцій, заданих неявно

Неявна функція від 2-ох змінних визначається рівнянням $F(x, y, z) = 0$ (неявна функція однієї змінної, як було раніше, $F(x, y) = 0$). Якщо $F(x, y, z)$ така, що

1) існує точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, в якій $F(x_0, y_0, z_0) = 0$;

2) $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$;

3) $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$, $F'_z(x, y, z)$ неперервні в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то існує єдина функція $z = f(x, y)$, визначена і диференційовна в деякому околі точки $M_0^*(x_0, y_0)$, яка задовольняє в цьому околі рівняння $F(x, y, z) = 0$ і така, що $f(x_0, y_0) = z_0$.

При цьому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \quad (12)$$

Зауваження. Якщо рівняння $F(x_1, x_2, \dots, x_m, u) = 0$ визначає u як деяку функцію від m змінних, тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{F'_{x_1}}{F'_u}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = -\frac{F'_{x_2}}{F'_u}, \quad \dots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_m} = -\frac{F'_{x_m}}{F'_u}. \quad (13)$$

Приклад 9. Для функції $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$ знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Розв'язання. Маємо $F(x, y, z) = z^3 - 4xz + y^2 - 4$. Знайдемо $F'_x = -4z$, $F'_y = 2y$, $F'_z = 3z^2 - 4x$. Згідно з формулою (12)

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F'_x}{F'_z} = -\left(\frac{-4z}{3z^2 - 4x}\right) = \frac{4z}{3z^2 - 4x}; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{2y}{3z^2 - 4x}.\end{aligned}$$

6. Диференціювання складених функцій

Нехай $u = u(x_1, x_2, \dots, x_m)$ – диференційовна функція змінних $x_1, x_2, \dots, x_m$, кожна з яких є, в свою чергу, диференційовною функцією від змінної t : $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$, $\dots$, $x_m = \varphi_m(t)$. Тоді можемо говорити про повну похідну від функції u за t

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \cdot \frac{dx_m}{dt}. \quad (14)$$

У формулі (14) $u'_{x_1}, u'_{x_2}, \dots, u'_{x_m}$ – частинні похідні, а $x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_m(t)$ – звичайні похідні однієї змінної t .

Якщо ж $x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k)$, $x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k)$, $\dots$, $x_m = \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k)$, то формула (14) набуває вигляду

[illegible]

Приклад 10. Знайти $\frac{du}{dt}$, якщо $u = x^2y^3z$, де $x = t^2+1$; $y = \operatorname{tg} t$; $z = \ln t$.

Розв'язання. Згідно з формулою (14), маємо

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} =$$

$$\begin{aligned}
&= 2xy^3z \cdot 2t + 3x^2y^2z \cdot \frac{1}{\cos^2 t} + x^2y^3 \cdot \frac{1}{t} = \\
&= 2(t^2 + 1) \operatorname{tg}^3 t \ln t \cdot 2t + 3(t^2 + 1)^2 \operatorname{tg}^2 t \ln t \cdot \frac{1}{\cos^2 t} + (t^2 + 1)^2 \operatorname{tg}^3 t \cdot \frac{1}{t} = \\
&= (t^2 + 1) \operatorname{tg}^2 t \left(4t \operatorname{tg} t \cdot \ln t + \frac{3(t^2 + 1) \ln t}{\cos^2 t} + \frac{\operatorname{tg} t}{t} + t \operatorname{tg} t \right).
\end{aligned}$$

7. Частинні похідні та диференціал II-го порядку

Частинними похідними другого порядку функції $u = u(x_1, x_2, \dots, x_m)$ називаються частинні похідні від її частинних похідних I-го порядку. Позначаються вони так:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \equiv u''_{x_k x_k}(x_1, x_2, \dots, x_m), \\
\frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k} \equiv u''_{x_l x_k}(x_1, x_2, \dots, x_m), \\
\{k, l\} &\subset \{1, 2, \dots, m\}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Аналогічно визначаються і позначаються частинні похідні вищого порядку, ніж другий.

Приклад 11. Знайти частинні похідні другого порядку функції

$$z = e^{2x^3 - 5y^6} = e^{2x^3} \cdot e^{-5y^6}.$$

Розв'язання. Знайдемо спочатку частинні похідні I-го порядку за обома змінними x та y :

$$\begin{aligned}
z'_x &= \frac{\partial z}{\partial x} = e^{2x^3 - 5y^6} (2x^3 - 5y^6)'_x = e^{2x^3 - 5y^6} \cdot 6x^2; \\
z'_y &= \frac{\partial z}{\partial y} = e^{2x^3 - 5y^6} (2x^3 - 5y^6)'_y = e^{2x^3 - 5y^6} \cdot (-30y^5).
\end{aligned}$$

Диференціюючи повторно, отримаємо

$$z''_{xx} = \left(6x^2 \cdot e^{2x^3 - 5y^6} \right)'_x = (6x^2)'_x \cdot e^{2x^3 - 5y^6} + 6x^2 \cdot \left(e^{2x^3 - 5y^6} \right)'_x =$$

$$\begin{aligned}
&= 12x \cdot e^{2x^3-5y^6} + 6x^2 \cdot e^{2x^3-5y^6} \cdot 6x^2 = e^{2x^3-5y^6} \cdot (12x + 36x^4); \\
z''_{yy} &= \left(-30y^5 \cdot e^{2x^3-5y^6} \right)'_y = (-30y^5)'_y \cdot e^{2x^3-5y^6} + (-30y^5) \cdot \left(e^{2x^3-5y^6} \right)'_y = \\
&= -150y^4 \cdot e^{2x^3-5y^6} + (-30y^5) \cdot e^{2x^3-5y^6} \cdot (-30y^5) = \\
&= e^{2x^3-5y^6} \cdot (900y^{10} - 150y^4); \\
z''_{xy} &= (z'_x)'_y = \left(6x^2 \cdot e^{2x^3-5y^6} \right)'_y = 6x^2 \cdot \left(e^{2x^3-5y^6} \right)'_y = \\
&= 6x^2 \cdot e^{2x^3-5y^6} \cdot (-30y^5) = -180x^2y^5 \cdot e^{2x^3-5y^6}; \\
z''_{yx} &= (z'_y)'_x = \left(-30y^5 \cdot e^{2x^3-5y^6} \right)'_x = -30y^5 \cdot \left(e^{2x^3-5y^6} \right)'_x = \\
&= -30y^5 \cdot e^{2x^3-5y^6} \cdot 6x^2 = -180x^2y^5 \cdot e^{2x^3-5y^6}.
\end{aligned}$$

Бачимо, що $z''_{xy} = z''_{yx}$ (мішані похідні рівні).

Приклад 12. Показати, що функція $u(x, t) = Ae^{-\lambda^2 a^2 t} \sin \lambda x$ задовольняє рівняння теплопровідності $u'_t = a^2 u''_{xx}$, де A, λ, a – сталі з певним фізичним змістом.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні

$$\begin{aligned}
u'_t &= \left(Ae^{-\lambda^2 a^2 t} \sin \lambda x \right)'_t = A \sin \lambda x e^{-\lambda^2 a^2 t} \cdot (-\lambda^2 a^2 t)'_t = \\
&= -\lambda^2 a^2 A e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin \lambda x; \\
u'_x &= \left(Ae^{-\lambda^2 a^2 t} \sin \lambda x \right)'_x = Ae^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda x \cdot (\lambda x)'_x = \\
&= \lambda A e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda x; \\
u''_{xx} &= \left(\lambda A e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda x \right)'_x = -\lambda^2 A e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin \lambda x.
\end{aligned}$$

Тоді, підставивши їх у дане рівняння, одержимо

$$a^2 u''_{xx} = a^2 \left(-\lambda^2 A e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin \lambda x \right) = -\lambda^2 a^2 A e^{-\lambda^2 a^2 t} \sin \lambda x = u'_t,$$

тобто u є розв'язком рівняння.

Введемо поняття диференціала II-го порядку в точці M_0 для функції $u = f(x, y)$, диференційовної в деякому околі точки M_0 і двічі неперервно диференційовної в точці M_0 . За цих умов у кожній точці вказаного околу існує перший диференціал du , який записується формулою

$$du(x, y, dx, dy) = du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Диференціалом II-го порядку функції $u = f(x, y)$ є вираз

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} (dy)^2,$$

а в точці M_0

$$d^2u(M_0) = u''_{xx}(M_0)(dx)^2 + 2u''_{xy}(M_0)dx dy + u''_{yy}(M_0)(dy)^2. \quad (17)$$

Для скорочення запису II-го і наступних диференціалів функції двох змінних використовують символ $d\cdot = \frac{\partial \cdot}{\partial x} dx + \frac{\partial \cdot}{\partial y} dy$, а за допомогою нього можемо записати

$$\begin{aligned} d^2u &= \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x} dx + \frac{\partial \cdot}{\partial y} dy \right)^2 u; \\ d^3u &= \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x} dx + \frac{\partial \cdot}{\partial y} dy \right)^3 u; \\ &\dots\dots\dots \\ d^nu &= \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x} dx + \frac{\partial \cdot}{\partial y} dy \right)^n u. \end{aligned} \quad (18)$$

Зокрема, наприклад, для $u = f(x, y)$ можемо розписати

$$\begin{aligned} d^3u &= \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} (dx)^3 + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} (dx)^2 dy + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} dx (dy)^2 + \\ &\quad + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} (dy)^3. \end{aligned} \quad (19)$$

Запис $(dx)^3 \equiv dx^3$.

Зауваження. Використовується формула піднесення суми до натурального степеня (біном Ньютона).

Якщо ж $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, то

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^2 u. \quad (20)$$

Приклад 13. Знайти диференціали до 3-го порядку для

$$z = x^3 - 5x^2y + \ln y.$$

Розв'язання. Бачимо, $z = z(x, y)$, $m = 2$. Знайдемо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^3 - 5x^2y + \ln y)'_x = 3x^2 - 10xy;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^3 - 5x^2y + \ln y)'_y = 0 - 5x^2 + \frac{1}{y}.$$

Отже, $dz = (3x^2 - 10xy) dx + \left(\frac{1}{y} - 5x^2 \right) dy$.

Перший диференціал знайдено.

Знайдемо диференціал II-го порядку

$$z''_{xx} = (3x^2 - 10xy)'_x = 6x - 10y;$$

$$z''_{yy} = \left(\frac{1}{y} - 5x^2 \right)'_y = -\frac{1}{y^2} + 0 = -\frac{1}{y^2};$$

$$z''_{xy} = (3x^2 - 10xy)'_y = -10x;$$

$$z''_{yx} = \left(\frac{1}{y} - 5x^2 \right)'_x = -10x.$$

Отже, $d^2z(x, y) = (6x - 10y)dx^2 - 2 \cdot 10x dx dy + \left(-\frac{1}{y^2} \right) dy^2 =$
 $(6x - 10y)dx^2 - 20x dx dy - \frac{1}{y^2} dy^2.$

Знайдемо частинні похідні 3-го порядку

$$z'''_{xxx} = (6x - 10y)'_x = 6;$$

$$z''_{yyy} = \left(-\frac{1}{y^2}\right)'_y = \frac{2}{y^3};$$

$$z'''_{x^2y} = (z''_{xx})'_y = (6x - 10y)'_y = -10;$$

$$z'''_{y^2x} = (z''_{yy})'_x = \left(-\frac{1}{y^2}\right)'_x = 0.$$

Згідно з формулою (19) $d^3z = 6dx^3 - 30dx^2dy + \frac{2}{y^3}dy^3$.

Тема 2. Екстремуми функції багатьох змінних

1. Поняття локального мінімуму і максимуму функції багатьох змінних. Необхідна умова екстремуму. Поняття стаціонарної точки. Достатні умови екстремуму функції багатьох змінних

Нехай $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ визначена на деякій множині $\mathcal{D}$ і $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ – точка цієї множини.

Точку $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ називають точкою локального максимуму (мінімуму) функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, якщо існує такий окіл точки $M_0 \in \mathcal{D}$, що для всіх точок M з цього околу, відмінних від M_0 , виконується нерівність $f(M_0) > f(M)$ ($f(M_0) < f(M)$). При цьому кажуть, що в точці M_0 досягається локальний максимум (мінімум) і записують $f_{\max} = f(M_0)$ ($f_{\min} = f(M_0)$).

Точки локального мінімуму і максимуму називають точками локального екстремуму і кажуть, що в точці досягається екстремум. Необхідною умовою локального екстремуму (*extr*) є умова: якщо $f(x_1, \dots, x_m)$ досягає локального екстремуму в точці M_0 , то її частинні похідні в цій точці дорівнюють нулеві, тобто

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (21)$$

або хоча б одна з них не існує.

Точки, у яких частинні похідні функції перетворюються в нуль, називаються стаціонарними точками.

Сформулюємо достатні умови екстремуму функції багатьох змінних. Нехай $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ – стаціонарна точка функції $u = f(M)$, яка має в околі точки M_0 неперервні частинні похідні другого порядку. Тоді

1) Якщо $d^2u(M_0, dx_1, \dots, dx_m)$ як функція від $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ має сталий знак при довільних $dx_1, \dots, dx_m$,

що одночасно $\neq 0$, то функція $u = f(M)$ має в точці M_0 максимум, якщо $d^2u(M_0, dx_1, dx_2, \dots, dx_m) < 0$ і мінімум при $d^2u(M_0, dx_1, dx_2, \dots, dx_m) > 0$.

2) Якщо $d^2u(M_0, dx_1, dx_2, \dots, dx_m)$ є знакозмінною функцією від $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$, тобто набуває як додатних так і від'ємних значень, то M_0 не є точкою екстремуму $f(M)$.

3) Якщо $d^2u(M_0, dx_1, dx_2, \dots, dx_m) \geq 0$ або $d^2u(M_0, dx_1, dx_2, \dots, dx_m) \leq 0$, причому існують такі $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$, які $\neq 0$ одночасно, для яких значення $d^2u(M_0, dx_1, dx_2, \dots, dx_m) = 0$, то $u = f(M)$ може мати, а може не мати екстремуму в точці M_0 . Кажуть, що виконується необхідна умова екстремуму в термінах диференціала II-го порядку.

Розглянемо випадок функції двох змінних. Нехай $M_0(x_0, y_0)$ – стаціонарна точка функції $u = f(x, y)$, тобто $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = 0$ і $\frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = 0$, а відповідні другі похідні $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)$. Утворимо визначник з цих значень

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2. \quad (22)$$

Тоді якщо

I) $\Delta > 0$, причому $A > 0$, то M_0 є точкою мінімуму;

II) $\Delta > 0$, причому $A < 0$, то M_0 є точкою максимуму;

III) $\Delta = 0$ – виконується необхідна умова (може бути або не бути);

IV) $\Delta < 0$, то в точці M_0 екстремуму немає.

Приклад 1. Знайти екстремум функції $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Розв'язання. Знайдемо

$$z'_x = (x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y)'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15;$$

$$z'_y = (x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y)'_y = 6xy - 12.$$

Прирівнявши до нуля z'_x та z'_y і розв'язавши систему рівнянь
$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \\ 6xy - 12 = 0, \end{cases}$$
 знайдемо точки можливого екстремуму (з необхідної умови):

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{y} \\ \frac{4}{y^2} + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{y} \\ y^4 - 5y^2 + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\begin{cases} x = \frac{2}{y} \\ y^2 = 4 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x = \frac{2}{y} \\ y^2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Остання система має такі розв'язки

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 2, \\ y_3 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -2, \\ y_4 = -1. \end{cases}$$

Отже, маємо 4 точки, підозрілі на екстремум: $M_1(1; 2)$, $M_2(-1; -2)$, $M_3(2; 1)$, $M_4(-2; -1)$. Знайдемо тепер другі похідні

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (3x^2 + 3y^2 - 15)'_x = 6x + 0 - 0 = 6x;$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (6xy - 12)'_y = 6x - 0 = 6x;$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (6xy - 12)'_x = 6y - 0 = 6y.$$

Знайдемо значення A , B , C для кожної точки

$$1) \quad z''_{xx}(M_1) = z''_{xx}(1; 2) = 6 \cdot 1 = 6 = A;$$

$$z''_{yy}(M_1) = z''_{yy}(1; 2) = 6 \cdot 1 = 6 = C;$$

$$z''_{xy}(M_1) = z''_{xy}(1; 2) = 6 \cdot 2 = 12 = B.$$

$$\text{Утворимо величину } \Delta = AC - B^2 = \begin{vmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} < 0. \text{ Згідно з IV)}$$

екстремуму немає в $M_1(1; 2)$.

$$2) z''_{xx}(M_2) = z''_{xx}(-1; -2) = -6 = A;$$

$$z''_{yy}(M_2) = z''_{yy}(-1; -2) = -6 = C;$$

$$z''_{xy}(M_2) = z''_{xy}(-1; -2) = 6y = -12 = B.$$

$\Delta = AC - B^2 = (-6) \cdot (-6) - (-12)^2 < 0$. Згідно з IV) екстремуму немає в $M_2(-1; -2)$.

$$3) z''_{xx}(M_3) = z''_{xx}(2; 1) = 6 \cdot 2 = 12 = A;$$

$$z''_{yy}(M_3) = z''_{yy}(2; 1) = 6 \cdot 2 = 12 = C;$$

$$z''_{xy}(M_3) = z''_{xy}(2; 1) = 6 \cdot 1 = 6 = B.$$

$$\Delta = AC - B^2 = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 36 > 0, \text{ причому } A = 12 > 0$$

$\Rightarrow$ в точці $M_3(2; 1)$ згідно з I) досягається локальний мінімум.

$$4) z''_{xx}(M_4) = z''_{xx}(-2; -1) = 6 \cdot (-2) = -12 = A;$$

$$z''_{yy}(M_4) = z''_{yy}(-2; -1) = 6 \cdot (-2) = -12 = C;$$

$$z''_{xy}(M_4) = z''_{xy}(-2; -1) = 6 \cdot (-1) = -6 = B.$$

Розглянемо $\Delta = AC - B^2 = \begin{vmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 144 - 36 > 0$, але $A = -120$. Згідно з II) в точці $M_4(-2; -1)$ досягається локальний максимум.

$$\text{Знайдемо } z_{\min} = z(M_3) = -28, z_{\max} = z(M_4) = 28.$$

2. Умовний екстремум з обмеженнями, заданими рівностями

Нехай потрібно знайти локальний екстремум функції

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (23)$$

за умов, що змінні $x_1, x_2, \dots, x_m$ задовольняють рівняння

[illegible]

Задача (23), (24) на умовний екстремум зводиться до дослідження на екстремум безумовний нової функції – функції Лагранжа, яка утворюється так

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x_1, x_2, \dots, x_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = & f(x_1, x_2, \dots, x_m) + \\ & + \lambda_1 \varphi_1(x_1, \dots, x_m) + \lambda_2 \varphi_2(x_1, \dots, x_m) + \dots + \\ & + \lambda_k \varphi_k(x_1, \dots, x_m), \end{aligned} \quad (25)$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ – невідомі множники Лагранжа, крім того, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, k$.

Будемо досліджувати функцію $\mathcal{L}$ згідно з описаним раніше. Бачимо, що $\mathcal{L}$ залежить від $x_1, x_2, \dots, x_m; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ – від $m+k$ невідомих. Випишемо необхідну умову, вона має вигляд

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_l} = 0, & l = 1, 2, \dots, m; \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = 0, & j = 1, 2, \dots, k. \end{cases} \quad (26)$$

Система (26) містить $m+k$ рівнянь та $m+k$ невідомих. Розв'язавши її, знайдемо набір чисел $x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0$; $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_k^0$, де $x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0$ – координати точки, в якій можливий умовний екстремум.

Перевірити виконання достатніх умов означає визначити знак другого диференціала функції Лагранжа $d^2\mathcal{L}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0; \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_k^0; dx_1, dx_2, \dots, dx_m)$ для кожного отриманого розв'язку системи (26) за умови, що $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ задовольняють рівняння

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi_1 (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_1 (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \\ \quad + \frac{\partial \varphi_1 (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_m} dx_m = 0; \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial \varphi_k (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_k (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \\ \quad + \frac{\partial \varphi_k (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_m} dx_m = 0 \end{array} \right. \quad (27)$$

при $dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_m^2 \neq 0$ ($dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ одновременно не перетворяются в нуль).

Висновок. Функція $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ має умовний максимум в точці $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$, якщо для довільних значень $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$, які задовольняють умови (27) і одночасно $\neq 0$, виконується нерівність $d^2\mathcal{L}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0; \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_k^0; dx_1, dx_2, \dots, dx_m) < 0$ і умовний мінімум, якщо за цих умов $d^2\mathcal{L}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0; \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_k^0; dx_1, dx_2, \dots, dx_m) > 0$.

Зауваження. У випадку функції двох змінних $z = f(x, y)$ з рівнянням $\varphi(x, y) = 0$ функція Лагранжа має вигляд

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y). \quad (28)$$

Система для знаходження стаціонарної точки містить три рівняння:

$$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = 0, \\ \mathcal{L}'_y = 0, \\ \mathcal{L}'_\lambda \equiv \varphi(x, y) = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Нехай вдалося розв'язати систему (29) і знайдено стаціонарну точку $M_0(x_0, y_0, \lambda_0)$ для функції $\mathcal{L}$ та

$$\Delta \equiv - \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial x}(M_0) & \frac{\partial \varphi}{\partial y}(M_0) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(M_0) & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(M_0) & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y}(M_0) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y}(M_0) & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2}(M_0) \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta < 0$, то $z = f(x, y)$ досягає в точці $M_0^*(x_0, y_0)$ умовний максимум, якщо $\Delta > 0$ – умовний мінімум.

Приклад 2. Знайти екстремум функції $z = 2x + y$ за умови $x^2 + y^2 = 1$.

Розв'язання. Утворимо функцію Лагранжа

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda_0) = 2x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Випишемо систему вигляду (29) для знаходження стаціонарної точки

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2 + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 1 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \quad (30)$$

Виразимо з першого рівняння x , а з другого y через λ : $x = -\frac{1}{\lambda}$, $y = -\frac{1}{2\lambda}$. Підставимо їх у третє рівняння системи

$$\left(-\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow \frac{4+1}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow$$

$$4\lambda^2 = 5 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Знайдемо тепер при $\lambda_1^0 = \frac{\sqrt{5}}{2}$ значення $x_1^0 = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $y_1^0 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, а

при $\lambda_2^0 = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ будемо мати $x_2^0 = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $y_2^0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Отже, маємо дві стаціонарні точки $M_0^1 \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{5}}{2} \right)$ і $M_0^2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{\sqrt{5}}{2} \right)$.

Знайдемо тепер $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} = 2\lambda$; $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} = 2\lambda$; $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} = 0$ і випишемо другий диференціал для функції Лагранжа $\mathcal{L}$

$$d^2 \mathcal{L} = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2 = 2\lambda (dx^2 + dy^2).$$

Бачимо, що знак $d^2 \mathcal{L}$ залежить від знака λ :

$$d^2 \mathcal{L} (M_0^1) = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} (dx^2 + dy^2) > 0.$$

Отже, у точці M_0^1 досягається мінімум. У точці M_0^2 маємо

$$d^2 \mathcal{L} (M_0^2) = -2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} (dx^2 + dy^2) < 0.$$

З цього випливає, що в точці M_0^2 досягається максимум.

Отже,

$$z_{\min} = 2 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \right) - \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{5}{\sqrt{5}} = -\sqrt{5};$$

$$z_{\max} = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Проведемо дослідження по-іншому.

Нехай обмеження $x^2 + y^2 - 1 = \varphi(x, y)$, тоді $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y$.

Для точки $M_0^1 \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{5}}{2} \right)$ маємо

$$\frac{\partial \varphi (M_0^1)}{\partial x} = -\frac{4}{\sqrt{5}}; \quad \frac{\partial \varphi (M_0^1)}{\partial y} = -\frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(M_0^1)}{\partial x^2} = \sqrt{5}; \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}(M_0^1)}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 \mathcal{L}(M_0^1)}{\partial y^2} = \sqrt{5};$$

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & -\frac{4}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} & \sqrt{5} & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \sqrt{5} \end{vmatrix} = \frac{20\sqrt{5}}{5} > 0.$$

Отже, функція Лагранжа $\mathcal{L}$ досягає мінімуму в точці $M_0^1 \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{5}}{2} \right)$.

Аналогічно для точки $M_0^2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{\sqrt{5}}{2} \right)$

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \frac{4}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{4}{\sqrt{5}} & -\sqrt{5} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\sqrt{5} \end{vmatrix} = -\frac{20\sqrt{5}}{5} < 0,$$

а отже, точка $M_0^2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{\sqrt{5}}{2} \right)$ є точкою максимуму функції Лагранжа.

Тоді точки $M_0^{1*} \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$ та $M_0^{2*} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$ є точками умовного мінімуму та максимуму функції z .

Приклад 3. Знайти екстремум функції $f = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3$, якщо

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв'язання. З умов зв'язку, які задані рівностями, зручно виразити x_1 та x_3 через x_2 : $x_1 = 2 - x_2$; $x_3 = 2 - x_2$. Підставимо у

функцію f і отримаємо

$$\bar{f} = (2 - x_2) \cdot x_2 + x_2 \cdot (2 - x_2) = 2x_2 - x_2^2 + 2x_2 - x_2^2 = 4x_2 - 2x_2^2 \rightarrow \text{extr.}$$

Дослідимо $\bar{f}$ на безумовний extr як функцію однієї змінної x_2

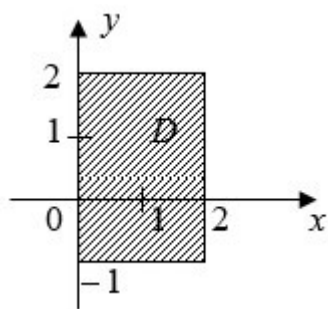
$$\bar{f}'(x_2) = -4x_2 + 4 = 0 \Rightarrow x_2 = 1.$$

Знайдемо $\bar{f}''(x_2) = -4 < 0$, з чого випливає, що в точці $x_2 = 1$ функція $\bar{f}(x_2)$ досягає максимуму.

Повернемось до f . Знайдемо $x_1 = 2 - 1 = 1$; $x_3 = 2 - 1 = 1$.

Отже, точка $M_0(1; 1; 1)$ є точкою умовного максимуму функції f . Її максимальне значення $f_{\max} = 1 + 1 = 2$.

Використаний метод називається методом виключення змінних.



Приклад 4. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в області $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2; -1 \leq y \leq 2\}$.

Розглядається задача на екстремум у замкнутій області.

Розв'язання. 1) Знайдемо спочатку $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ та стаціонарні точки

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

Тому є дві стаціонарні точки $O(0; 0)$ та $M(1; 1)$, у яких $z(O) = 0$; $z(M) = -1$.

2) Знайдемо найбільше і найменше значення функції на межі області D .

При $x = 0$ отримаємо $z = y^3$, яка є зростаючою при $y \in [-1; 2]$, а тому достатньо знайти її значення на кінцях $y = -1$ та $y = 2$. Маємо $z(-1) = (-1)^3 = -1$; $z(2) = 2^3 = 8$.

При $x = 2$ маємо функцію $z = y^3 - 6y + 8$. Знайдемо її найбільше і найменше значення при $y \in [-1; 2]$. Для цього знайдемо $z' = 3y^2 - 6$. Бачимо, що $3y^2 - 6 = 0$ або $y^2 = 2$; $y = \pm\sqrt{2}$. Значення $y_1 = -\sqrt{2} \notin [-1; 2]$. Тому будемо розглядати тільки $y_2 = \sqrt{2}$. Знайдемо $z(\sqrt{2}) = 8 - 4\sqrt{2}$. Обчислимо значення на кінцях $z(-1) = 13$; $z(2) = 4$.

При $y = -1$ маємо функцію $z = x^3 + 3x - 1$, $x \in [0, 2]$. Для $z' = 3x^2 + 3$, крім того, рівняння $x^2 = -1$ не має дійсних розв'язків, тому $z' > 0$, а отже, функція всюди зростає. Знайдемо значення на кінцях: $z(0) = -1$; $z(2) = 13$.

При $y = 2$ маємо $z = x^3 - 6x + 8$, $x \in [0, 2]$. Її похідна $z' = 3x^2 - 6$, а в точках $x = \pm\sqrt{2}$ перетворюється в нуль. Бачимо, що $-\sqrt{2} \notin [0; 2]$. Тому введемо в розгляд тільки $x = \sqrt{2}$. Обчислимо $z(\sqrt{2}) = 8 - 4\sqrt{2}$, а на кінцях $z(0) = 8$; $z(2) = 4$.

Висновок: найбільшого значення функція досягає в точці $A(2; -1)$ і $z_{\text{найб.}} = z(2; -1) = 13$, а найменше в точці $M(1; 1)$ і $C(0; -1)$, $z_{\text{найм.}} = z(1; 1) = z(0; -1) = -1$.

Висновок. При дослідженні функції багатьох змінних на найбільше та найменше значення на деякій замкнутій множині можна дотримуватись такого алгоритму:

- 1) знайти область визначення функції або врахувати обмеження на змінні в задачі;
- 2) знайти внутрішні стаціонарні точки;
- 3) дослідити функцію на межі області, розв'язуючи задачу на екстремум для меншої кількості змінних;
- 4) знайти значення функції в усіх отриманих випадках та порівняти їх. Найбільше серед них буде найбільшим значенням функції, а найменше – найменшим значенням функції на заданій за-

мкнутій множині.

3. Похідна за напрямком. Градієнт

У m -вимірному просторі напрям задається m -компонентним вектором

$$\vec{l} = \cos \alpha_1 \cdot \vec{i}_1 + \cos \alpha_2 \cdot \vec{i}_2 + \dots + \cos \alpha_m \cdot \vec{i}_m, \quad (31)$$

де $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \dots, \cos \alpha_m$ – напрямні косинуси цього вектора $\left(\sum_{k=1}^m \cos^2 \alpha_k = 1 \right)$, а $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \dots, \vec{i}_m$ – орти осей координат $\left(|\vec{i}_k| = 1 \right)$.

Нехай $u = u(x_1, x_2, \dots, x_m)$ визначена в околі точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$. Розглянемо її приріст в точці M_0 за напрямком вектора $\vec{l}$: $\Delta_{\vec{l}} u(M_0) = u(M) - u(M_0)$, де $\vec{l}$ і $\overrightarrow{M_0 M}$ колінеарні.

Приростом незалежної змінної за напрямком вектора $\vec{l}$ назвемо число

$$\Delta M = \begin{cases} |M_0 M|, & \overrightarrow{M_0 M} = a\vec{l}, a > 0, \\ -|M_0 M|, & \overrightarrow{M_0 M} = a\vec{l}, a < 0. \end{cases}$$

Похідною функції u в точці M_0 за напрямком $\vec{l}$ називається число

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{l}} \equiv \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{\Delta_{\vec{l}} u(M_0)}{\Delta M}. \quad (32)$$

Зауважимо, що якщо вектор $\vec{l}$ збігається з напрямком якоїсь з координатних осей, то похідна за напрямком збігається з відповідною частинною похідною функції в точці.

Для функції двох змінних $z = f(x, y)$, якщо $\vec{l} = \vec{i}$, то $\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}$, а якщо $\vec{l} = \vec{j}$, то $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}$.

Похідна за напрямком $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{l}}$ характеризує зміну функції у напрямку вектора $\vec{l}$. У цьому полягає механічний зміст похідної за напрямком.

Якщо ж поверхню $z = f(x, y)$ перетнути площиною, що проходить через M_0 паралельно до осі OZ і вектора $\vec{l}$, то в результаті дістанемо криву, кутовий коефіцієнт дотичної до якої в точці $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ дорівнює $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{l}}$. У цьому геометричний зміст похідної за напрямком.

Якщо функція u диференційовна в точці M_0 , то для довільного напрямку $\vec{l} = \cos \alpha_1 \cdot \vec{i}_1 + \cos \alpha_2 \cdot \vec{i}_2 + \dots + \cos \alpha_m \cdot \vec{i}_m$ існує похідна за напрямком $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{l}}$ і є правильною рівність

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x_1} \cos \alpha_1 + \frac{\partial u(M_0)}{\partial x_2} \cos \alpha_2 + \dots + \frac{\partial u(M_0)}{\partial x_m} \cos \alpha_m. \quad (33)$$

Вектор з координатами $\left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u(M_0)}{\partial x_m} \right)$ називається градієнтом функції і характеризує напрямок її найшвидшого зростання.

Він позначається символом $\overrightarrow{\text{grad} u}$ і дорівнює

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad} u}(M_0) &= \frac{\partial u(M_0)}{\partial x_1} \vec{i}_1 + \frac{\partial u(M_0)}{\partial x_2} \vec{i}_2 + \dots + \frac{\partial u(M_0)}{\partial x_m} \vec{i}_m = \\ &= \left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u(M_0)}{\partial x_m} \right). \end{aligned} \quad (34)$$

З рівності (33) випливає, що похідна за напрямком $\vec{l}$ в точці M_0 дорівнює скалярному добутку векторів $\overrightarrow{\text{grad} u}$ в точці M_0 та $\vec{l}$

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{l}} = \left(\overrightarrow{\text{grad} u}(M_0) \cdot \vec{l} \right). \quad (35)$$

Приклад 5. Знайти похідну функції $z = 2x^2 - 3y^2$ в точці $M_0(1; 0)$ у напрямку, який утворює з віссю Ox кут $\frac{2}{3}\pi$.

Розв'язання. Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$: $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -6y$. Обчислимо їх в точці $M_0(1; 0)$: $\frac{\partial z(M_0)}{\partial x} = 4$; $\frac{\partial z(M_0)}{\partial y} = -6 \cdot 0 = 0$. З умови бачимо: $\cos \alpha = \cos \frac{2\pi}{3} = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, $\cos \beta = \cos (120^\circ - 90^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, тому згідно з (33) маємо

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x_1} \cos \alpha + \frac{\partial z(M_0)}{\partial x_2} \cos \beta = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -2.$$

Від'ємне значення функції в точці M_0 вказує, що функція спадає у цьому напрямку.

Приклад 6. Знайти величину і напрямок градієнта функції $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точці $M_0(2; -2; 1)$.

Розв'язання. Знайдемо $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$; $\frac{\partial u}{\partial z} = 2z$. Знайдемо їх в точці M_0 : $u'_x(M_0) = 2 \cdot 2 = 4$; $u'_y(M_0) = 2 \cdot (-2) = -4$; $u'_z(M_0) = 2 \cdot 1 = 2$.

Отже, $\overrightarrow{\text{grad}} u(M_0) = \left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \right) = (4; -4; 2)$, а $\left| \overrightarrow{\text{grad}} u(M_0) \right| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{36} = 6$. Обчислимо напрямок градієнта в точці $M_0(2; -2; 1)$. Маємо $\cos \alpha = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)}{\left| \overrightarrow{\text{grad}} u(M_0) \right|} =$

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}; \cos \beta = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}; \cos \gamma = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Питання для самоконтролю

1. Введіть поняття m -вимірного евклідового простору, відстані між двома точками, відкритої, замкнутої та зв'язної множин.
2. Введіть поняття функції багатьох змінних (ФБЗ), дайте означення послідовності, границі ФБЗ.
3. Що називають областю визначення функції двох змінних і як вона зображується геометрично?
4. У чому полягає відмінність між поняттям границі функції однієї змінної та функції багатьох змінних?
5. Сформулюйте означення неперервності ФБЗ в точці. Вкажіть властивості неперервних ФБЗ.
6. Дайте означення частинних похідних та повного диференціала ФБЗ.
7. Сформулюйте означення диференційовності ФБЗ в точці. Яка умова є необхідною для цього?
8. Чи завжди існування частинних похідних гарантує диференційовність функції?
9. Що таке повний диференціал і яка його головна властивість у наближених обчисленнях?
10. Як обчислити похідну складеної функції $z = f(u, v)$, де u та v залежать від x та y ?
11. За якою формулою обчислюються похідні неявно заданої функції?
12. Що характеризує похідна за напрямом і як вона пов'язана з частинними похідними функції?
13. Дайте означення та властивості вектора-градієнта. Градієнт функції в точці.
14. Як обчислити частинні похідні ФБЗ другого та вище порядків?
15. Як записуються диференціали другого порядку та вищого порядку для функції двох змінних? Чи мають вони властивість

інваріантності?

16. Безумовний екстремум ФБЗ. Дайте означення локального мінімуму та максимуму в точці. Сформулюйте необхідну умову існування екстремуму ФБЗ. Що таке стаціонарні точки?

17. Запишіть достатні умови локального екстремуму для функцій двох і більше змінних через головні мінори матриці 2-го диференціала.

18. Що таке умовний екстремум і чим він відрізняється від локального екстремуму? Опишіть алгоритм його знаходження за допомогою функції Лагранжа в задачі з обмеженнями, заданими рівностями.

19. Сформулюйте алгоритм методу виключення змінних для знаходження умовного екстремуму ФБЗ з обмеженнями-рівностями.

20. Як знайти найбільше та найменше значення функції в замкнутій області?

Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Знайти і зобразити область визначення функції двох змінних.

1.1. $u = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$.

1.2. $u = \ln(-x - y)$.

1.3. $u = x + \sqrt{x^2 - y^2}$.

1.4. $u = \arcsin(x + y)$.

1.5. $u = x \sin y / (x^2 - y^2)$.

1.6. $u = \sqrt{x - \sqrt{y}}$.

1.7. $u = \ln x - \ln(\sin y)$.

1.8. $u = \frac{1}{\sqrt{x-3}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$.

1.9. $u = \ln(x + \sqrt{y})$.

1.10. $u = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$.

1.11. $u = \arcsin \frac{y-1}{x}$.

1.12. $u = \ln(y^2 - 4x + 8)$.

1.13. $u = \operatorname{ctg} \pi(x + y)$.

1.14. $u = \sqrt{1 - (4x^2 + 9y^2)}$.

1.15. $u = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{xy}$.

1.16. $u = \sqrt{\lg(x^2 - y + 3)}$.

1.17. $u = \sqrt{4 - 2x^2 - 4y^2}$.

1.18. $u = \ln x / (x - y)$.

1.19. $u = \sqrt{25x^2 + 9y^2 - 36}$.

1.20. $u = \arccos \frac{x}{x+y}$.

1.21. $u = \operatorname{arctg} xy$.

1.22. $u = \ln \frac{y}{x}$.

1.23. $u = 1 / \sqrt{1 - (x^2 + 2y^2)}$.

1.24. $u = \sqrt{\sin(xy)}$.

1.25. $u = \ln x - \frac{\ln y}{x+y}$.

1.26. $u = \arcsin \frac{x}{y}$.

1.27. $u = \sqrt{\cos(x+y)}$.

1.28. $u = \ln(y - x^2 + 4)$.

1.29. $u = 1 / \sqrt[3]{xy + x^3}$.

1.30. $u = x / \sqrt{\ln(xy)}$.

Задача 2. Знайти частинні похідні першого порядку заданої функції.

2.1. $u = \ln(y^3 + e^{-x})$.

2.2. $u = \operatorname{arctg}(y^2 + x^2)$.

2.3. $u = \sin \sqrt{x/y^3}$.

2.4. $u = \operatorname{ctg} \sqrt{xy^3}$.

2.5. $u = \arcsin \sqrt{xy}$.

2.6. $u = \operatorname{tg}(y^2 + x^3)$.

2.7. $u = \cos(x^3 - 2xy)$.

2.8. $u = e^{-x^2+y^2}$.

2.9. $u = \lg(3x^2 + y^4)$.

2.10. $u = \arccos(y/x)$.

2.11. $u = \operatorname{arcctg}(xy^2)$.

2.12. $u = \cos \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$2.13. u = \sin \sqrt{x^3 + 2y^2}.$$

$$2.15. u = \operatorname{ctg}(4x - y^2).$$

$$2.17. u = \ln(\sqrt{xy} - 1).$$

$$2.19. u = \operatorname{arctg}(y^2/x^3).$$

$$2.21. u = \sin \frac{x+y}{x-y}.$$

$$2.23. u = \ln(x^2 + 3y^4).$$

$$2.25. u = e^{-\sqrt{6x-3y}}.$$

$$2.27. u = \operatorname{arcctg} \frac{y^2}{x}.$$

$$2.29. u = \sin \sqrt{\frac{y}{x+y}}.$$

$$2.14. u = \operatorname{tg}(x^3 y^4).$$

$$2.16. u = e^{2x^2+5y^2}.$$

$$2.18. u = \arcsin(3xy^3).$$

$$2.20. u = \cos(x - \sqrt{x^2 y}).$$

$$2.22. u = \operatorname{tg} \frac{4x-y^2}{y}.$$

$$2.24. u = \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{x}{x-y}}.$$

$$2.26. u = \arccos(x + y^3).$$

$$2.28. u = \cos \frac{x-y}{x+y}.$$

$$2.30. u = e^{-(2x^3+3y^2)}.$$

Задача 3. Знайти повний диференціал функції.

$$3.1. u = 0,5 \lg(x^3 + y^{-2}).$$

$$3.2. u = x^{y+5}.$$

$$3.3. u = \sin(xy).$$

$$3.4. u = e^{x^2+y^2}.$$

$$3.5. u = x \cos y + y^2 \sin x.$$

$$3.6. u = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}.$$

$$3.7. u = x/\sqrt{x^3 + y^2}.$$

$$3.8. u = \frac{3^{y+x}}{x+y}.$$

$$3.9. u = \ln(\sin(x+y)).$$

$$3.10. u = \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

$$3.11. u = 3x^2 y + 2x - \sqrt{xy} \sin y.$$

$$3.12. u = x^y + 5xy.$$

$$3.13. u = x \cos y + y \operatorname{tg} x.$$

$$3.14. u = \frac{x^2}{1+y} - \sqrt{x} \ln y.$$

$$3.15. u = \frac{\sin y}{x^2 y} - xy.$$

$$3.16. u = 5y\sqrt{x} - x \ln y + 5.$$

$$3.17. u = e^{2x^3-3y}.$$

$$3.18. u = x \arcsin y + 7x - 5y.$$

$$3.19. u = 2y^2 \cos x + \frac{x}{y}.$$

$$3.20. u = xy - \lg x + 7y.$$

$$3.21. u = x 2^{x+y^2} - 5y.$$

$$3.22. u = \log_2 x - x \lg y + 7y^2.$$

$$3.23. u = y^3 \arccos x + \frac{\sin x}{4y}.$$

$$3.24. u = x^2 y + 6x^5 3^{xy} - 5y.$$

$$3.25. u = \frac{y^2}{2x} + \arcsin y - x \ln y.$$

$$3.26. u = \sqrt[3]{x} \sin y + \frac{2x}{y}.$$

$$3.27. u = \arccos \frac{x+y}{y}.$$

$$3.28. u = x5^y - x^2y^3 + 5.$$

$$3.29. u = x^{2y+4} + 5y\sqrt{x}.$$

$$3.30. u = 8x^4y + \sin\sqrt{xy}.$$

Задача 4. Знайти похідну складеної функції $u = u(x, y)$, де $x = x(t), y = y(t)$.

$$4.1. u = e^{x-2y}, x = \sin t, y = t^3.$$

$$4.2. u = \ln(e^x + e^{-y}), x = t^2, y = t^3.$$

$$4.3. u = y^x, x = \ln(t-1), y = e^{t/2}.$$

$$4.4. u = e^{y-2x+2}, x = \sin t, y = \cos t.$$

$$4.5. u = x^2e^y, x = \cos t, y = \sin t.$$

$$4.6. u = \ln(e^x + e^y), x = t^2, y = t^3.$$

$$4.7. u = x^y, x = e^t, y = \ln t.$$

$$4.8. u = e^{y-2x}, x = \sin t, y = t^3.$$

$$4.9. u = x^2e^{-y}, x = \sin t, y = \sin^2 t.$$

$$4.10. u = \ln(e^{-x} + e^y), x = t^2, y = t^3.$$

$$4.11. u = e^{y-2x-1}, x = \cos t, y = \sin t.$$

$$4.12. u = \arcsin \frac{x}{y}, x = \sin t, y = \cos t.$$

$$4.13. u = \arccos \frac{2x}{y}, x = \sin t, y = \cos t.$$

$$4.14. u = \frac{x^2}{y+1}, x = 1-2t, y = \arctg t.$$

$$4.15. u = \frac{x}{y}, x = e^t, y = 2 - e^{2t}.$$

$$4.16. u = \ln(e^{-x} + e^{-y}), x = t^2, y = \frac{1}{3}t^3.$$

$$4.17. u = \sqrt{x + y^2 + 3}, x = \ln t, y = t^2.$$

$$4.18. u = \arcsin \frac{x^2}{y}, x = \sin t, y = \cos t.$$

$$4.19. u = \frac{y^2}{x}, x = 1-2t, y = 1 + \arctg t.$$

$$4.20. u = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}, x = \sin t, y = \cos t.$$

$$4.21. u = \sqrt{y + x^2 + 3}, x = \ln t, y = t^2.$$

$$4.22. u = \arcsin \frac{x}{2y}, \quad x = \sin t, y = \cos t.$$

$$4.23. u = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}, \quad x = \sin 2t, y = tg^2 t.$$

$$4.24. u = \sqrt{y + x + 3}, \quad x = \ln t, y = t^2.$$

$$4.25. u = \frac{y}{x}, \quad x = e^t, y = 1 - e^{2t}.$$

$$4.26. u = \arcsin \frac{2x}{y}, \quad x = \sin t, y = \cos t.$$

$$4.27. u = \ln(e^{2x} + e^y), \quad x = t^2, y = t^4.$$

$$4.28. u = \arctg(x + y), \quad x = t^2 + 2, y = 4 - t^2.$$

$$4.29. u = \sqrt{x^2 + y^2 + 3}, \quad x = \ln t, y = t^3.$$

$$4.30. u = \arctg(xy), \quad x = t + 3, y = e^t.$$

Задача 5. Знайти частинні похідні функції $z = z(x, y)$, заданої неявно рівнянням.

$$5.1. x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4.$$

$$5.2. x^2 + y^2 + z^2 - xy = 2.$$

$$5.3. 3x - 2y + z^2 = xz + 5.$$

$$5.4. e^z + x + 2y + z = 4.$$

$$5.5. x^2 + y^2 + z^2 - z = 4.$$

$$5.6. z^3 + 3xyz + 3y = 7.$$

$$5.7. \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 3/2.$$

$$5.8. e^{z-1} = \cos x \cos y + 1.$$

$$5.9. x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0.$$

$$5.10. xy = z^2 - 1.$$

$$5.11. x^2 - 2y^2 + 3z^2 - zy + y = 2.$$

$$5.12. x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 5.$$

$$5.13. x \cos y + y \cos z + z \cos x = \pi/2.$$

$$5.14. 3x^2y^2 + 2xyz^2 - 2x^3z + 4y^3z = 4.$$

$$5.15. x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z + 2 = 0.$$

$$5.16. x + y + z + 2 = xyz.$$

$$5.17. x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 2.$$

$$5.18. e^z - xyz - x + 1 = 0.$$

$$5.19. x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y = 15.$$

$$5.20. x^2 - 2xy - 3y^2 + 6x - 2y + z^2 - 8z + 20 = 0.$$

$$5.21. x^2 + y^2 + z^2 = y - z + 3.$$

$$5.22. x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z = 0.$$

$$5.23. x^2 - y^2 - z^2 + 6z + 2x - 4y + 12 = 0.$$

$$5.24. \sqrt{x^2 + y^2} + z^2 - 3z = 3.$$

$$5.25. x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 9.$$

$$5.26. x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 7.$$

$$5.27. x^3 + 3xyz - z^3 = 27.$$

$$5.28. \ln z = x + 2y - z + \ln 3.$$

$$5.29. 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 6 = 0.$$

$$5.30. z^2 = xy - z + x^2 - 4.$$

Задача 6. Знайти всі частинні похідні другого порядку функції $u = u(x, y)$ та переконатися, що $u''_{xy} = u''_{yx}$.

$$6.1. z = e^{x^2 - y^2}.$$

$$6.2. z = tg \frac{x}{y}.$$

$$6.3. z = ctg(x + y).$$

$$6.4. z = \cos(x^2 y).$$

$$6.5. z = \sin(x^2 - y).$$

$$6.6. z = \arctg(x + y).$$

$$6.7. z = \arcsin(x - y).$$

$$6.8. z = \arccos(2x + y).$$

$$6.9. z = \text{arcctg}(x - 3y).$$

$$6.10. z = \ln(3x^2 - 2y^2).$$

$$6.11. z = e^{2x^2 + y^2}.$$

$$6.12. z = ctg \frac{y}{x},$$

$$6.13. z = tg \sqrt{xy}.$$

$$6.14. z = \cos(x^2 y^2 - 5).$$

$$6.15. z = \sin \sqrt{x^3 y}.$$

$$6.16. z = 2 \arcsin(x - 2y).$$

$$6.17. z = \arccos(4x - y).$$

$$6.18. z = \arctg(5x + 2y).$$

$$6.19. z = \text{arcctg}(2x - y).$$

$$6.20. z = \ln(4x^2 + 5y^2).$$

$$6.21. z = e^{\sqrt{y+x}}.$$

$$6.22. z = \arcsin(4x + y).$$

$$6.23. z = \arccos(x - 5y).$$

$$6.24. z = \sin \sqrt{xy}.$$

$$6.25. z = \cos(3x^2 - y^3).$$

$$6.26. z = \arctg(3x + y).$$

$$6.27. z = \ln(5x^2 - 3y^4).$$

$$6.28. z = \operatorname{arctg}(x - 4y).$$

$$6.29. z = \ln(3xy - 4).$$

$$6.30. z = \operatorname{tg}(x^2y).$$

Задача 7. Перевірити, чи функція u задовольняє дане рівняння.

$$7.1. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$u = e^x(x \cos y - y \sin y).$$

$$7.2. y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (1 + y \ln x) \frac{\partial u}{\partial x};$$

$$u = x^y.$$

$$7.3. a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$u = \sin^2(x - ay).$$

$$7.4. \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$u = e^{x/y}.$$

$$7.5. \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - x = u;$$

$$u = x \ln \frac{y}{x}.$$

$$7.6. \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 0;$$

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$7.7. x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2xyu = 0;$$

$$u = e^{xy}.$$

$$7.8. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$u = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}.$$

$$7.9. x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$u = \arcsin \frac{x}{x+y}.$$

$$7.10. \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y+x}{u};$$

$$u = \sqrt{2xy + y^2}.$$

$$7.11. x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$$

$$u = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

$$7.12. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

$$7.13. 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$u = e^{-\cos(x+3y)}.$$

$$7.14. 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$u = e^{-(x+3y)} \sin(x + 3y).$$

$$7.15. x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0;$$

$$u = \frac{2x+3y}{x^2+y^2}.$$

$$7.16. x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2u;$$

$$u = (x^2 + y^2) \operatorname{tg} \frac{x}{y}.$$

$$7.17. x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u;$$

$$u = \frac{xy}{x+y}.$$

$$7.18. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x};$$

$$u = \ln(\operatorname{tg}(x + y)).$$

- 7.19. $2x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$ $u = e^{x/y^2}.$
- 7.20. $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 1;$ $u = \ln(e^y + e^x).$
- 7.21. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2;$ $u = \ln(x^2 + xy + y^2).$
- 7.22. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = xy + u;$ $u = xy + xe^{y/x}.$
- 7.23. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 3(x^3 - y^3);$ $u = \ln \frac{x}{y} + x^3 - y^3.$
- 7.24. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$ $u = \ln(x^2 - y^2).$
- 7.25. $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u;$ $u = x \ln \frac{y}{x}.$
- 7.26. $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - xy \frac{\partial u}{\partial y} + y^2 = 0;$ $u = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy).$
- 7.27. $\frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{y^2};$ $u = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}.$
- 7.28. $2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0;$ $u = 2 \cos^2(y - \frac{x}{2}).$
- 7.29. $\frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{y^2};$ $u = yx^2 - y^3.$
- 7.30. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$ $u = x \sin(x + y).$

Задача 8. Знайти локальні екстремуми функції двох змінних $u = u(x, y)$.

- 8.1. $u = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y + 4.$
- 8.2. $u = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$
- 8.3. $u = 2xy - 4x - 2y + 4.$
- 8.4. $u = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y + 1.$
- 8.5. $u = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$
- 8.6. $u = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$
- 8.7. $u = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y.$
- 8.8. $u = x^2 - xy + y^2 - x - y + 2.$
- 8.9. $u = x^2 - xy + y^2 + x + y - 8.$
- 8.10. $u = xy(6 - x - y).$
- 8.11. $u = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$

- 8.12. $u = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.
- 8.13. $u = x^3y^2(6 - x - y)$, $x > 0$, $y > 0$.
- 8.14. $u = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.
- 8.15. $u = (x - 1)^2 - 2y^2$.
- 8.16. $u = x^2 - 4xy - y^2$.
- 8.17. $u = y^2 - 2xy + 6x$.
- 8.18. $u = x^2 + 5x - y^2 + 4y$.
- 8.19. $u = 2x^2 + 6xy + 5y^2 - x + 4y - 5$.
- 8.20. $u = x^3 - 9xy + y^3 + 27$.
- 8.21. $u = -6x^2 + xy + 5y^2$.
- 8.22. $u = x^2 + 2xy - x + 5y$.
- 8.23. $u = 3x^2 - xy + 2y^2 + 2$.
- 8.24. $u = 2x^2 + y^2 + x - 3y$.
- 8.25. $u = 2x^2 - xy + 2y^2 - 9x + 6y + 3$.
- 8.26. $u = x^2 - xy + 2y^2 - 3x + 5y + 8$.
- 8.27. $u = x^2 - xy + y^2 - 7x + 2y - 5$.
- 8.28. $u = 3x^2 - 4xy + 2y^2 - 10x + 8y + 7$.
- 8.29. $u = 3x^2 - 2xy + 4y^2 - 8x + 10y - 3$.
- 8.30. $u = x^2 - xy + y^2 + x + y - 4$.

Задача 9. Знайти найбільше та найменше значення функції $f = f(x, y)$ в області D , обмеженій заданими лініями. Зробити рисунок області D .

- 9.1. $f = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1$, $D: x = 5, y = 0, x - y - 1 = 0$.
- 9.2. $f = \frac{1}{2}x^2 - xy$, $D: y = 8, y = 2x^2$.
- 9.3. $f = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x$, $D: x = 0, y = 2, y = 2x$.
- 9.4. $f = xy - 3x - 2y$, $D: x = 0, x = 4, y = 0, y = 4$.
- 9.5. $f = x^3 + y^3 - 3xy$, $D: x = 0, x = 2, y = -1, y = 2$.
- 9.6. $f = 4(x - y) - x^2 - y^2$, $D: x + 2y = 4, x - 2y = 4$.
- 9.7. $f = xy + x + y$, $D: x = 1, x = 2, y = 2, y = 3$.
- 9.8. $f = 3x + y - xy$, $D: x = 0, y = x, y = 4$.

- 9.9. $f = x - x - 2y$, $D: x = 3, y = x, y = 0$.
- 9.10. $f = 5x^2 + 3xy + y^2$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$.
- 9.11. $f = 2x^3 - xy^2 + y^2$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 6$.
- 9.12. $f = xy - 2x - y$, $D: x = 0, x = 3, y = 0, y = 4$.
- 9.13. $f = x^2 + 2xy - 10$, $D: y = 0, y = x^2 - 4$.
- 9.14. $f = 3x + y - xy$, $D: y = x, y = 4, x = 0$.
- 9.15. $f = xy - x - 2y$, $D: x = 3, y = x, y = 0$.
- 9.16. $f = x^2 + 2xy - 4x + 8y$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2$.
- 9.17. $f = 5x^2 - 3xy + y^2$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$.
- 9.18. $f = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, $D: x - y + 1 = 0, x = 3, y = 0$.
- 9.19. $f = x^2 + y^2 - 2x + 8$, $D: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0$.
- 9.20. $f = 2x^3 - xy^2 + y^2$, $D: x = 0, x = 1, y = 0, y = 6$.
- 9.21. $f = xy - 2x - y$, $D: x = 0, x = 3, y = 0, y = 4$.
- 9.22. $f = \frac{1}{2}x^2 - xy$, $D: y = 8, y = 2x^2$.
- 9.23. $f = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x$, $D: y = 2x, y = 2, x = 0$.
- 9.24. $f = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x$, $D: x = 0, x = 2, y = 0, y = 2$.
- 9.25. $f = xy - 3x - 2y$, $D: x = 0, x = 4, y = 0, y = 4$.
- 9.26. $f = x^2 + xy - 2$, $D: y = 4x^2 - 4, y = 0$.
- 9.27. $f = x^2y(4 - x - y)$, $D: x = 0, y = 0, y = 6 - x$.
- 9.28. $f = x^3 + y^3 - 3xy$, $D: x = 0, x = 2, y = -1, y = 2$.
- 9.29. $f = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, $D: x = 3, y = 0, y = x + 1$.
- 9.30. $f = x^2 + 2xy + 4x - y^2$, $D: x + y + 2 = 0, x = 0, y = 0$.

РОЗДІЛ II. ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Тема 3. Власні інтеграли, які залежать від параметра

I. Неперервність інтеграла. Інтеграл

$$I(y) = \int_a^A f(x, y) dx$$

є неперервною функцією параметра y на $[b, B]$, якщо функція $f(x, y)$ неперервна у прямокутнику $D = \{(x, y), x \in (a, A), y \in (b, B)\}$.

Якщо $f(x, y)$ неперервна у вказаному прямокутнику, а лінії $x = \varphi(y)$, $x = g(y)$, $y \in [b, B]$ неперервні й не виходять за межі області D , то інтеграл

$$I(y) = \int_{\varphi(y)}^{g(y)} f(x, y) dx$$

є неперервною функцією на $[b, B]$.

II. Граничний перехід під знаком інтеграла.

Означення. Якщо 1) для $f(x, y)$ при $y \rightarrow y_0$ існує скінченна гранична функція $\varphi(x)$, тобто $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x)$, $x \in [a, A]$; 2) для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке незалежне від x число $\delta > 0$, що при $|y - y_0| < \delta$ буде $|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$ для всіх $x \in [a, A]$, то кажуть, що функція $f(x, y)$ прямує до $\varphi(x)$ рівномірно відносно x .

Якщо функція $f(x, y)$ при фіксованому y неперервна по $x \in [a, A]$ і при $y \rightarrow y_0$ прямує до граничної функції $\varphi(x)$ рівномірно

відносно x , то правильною є рівність

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^A f(x, y) dx = \int_a^A \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^A \varphi(x) dx.$$

III. Диференціювання під знаком інтеграла. Нехай функція $f(x, y)$ визначена в прямокутнику D ; неперервна по x при довільному фіксованому $y \in [b, B]$. Якщо у всій області існує $f'_y(x, y)$, неперервна як функція (x, y) , то при довільному $y \in [b, B]$ правильна формула диференціювання під знаком інтеграла

$$\frac{d}{dy} \int_a^A f(x, y) dx = \int_a^A \frac{df(x, y)}{dy} dx.$$

У загальному випадку, коли межі інтегрування є диференційовними функціями $\varphi(y)$ і $g(y)$ і $a < \varphi(y) < A$, $a < g(y) < A$ при $b < y < B$, то

$$\frac{d}{dy} \int_{\varphi(y)}^{g(y)} f(x, y) dx = f(g(y), y)g'(y) - f(\varphi(y), y)\varphi'(y) + \int_{\varphi(y)}^{g(y)} \frac{d}{dy} f(x, y) dx.$$

IV. Інтегрування під знаком інтеграла. Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в прямокутнику D , то

$$\int_b^B dy \int_a^A f(x, y) dx = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y) dy.$$

Приклад. Знайти

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_y^{1+y} \frac{dx}{1 + x^2 + y^2}.$$

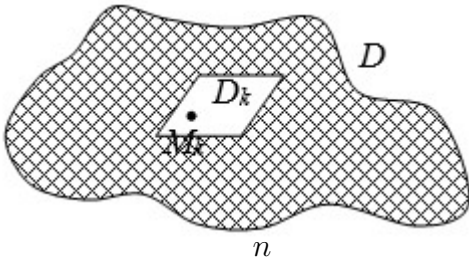
Розв'язання. $\frac{1}{1+x^2+y^2}$ – неперервна, тому, згідно з II, можемо поміняти місцями значки границі та інтеграла:

$$\int_0^1 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{dx}{1+x^2+y^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Тема 4. Подвійний інтеграл

1. Означення подвійного інтеграла та його властивості

Нехай $\mathcal{D}$ – деяка обмежена область площини XOY з *кусково гладкою межею*, а функція f є *визначеною і обмеженою* в $\mathcal{D}$. Розіб'ємо область $\mathcal{D}$ з допомогою кусково гладких кривих на скінченну кількість елементарних областей $\mathcal{D}_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$, площі яких є $\Delta\sigma_k$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.



Нехай λ – найбільший з діаметрів елементарних областей. У кожній з елементарних областей зафіксуємо довільну точку $M_k(x_k, y_k) \in \mathcal{D}_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$.

Число $S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \cdot \Delta\sigma_k$ називається *інтегральною сумою функції f для розбиття $\mathcal{D}$ на $\mathcal{D}_k$ при даному виборі точок $M_k \in \mathcal{D}_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$* .

Якщо існує скінченна границя послідовності інтегральних сум S_n при $\lambda \rightarrow 0$ і вона не залежить від способу розбиття області $\mathcal{D}$ на елементарні підобласті $\mathcal{D}_k$ та вибору точок $M_k \in \mathcal{D}_k$, то вона називається *подвійним інтегралом від функції f по області $\mathcal{D}$* і записується символом

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \cdot \Delta\sigma_k, \quad (36)$$

де $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \{\text{diam} \mathcal{D}_k\}$. При цьому f називається *інтегровною в $\mathcal{D}$* .

1) Для того, щоб $f(x, y)$ була *інтегровною* в області $\mathcal{D}$ необхідно, щоб вона була *обмеженою* в $\mathcal{D}$.

2) Якщо $f(x, y)$ *неперервна* в *обмеженій* області $\mathcal{D}$, то інтеграл (36) існує.

3) Якщо $\mathcal{D}$ – обмежена замкнута область, а f визначена і неперервна в усіх точках цієї області за винятком, можливо, точок, що належать скінченній кількості кусково гладких ліній в області $\mathcal{D}$, то інтеграл (36) існує.

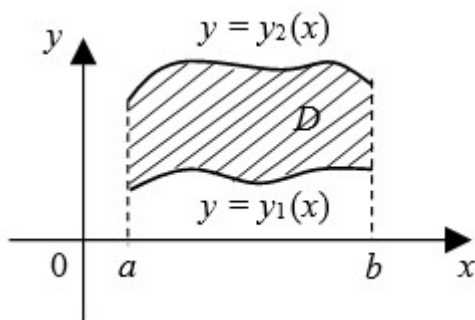
Подвійний інтеграл має властивість лінійності та адитивності:

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathcal{D}} (C_1 f_1(x, y) + C_2 f_2(x, y)) dx dy = \\ & = C_1 \iint_{\mathcal{D}} f_1(x, y) dx dy + C_2 \iint_{\mathcal{D}} f_2(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (37)$$

2. Зведення подвійного інтеграла до повторного

Обчислення подвійного інтеграла зводиться до обчислення повторних інтегралів.

I) Нехай область $\mathcal{D}$ обмежена кривими $y = y_1(x)$; $y = y_2(x)$; $x = a$, $x = b$, $a < b$, причому на $[a, b]$ функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$ неперервні і $y_1(x) < y_2(x)$.



У цьому випадку

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x, y) dy, \quad (38)$$

тобто подвійний інтеграл обчислюється двома послідовними ”простими” інтегруваннями, причому спочатку обчислюється внутрішній за змінною y , а потім зовнішній за змінною x .

Зауваження. Якщо лінія $y = y_1(x)$ на $[a, b]$ задається виразом $y_1(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in [a, c], \\ \varphi_2(x), & x \in (c, b], \end{cases}$ то інтеграл (38) записується у вигляді суми двох інтегралів

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \int_a^c dx \int_{\varphi_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy + \int_c^b dx \int_{\varphi_2(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (39)$$

Приклад 1. Обчислити подвійний інтеграл, взятий по прямокутній області $\mathcal{D} = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$

$$\iint_{\mathcal{D}} e^{x+y} dx dy.$$

Розв'язання.

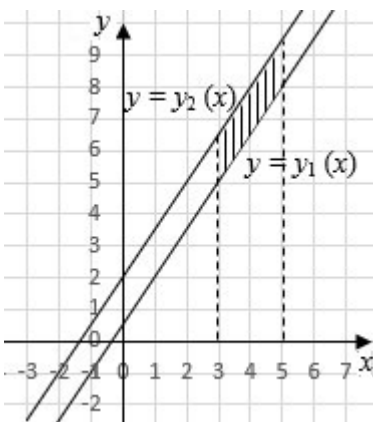
$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} e^{x+y} dx dy &= \iint_{\mathcal{D}} e^x \cdot e^y dx dy = \int_0^1 e^x dx \int_0^1 e^y dy = \\ &= \int_0^1 e^x dx \cdot \left(e^y \Big|_0^1 \right) = \int_0^1 e^x \cdot (e - 1) dx = (e - 1) \int_0^1 e^x dx = \\ &= (e - 1) \cdot e^x \Big|_0^1 = (e - 1)(e - 1) = (e - 1)^2. \end{aligned}$$

Приклад 2. Розставити межі у подвійному інтегралі $\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$ в області $\mathcal{D}$, обмеженій лініями $x = 3$; $x = 5$; $3x - 2y + 4 = 0$; $3x - 2y + 1 = 0$.

Розв'язання. Щоб скористатись формулою (38), запишемо: $y_1 = \frac{1}{2}(3x + 1)$; $y_2 = \frac{1}{2}(3x + 4)$. Зробимо схематично рисунок. Знайдемо дві точки перетину прямих з осями

x	0	$-\frac{1}{3}$
y	$\frac{1}{2}$	0

x	0	$-\frac{4}{3}$
y	2	0

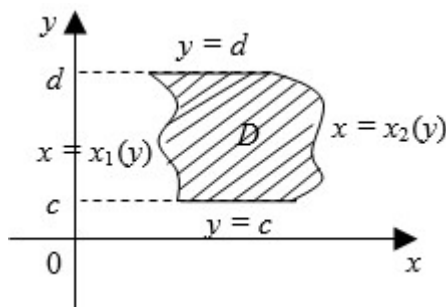


Отже,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_3^5 dx \int_{y_1=\frac{1}{2}(3x+1)}^{y_2=\frac{1}{2}(3x+4)} f(x, y) dy.$$

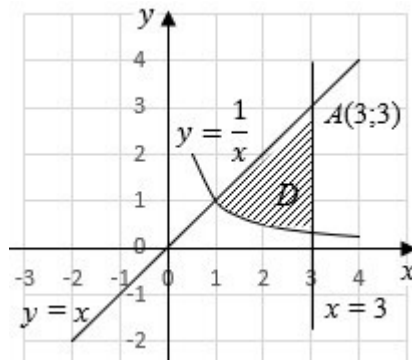
Якщо D – область, задана умовами: $x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$; $c \leq y \leq d$, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x=x_1(y)}^{x=x_2(y)} f(x, y) dx. \quad (40)$$



Приклад 3. Звести подвійний інтеграл до повторного двома способами, якщо D – область, обмежена лініями $y = x$; $y = \frac{1}{x}$; $x = 3$.

Розв'язання. Нарисуємо область D .



Бачимо, що вона знаходиться в I чверті. Знайдемо точку перетину кривих $y = x$ та $y = \frac{1}{x}$. Маємо $\frac{1}{x} = x \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$, але оскільки нас цікавить значення в I чверті, тому розглядаємо тільки $x = 1$.

Отже бачимо, що $1 \leq x \leq 3$, а змінна y змінюється від кривої $y = \frac{1}{x}$ до кривої $y = x$, тому

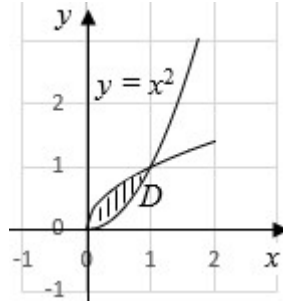
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_1^3 dx \int_{\frac{1}{x}}^x f(x, y) dy.$$

Це один спосіб. Щоб скористатись формулою (40), розглянемо два криволінійні трикутники, обмежені лініями: 1) $x = \frac{1}{y}$ та $x = 3$ при $\frac{1}{3} \leq y \leq 1$; 2) $x = y$ та $x = 3$ при $1 \leq y \leq 3$. Згідно з формулою (40)

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\frac{1}{3}}^1 dy \int_{x=\frac{1}{y}}^{x=3} f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_{x=y}^{x=3} f(x, y) dx.$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\iint_D (x + 2y) dx dy$, якщо область D обмежена кривими $y = x^2$; $y = \sqrt{x}$.

Розв'язання. Зобразимо область $\mathcal{D}$. Вона утворена перетином двох парабол і знаходиться в I чверті.



Бачимо, що зручно скористатись формулою (38). Тут $0 \leq x \leq 1$, а змінна y змінюється від точок параболи $y = x^2$ до $y = \sqrt{x}$. Отже, маємо інтеграл

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} (x + 2y) dx dy &= \int_0^1 dx \int_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} (x + 2y) dy = \int_0^1 dx (xy + y^2) \Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} = \\ &= \int_0^1 \left((x\sqrt{x} + (\sqrt{x})^2) - (x \cdot x^2 + (x^2)^2) \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} + x - x^3 - x^4 \right) dx = \left(\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{14 - 5}{20} = \frac{9}{20}. \end{aligned}$$

3. Заміна змінних у подвійному інтегралі

Нехай функції $x = x(u, v)$ і $y = y(u, v)$ взаємно однозначного відображають область $\mathcal{D}'$ площини $O'uv$ з кусково гладкою межею на область $\mathcal{D}$ площини XOY і функції $x(u, v)$ і $y(u, v)$ та їх частинні похідні першого порядку неперервні в $\mathcal{D}'$ і всередині $\mathcal{D}'$

якобіан відмінний від нуля, тобто

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u, v) \in \mathcal{D}'. \quad (41)$$

Якщо функція f в $\mathcal{D}$ є неперервною, то правильною є формула заміни змінних

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{D}'} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv. \quad (42)$$

Обчислюється інтеграл по області $\mathcal{D}'$ зведенням подвійного інтеграла до повторного.

Найбільш уживаними криволінійними координатами є *полярні координати*. Нехай $\mathcal{D}$ – область, отримана взаємно однозначним відображенням області $\mathcal{D}'$ площини $O r \varphi$, яке визначається функціями $\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} (r, \varphi) \in \mathcal{D}'$. Тоді

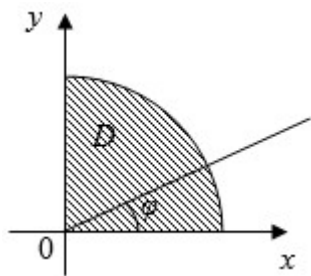
$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = \\ &= r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r. \end{aligned}$$

У цьому випадку формула (42) набуває вигляду

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{D}'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r dr d\varphi. \quad (43)$$

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy$, якщо

$\mathcal{D}$ – частина круга радіуса a з центром в точці $O(0, 0)$, яка знаходиться в I чверті.

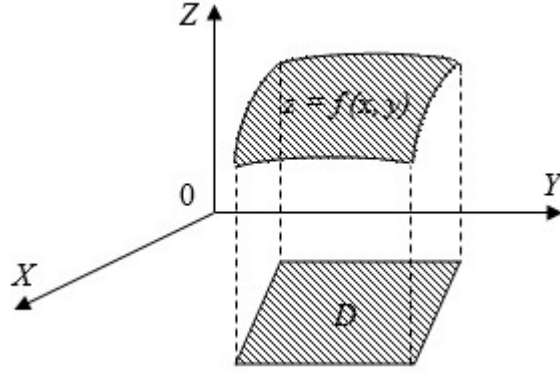


Розв'язання. Маємо випадок кругової області, тому зручно перейти до полярних координат. Згідно з ними коло $x^2 + y^2 = a^2$ запишеться так: $r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = a^2$ або $r^2 = a^2$. Бачимо, що це частина круга, розміщеного в I чверті, тому кут φ змінюється від 0 до $\frac{\pi}{2}$, $0 \leq r \leq a$. Згідно з формулою (43) отримаємо

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} d(a^2 - r^2) = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a (a^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} d(a^2 - r^2) = \left| a^2 - r^2 = t \right| = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a^2}^0 t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot \left. \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^{a^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left. t^{\frac{3}{2}} \right|_0^{a^2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \\ &= \frac{1}{3} a^3 \cdot \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} a^3 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{6} a^3. \end{aligned}$$

4. Геометричні та фізичні застосування подвійного інтеграла

1) Якщо $f \geq 0$ в області $\mathcal{D}$, то подвійний інтеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ виражає об'єм циліндричного тіла, обмеженого зверху поверхнею $z = f(x, y)$, основою якого є область $\mathcal{D}$ площини XOY , а твірні паралельні до осі OZ .



Зокрема, якщо $f(x, y) = 1$, то будемо мати об'єм циліндричного тіла з основою $\mathcal{D}$ і обмеженого зверху площиною $z = 1$. Об'єм такого циліндра дорівнює площі області $\mathcal{D}$:

$$S = \iint_{\mathcal{D}} dx dy. \quad (44)$$

2) Якщо деяка поверхня Q задана параметрично

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in \mathcal{D},$$

то її площа обчислюється за формулою

$$S = \iint_{\mathcal{D}} |\vec{n}| du dv, \quad (45)$$

де $\vec{n}$ – нормаль до поверхні S в довільній точці. Оскільки

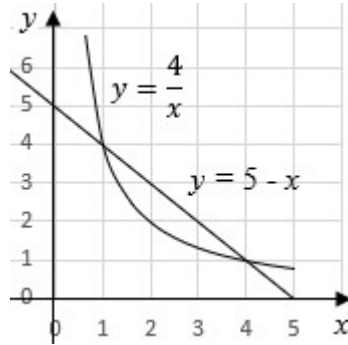
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{array} \right|; \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{array} \right|; \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right| \end{pmatrix},$$

будемо мати

$$S = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right|^2} du dv. \quad (46)$$

Приклад 6. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $xy = 4$, $x + y = 5$.

Розв'язання.



Знайдемо точки перетину кривих. Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ (5 - y)y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 - y \\ y^2 - 5y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 4 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

Отже, згідно з формулою (44)

$$S = \iint_{\mathcal{D}} dx dy = \int_1^4 dx \int_{y=\frac{4}{x}}^{y=5-x} dy = \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x} \right) dx =$$

$$= \left(5x - \frac{x^2}{2} - 4 \ln |x| \right) \Big|_1^4 = (20 - 8 - 8 \ln 2) - \left(5 - \frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{15}{2} - 8 \ln 2.$$

3) Маса m пластини $\mathcal{D}$ з густиною $\rho(x, y)$

$$m = \iint_{\mathcal{D}} \rho(x, y) dx dy, \quad (47)$$

а її статичні моменти M_1 і M_2 відносно осей OX та OY виражаються формулами

$$M_x = \iint_{\mathcal{D}} y \rho(x, y) dx dy; \quad M_y = \iint_{\mathcal{D}} x \rho(x, y) dx dy. \quad (48)$$

4) Координати центра мас $C(x_0, y_0)$ неоднорідної пластини $\mathcal{D}$ визначаються формулами

$$x_c = \frac{M_y}{m}; \quad y_c = \frac{M_x}{m}. \quad (49)$$

5) Моменти інерції області $\mathcal{D}$, заповненої масою з густиною $\rho(x, y)$ відносно осей OX та OY визначаються рівностями

$$I_x = \iint_{\mathcal{D}} y^2 \rho(x, y) dx dy; \quad I_y = \iint_{\mathcal{D}} x^2 \rho(x, y) dx dy. \quad (50)$$

6) Полярний момент інерції відносно початку координат

$$I_0 = \iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy = I_x + I_y. \quad (51)$$

Приклад 7. Знайти центр мас фігури, обмеженої кардіоїдою $r = a(1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $\rho(x, y) = 1$.

Розв'язання. Фігура симетрична відносно OX , тому $x_c = 0$. Щоб знайти y_c (див. формулу (49)) бачимо, що потрібно знайти m і M_x за формулами (47) і (48).

Перейдемо до полярних координат.

$$\begin{aligned} m &= \iint_{\mathcal{D}'} r dr d\varphi = 2 \int_0^\pi d\varphi \int_0^{a(1+\cos \varphi)} r dr = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{a(1+\cos \varphi)} 2r dr = \\ &= \int_0^\pi d\varphi r^2 \Big|_0^{a(1+\cos \varphi)} = \int_0^\pi (a^2(1 + \cos \varphi)^2 - 0) d\varphi = \\ &= a^2 \int_0^\pi (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = a^2 \int_0^\pi \left(1 + 2 \cos \varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right) d\varphi = \\ &= a^2 \left(\varphi \Big|_0^\pi + 2 \sin \varphi \Big|_0^\pi + \frac{1}{2} \varphi \Big|_0^\pi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \Big|_0^\pi \right) = \frac{3}{2} \pi a^2. \end{aligned}$$

Тепер

$$\begin{aligned}
 M_x &= \iint_{\mathcal{D}} y \rho(x, y) dy dx = \iint_{\mathcal{D}'} r \sin \varphi \cdot r \cdot 1 dr d\varphi = \\
 &= 2 \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^{a(1+\cos \varphi)} r^2 dr = 2 \int_0^\pi \sin \varphi \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^{a(1+\cos \varphi)} d\varphi = \\
 &= \frac{2}{3} a^3 \int_0^\pi \sin \varphi (1 + \cos \varphi)^3 d\varphi = -\frac{2}{3} a^3 \int_0^\pi (1 + \cos \varphi)^3 d(1 + \cos \varphi) = \\
 &= -\frac{2}{3} a^3 \frac{(1 + \cos \varphi)^4}{4} \Big|_0^\pi = -\frac{a^3}{6} ((1 - 1)^4 - (1 + 1)^4) = \frac{8a^3}{3}.
 \end{aligned}$$

Згідно з формулою (49)

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{8a^3}{3} : \frac{3\pi a^2}{2} = \frac{16a}{9\pi}.$$

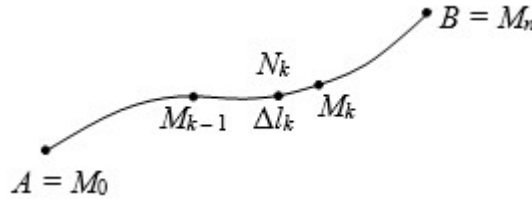
Отже, центр мас $C \left(0, \frac{16a}{9\pi} \right)$.

Тема 5. Криволінійний інтеграл I-го роду

1. Означення та властивості криволінійного інтеграла I-го роду

Нехай L – відрізок кусково гладкої просторової кривої з початком в точці A і кінцем в точці B , на якій визначена і неперервна скалярна функція $f(x, y, z)$ (скалярна функція має значення в $\mathbb{R}$).

Виберемо на L довільні точки $M_k(x_k, y_k, z_k)$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $M_0 = A$, $M_n = B$. Цими точками дуга AB розбивається на n елементарних частин. Нехай $M_{k-1}M_k$ – елементарна частина довжини Δl_k , $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Нехай на кожній з частинок взята довільна точка $N_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.



Суму вигляду

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot \Delta l_k \quad (52)$$

назвемо інтегральною сумою, що відповідає даному розбиттю дуги AB на частини $M_{k-1}M_k$ і вибору точок $N_k \in M_{k-1}M_k$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Якщо існує скінченна границя послідовності інтегральних сум α_n при $\Delta l = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta l_k \rightarrow 0$, яка не залежить від способу розбиття дуги AB точками M_k на частини і вибору внутрішніх точок N_k , то ця границя називається *криволінійним інтегралом першого роду від функції f по дузі AB* , а f називається *інтегровною на*

L , тобто

$$\begin{aligned}\int_L f(M)dl &\equiv \int_{AB} f(M)dl \equiv \int_{AB} f(x, y, z)dl = \\ &= \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot \Delta l_k.\end{aligned}\quad (53)$$

Якщо функція f неперервна на AB , то інтеграл (53) існує. З фізичної точки зору інтеграл (53) можна розглядати як масу *матеріальної кривої з лінійною густиною розподілу f* .

1. Криволінійний інтеграл першого роду не залежить від обходу кривої інтегрування, тобто

$$\int_{AB} f(x, y, z)dl = \int_{BA} f(x, y, z)dl. \quad (54)$$

2. Якщо кусково гладка крива L складається зі скінченної кількості гладких дуг L_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, на кожній з яких $f(x, y) = f_i(x, y)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, то

$$\int_L f(x, y)dl = \sum_{i=1}^n \int_{L_i} f_i(x, y)dl. \quad (55)$$

2. Обчислення криволінійних інтегралів I-го роду

Обчислення зводиться до обчислення визначених інтегралів.

а) Нехай крива на площині задана параметрично

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [a, b],$$

де φ і ψ неперервно диференційовні функції, то

$$\int_L f(x, y)dl = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt. \quad (56)$$

б) Якщо дуга AB задана рівнянням $y = \varphi(x)$, $x \in [a, b]$, де функція φ неперервно диференційовна на $[a, b]$, то

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx. \quad (57)$$

в) Якщо крива задана рівнянням $x = \psi(y)$, $y \in [c, d]$, де ψ – неперервно диференційовна на $[c, d]$, то

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_c^d f(\psi(y), y) \sqrt{1 + (\psi'(y))^2} dy. \quad (58)$$

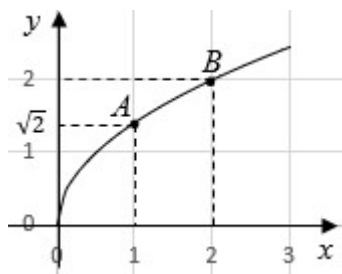
г) Якщо дуга AB в просторі $\mathbb{R}^3$ задана рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, де φ , ψ , χ – неперервно диференційовні на $[\alpha, \beta]$, то

$$\begin{aligned} \int_{AB} f(x, y, z) dl &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \times \\ &\times \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt. \end{aligned} \quad (59)$$

Приклад 1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L \frac{x}{y} dl$, де L – дуга параболи $y^2 = 2x$, що знаходиться між точками $A(1; \sqrt{2})$ і $B(2; 2)$.

Розв'язання. Тут $y = \sqrt{2x}$ – явне задання кривої. Знайдемо

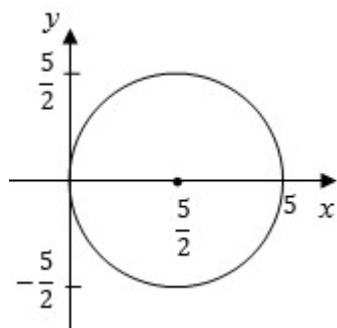
$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{1 + (y')^2} dx = \sqrt{1 + \left(\left(\sqrt{2x} \right)' \right)^2} dx = \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{x}} \right)^2} dx = \sqrt{\frac{1 + 2x}{2x}} dx. \end{aligned}$$



Скористаємось формулою (57), згідно з нею

$$\begin{aligned} \int_L \frac{x}{y} dl &= \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{2x}} \cdot \frac{\sqrt{1+2x}}{\sqrt{2x}} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{1+2x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{1+2x} d(1+2x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (1+2x)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = \frac{1}{6} (5\sqrt{5} - 3\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Приклад 2. Обчислити криволінійний інтеграл I-го роду $\int_L x(x-y)dl$, де L – коло $x^2 + y^2 = 5x$.



Розв'язання. Побудуємо коло $x^2 + y^2 = 5x$ або $x^2 - 5x + y^2 = 0$, $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + y^2 = 0$ або $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$. Перейдемо до полярних координат $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, тоді $x^2 + y^2 = 5x$ запишеться $r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = 5r \cos \varphi$, $r^2 = 5r \cos \varphi \Rightarrow r \neq 0, r = 5 \cos \varphi$. Бачимо, що $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Знайдемо dl у полярних координатах (див. [8, с. 134])

$$dl = \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi = \sqrt{25 \cos^2 \varphi + 25 \sin^2 \varphi} d\varphi = 5d\varphi.$$

Отже,

$$\begin{aligned}
 \int_L x(x-y)dl &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 5 \cos \varphi (5 \cos \varphi - 5 \sin \varphi) d\varphi = \\
 &= 25 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi - 25 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = \\
 &= \frac{25}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi + 25 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d(\cos \varphi) = \\
 &= \frac{25}{2} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 25 \frac{\cos^2 \varphi}{2} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{25}{2} \pi.
 \end{aligned}$$

3. Застосування криволінійного інтеграла

Якщо $\rho(x, y)$ є густиною розподілу маси вздовж плоскої дуги AB , то масу кривої AB знаходимо за формулою

$$m = \int_{AB} \rho(x, y) dl; \quad (60)$$

моменти інерції відносно координатних осей – за формулами

$$I_x = \int_{AB} y^2 \rho(x, y) dl, \quad I_y = \int_{AB} x^2 \rho(x, y) dl; \quad (61)$$

статичні моменти відносно координатних осей – за формулами

$$M_x = \int_{AB} y \rho(x, y) dl, \quad M_y = \int_{AB} x \rho(x, y) dl; \quad (62)$$

центр мас $C(x_c, y_c)$ кривої AB за формулами

$$x_c = \frac{M_y}{m}; \quad y_c = \frac{M_x}{m}.$$

Тема 6. Криволінійний інтеграл II-го роду

1. Означення криволінійного інтеграла II-го роду, його фізичний зміст

Нехай L – кусково гладка просторова крива з початком в точці A і кінцем в точці B , на якій визначена і неперервна *вектор-функція* $\vec{a}(x, y, z)$, яка має проєкції $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ на осі OX , OY та OZ відповідно.

Розіб'ємо криву AB точками $A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$ на n елементарних частин $M_{k-1}M_k$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, довжини яких $\Delta l_1, \dots, \Delta l_n$; $M_k(x_k, y_k, z_k)$. Нехай $N_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ – довільна точка на елементарній дузі $M_{k-1}M_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$.

Суму вигляду

$$\beta_n = \sum_{k=1}^n [P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta y_k + R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta z_k]$$

називають *інтегральною сумою* вектор-функції $\vec{a} = (P, Q, R)$, що відповідає даному розбиттю дуги AB на частини і вибору точок N_k , де $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$; $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$; $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Скінченна границя інтегральної суми β_n при $\max_{1 \leq k \leq n} \Delta l_k \rightarrow 0$, якщо вона існує і не залежить від способу розбиття дуги AB точками M_k на частини і вибору внутрішніх точок N_k на кожній з частин, називається криволінійним інтегралом II-го роду від векторної функції $\vec{a} = (P, Q, R)$ по дузі AB і позначається символом

$$\int_{AB} \vec{a} d\vec{r} = \int_{AB} (Pdx + Qdy + Rdz) \equiv \int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz, \quad (63)$$

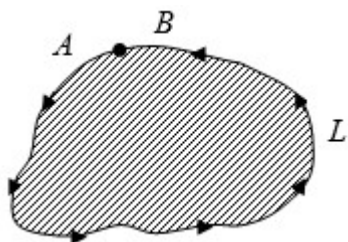
де $\vec{r}$ – радіус-вектор точки M дуги AB . Якщо вектор-функція $\vec{a}$ неперервна на AB , то інтеграл (63) існує. Його називають *циркуляцією векторного поля $\vec{a}(M)$ вздовж кривої AB* . У силовому

полі циркуляція виражає роботу сили $\vec{a}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої AB і обчислюється за формулою

$$A = \int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz. \quad (64)$$

На відміну від криволінійного інтеграла I-го роду, криволінійний інтеграл II-го роду залежить від напрямку обходу дуги AB , тобто

$$\int_{AB} \vec{a}d\vec{r} = - \int_{BA} \vec{a}d\vec{r}. \quad (65)$$



Зауваження 1. Додатним напрямком обходу замкненої дуги вважається той, коли область, обмежена дугою, залишається зліва.

Тут напрям стрілок вказує додатний напрям обходу.

2. Обчислення та властивості криволінійного інтеграла II-го роду

Обчислення криволінійного інтеграла II-го роду зводиться до обчислення визначених інтегралів. Якщо крива задана рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, де φ, ψ, χ – неперервно диференційовні на $[t_1, t_2]$ і точці A відповідає $t = t_1$, а точці B – $t = t_2$, то

$$\begin{aligned} & \int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} [P(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \varphi'(t)dt + Q(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \psi'(t)dt + \\ & \quad + R(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \chi'(t)dt]. \end{aligned} \quad (66)$$

Властивості криволінійного інтеграла II-го роду

$$1. \int_{AB} 0dx = \int_{AB} 0dy = \int_{AB} 0dz = 0.$$

$$2. \int_{AB} 1dx = x_B - x_A; \int_{AB} 1dy = y_B - y_A; \int_{AB} 1dz = z_B - z_A.$$

3. Якщо на площині дуга AB паралельна осі OX , то $\int_{AB} Q(x, y)dy = 0$; якщо дуга AB паралельна осі OY , то $\int_{AB} P(x, y)dx = 0$.

$$4. \int_{AB} (\alpha f_1(x, y, z) + \beta f_2(x, y, z)) dx = \alpha \int_{AB} f_1(x, y, z) dx + \beta \int_{AB} f_2(x, y, z) dx, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R},$$

якщо існують інтеграли справа в останній рівності.

Аналогічні властивості правильні для інтегралів по y та по z .

$$5. \int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz =$$

$$= \int_{AC} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz +$$

$$+ \int_{CB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz,$$

якщо C – точка дуги AB та існують інтеграли в правій частині рівності.

Нехай функції P, Q, P'_y, Q'_x неперервні в області $D \subset \mathbb{R}^2$, яка містить кусково-гладку дугу AB . Для того, щоб криволінійний інтеграл $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не залежав від форми дуги AB ,

необхідно і достатньо виконання хоча б однієї з умов:

1) $\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ для довільної замкнутої кусково гладкої кривої $L \subset D$;

2) існує диференційовна в області D функція u , для якої $du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, причому

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = u(B) - u(A).$$

У випадку однозв'язної області D замість умов 1) і 2) можна взяти таку:

3) $P'_y(x, y) \equiv Q'_x(x, y)$, $(x, y) \in D$.

Для криволінійних інтегралів, які не залежать від форми дуги AB , використовують позначення

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

де (x_1, y_1) – координати точки A , (x_2, y_2) – координати точки B . Функцію u з умови 2) можна знайти за формулою

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy,$$

де інтеграл береться по довільній дузі $L \in D$, що сполучає точку (x_0, y_0) з довільною точкою (x, y) . Часто за дугу L беруть ламану з двох відрізків, паралельних до осей координат.

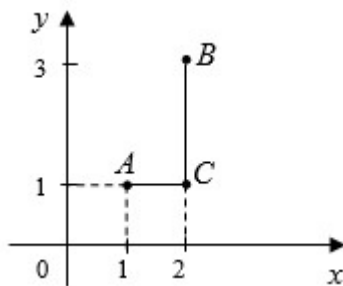
Криволінійний інтеграл по замкнутому контуру L при виписаних умовах дорівнює нулеві

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл

$$\int_{(1,1)}^{(2,3)} (x + 3y)dx + (y + 3x)dy.$$

Розв'язання. Бачимо, що інтеграл береться по кривій на площині, $R(x, y, z) \equiv 0$. У нас $P(x, y) = x + 3y$; $Q(x, y) = y + 3x$. Оскільки $\frac{\partial P}{\partial y} = 3$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3$, а отже $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, тому інтеграл не залежить від шляху інтегрування, а залежить від початкової і кінцевої точок інтегрування.



Оберемо за шлях інтегрування ламану ACB . Бачимо, що на відрізку AC : $y = 1$, $1 \leq x \leq 2$, тоді $dy = 0$; на відрізку CB : $x = 2$, $1 \leq y \leq 3$, тоді $dx = 0$.

Отже, маємо

$$\begin{aligned} \int_{(1,1)}^{(2,3)} (x + 3y)dx + (y + 3x)dy &= \int_1^2 (x + 3)dx + \int_1^3 (y + 6)dy = \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_1^2 + \left(\frac{y^2}{2} + 6y \right) \Big|_1^3 = (2 + 6) - \left(\frac{1}{2} + 3 \right) + \left(\frac{9}{2} + 18 \right) - \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} + 6 \right) = 8 - 3,5 + 4,5 + 18 - \frac{1}{2} - 6 = 20 + \frac{1}{2} = 20,5. \end{aligned}$$

Приклад 2. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду $\int_L y^2 dx + x^2 dy$, де L – верхня половина еліпса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, яка обходиться у напрямку проти годинникової стрілки.

Розв'язання. Щоб звести до визначеного інтеграла і скористатись формулою (66), знайдемо $dx = -a \sin t dt$, $dy = b \cos t dt$, $0 \leq t \leq \pi$, оскільки верхня частина еліпса. Згідно з формулою (66) отримуємо

$$\begin{aligned} \int_L y^2 dx + x^2 dy &= \int_0^\pi \left((b \sin t)^2 \cdot (-a \sin t) + (a \cos t)^2 \cdot b \cos t \right) dt = \\ &= ab \int_0^\pi (a \cos^3 t - b \sin^3 t) dt = \\ &= ab \left(a \int_0^\pi \cos^2 t d \sin t + b \int_0^\pi \sin^2 t d \cos t \right) = \\ &= ab \left(a \int_0^\pi (1 - \sin^2 t) d \sin t + b \int_0^\pi (1 - \cos^2 t) d \cos t \right) = \\ &= a^2 b \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right) \Big|_0^\pi + ab^2 \left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3} \right) \Big|_0^\pi = \\ &= ab^2 \left(\left(-1 + \frac{1}{3} \right) - \left(1 - \frac{1}{3} \right) \right) = ab^2 \left(-2 + \frac{2}{3} \right) = -\frac{4}{3} ab^2. \end{aligned}$$

Приклад 3. Знайти роботу силового поля $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж першого витка гвинтової лінії $x = ae^t \cos t$; $y = ae^t \sin t$; $z = ae^t$ з точки $O(0, 0, 0)$ у точку $A_1(a; 0; a)$.

Розв'язання. Згідно з формулою (64) робота силового поля

$$A = \int_{OA_1} xdx + ydy + zdz.$$

Знайдемо $dx = ae^t(\cos t - \sin t)dt$; $dy = ae^t(\sin t + \cos t)dt$; $dz = ae^t dt$. Будемо вважати, що точці O відповідає $t \rightarrow -\infty$, а точці A_1 відповідає $t = 0$, тоді

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\infty}^0 (a^2 e^{2t} \cos t (\cos t - \sin t) + a^2 e^{2t} \sin t (\sin t + \cos t) + a^2 e^{2t}) dt = \\ &= \frac{a^2}{2} \int_{-\infty}^0 ((\cos t - \sin t) \cos t + \sin t (\sin t + \cos t) + 1) de^{2t} = \\ &= \frac{a^2}{2} \int_{-\infty}^0 (\cos^2 t - \sin t \cos t + \sin^2 t + \sin t \cos t + 1) de^{2t} = \\ &= a^2 e^{2t} \Big|_{-\infty}^0 = a^2 \left(1 - \lim_{b \rightarrow -\infty} e^{2b} \right) = a^2, \end{aligned}$$

(тут виник невласний інтеграл з нескінченною межею).

3. Формула Гріна

Якщо межа L замкнутої області D гладка, а функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними I-го порядку $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$, то правильна формула Гріна

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy, \quad (67)$$

де контур L обходиться так, що область D залишається зліва.

Якщо $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ в області D задовольняють умову $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$, то подвійний інтеграл у формулі (67) визначає площу області D . Зокрема, якщо $P = -\frac{1}{2}y$, $Q = \frac{1}{2}x$, то формула для площі

$$S(D) = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx.$$

Тема 7. Потрійні інтеграли

1. Означення потрійного інтеграла, його властивості

Розглянемо функцію $f(x, y, z)$, неперервну в замкнутій області $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Розіб'ємо область Ω сіткою поверхонь на елементарні частини Ω_i , які не мають спільних внутрішніх точок і об'єми яких дорівнюють ΔV_i , $i = 1, 2, \dots, n$. У кожній частині Ω_i виберемо довільну точку $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ і утворимо суму

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta V_i, \quad (68)$$

яку називають інтегральною сумою для функції $f(x, y, z)$ по області Ω . Нехай $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d(\Omega_i)$ – діаметр розбиття (найбільший з діаметрів елементарних областей Ω_i , $i = 1, 2, \dots, n$).

Означення 1. Якщо існує скінченна границя при $\lambda \rightarrow 0$ інтегральних сум (68), яка не залежить ні від способу розбиття Ω на елементарні частини Ω_i , ні від вибору точок $P_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Omega_i$, то її називають потрійним інтегралом від функції $f(x, y, z)$ по області Ω і позначають

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV \quad \text{або} \quad \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz.$$

Отже, згідно з означенням можемо записати

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \Delta V_i. \quad (69)$$

Якщо інтеграл (69) існує, то функція $f(x, y, z)$ називається інтегровною за Ріманом в області Ω , а Ω є областю інтегрування, $dV = dx dy dz$ – елемент об'єму, по якому здійснюємо інтегрування.

Теорема. Неперервна в обмеженій області Ω функція $f(x, y, z)$ інтегровна в цій області.

Властивості потрійного інтеграла. Потрійний інтеграл є узагальненням подвійного інтеграла на випадок просторової області, тому властивості подвійного можна перенести на потрійний інтеграл.

Нехай функції $f(x, y, z)$ та $g(x, y, z)$ інтегровні в Ω .

1) $\iiint_{\Omega} 1 \cdot dx dy dz = \iiint_{\Omega} dV = V$, де V – об'єм області Ω . (*Властивість нормованості*)

2) Для $\forall \{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} (\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)) dV &= \\ &= \alpha \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV + \beta \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dV \end{aligned}$$

– *властивість лінійності*.

3) Якщо $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, де Ω_1 і Ω_2 не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{\Omega_2} f(x, y, z) dV$$

– *властивість адитивності*.

4) Якщо $f(x, y, z) \geq 0$ для $\forall (x, y, z) \in \Omega$, то

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV \geq 0$$

– *збереження знаку функції та інтеграла*.

5) Якщо $f(x, y, z) \geq g(x, y, z)$, $\forall (x, y, z) \in \Omega$, то

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV \geq \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dV$$

– інтегрування нерівності.

6) Оцінка модуля інтеграла

$$\left| \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV \right| \leq \iiint_{\Omega} |f(x, y, z)| dV.$$

7) Оцінка інтеграла. Якщо $m = \inf_{(x,y,z) \in \Omega} f(x, y, z)$, $M = \sup_{(x,y,z) \in \Omega} f(x, y, z)$, то

$$m \cdot V \leq \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV \leq M \cdot V,$$

де V – об'єм області Ω .

8) Середнє значення. Якщо $f(x, y, z)$ неперервна в обмеженій замкненій області Ω , то існує точка (ξ, η, ζ) всередині області Ω така, що

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{V} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV.$$

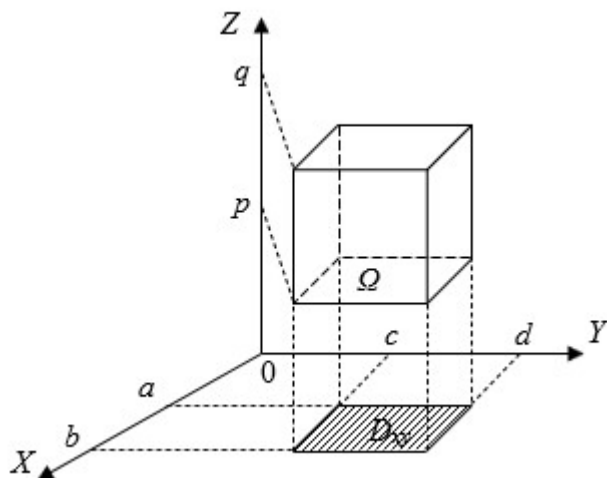
Число $f(\xi, \eta, \zeta)$ – середнє значення функції $f(x, y, z)$ по області Ω .

2. Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах у випадку прямокутної і криволінійної областей

Як і для подвійного інтеграла, обчислення потрійного зводять до обчислення повторного, тобто до інтегрування за кожною змінною окремо.

Нехай область Ω є прямокутним паралелепіпедом $\Omega = \{a \leq x \leq b; c \leq y \leq d; p \leq z \leq q\}$, а $f(x, y, z)$ – неперервна в області Ω функція.

Спроектуємо область Ω на площину XOY , її проекцією є прямокутник $D_{xy} = \{a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$.



У цьому випадку отримаємо

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV &= \iint_{D_{xy}} dx dy \int_p^q f(x, y, z) dz = \\ &= \int_a^b dx \int_c^d dy \int_p^q f(x, y, z) dz. \end{aligned} \quad (70)$$

Зауваження 1. У формулі (70) можна змінювати послідовність інтегралів.

Нехай область Ω обмежена знизу поверхнею $z = z_1(x, y)$, зверху – поверхнею $z = z_2(x, y)$, а з боків – циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі OZ . Позначимо проєкцію області Ω на площину XOY через D_{xy} і вважатимемо, що функції $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ неперервні в D_{xy} . Для такої області правильною є формула

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz. \quad (71)$$

Якщо область D_{xy} є правильною в напрямку осі OY і обмежена кривими $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ ($a \leq x \leq b$) знизу і зверху, то

подвійний інтеграл по області D_{xy} можна звести до повторного. Формула набуває вигляду

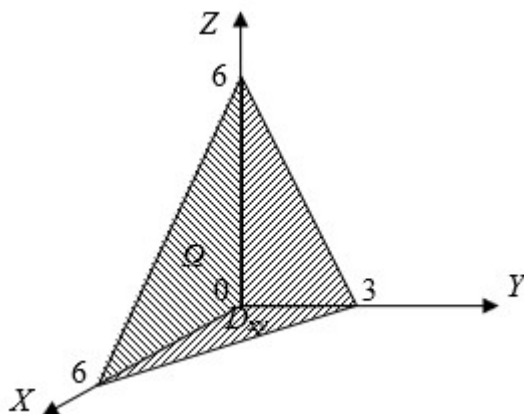
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz. \quad (72)$$

У формулі (72) функцію $f(x, y, z)$ спочатку інтегруємо за змінною z при фіксованих x і y , потім результат інтегруємо за змінною y , вважаючи змінну x сталою, і нарешті, останній інтеграл обчислюємо за змінною x в межах від a до b .

Зауваження 2. Якщо область Ω є більш складною, то її потрібно розбити на декілька областей, описаних вище. Порядок інтегрування у (72) також може бути іншим.

Приклад 1. Знайти об'єм тетраедра, обмеженого координатними площинами і площиною $x + 2y + z - 6 = 0$.

Розв'язання. Областю Ω є область, обмежена площинами $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$ і $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1$ (рівняння площини у відрізках, де $a = 6$; $b = 3$; $c = 6$ – величини відрізків, які площина відтинає від координатних осей.)



Область Ω проєктується в трикутник на площину XOY : $D_{xy} = \left\{ 0 \leq x \leq 6; 0 \leq y \leq \frac{6-x}{2} \right\}$. Величина z змінюється від 0 до $z = 6 - x - 2y$. Знайдемо об'єм тіла за (71), покладаючи $f(x, y, z) = 1$,

тобто

$$\begin{aligned}
 V &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_0^{6-x-2y} dz = \\
 &= \int_0^6 dx \int_0^{3-\frac{x}{2}} dy \int_0^{6-x-2y} dz = \int_0^6 dx \int_0^{3-\frac{x}{2}} \left(z \Big|_{z=0}^{z=6-x-2y} \right) dy = \\
 &= \int_0^6 dx \int_0^{3-\frac{x}{2}} (6-x-2y) dy = \int_0^6 (6y - xy - y^2) \Big|_{y=0}^{y=3-\frac{x}{2}} dx = \\
 &= \int_0^6 \left(6 \left(3 - \frac{x}{2} \right) - x \left(3 - \frac{x}{2} \right) - \left(3 - \frac{x}{2} \right)^2 \right) dx = \\
 &= \int_0^6 \left(18 - 3x - \cancel{3x} + \frac{x^2}{2} - 9 + \cancel{3x} - \frac{x^2}{4} \right) dx = \\
 &= \int_0^6 \left(9 - 3x + \frac{x^2}{4} \right) dx = \left(9x - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{12} \right) \Big|_0^6 = \\
 &= 54 - 54 + 18 = 18(\text{куб. од.}).
 \end{aligned}$$

Зі школи знаємо, що

$$V = \frac{1}{3} H \cdot S_{\text{осн.}}.$$

Тут $H = 6$; $S_{\text{осн.}}$ – площа прямокутного $\triangle$ зі сторонами 6 і 3, тому $S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$. Отже, $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 9 = 18(\text{куб. од.})$.

3. Заміна змінних у потрібному інтегралі

Припустимо, що змінні x, y, z виражаються через u, v, w : $x = x(u, v, w)$; $y = y(u, v, w)$; $z = z(u, v, w)$. Тут є взаємно однозначне відображення області Ω_1 простору O_1uvw , обмеженої кусково

гладкими поверхнями, на область Ω простору $OXYZ$. Якщо ці функції разом з частинами похідними неперервні в Ω_1 і визначник Якобі

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ в } \Omega_1, \quad (73)$$

то для потрібного інтеграла від неперервної функції f правильна формула заміни змінних

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \iiint_{\Omega_1} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw. \end{aligned} \quad (74)$$

Вираз $|J(u, v, w)| du dv dw$ називається елементом об'єму в криволінійних координатах u, v, w .

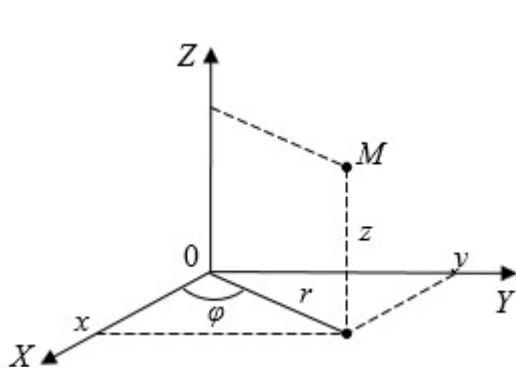
Найуживанішими з криволінійних координат є циліндричні координати r, φ, z : $x = r \cos \varphi$; $y = r \sin \varphi$; $z = z$, якобіан $J(r, \varphi, z) = r$ і формула (74) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \iiint_{\Omega_1} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz, \end{aligned} \quad (75)$$

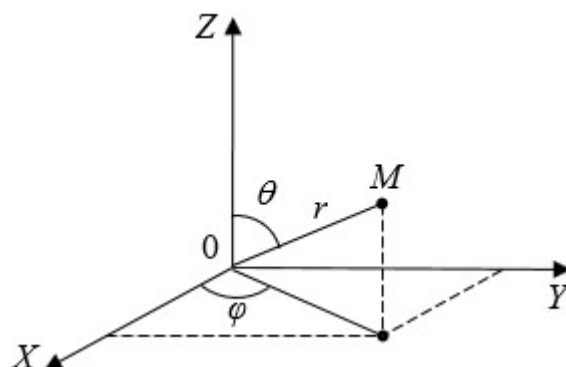
а також сферичні координати r, φ, θ : $x = r \cos \varphi \sin \theta$; $y = r \sin \varphi \sin \theta$; $z = r \cos \theta$, якобіан $|J| = r^2 \sin \theta$ і

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \\ & = \iiint_{\Omega_1} f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta. \end{aligned} \quad (76)$$

Нагадування ($r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$)



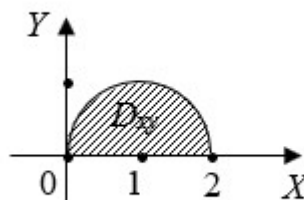
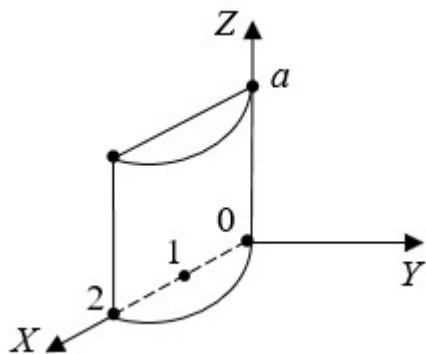
циліндрична
система координат



сферична
система координат

Приклад 2. Обчислити $\iiint_{\Omega} z(x^2 + y^2) dx dy dz$, де Ω – тіло, обмежене поверхнями: $x^2 + y^2 = 2x$; $y = 0$ ($y > 0$); $z = 0$, $z = a$.

Розв'язання. Рівняння $x^2 + y^2 - 2x = 0$ або $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ визначає в просторі циліндр, в основі якого коло $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ з центром в точці $(1, 0)$ і твірні якого паралельні осі OZ . Побудуємо область та її проєкцію D_{xy} на площину XOY .



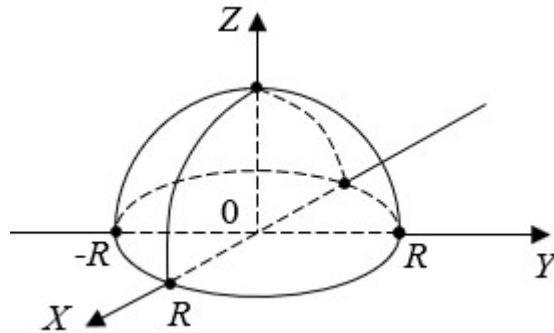
Перейдемо до циліндричних координат $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$. Очевидно, що $0 \leq z \leq a$. Бачимо, що проєкцією тіла Ω на площину XOY є частина круга $D_{xy} = \{(x, y) : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$. Тому $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq r \leq 2 \cos \varphi$ (це отримано з рівняння кола в полярних координатах $(x - 1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (r \cos \varphi - 1)^2 + r^2 \sin^2 \varphi = r^2 \cos^2 \varphi - 2r \cos \varphi +$

$1 + r^2 \sin^2 \varphi \Rightarrow r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - 2r \cos \varphi = 1 - 1 \Rightarrow r^2 = 2r \cos \varphi$,
 $r \neq 0$, $r = 2 \cos \varphi$). Застосуємо формулу (75), маємо

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z (x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_0^a dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} z \cdot r^2 \cdot r dr = \\ &= \int_0^a z dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^{2 \cos \varphi} d\varphi = \int_0^a z dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{16}{4} \cos^4 \varphi d\varphi = \\ &= 4 \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2 \cos 2\varphi + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4\varphi \right) d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\frac{3}{2} \varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{8} \sin 4\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2 \pi}{8} + 0 = \frac{3a^2 \pi}{8}. \end{aligned}$$

Приклад 3. Обчислити $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$, якщо Ω – тіло, обмежене верхньою половиною сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ та площиною $z = 0$.

Розв'язання. Перейдемо до сферичної системи координат $x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$, $z = r \cos \theta$.



Тут $0 \leq r \leq R$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$; $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Вираз $x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi = r^2 \sin^2 \theta$. Скористаємось формулою (76)

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin^2 \theta r^2 \sin \theta d\theta = \\
 &= \int_0^R r^4 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta = - \int_0^R r^4 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta = \\
 &= - \int_0^R r^4 dr \int_0^{2\pi} \left(\cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \\
 &= \int_0^R r^4 dr \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} d\varphi = \frac{2}{3} \int_0^R r^4 dr (2\pi - 0) = \frac{4\pi}{3} \int_0^R r^4 dr = \\
 &= \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{r^5}{5} \Big|_0^R = \frac{4\pi}{15} R^5.
 \end{aligned}$$

4. Застосування потрійного інтеграла

1) Об'єм тіла Ω у тривимірному просторі обчислюється за формулою

$$V = \iiint_{\Omega} dx dy dz. \quad (77)$$

2) Якщо просторова область Ω заповнена масою з густиною $\rho(x, y, z)$, то маса тіла Ω дорівнює

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad (78)$$

а координати центра мас $C(x_c, y_c, z_c)$ обчислюються за формулами

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}; \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}; \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m}, \quad (79)$$

де M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} – статичні моменти тіла відносно координатних площин YOZ, XOZ, XOY :

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \iiint_{\Omega} x\rho(x, y, z)dx dy dz, & M_{xz} &= \iiint_{\Omega} y\rho(x, y, z)dx dy dz, \\ M_{xy} &= \iiint_{\Omega} z\rho(x, y, z)dx dy dz. \end{aligned} \quad (80)$$

Моменти інерції тіла просторової області Ω , заповненої масою з густиною ρ , відносно осей OX, OY, OZ :

$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_{\Omega} (z^2 + y^2) \rho(x, y, z)dx dy dz, \\ I_y &= \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z)dx dy dz, \\ I_z &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z)dx dy dz. \end{aligned} \quad (81)$$

Приклад 4. Знайти координати центра мас півкулі $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0$, якщо густина в кожній точці пропорційна відстані від цієї точки до центра кулі.

Розв’язання. З умови задачі маємо, що $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Внаслідок симетрії тіла отримаємо, що $x_c = y_c = 0$. Знайдемо z_c . Для цього маємо знайти M_{xy} та m , які обчислюються так:

$$m = k \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz =$$

$$= k \iiint_{\Omega_1} \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta} r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta =$$

$$= k \iiint_{\Omega_1} r^3 \sin \theta dr d\varphi d\theta = k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^R r^3 dr =$$

$$= k \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot (-\cos \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = 2k\pi \cdot 1 \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{k\pi R^4}{2},$$

$$M_{xy} = k \iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz =$$

$$= k \iiint_{\Omega_1} r \cos \theta r^3 \sin \theta dr d\varphi d\theta = k \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \times$$

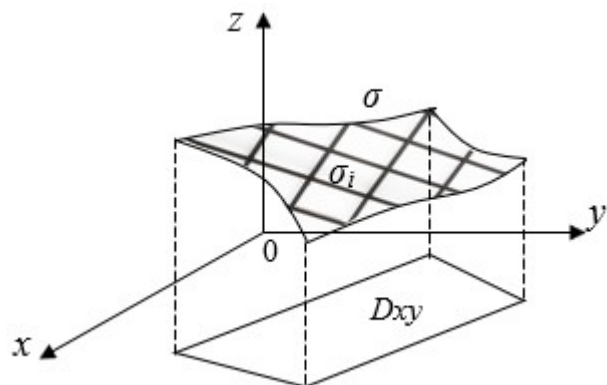
$$\times \int_0^R r^4 dr = k \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d(\sin \theta) \cdot \frac{r^5}{5} \Big|_0^R =$$

$$= k \cdot 2\pi \cdot \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{R^5}{5} = k \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{1}{5} k\pi R^5.$$

Отже, $z_c = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{2}{5}R$, а тому $C \left(0, 0, \frac{2}{5}R \right)$.

Тема 8. Поверхневі інтеграли

1. Поверхневі інтеграли 1-го роду



Нехай σ – кусково гладка поверхня, на якій задана обмежена функція $f(M) = f(x, y, z)$. Розіб'ємо σ на n неперетинних частин σ_i , площі яких $\Delta\sigma_i$. Нехай діаметр σ_i позначимо $\text{diam}\sigma_i$, а найбільший з них буде λ :

$$\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \text{diam}\sigma_i.$$

На кожній частині σ_i виберемо довільну точку $M_i (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ і складемо інтегральну суму

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta\sigma_i.$$

Означення 1. Поверхневим інтегралом 1-го роду від функції f по поверхні σ називається границя інтегральної суми при $\lambda \rightarrow 0$, якщо вона існує, скінченна і не залежить ні від розбиття, ні від вибору точок M_i . Позначення:

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta\sigma_i.$$

У цьому випадку f називається інтегровною по σ , а σ є областю інтегрування.

Теорема. Якщо f – неперервна на σ , то f – інтегровна по σ .

Обчислення: поверхневий інтеграл першого роду зводиться до подвійного інтеграла. Нехай поверхня σ задана рівнянням $z =$

$z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$, тобто проєктується на XOY в область D_{xy} .

Тоді

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x(x, y))^2 + (z'_y(x, y))^2} dx dy.$$

Якщо σ проєктується на XOZ в D_{yz} чи на XOZ в D_{xz} , то відповідно

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} dy dz,$$

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + (y'_x)^2 + (y'_z)^2} dx dz.$$

Застосування поверхневих інтегралів 1-го роду

1. Площа P поверхні σ : $P = \iint_{\sigma} d\sigma$.

2. Фізичні застосування. Якщо на поверхні σ розподілено масу з поверхневою густиною $\nu = \nu(x, y, z)$, то

а) маса поверхні

$$m = \iint_{\sigma} \nu(x, y, z) d\sigma;$$

б) статичні моменти M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} відносно координатних площин YOZ, XOZ, XOY дорівнюють

$$M_{yz} = \iint_{\sigma} x \nu(x, y, z) d\sigma, \quad M_{xz} = \iint_{\sigma} y \nu(x, y, z) d\sigma,$$

$$M_{xy} = \iint_{\sigma} z \nu(x, y, z) d\sigma;$$

в) центр маси поверхні – точка $C(x_c, y_c, z_c)$:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m};$$

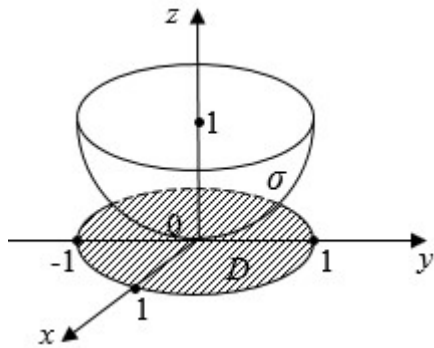
г) моменти інерції I_x , I_y , I_z відносно координатних осей OX , OY , OZ і момент інерції I_0 відносно початку відліку:

$$I_x = \iint_{\sigma} (y^2 + z^2) \nu d\sigma, \quad I_y = \iint_{\sigma} (x^2 + z^2) \nu d\sigma,$$

$$I_z = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) \nu d\sigma, \quad I_0 = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2 + z^2) \nu d\sigma.$$

Приклад 1. Знайти масу однорідної поверхні, обмеженої поверхнями $z = x^2 + y^2$ і $z = 1$.

Розв'язання. Побудуємо σ і спроектуємо її на XOY . Проекцією буде одиничний круг D . Нехай густина $\nu(x, y, z) = \nu_0$. Тоді



$$m = \iint_{\sigma} \nu_0 d\sigma =$$

$$= \iint_D \nu_0 \sqrt{1 + ((x^2 + y^2)'_x)^2 + ((x^2 + y^2)'_y)^2} dx dy =$$

$$= \nu_0 \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} dx dy.$$

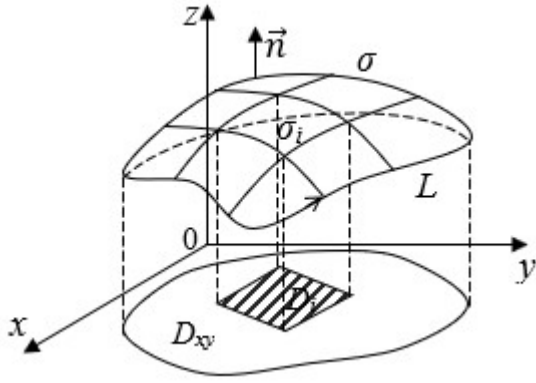
Перейдемо до полярних координат (ρ, φ) , де $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Тоді D перейде в $D^* = \{0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$. Отже,

$$m = \nu_0 \iint_{D^*} \sqrt{1 + 4\rho^2 \cos^2 \varphi + 4\rho^2 \sin^2 \varphi} d\rho d\varphi =$$

$$= \nu_0 \iint_{D^*} \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho d\varphi = \nu_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho =$$

$$\begin{aligned}
&= \nu_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{8} \int_0^1 (1 + 4\rho^2)^{\frac{1}{2}} d(1 + 4\rho^2) = \frac{\nu_0}{8} \cdot 2\pi \frac{(1 + 4\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \\
&= \frac{\nu_0 \pi}{4} \cdot \frac{2}{3} (5^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{\nu_0 \pi}{6} \cdot (5\sqrt{5} - 1).
\end{aligned}$$

2. Поверхневі інтеграли 2-го роду



Нехай σ – двостороння поверхня, обмежена контуром L без самоперетинів. Виберемо верхню сторону σ (де вектор нормалі $\vec{n}$ напрямлений вгору, див. мал.). Напрямок обходу контура L додатний, якщо при русі вздовж L поверхня залишається зліва, а напрям $\vec{n}$ збігається з напрямом від ніг до голови (на мал. – проти годинникової стрілки).

Нехай σ – гладка поверхня, яка задана рівнянням $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$, і на σ задана обмежена функція $R(x, y, z)$. Розіб'ємо σ на n частин σ_i , які не мають спільних точок. Проекція σ_i на XOY дорівнює D_i . Нехай ΔS_i – площа області D_i із знаком $+$, якщо обрана зовнішня сторона, і з $-$, якщо обрана внутрішня сторона σ . В кожній σ_i виберемо точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Інтегральна сума дорівнює:

$$\sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$

Нехай $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \text{diam}(\sigma_i)$ – максимальний діаметр поверхонь σ_i .

Означення 2. Поверхневим інтегралом 2-го роду від функції R по поверхні σ називається границя інтегральної суми при $\lambda \rightarrow 0$, якщо ця границя існує, скінченна і не залежить ні від

розбиття на σ_i , ні від вибору точок M_i . Позначення

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i.$$

Якщо σ проєктується на YOZ і XOZ в D_{yz} і D_{xz} відповідно, то є ще два поверхневі інтеграли

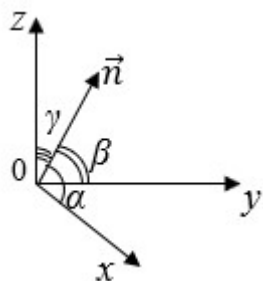
$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz \text{ і } \iint_{\sigma} Q(x, y, z) dx dz,$$

де P і Q визначені на σ . Тоді розглядають суму

$$\iint_{\sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy.$$

Розглянемо зв'язок поверхневого інтеграла 1-го і 2-го роду.

Нехай $d\sigma$ – елемент площі поверхні σ ; α, β, γ – кути між нормаллю $\vec{n}$ до σ і координатними осями OX, OY, OZ . Тоді



$$dx dy = \cos \gamma d\sigma, \quad dx dz = \cos \beta d\sigma,$$

$$dy dz = \cos \alpha d\sigma,$$

тому зв'язок між поверхневими інтегралами 1-го і 2-го роду такий:

$$\iint_{\sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \iint_{\sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma.$$

Фізичний зміст: якщо вектор $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ визначає швидкість рідини, то кількість Π рідини, яка протікає через поверхню σ за одиницю часу, називається *поток*ом вектора $\vec{F}$ через σ і дорівнює

$$\Pi = \iint_{\sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy.$$

Обчислення поверхневих інтегралів 2-го роду відбувається шляхом зведення до подвійних інтегралів.

Нехай R – неперервна, σ – гладка поверхня, яка задана рівнянням $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$. Тоді

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy,$$

причому $+$ беруть тоді, коли кут між $\vec{n}$ і Oz гострий, а $-$ якщо кут тупий. Аналогічно

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dy dz,$$

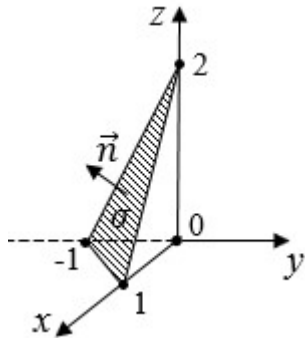
$$\iint_{\sigma} Q(x, y, z) dx dz = \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z) dx dz,$$

де D_{yz} – проєкція σ на YOZ , D_{xz} – проєкція σ на XOZ , а знаки $+$ чи $-$ вибираються залежно від того, чи кути між $\vec{n}$ і OX та між $\vec{n}$ і OY гострі чи тупі. Якщо σ спроектувати на всі координатні площини, то одержимо

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy &= \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dy dz \pm \\ &\pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z) dx dz \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Приклад 2. Обчислити $I = \iint_{\sigma} \left(x - y + \frac{3}{2}z \right) dy dz + x dx dz -$

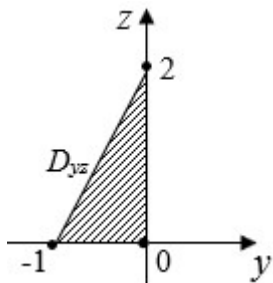
$z dx dy$, де σ – зовнішня сторона трикутника, утвореного перетином площини $2x - 2y + z - 2 = 0$ з координатними площинами.



Розв'язання. Побудуємо σ , записавши рівняння площини у відрізках:

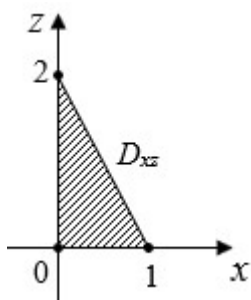
$$\frac{x}{1} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1.$$

Спроекуємо σ на координатні площини і визначимо D_{yz} , D_{xz} , D_{xy} . Запишемо $I = I_1 + I_2 + I_3$. Визначимо кути α , β , γ між $\vec{n}$ і осями координат: α , γ – гострі, β – тупий.



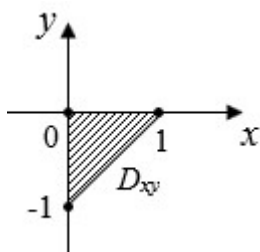
Оскільки $\begin{cases} 2x - 2y + z - 2 = 0, \\ x = 0, \end{cases}$ то $z = 2y + 2$, тому $D_{yz} = \{-1 \leq y \leq 0, 0 \leq z \leq 2y + 2\}$. Рівняння поверхні $x = y - \frac{z}{2} + 1$, тоді

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{\sigma} \left(x - y + \frac{3}{2}z \right) dydz = \\ &= \iint_{D_{yz}} \left(\left(y - \frac{z}{2} + 1 \right) - y + \frac{3}{2}z \right) dydz = \iint_{D_{yz}} (z + 1) dydz = \\ &= \int_{-1}^0 dy \int_0^{2y+2} (z + 1) dz = \int_{-1}^0 \left(\frac{z^2}{2} + z \right) \Big|_{z=0}^{z=2y+2} dy = \\ &= \int_{-1}^0 \left(\frac{(2y+2)^2}{2} + 2y + 2 - 0 \right) dy = \\ &= \int_{-1}^0 (2(y^2 + 2y + 1) + 2y + 2) dy = \int_{-1}^0 (2y^2 + 6y + 4) dy = \\ &= \left(\frac{2y^3}{3} + \frac{6y^2}{2} + 4y \right) \Big|_{-1}^0 = 0 - \left(-\frac{2}{3} + 3 - 4 \right) = 1\frac{2}{3}. \end{aligned}$$



Оскільки $\begin{cases} 2x - 2y + z - 2 = 0, \\ y = 0, \end{cases}$ то $z = 2 - 2x$ і $D_{xz} = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 2 - 2x\}$. Рівняння поверхні $y = x + \frac{z}{2} - 1$, β – тупий, тоді

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{\sigma} x dx dz = - \iint_{D_{xz}} x dx dz = \\ &= - \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} x dz = - \int_0^1 xz \Big|_{z=0}^{z=2-2x} dx = - \int_0^1 x(2 - 2x) dx = \\ &= - \int_0^1 (2x - 2x^2) dx = - \left(\frac{2x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = - \left(1 - \frac{2}{3} - 0 \right) = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$



Оскільки $\begin{cases} 2x - 2y + z - 2 = 0, \\ z = 0, \end{cases}$, то $y = x - 1$ і $D_{xy} = \{0 \leq x \leq 1, x - 1 \leq y \leq 0\}$. Рівняння поверхні $z = -2x + 2y + 2$. Тоді

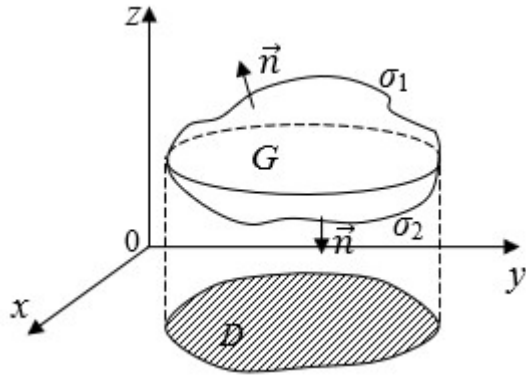
$$\begin{aligned} I_3 &= \iint_{\sigma} -z dx dy = \iint_{D_{xy}} -(-2x + 2y + 2) dx dy = \\ &= \iint_{D_{xy}} (2x - 2y - 2) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 (2x - 2y - 2) dy = \\ &= \int_0^1 \left(2xy - \frac{2y^2}{2} - 2y \right) \Big|_{y=x-1}^{y=0} dx = \int_0^1 (0 - (2x(x - 1) - (x - 1)^2 - \\ &\quad - 2(x - 1))) dx = \int_0^1 (-2x^2 + 2x + x^2 - 2x + 1 + 2x - 2) dx = \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 (-x^2 + 2x - 1) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} - x \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{3} + 1 - 1 = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Отже, } I = I_1 + I_2 + I_3 = 1\frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) = 1.$$

3. Формула Остроградського–Гаусса

Ця формула пов'язує поверхневі інтеграли по замкнутій поверхні і потрійні інтеграли по тілу, обмеженому цією поверхнею.



Нехай замкнута область G обмежена поверхнею σ : зверху частиною σ_1 , а знизу частиною σ_2 , $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$. Частина σ_1 задана рівнянням $z = z_1(x, y)$, а σ_2 – рівнянням $z = z_2(x, y)$, $(x, y) \in D$.

Нехай $R(x, y, z)$ та $R'_z(x, y, z)$ – неперервні в G . Обчислимо потрійний інтеграл, використовуючи формули для обчислення поверхневих інтегралів 2-го роду

$$\begin{aligned} \iiint_{\sigma} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_D dx dy \int_{z_2(x,y)}^{z_1(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \\ &= \iint_D R(x, y, z_1(x, y)) dx dy - \iint_D R(x, y, z_2(x, y)) dx dy = \\ &= \iint_{\sigma_1} R(x, y, z) dx dy - \left(- \iint_{\sigma_2} R(x, y, z) dx dy \right) = \\ &= \iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy. \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\iiint_{\sigma} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz,$$

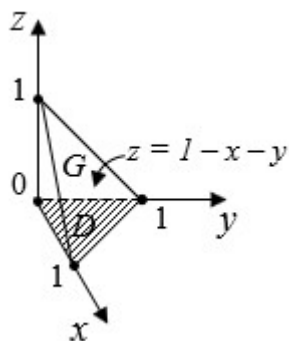
$$\iiint_{\sigma} \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_{\sigma} Q(x, y, z) dx dz.$$

Тому формула Остроградського-Гаусса має вигляд:

$$\iiint_{\sigma} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy.$$

Вона часто використовується для обчислення поверхневих інтегралів по замкнених поверхнях.

Приклад 3. Обчислити $I = \iint_{\sigma} x^2 dy dz + 3y dx dz - 2z dx dy$, де σ – зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z - 1 = 0$.



Розв'язання. Рівняння останньої площини у відрізках:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1.$$

Побудуємо піраміду. У нас $P = x^2$, $Q = 3y$, $R = -2z$, тому частинні похідні $P'_x = 2x$, $Q'_y = 3$, $R'_z = -2$. За формулою

Остроградського-Гаусса

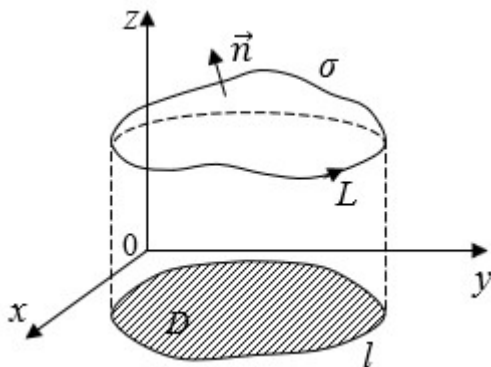
$$\begin{aligned} I &= \iiint_G (P'_x + Q'_y + R'_z) dx dy dz = \iiint_G (2x + 3 - 2) dx dy dz = \\ &= \iiint_G (2x + 1) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_0^{1-x-y} (2x + 1) dz = \\ &= \iint_D (2x + 1) z \Big|_{z=0}^{z=1-x-y} dx dy = \iint_D (2x + 1)(1 - x - y) dx dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_D (2x - 2x^2 - 2xy + 1 - x - y) dx dy = \iint_D (x - 2x^2 - \\
&- 2xy - y + 1) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x - 2x^2 - 2xy - y + 1) dy = \\
&= \int_0^1 \left(xy - 2x^2y - xy^2 - \frac{y^2}{2} + y \right) \Big|_{y=0}^{y=1-x} dx = \\
&= \int_0^1 \left(x(1-x) - 2x^2(1-x) - x(1-x)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2 + 1-x \right) dx = \\
&= \int_0^1 \left(x - x^2 - 2x^2 + 2x^3 - x + 2x^2 - x^3 - \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} + 1 - x \right) dx = \\
&= \int_0^1 \left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що при безпосередньому обчисленні інтеграла I треба би було знаходити інтеграли по кожній грані піраміди.

4. Формула Стокса

Ця формула пов'язує поверхневі та криволінійні інтеграли.



Нехай поверхня σ задається рівнянням $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$, де z, z'_x, z'_y — неперервні в D ; контур L обмежує σ ; l — проєкція L на xOy , $l = \partial D$ — межа D . Виберемо верхню сторону σ . Нехай функції P, P'_x, P'_y, P'_z — неперервні на σ .

Доведемо, що криволінійний інтеграл по замкнутому контуру L дорівнює

$$\oint_L P(x, y, z) dx = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) d\sigma.$$

Оскільки $z = z(x, y)$, то

$$\oint_L P(x, y, z) dx = \oint_l P(x, y, z(x, y)) dx.$$

Застосуємо формулу Гріна:

$$\oint_l P dx + Q dy = \iint_D (Q'_x - P'_y) dx dy,$$

де $Q = 0$. Тоді

$$\begin{aligned} \oint_l P(x, y, z(x, y)) dx &= - \iint_D \frac{\partial}{\partial y} P(x, y, z(x, y)) dx dy = \\ &= - \iint_D (P'_y + P'_z \cdot z'_y) dx dy = I. \end{aligned}$$

Далі відомо, що нормаль $\vec{n}$ колінеарна до свого орта $(\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma)$. З іншого боку, $\vec{n} = (-z'_x, -z'_y, 1)$, бо кут γ між $\vec{n}$ і OZ – гострий ($\cos \gamma > 0$). Маємо пропорційність:

$$\frac{\cos \beta}{\cos \gamma} = \frac{-z'_y}{1}, \quad z'_y = -\frac{\cos \beta}{\cos \gamma}.$$

Враховуючи це і рівність $dx dy = \cos \gamma d\sigma$, продовжуємо:

$$\begin{aligned} I &= - \iint_D \left(P'_y - P'_z \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right) dx dy = - \iint_{\sigma} \left(P'_y - P'_z \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right) \times \\ &\times \cos \gamma d\sigma = - \iint_{\sigma} (P'_y(x, y, z) \cos \gamma - P'_z(x, y, z) \cos \beta) d\sigma = \end{aligned}$$

$$= \iint_{\sigma} (P'_z \cos \beta - P'_y \cos \gamma) d\sigma.$$

Аналогічно доводяться рівності

$$\oint_L Q(x, y, z) dy = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos \gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos \alpha \right) d\sigma,$$

$$\oint_L R(x, y, z) dz = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos \beta \right) d\sigma.$$

Сума цих формул дає *формулу Стокса*:

$$\begin{aligned} \oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_{\sigma} & \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Врахувавши зв'язок між криволінійними інтегралами 1-го і 2-го роду, одержимо ще одну формулу:

$$\begin{aligned} \oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_{\sigma} & \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \\ & + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned} \quad (82)$$

Зауваження 1. *Формулу Стокса (82) легко запам'ятати, якщо підінтегральний вираз поверхневого інтеграла записати як визначник:*

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \\ & = \begin{vmatrix} dy dz & dx dz & dx dy \\ \frac{\partial \bullet}{\partial x} & \frac{\partial \bullet}{\partial y} & \frac{\partial \bullet}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Зауваження 2. З формули Стокса випливає, що якщо $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, то для всякої замкнутої лінії L криволінійний інтеграл дорівнює нулеві

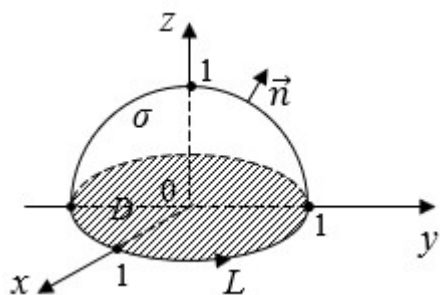
$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

тобто інтеграл не залежить від вигляду контура інтегрування.

Зауваження 3. За допомогою формули Стокса обчислюють криволінійні інтеграли 2-го роду по замкнутій кривій.

Приклад 4. За формулою Стокса обчислити $I = \oint_L x^2 y^3 dx + dy + z dz$, де L – коло $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$; σ – верхня сторона півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z > 0$; напрям L додатний.

Розв'язання. У нас $P = x^2 y^3$, $Q = 1$, $R = z$. За формулою Стокса



$$\begin{aligned} \oint_L Pdx + Qdy + Rdz &= \\ &= \iint_{\sigma} \begin{vmatrix} dydz & dx dz & dx dy \\ \frac{\partial \bullet}{\partial x} & \frac{\partial \bullet}{\partial y} & \frac{\partial \bullet}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Обчислимо визначник, розклавши за першим рядком:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} dydz & dx dz & dx dy \\ \frac{\partial \bullet}{\partial x} & \frac{\partial \bullet}{\partial y} & \frac{\partial \bullet}{\partial z} \\ x^2 y^3 & 1 & z \end{vmatrix} &= (z'_y - 1'_z) dydz - (z'_x - (x^2 y^3)'_z) dx dz + \\ &+ (1'_x - (x^2 y^3)'_y) dx dy = -3x^2 y^2 dx dy. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{\sigma} -3x^2y^2 dx dy = -3 \iint_D x^2y^2 dx dy = \\
 &= \left| \begin{array}{l} \text{перехід до полярних координат} \\ x = \rho \cos \varphi, \ y = \rho \sin \varphi \\ dx dy = \rho d\rho d\varphi \\ D \rightarrow D^* = \{0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \end{array} \right| = \\
 &= -3 \iint_{D^*} (\rho \cos \varphi)^2 (\rho \sin \varphi)^2 \rho d\rho d\varphi = -3 \iint_{D^*} \rho^5 (\sin \varphi \cos \varphi)^2 d\rho d\varphi = \\
 &= -\frac{3}{4} \iint_{D^*} \rho^5 \sin^2 2\varphi d\rho d\varphi = -\frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\varphi d\varphi \int_0^1 \rho^5 d\rho = \\
 &= -\frac{3}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} d\varphi \cdot \frac{\rho^6}{6} \Big|_0^1 = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \left(\varphi - \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = \\
 &= -\frac{1}{16} (2\pi - 0) = -\frac{\pi}{8}.
 \end{aligned}$$

Питання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення подвійного інтеграла через інтегральну суму. Який його геометричний зміст?
2. Які умови треба накласти на підінтегральну функцію для існування подвійного інтеграла?
3. Запишіть формули зведення подвійного інтеграла до повторного у випадку прямокутної області, криволінійної області.
4. Як змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі для області, що не є прямокутною?
5. У яких випадках при обчисленні подвійного інтеграла доцільно переходити до полярних координат? Як це зробити?
6. Що таке якобіан? Обчисліть якобіан для переходу до полярної системи координат у подвійному інтегралі.
7. У яких задачах фізики застосовується подвійний інтеграл?
8. Введіть поняття криволінійного інтеграла 1-го роду (по довжині дуги кривої). Наведіть умови його існування та властивості.
9. Запишіть формули для обчислення криволінійного інтеграла 1-го роду у випадку явного, полярного, параметричного задання кривої.
10. Наведіть приклади фізичного застосування криволінійного інтеграла 1-го роду.
11. Введіть поняття криволінійного інтеграла 2-го роду, наведіть формули для його обчислення.
12. Чим відрізняється криволінійний інтеграл 1-го роду (за довжиною дуги) від 2-го роду (за координатою)?
13. Чи зміниться значення криволінійного інтеграла 1-го роду та 2-го роду при зміні напрямку обходу кривої?
14. Назвіть умови, за яких криволінійний інтеграл 2-го роду не залежить від шляху інтегрування.
15. Що ви знаєте про властивості криволінійного інтеграла по замкнутій лінії?

16. Сформулюйте формулу Гріна. Який зв'язок вона встановлює між подвійним та криволінійним інтегралами?

17. Наведіть приклади застосування криволінійного інтеграла 2-го роду.

18. Сформулюйте означення та властивості потрійного інтеграла.

19. Запишіть формули для обчислення потрійного інтеграла у випадку паралелепіпеда, об'ємного тіла.

20. Опишіть перехід до циліндричних координат у потрійному інтегралі. Для яких областей він найзручніший?

21. У яких випадках для обчислення потрійного інтеграла використовують сферичні координати? Назвіть межі зміни кутів.

22. Як за допомогою потрійного інтеграла обчислити масу та координати центра мас просторового тіла? Які ще застосування знаєте?

23. Що називають поверхневим інтегралом 1-го роду та як він зводиться до подвійного інтеграла?

24. Введіть поняття поверхневого інтеграла 2-го роду, його фізичний зміст та властивості.

25. Наведіть приклади застосування поверхневих інтегралів у фізиці.

26. Сформулюйте теорему Остроградського-Гауса.

27. Сформулюйте теорему Стокса. Який зв'язок вона встановлює між поверхневим та криволінійним інтегралом?

Завдання для самостійної роботи

Задача 10. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі. Область інтегрування зобразити на рисунку.

- | | |
|---|--|
| 10.1. $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy.$ | 10.2. $\int_0^1 dx \int_x^{x^2} f(x, y) dy.$ |
| 10.3. $\int_0^{2/3} dy \int_{2y^2}^{y+3} f(x, y) dx.$ | 10.4. $\int_0^1 dx \int_{-x^2}^{x^2} f(x, y) dy.$ |
| 10.5. $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy.$ | 10.6. $\int_1^0 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$ |
| 10.7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\cos x} f(x, y) dy.$ | 10.8. $\int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy.$ |
| 10.9. $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$ | 10.10. $\int_0^1 dx \int_{x^2+2}^{4-x} f(x, y) dy.$ |
| 10.11. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy.$ | 10.12. $\int_{-2}^1 dy \int_{y^2}^4 f(x, y) dx.$ |
| 10.13. $\int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} f(x, y) dy.$ | 10.14. $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^2 f(x, y) dy.$ |
| 10.15. $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$ | 10.16. $\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy.$ |
| 10.17. $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$ | 10.18. $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy.$ |
| 10.19. $\int_0^1 dy \int_{2y^2}^{3-y} f(x, y) dx.$ | 10.20. $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy.$ |
| 10.21. $\int_2^4 dx \int_x^{x+3} f(x, y) dy.$ | 10.22. $\int_0^2 dx \int_{2x}^{6-x} f(x, y) dy.$ |
| 10.23. $\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^0 f(x, y) dy.$ | 10.24. $\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x, y) dy.$ |
| 10.25. $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{2-x} f(x, y) dy.$ | 10.26. $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^x f(x, y) dy.$ |
| 10.27. $\int_{-1}^0 dx \int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$ | 10.28. $\int_1^3 dx \int_{\frac{2}{x}}^{10-x} f(x, y) dy.$ |
| 10.29. $\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x f(x, y) dy.$ | 10.30. $\int_0^1 dx \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} f(x, y) dy.$ |

Задача 11. Обчислити подвійний інтеграл, в якому область інтегрування D обмежена заданими лініями. Область D зобразити на рисунку.

- 11.1. $\iint_D (x + y) dx dy$, де область D обмежена лініями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.

- 11.2. $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, де область D обмежена лініями $y = 0$, $y = x$, $x = 1$.
- 11.3. $\iint_D (x + y) dx dy$, де область D обмежена лініями $x = y^2$, $y = x^2$.
- 11.4. $\iint_D (x - y) dx dy$, де область D обмежена лініями $y = x$, $y = 0$, $x + y = 2$.
- 11.5. $\iint_D xy dx dy$, де область D обмежена лініями $x = 2$, $2x = y^2$.
- 11.6. $\iint_D x^2/y^2 dx dy$, де область D обмежена лініями $x = 2$, $y = x$, $xy = 1$.
- 11.7. $\iint_D e^{x/y} dx dy$, де область D обмежена лініями $x = y^2$, $x = 0$, $y = 1$.
- 11.8. $\iint_D \cos(x + y) dx dy$, де область D обмежена лініями $x = 0$, $y = \pi$, $y = x$.
- 11.9. $\iint_D \frac{1}{\sqrt{ax-x^2}} dx dy$, де область D обмежена лініями $x = 0$, $y^2 = a^2 - ax$.
- 11.10. $\iint_D xy dx dy$, де область D обмежена лініями $y = x^2$, $y = 1 - x^2$.
- 11.11. $\iint_D (x + y) dx dy$, де область D – трикутник з вершинами $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(0;1)$.
- 11.12. $\iint_D xy^2 dx dy$, де область D обмежена лініями $x = 1$, $x = y^2$.
- 11.13. $\iint_D (y + 1)^{-2} dx dy$, де область D обмежена лініями $y = 1 - x^2$, $y = 0$.
- 11.14. $\iint_D \frac{x}{\sqrt{y}} dx dy$, де область D обмежена лініями $xy = 4$, $x + y = 5$.
- 11.15. $\iint_D \frac{y^2}{x^2+y^2} dx dy$, де область D обмежена лініями $y = x$, $y = -x$, $y = 1$.
- 11.16. $\iint_D (x + y) dx dy$, де область D – трапеція з вершинами $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(1;1)$, $C(0;1)$.
- 11.17. $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, де область D обмежена лініями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.
- 11.18. $\iint_D \sqrt{1 - y^2} dx dy$, де область D обмежена лініями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.
- 11.19. $\iint_D x dx dy$, де область D обмежена лініями $y = 0$, $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi$.
- 11.20. $\iint_D (x - y) dx dy$, де область D обмежена лініями $x = 0$, $y = x$, $y = 2 - x^2$ ($x > 0$).

- 11.21. $\iint_D x^2 y dx dy$, де область D обмежена лініями $x = 0$, $y = 0$, $y = 2 - x$.
- 11.22. $\iint_D (x + y) dx dy$, де область D обмежена лініями $x = 2$, $y = x$, $y = \frac{1}{x}$.
- 11.23. $\iint_D xy dx dy$, де область D обмежена лініями $x = 4$, $y = x$, $y = \frac{x}{2}$.
- 11.24. $\iint_D y dx dy$, де область D обмежена лініями $x = 0$, $y = 2$, $x = y^2$.
- 11.25. $\iint_D (x + 2y) dx dy$, де область D обмежена лініями $x = 0$, $y = 2x - 1$, $y = 2 - x^2$ ($x > 0$).
- 11.26. $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, де область D обмежена лініями $x = \pi$, $y = \frac{x}{2}$, $y = 2x$.
- 11.27. $\iint_D x dx dy$, де область D обмежена лініями $y = 2$, $y = 2x$, $y = \frac{x}{2}$.
- 11.28. $\iint_D (2x + 3y) dx dy$, де область D обмежена лініями $x = y^2$, $y = x^2$.
- 11.29. $\iint_D (x - 2y) dx dy$, де область D обмежена лініями $x = 1$, $y = 1$, $x + y = 3$.
- 11.30. $\iint_D xy dx dy$, де область D обмежена лініями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = -1$.

Задача 12. Побудувати область D , обмежену заданими лініями. За допомогою подвійного інтеграла обчислити: а) площу фігури D ; б) центр мас однорідної пластини, яка має форму вказаної фігури D і густину $\rho = 1$; в) статичні моменти та моменти інерції цієї пластини відносно координатних осей.

- 12.1. D : $x = y^2 + 1$, $x + y = 3$.
- 12.2. D : $4x = y^2$, $4y = x^2$
- 12.3. D : $y = 2x - x^2$, $x = 2$, $x = 0$, $y = 2^x$.
- 12.4. D : $4 - x = y^2$, $y = x + 2$, $y = 2$, $y = -2$.
- 12.5. D : $4y = x^2$, $y = \frac{x}{2} + 2$.
- 12.6. D : $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.
- 12.7. D : $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $y \leq \frac{x}{2}$, $y \geq 0$.

- 12.8. $D: y = x^2, y = \frac{3}{4}x^2 + 1.$
- 12.9. $D: y = x^2, xy = 1, x = 0, y = 2.$
- 12.10. $D: y = \frac{1}{4}x^2, y = \frac{x}{2} + 2.$
- 12.11. $D: x = 1, y = 2, y = \ln x.$
- 12.12. $D: y = x^2, x = -1, x = 1, y = 0.$
- 12.13. $D: y = \cos x, x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = 0.$
- 12.14. $D: y = \frac{1}{x}, y = 1, y = 2, x = 0.$
- 12.15. $D: x = y^2, x = y.$
- 12.16. $D: 4x = y^2, x = 1, y = 0.$
- 12.17. $D: x = y^2, x = 1.$
- 12.18. $D: y = x, y = 1, x = 0.$
- 12.19. $D: y^2 = 4x + 4, y^2 = -2x + 4.$
- 12.20. $D: y = x, y = x + 4, x = 1, x = 4.$
- 12.21. $D: y = \frac{1}{2}x^2, y = x.$
- 12.22. $D: y = \cos x, y = \sin x, x = 0.$
- 12.23. $D: 2x = y^2, x = 1/2.$
- 12.24. $D: y = x^2, x + y = 2.$
- 12.25. $D: x + y = 5, xy = 4.$
- 12.26. $D: x + y = 4, x = 0, y = 0.$
- 12.27. $D: x + 1 = y^2, x = 3.$
- 12.28. $D: y = 2x^3, 2x = y^2.$
- 12.29. $D: y = \sin x, y = 0, x = \pi/2.$
- 12.30. $D: y = \cos x, y = 1, x = \pi/2.$

Задача 13. Обчислити інтеграл, переходячи до полярних координат.
Побудувати область інтегрування.

13.1. $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2} dy.$

13.2. $\iint_A (x^2 + y^2) dx dy$, де A – круг $x^2 + y^2 \leq 4$.

- 13.3. $\iint_A \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, де A – кільце $\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$.
- 13.4. $\int_0^{\sqrt{2}/2} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dx$.
- 13.5. $\iint_A \sqrt{x^2 + y^2 - 9} dx dy$, де A обмежена колами $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 25$.
- 13.6. $\iint_A \sqrt{4-x^2-y^2} dx dy$, де A обмежена лініями $x = 0$, $y = 0$, $x^2 + y^2 = 4$ ($x \geq 0, y \geq 0$).
- 13.7. $\iint_A (x^2 + y^2) dx dy$, де A обмежена лініями $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $(x-2)^2 + y^2 = 4$.
- 13.8. $\iint_A 5 dx dy$, де A задана умовами $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 4$.
- 13.9. $\int_0^{\sqrt{2}} dx \int_x^{\sqrt{4-x^2}} e^{x^2+y^2} dy$.
- 13.10. $\iint_A \sqrt{x^2 + y^2 - 1} dx dy$, де A – кільце $1 \leq x^2 + y^2 \leq 25$.
- 13.11. $\iint_A \sin(x^2 + y^2) dx dy$, де A – кільце $\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$.
- 13.12. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dx$.
- 13.13. $\iint_A (x^2 + y^2)^2 dx dy$, де A – кільце $\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.
- 13.14. $\iint_A \sqrt{4-x^2-y^2} dx dy$, де A – верхня половина круга $x^2 + y^2 \leq 4$.
- 13.15. $\iint_A \cos(x^2 + y^2) dx dy$, де A обмежена лініями $x^2 + y^2 = 1$, $y = x$, $x \geq 0$.
- 13.16. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2} dy$.
- 13.17. $\iint_A \sqrt{x^2 + y^2 - 9} dx dy$, де A – круг $x^2 + y^2 \leq 16$.
- 13.18. $\iint_A (x^2 + y^2)^3 dx dy$, де A задана умовами $x \leq 0$, $y \geq -x$, $x^2 + y^2 \leq 1$.
- 13.19. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dx$.
- 13.20. $\iint_A (x^2 + y^2) dx dy$, де A задана умовами $y \leq -x$, $x^2 + y^2 \leq 4$.
- 13.21. $\iint_A (x^2 + y^2)^4 dx dy$, де A задана умовами $x \leq 0$, $y \geq x$, $x^2 + y^2 \leq 9$.

13.22. $\iint_A \sin(x^2 + y^2) dx dy$, де A задана умовами $x \geq 0$, $y \geq x$,
 $x^2 + y^2 \leq \pi^2$.

13.23. $\iint_A (x^2 + y^2) dx dy$, де A задана умовами $x \geq 0$, $y \geq 0$,
 $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.

13.24. $\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2 + y^2) dy$.

13.25. $\iint_A 2 dx dy$, де A задана умовами $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \leq x^2$, $x^2 + y^2 \leq 2$.

13.26. $\iint_A \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, де A задана умовами $x \geq 0$, $y \geq x$, $x^2 + y^2 \leq 4$.

13.27. $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy$.

13.28. $\iint_A \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, де A – верхня половина кільця $\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 9\pi^2$.

13.29. $\iint_A dx dy$, де A обмежена лініями $y = 2 - x$, $x^2 + y^2 = 1$
($x \geq 0$, $y \geq 0$).

13.30. $\iint_A (x^2 + y^2 - 1) dx dy$, де A обмежена лініями $y = x$, $y = -x$,
 $x^2 + y^2 = 1$ ($y \geq 0$).

Задача 14. Обчислити потрібний інтеграл. Побудувати область інтегрування V .

14.1. $\iiint_V (2x^2 + 3y + z) dx dy dz$, де V задана умовами $2 \leq x \leq 3$, $-1 \leq y \leq 2$,
 $0 \leq z \leq 4$.

14.2. $\iiint_V x^2 y z dx dy dz$, де V задана умовами $-1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$, $2 \leq z \leq 3$.

14.3. $\iiint_V (x + y + 4z^2) dx dy dz$, де V задана умовами $-1 \leq x \leq 1$,
 $0 \leq y \leq 2$, $-1 \leq z \leq 1$.

14.4. $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, де V задана умовами $0 \leq x \leq 3$, $-1 \leq y \leq 2$,
 $0 \leq z \leq 2$.

14.5. $\iiint_V x^2 y^2 z^2 dx dy dz$, де V задана умовами $-1 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 2$,
 $-2 \leq z \leq 5$.

14.6. $\iiint_V (x + y + z) dx dy dz$, де V задана умовами $0 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 0$, $1 \leq z \leq 2$.

14.7. $\iiint_V (2x - y^2 - z) dx dy dz$, де V задана умовами $1 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 2$, $-1 \leq z \leq 0$.

14.8. $\iiint_V 5x y z^2 dx dy dz$, де V задана умовами $-1 \leq x \leq 0$, $2 \leq y \leq 3$, $1 \leq z \leq 4$.

14.9. $\iiint_V 2x y^2 z dx dy dz$, де V задана умовами $0 \leq x \leq 3$, $-2 \leq y \leq 0$, $1 \leq z \leq 2$.

14.10. $\iiint_V (x^2 + 2y^2 - z) dx dy dz$, де V задана умовами $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 3$, $-1 \leq z \leq 2$.

14.11. $\iiint_V (x + 2yz) dx dy dz$, де V задана умовами $-2 \leq x \leq 0$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 2$.

14.12. $\iiint_V (x + yz^2) dx dy dz$, де V задана умовами $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, $1 \leq z \leq 3$.

14.13. $\iiint_V (x y + 3z) dx dy dz$, де V задана умовами $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $1 \leq z \leq 2$.

14.14. $\iiint_V (x y - z^2) dx dy dz$, де V задана умовами $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$, $-1 \leq z \leq 3$.

14.15. $\iiint_V (x^3 + yz) dx dy dz$, де V задана умовами $-1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

14.16. $\iiint_V (x^3 + y^2 - z) dx dy dz$, де V задана умовами $0 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 0$, $0 \leq z \leq 1$.

14.17. $\iiint_V (2x^2 + y - z^2) dx dy dz$, де V задана умовами $0 \leq x \leq 1$, $-2 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

14.18. $\iiint_V x^2 y z^2 dx dy dz$, де V задана умовами $0 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 2$, $-1 \leq z \leq 0$.

14.19. $\iiint_V (x + y - z) dx dy dz$, де V задана умовами $0 \leq x \leq 4$, $1 \leq y \leq 3$,
 $-1 \leq z \leq 5$.

14.20. $\iiint_V (x + 2y + 3z) dx dy dz$, де V задана умовами $-1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$,
 $1 \leq z \leq 2$.

14.21. $\iiint_V (3x^2 + 2y + z) dx dy dz$, де V задана умовами $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$,
 $-1 \leq z \leq 3$.

14.22. $\iiint_V (xy - z^3) dx dy dz$, де V задана умовами $0 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 2$,
 $0 \leq z \leq 3$.

14.23. $\iiint_V x^3 yz dx dy dz$, де V задана умовами $-1 \leq x \leq 2$, $1 \leq y \leq 3$,
 $0 \leq z \leq 1$.

14.24. $\iiint_V xy^2z dx dy dz$, де V задана умовами $-2 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$,
 $0 \leq z \leq 3$.

14.25. $\iiint_V xyz^2 dx dy dz$, де V задана умовами $0 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 0$,
 $0 \leq z \leq 4$.

14.26. $\iiint_V (x + yz) dx dy dz$, де V задана умовами $0 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 4$,
 $0 \leq z \leq 2$.

14.27. $\iiint_V (x + y^2 - z^2) dx dy dz$, де V задана умовами $-2 \leq x \leq 0$, $1 \leq y \leq 2$,
 $0 \leq z \leq 5$.

14.28. $\iiint_V (x + y + z^2) dx dy dz$, де V задана умовами $-1 \leq x \leq 0$, $0 \leq y \leq 1$,
 $2 \leq z \leq 3$.

14.29. $\iiint_V (x + y^2 - 2z) dx dy dz$, де V задана умовами $1 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 3$,
 $0 \leq z \leq 1$.

14.30. $\iiint_V (x^3 + y + z^2) dx dy dz$, де V задана умовами $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$,
 $0 \leq z \leq 4$.

Задача 15. Розставити межі інтегрування в потрібному інтегралі $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$, де область інтегрування V обмежена заданими поверхнями. Побудувати область V .

- 15.1. V : $x = 1, x = 2, y = 4x, y = 3\sqrt{x}, z = 4$ ($z \geq 0$).
- 15.2. V : $x = 1, y = 3x, z = 2x^2 + 2y^2$ ($y \geq 0, z \geq 0$).
- 15.3. V : $x = 1, y = 4x, z = \sqrt{3y}$ ($z \geq 0$).
- 15.4. V : $x = 3, y = x, z = 3x^2 + y^2$ ($y \geq 0, z \geq 0$).
- 15.5. V : $y = 2, y = 2x, z = 2\sqrt{x}$ ($x \geq 0, z \geq 0$).
- 15.6. V : $x = 0, y = 5, y = x, z = 2x^2 + y^2$ ($z \geq 0$).
- 15.7. V : $y = 1, y = 2x, x + y + z = 3$ ($x \geq 0, z \geq 0$).
- 15.8. V : $y = 3, y = 3x, x = 3\sqrt{z}$ ($x \geq 0, z \geq 0$).
- 15.9. V : $x = 5, y = x/5, z = x^2 + 5y^2$ ($y \geq 0, z \geq 0$).
- 15.10. V : $x = 2, y = 4x, y = 2\sqrt{z}$ ($y \geq 0, z \geq 0$).
- 15.11. V : $x = 3, y = x/3, z = (x^2 + y^2)/2$ ($y \geq 0, z \geq 0$).
- 15.12. V : $x = 4, y = x/4, z = 4y^2$ ($y \geq 0, z \geq 0$).
- 15.13. V : $y = 3, y = 3x, z = 2x^2 + 2y^2$ ($x \geq 0, z \geq 0$).
- 15.14. V : $y = 8, y = 4x, z = 3x^2 + y^2$ ($x \geq 0, z \geq 0$).
- 15.15. V : $y = 10, y = 5x, z = x^2 + y^2$ ($x \geq 0, z \geq 0$).
- 15.16. V : $y = 2, y = x, y = -x, z = 3x^2 + 3y^2$ ($z \geq 0$).
- 15.17. V : $x = 1, y = 2x, y = 3x, z = 2x^2 + y^2$ ($z \geq 0$).
- 15.18. V : $y = 1, y = x, y = -2x, z = x^2 + 4y^2$ ($z \geq 0$).
- 15.19. V : $y + x = 1, z = 3x^2 + 2y^2$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).
- 15.20. V : $2y + 3x = 6, z = x^2 + y^2$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).
- 15.21. V : $x + y = 2, z = 4 - x^2 - y^2$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).
- 15.22. V : $x + y = 3, z = 9 - x^2 - y^2$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).
- 15.23. V : $3x + 4y = 12, z = 6 - x^2 - y^2$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).
- 15.24. V : $y = 3, y = x, z = 18 - x^2 - y^2$ ($x \geq 0, z \geq 0$).
- 15.25. V : $y = 3x, z = 2, z = 4x^2 + 4y^2$ ($y \geq 0, z \geq 0$).
- 15.26. V : $y = 4, y = 2x, z = 10 - x^2 - y^2$ ($x \geq 0, z \geq 0$).

- 15.27. $V: x = 3, y = 2x, z = 4\sqrt{y} \ (y \geq 0, z \geq 0)$.
- 15.28. $V: 2x + 3y = 6, z = 3 + x^2 + y^2 \ (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$.
- 15.29. $V: x + 2y = 4, z = 16 - x^2 - y^2 \ (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$.
- 15.30. $V: x + y = 4, z = x^2 + y^2 \ (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$.

Задача 16. Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду.

- 16.1. $\int_L (xy + 2y^2)dl$, де лінія L – це дуга кола $x^2 + y^2 = 1$ від точки $A(1;0)$ до $B(-1;0)$ ($y \geq 0$).
- 16.2. $\int_L \frac{1}{\sqrt{x^4 + y^2 + 4}}dl$, де лінія L – це відрізок AB , $A(1;0)$, $B(-1;0)$.
- 16.3. $\int_L (3y + xz)dl$, де L – це частина лінії $x = 2t, y = \frac{t^3}{3}, z = t^2$ від точки $O(0;0;0)$ до $B(2;\frac{1}{3};1)$.
- 16.4. $\int_L (x + y)^5dl$, де лінія L – це відрізок AB , $A(0;0)$, $B(2;0)$.
- 16.5. $\int_L xydl$, де лінія L – це дуга параболи $y = 2x^2$ від точки $A(1;2)$ до $B(2;8)$.
- 16.6. $\int_L xy^2dl$, де лінія L – це відрізок AB , $A(2;0)$, $B(2;4)$.
- 16.7. $\int_L y^2dl$, де лінія L – це частина циклоїди $x = 8(t - \sin t)$,
 $y = 8(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$.
- 16.8. $\int_L \sqrt{x^2 + y^2}dl$, де лінія L – це дуга кривої $x = \cos t + t \sin t$,
 $y = \sin t - t \cos t$, $0 \leq t \leq \pi/2$.
- 16.9. $\int_L (yx^2 - 3)dl$, де лінія L – це відрізок AB , $A(2;4)$, $B(0;4)$.
- 16.10. $\int_L (x^2 + y^2)^3dl$, де лінія L – це частина кола $x^2 + y^2 = 4$ у першій чверті.
- 16.11. $\int_L (y - 2x)dl$, де лінія L – це відрізок AB , $A(0;1)$, $B(2;0)$.
- 16.12. $\int_L xdl$, де лінія L – це частина лінії $y = x^3$ від точки $A(0;0)$ до $B(1;1)$.
- 16.13. $\int_L (x + 2y)dl$, де лінія L – це відрізок BC , $B(1;1)$, $C(3;5)$.

16.14. $\int_L xdl$, де лінія L – це частина прямої $x = 2t$, $y = 2t - 2$, $z = -t + 2$, $0 \leq t \leq 1$.

16.15. $\int_L zdl$, де лінія L – це частина гвинтової лінії $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq \pi$.

16.16. $\int_L (xy + 2y^2)dl$, де лінія L – це дуга кола $x^2 + y^2 = 1$ у другому координатному куті.

16.17. $\int_L (z + y)dl$, де лінія L – це відрізок MB , $M(0;0;0)$, $B(1;2;1)$.

16.18. $\int_L dl$, де лінія L – це частина лінії $x = 2t$, $y = t^3/3$, $z = t^2$ від точки $O(0;0;0)$ до $A(4;\frac{8}{3};4)$.

16.19. $\int_L (x + y)dl$, де лінія L – це відрізок AB , $A(1;1)$, $B(-2;3)$.

16.20. $\int_L xdl$, де лінія L – це дуга параболи $y = x^2$ від точки $A(1;1)$ до $B(2;4)$.

16.21. $\int_L 2xy^3dl$, де лінія L – це відрізок AB , $A(2;1)$, $B(-2;0)$.

16.22. $\int_L y^2dl$, де лінія L – це частина циклоїди $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

16.23. $\int_L (x^2 + y^3 - 3)dl$, де лінія L – це відрізок AB , $A(2;3)$, $B(-2;3)$.

16.24. $\int_L (x^2 + y^2)dl$, де лінія L – це дуга кола $x^2 + y^2 = 3$ в третій чверті.

16.25. $\int_L xdl$, де лінія L – це дуга $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$ від точки $K(-3;3;-2)$ до $M(\frac{3}{2};\frac{3}{4};\frac{1}{4})$.

16.26. $\int_L xyzdl$, де лінія L – це відрізок CP , $C(-1;1;1)$, $P(2;3;-4)$.

16.27. $\int_L xdl$, де лінія L – це частина лінії $y = 2x^3 - 5$ від точки $A(0;0;-5)$ до $B(1;-3)$.

16.28. $\int_L \sin xdl$, де лінія L – це частина прямої $y = x$ від точки $O(0;0)$ до $P(\pi; \pi)$.

16.29. $\int_L x dl$, де лінія L – це частина лінії $x = 2t$, $y = 2t - 2$, $z = -t + 2$, $1 \leq t \leq 2$.

16.30. $\int_L x dl$, де лінія L – це частина лінії $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$ від точки $O(0;0;0)$ до $A(3;3;2)$.

Задача 17. Знайти масу і центр мас лінії L із задачі 16 відповідного варіанту, яка має задану густину $\rho = \rho(x, y, z)$.

17.1. $\rho = x^3$. **17.2.** $\rho = e^{x+y}$. **17.3.** $\rho = x$. **17.4.** $\rho = x^2 e^x$.

17.5. $\rho = 5x$. **17.6.** $\rho = 3x^2 + y^2$. **17.7.** $\rho = 1$. **17.8.** $\rho = 1$.

17.9. $\rho = x^2 + y^2$. **17.10.** $\rho = x$. **17.11.** $\rho = x^2$. **17.12.** $\rho = 1$.

17.13. $\rho = x^3$. **17.14.** $\rho = z$. **17.15.** $\rho = 1$. **17.16.** $\rho = 1$.

17.17. $\rho = x^2$. **17.18.** $\rho = 1$. **17.19.** $\rho = 4/y$.

17.20. $\rho = \sqrt{y}(1 + 4x^2)$. **17.21.** $\rho = x^2$. **17.22.** $\rho = 1$.

17.23. $\rho = 4y$. **17.24.** $\rho = 1$. **17.25.** $\rho = 1$. **17.26.** $\rho = x^2$.

17.27. $\rho = x^3$. **17.28.** $\rho = x^2 + y^2$. **17.29.** $\rho = y^2$. **17.30.** $\rho = z$.

Задача 18. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду в заданому напрямку.

18.1. $\int_L (x^2 + y^2)dx + 2xydy$, де L – це дуга кривої $y = x^3$ від точки $A(0;0)$ до $B(1;1)$.

18.2. $\int_L xy^2dx + yz^2dy - x^2zdz$, де L – це відрізок AB від точки $A(0;0;0)$ до $B(-2;4;5)$.

18.3. $\int_L (x + 2y)dx + (x - y)dy$, де L – коло $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, що проходиться у додатному напрямі.

18.4. $\int_L (xy - 1)dx + x^2ydy$, де L – це дуга кривої $y^2 = 4 - 4x$ від точки $A(1;0)$ до $B(0;2)$.

18.5. $\int_L \frac{x^2 dx - y^2 dy}{\sqrt[3]{x^2 + \sqrt[3]{y^2}}}$, де L – це дуга астроїди $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$ від точки $A(2;0)$ до $B(0;2)$.

18.6. $\int_L (x^2 - y)dx + (x - y^2)dy$, де L – дуга кола $x = 5\cos t$, $y = 5\sin t$ від точки $A(5;0)$ до $B(0;5)$.

18.7. $\int_L (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, де L – ламана лінія $y = |x|$ від точки $A(-1;1)$ до $B(2;2)$.

18.8. $\int_L (x + y)dx - (x - y)dy$, де L – ламана лінія OAB , $O(0;0)$, $A(-2;0)$, $B(4;5)$.

18.9. $\int_L (xy - 1)dx + x^2ydy$, де L – це дуга еліпса $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$ від точки $A(2;0)$ до $B(0;3)$.

18.10. $\int_L xydx + (y - x)dy$, де L – це дуга параболи $y^2 = x$ від точки $A(0;0)$ до $B(1;1)$.

18.11. $\int_L xydx + y^2dy + z^2dz$, де L – це дуга гвинтової лінії $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2t$ від точки $A(1;0;0)$ до $B(1;0;4\pi)$.

18.12. $\int_L x^2dx + ydy + (x + y - 1)dz$, де L – відрізок від точки $A(1;1;1)$ до $B(-2;-5;8)$.

18.13. $\int_L ydx + \frac{x}{y}dy$, де L – це дуга кривої $y = e^{-x}$ від точки $A(0;1)$ до $B(-1;e)$.

18.14. $\int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, де L – це дуга параболи $y = x^2$ від точки $A(-1;1)$ до $B(1;1)$.

18.15. $\int_L (ydx - xdy)/(x^2 + y^2)$, де L – це відрізок від точки $A(1;0)$ до $B(0;1)$.

18.16. $\int_L \frac{y^2+1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy$, де L – це відрізок від точки $A(1;2)$ до $B(2;4)$.

18.17. $\int_L (x^2 + xy)dx + xdy$, де L – це дуга параболи $y = 2x^2$ від точки $A(0;0)$ до $B(1;2)$.

18.18. $\int_L (x^2 + y)dx + (x + y^2)dy$, де L – ламана лінія ABC , $A(1;2)$, $B(1;5)$, $C(3;5)$.

18.19. $\int_L yzdx + z\sqrt{4 - y^2}dy + xydz$, де L – це дуга кривої $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = t/\pi$ від точки $A(2;0;0)$ до $B(2;0;2)$.

18.20. $\int_L yzdx + xzdy + xydz$, де L – це дуга кривої $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 2t$, $1 \leq t \leq 2$.

18.21. $\int_L \frac{dy}{x} - \frac{dx}{y}$, де L – це чверть кола $x = R \cos t$, $y = R \sin t$ в першій чверті при додатному обході.

18.22. $\int_L 2x dy - 3y dx$, де L – ламана лінія ABC, A(1;2), B(3;1), C(2;5).

18.23. $\int_L xy dx + xy dy + xz dz$, де L – це чверть кола $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$ в першому октанті ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$) в напрямку зростання t .

18.24. $\int_L (x dx + y dy + z dz) / \sqrt{x^2 - x + y^2 - y + z^2 + 2z}$, де L – це відрізок від точки A(1;1;1) до B(4;4;4).

18.25. $\int_L (x^2 + 2y) dx + (y^2 + 2x) dy$, де L – це дуга параболи $y = 2 - x^2/8$ від точки A(-4;0) до B(0;2).

18.26. $\int_L (x + y) dx + (x - y) dy$, де L – це дуга еліпса $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ в першій чверті від точки A(1;0) до B(0;3).

18.27. $\int_L (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$, де L – ламана лінія ABC, A(1;1), B(2;0), C(0;0).

18.28. $\int_L (x + y\sqrt{x^2 + y^2}) dx + (y - x\sqrt{x^2 + y^2}) dy$, де L – це дуга кола $x^2 + y^2 = 1$ від точки A(1;0) до B(-1;0).

18.29. $\int_L (xy - x) dx + \frac{x^2}{2} dy$, де L – це дуга кривої $y = 2\sqrt{x}$ від точки A(0;0) до B(1;2).

18.30. $\int_L x dx + \frac{x}{y} dy$, де L – це дуга кривої $y = \frac{x^2}{2}$ від точки A(0;0) до B(2;2).

Задача 19. Обчислити поверхневий інтеграл 1-го роду.

19.1. $\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma$, де σ – частина площини $x + y + z = 1$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).

19.2. $\iint_{\sigma} xyz d\sigma$, де σ – частина площини $3x + 4y + 2z = 12$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).

19.3. $\iint_{\sigma} x^2 y^2 d\sigma$, де σ – частина площини $2x + 2y + z = 4$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).

19.4. $\iint_{\sigma} (3x + 2y + z)d\sigma$, де σ – частина площини

$$\frac{1}{3}x + y + z = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

19.5. $\iint_{\sigma} (x^2 + 2z)d\sigma$, де σ – частина площини $2x + y + \frac{1}{2}z = 1$

$$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

19.6. $\iint_{\sigma} x^2 y d\sigma$, де σ – частина площини $2x + 5y - z = 10$

$$(x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0).$$

19.7. $\iint_{\sigma} (2xz + y^3)d\sigma$, де σ – частина площини $x + y + 2z = 1$

$$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

19.8. $\iint_{\sigma} (2xy + 3y + z)d\sigma$, де σ – частина площини

$$x + 2y + z = 2 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

19.9. $\iint_{\sigma} \left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right) d\sigma$, де σ – частина площини

$$6x + 4y + 3z = 12 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

19.10. $\iint_{\sigma} y^2 x z d\sigma$, де σ – частина площини $x + y + z = 1$

$$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

19.11. $\iint_{\sigma} (2x + y + z - 1)d\sigma$, де σ – частина площини

$$3x + y + z = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

19.12. $\iint_{\sigma} (1 + x + z)^{-2} d\sigma$, де σ – частина площини

$$x + y + z = 1 \quad (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

19.13. $\iint_{\sigma} y z d\sigma$, де σ – частина площини $x + y + 2z = 2$

$$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

19.14. $\iint_{\sigma} (z - 5)d\sigma$, де σ – частина площини $4x + y + 2z = 1$

$$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

19.15. $\iint_{\sigma} x^3 z d\sigma$, де σ – частина площини $x + 3y + z = 3$

$$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

19.16. $\iint_{\sigma} (x^2 + 2y^2)d\sigma$, де σ – частина площини $x + y + z = 2$

$$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0).$$

19.17. $\iint_{\sigma} xyz^2 d\sigma$, де σ – частина площини $3x + 4y + 2z = 12$

$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$.

19.18. $\iint_{\sigma} y^2 x d\sigma$, де σ – частина площини $2x + 2y + z = 4$

$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$.

19.19. $\iint_{\sigma} (3x + 2y + 2z) d\sigma$, де σ – частина площини $x + 3y + 3z = 3$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).

19.20. $\iint_{\sigma} (x^2 + 2z) d\sigma$, де σ – частина площини $3x + 3y + z = 3$

$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$.

19.21. $\iint_{\sigma} xy d\sigma$, де σ – частина площини $2x + 5y + z = 10$

$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$.

19.22. $\iint_{\sigma} (2xz + y^2) d\sigma$, де σ – частина площини $x + y + 2z = 1$

$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$.

19.23. $\iint_{\sigma} (2xy + z) d\sigma$, де σ – частина площини $x + 2y + z = 2$

$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$.

19.24. $\iint_{\sigma} (x^2 + xy^2) d\sigma$, де σ – частина площини $x + y + z = 1$

$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$.

19.25. $\iint_{\sigma} x^3 yz d\sigma$, де σ – частина площини $3x + 4y + 2z = 12$

$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$.

19.26. $\iint_{\sigma} 3x^3 y^2 d\sigma$, де σ – частина площини $2x + 2y + z = 4$

$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$.

19.27. $\iint_{\sigma} (2x - 3y + 4z) d\sigma$, де σ – частина площини

$x + 3y + 3z = 3$ ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).

19.28. $\iint_{\sigma} (3x^2 + 4z) d\sigma$, де σ – частина площини $4x + 2 + z = 2$

$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$.

19.29. $\iint_{\sigma} x^3 y^2 d\sigma$, де σ – частина площини $2x + 5y - z = 10$

$(x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0)$.

19.30. $\iint_{\sigma} (2zx^2 + y^3) d\sigma$, де σ – частина площини $x + y + 2z = 1$
($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).

РОЗДІЛ III. РЯДИ

Тема 9. Числові ряди

1. Основні поняття про числові ряди

Розглянемо деяку послідовність чисел

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (83)$$

і утворимо вираз з цих чисел вигляду

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad (84)$$

який називається *рядом*, а числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — його членами. Замість виразу (84) будемо використовувати позначення

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (85)$$

Відмітимо, що число $n \in N$ пробігає значення $1, 2, \dots$ до $+\infty$.

Розглянемо послідовні суми членів ряду (84) ((85)). Нехай

$$S_1 = a_1; \quad S_2 = a_1 + a_2; \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3; \quad \dots; \\ S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n. \quad (86)$$

Їх називають *частинними* сумами ряду. Продовжуючи далі сумувати члени ряду, дістанемо послідовність частинних сум

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots \quad (87)$$

Розглянемо $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Якщо така границя є скінченною і дорівнює S , то ряд (84) називається збіжним, а число S є його сумою. Якщо ж $S = \pm\infty$ або $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не існує, то ряд (84) називається розбіжним.

Висновок. Питання збіжності ряду (84) за означенням рівносильне питанню про існування скінченної границі послідовності частинних сум (87) і навпаки, яку б довільну послідовність

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

не взяти, питання про існування скінченної границі для неї, зводиться до питання збіжності ряду

$$x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_n - x_{n+1}) + \dots, \quad (88)$$

для якого частинними сумами якраз і будуть члени послідовності. При цьому *сума ряду є границею послідовності*.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=0}^{\infty} bq^n$, $b \neq 0$, та у випадку збіжності знайти його суму.

Розв'язання. Члени цього ряду утворюють геометричну прогресію

$$b + bq + bq^2 + \dots + bq^n + \dots, \quad b \neq 0.$$

Бачимо, що $S_1 = b$; $S_2 = b + bq$; $S_3 = b + bq + bq^2$; $\dots$; $S_n = b + bq + bq^2 + \dots + bq^{n-1}$. Якщо $q \neq 1$, то можемо знайти S_n за відомою формулою

$$S_n = \frac{b(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{b}{1 - q} - \frac{bq^n}{1 - q}.$$

Проаналізуємо цю формулу. Бачимо, що якщо $|q| < 1$, то $q^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ і тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{1 - q} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bq^n}{1 - q} = \frac{b}{1 - q},$$

а отже *ряд збігається і його сума $S = \frac{b}{1 - q}$* .

Якщо $q > 1$, то $q^n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$. Якщо $q < -1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не існує. Отже, *ряд розбігається при $|q| > 1$* .

Якщо $q = 1$, то отримаємо ряд $b + b + b + \dots + b + \dots$, частинна сума якого $S_n = bn$, а $\lim_{n \rightarrow \infty} bn = b \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$, тому *ряд є розбіжним*.

Якщо ж $q = -1$, то отримуємо ряд $b(1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n + \dots)$, частинні суми якого є, як бачимо, $S_1 = b$; $S_2 = 0$; $S_3 = b$; $S_4 = 0$; $\dots$; $S_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \text{ (парне)}, \\ b, & n = 2k - 1 \text{ (непарне)}, \end{cases} k \in \mathbb{N}$.

У цьому випадку не існує границі послідовності частинних сум, тому *ряд є розбіжним*.

Висновок. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} bq^n$ збігається при $|q| < 1$ і його сума $S = \frac{b}{1-q}$, а при $|q| \geq 1$ він розбігається. Якщо у ряді (84) відкинути перші m членів, то отримаємо ряд

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{m+k} + \dots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n = r_m, \quad (89)$$

який назвемо *залишком ряду (84) після m -го члена*, або m -им залишком ряду. Для збіжних рядів виконується

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k = S_m + r_m.$$

Якщо числовий ряд (84) збігається, то $\lim_{m \rightarrow \infty} r_m = 0$.

Розглянемо деякі **властивості числових рядів**.

1) Нехай числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, тоді збігається і ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} C \cdot a_n$, де $C \in \mathbb{R}$, $C \neq 0$ і його сума дорівнює $C \cdot S$, де S –

сума ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Приклад 2. Відомо, що $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ є збіжним рядом. Довести, що збігається ряд

$$2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-4}} + \dots$$

Роз'язання. Справді

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n-4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot 2^{-4}} = 2^4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Бачимо, що множником C тут є $C = 2^4$.

2) Якщо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються до S_1 і S_2 відповідно (до сум), то збігаються ряди $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ і їхні суми дорівнюють $S_1 \pm S_2$.

Приклад 3. Дослідити ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = 2 + \frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{2^n + 3^n}{6^n} + \dots$ на збіжність і знайти його суму.

Роз'язання. Виконаємо почленне ділення у загальному члені ряду, отримаємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n}{6^n} + \frac{3^n}{6^n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

Знайдемо $S_1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$; $S_2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$. Отже, $S = S_1 + S_2 = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$.

3) Якщо до ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ додати або відкинути скінченну кількість членів, то отриманий ряд збігається або розбігається одночасно з даним рядом.

Приклад 4. Визначити, чи збігається числовий ряд

$$100 + \sqrt{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots$$

Роз'язання. Зі збіжності ряду

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

та властивості 3) впливає збіжність даного ряду. Він отриманий додаванням двох доданків та відніманням 4-ох членів ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

4) *Необхідна умова збіжності ряду.* Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний,

то його загальний член прямує до нуля. Це випливає з того, що якщо частинна сума S_n має скінченну границю S , а разом з нею і S_{n-1} також, то

$$a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Якщо ця умова порушується, то ряд розбігається. Але ця умова не є достатньою.

Покажемо, що *гармонічний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ з загальним членом

$a_n = \frac{1}{n}$, $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, але цей ряд є розбіжним. Для цього використаємо *критерій Коші збіжності числового ряду*: для того, щоб числовий ряд (84) був збіжним, необхідно і достатньо, щоб для $\forall \varepsilon > 0 \exists$ номер $n_0 \in N$, що для всіх $n \geq n_0$ і $p \in N$ виконувалась нерівність

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon. \quad (90)$$

Перевіримо виконання умови (90). Нехай $p = n$, тоді $S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$. Оскільки $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n}$; $\frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n}$; $\dots$; $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$, то $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots +$

$\frac{1}{2n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, а отже не виконується умова (90). Ряд розбігається (мало б бути $S_{2n} - S_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$).

2. Числові ряди з додатними членами. Ознаки збіжності числових рядів з додатними членами

Будемо вважати, що члени ряду (84) є додатними. Розглянемо найбільш вживані ознаки збіжності числових рядів з додатними членами.

I. Ознаки порівняння. Нехай маємо два ряди з невід'ємними членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (91)$$

та

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n. \quad (92)$$

1) Якщо $a_n \leq b_n$, $n \in \mathbb{N}$, то зі збіжності ряду (92) випливає збіжність ряду (91), а з розбіжності ряду (91) випливає розбіжність ряду (92).

2) Якщо існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$, де $0 < l < +\infty$ за умови, що $b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, то обидва ряди збіжні або розбіжні одночасно. Причому зі збіжності (92) при $l < +\infty$ випливає збіжність (91), а з розбіжності ряду (91) при $l > 0$ випливає розбіжність (92).

3) Якщо починаючи з деякого $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

то зі збіжності ряду (92) випливає збіжність (91) або з розбіжності ряду (91) випливає розбіжність (92).

”Еталонним” рядом, який використовують для порівняння при застосуванні ознак порівняння є *узагальнений гармонічний ряд*

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$, який збіжний при $p > 1$ і розбіжний при $p \leq 1$.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{5^n}.$$

Роз'язання. Бачимо, що загальний член ряду $a_n = \frac{\sin^2 n}{5^n} > 0$, тому ряд є рядом з додатними членами. Скористаємось ознакою порівняння 1). Оскільки $\sin^2 n \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, тому $\frac{\sin^2 n}{5^n} \leq \frac{1}{5^n}$. З попереднього знаємо, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ є збіжним (геометрична прогресія з $q = \frac{1}{5}$). Отже, зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ випливає збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{5^n}.$$

II. Ознака Даламбера. Якщо члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ задовольняють умови

1) $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$;

2) існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$, $0 \leq D < \infty$, тоді якщо число $D < 1$, то

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, якщо $D > 1$ – розбігається. У випадку $D = 1$ потрібно додаткове дослідження. Ця ознака не дає відповіді на питання про збіжність ряду у цьому випадку.

Приклад 6. Дослідити на збіжність числовий ряд

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} + \dots$$

Роз'язання. Тут $a_n = \frac{n}{(n+1)!}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{((n+1)+1)!} = \frac{n+1}{(n+2)!}$.

Розглянемо $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n+1}{(n+2)!}}{\frac{n}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{n} =$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+1)!(n+2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n(n+2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(1 + \frac{1}{n})}{n(n+2)} =$
 0 . Отже, $D = 0 \Rightarrow$ ряд збігається.

III. Радикальна ознака Коші. Якщо члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ за-

довольняють умови

1) $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$;

2) існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = C$, де $0 \leq C < +\infty$, тоді при $C < 1$ ряд збігається, при $C > 1$ – розбігається. При $C = 1$, аналогічно як і при ознаці Даламбера, потрібно інше дослідження.

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{8n+5} \right)^{2n}.$$

Роз'язання. Бачимо, що умова 1) виконується, тобто ряд є з додатними членами. Знайдемо

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n-1}{8n+5} \right)^{2n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{3n-1}{8n+5} \right)^{2n} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1}{8n+5} \right)^2 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(n \left(3 - \frac{1}{n} \right) \right)^2}{\left(n \left(8 + \frac{5}{n} \right) \right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(3 - \frac{1}{n} \right)^2}{n^2 \left(8 + \frac{5}{n} \right)^2} = \left(\frac{3}{8} \right)^2 = \frac{9}{64}. \end{aligned}$$

Оскільки $\frac{9}{64} < 1$, тому ряд збіжний.

Інтегральна ознака Коші–Маклорена. Припустимо, що f визначена на $[1; +\infty)$ зі значеннями в $\mathbb{R}$ і задовольняє умови

1) для довільних $x \geq 1$ функція $f(x) \geq 0$;

2) функція f – незростаюча, неперервна при $x \geq 1$.

Якщо покласти $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ збігається або розбігається залежно від того, збіжним чи розбіжним є невластний інтеграл I-го роду $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Приклад 8. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}.$$

Роз'язання. Бачимо $\frac{n}{1+n^2} = f(n)$. Замінімо аргумент n на x і розглянемо інтеграл

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_1^R \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_2^{1+R^2} \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\ln |t| \Big|_2^{1+R^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{R \rightarrow +\infty} (\ln(1+R^2) - \ln 2) = +\infty, \end{aligned}$$

оскільки $\ln(1+R^2) \rightarrow +\infty$ при $R \rightarrow +\infty$. Отже, границя нескінченна, інтеграл розбіжний, а отже і ряд також розбіжний.

Зауваження. Між вказаними рядами (нескінченними сумами) та невластними інтегралами I-го роду є зв'язок. Ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

відповідає $\int_1^{+\infty} f(x)dx$, де $f(n) = a_n$; частинній сумі S_n відповідає

$\int_1^R f(x)dx$ (власний інтеграл). Зі збіжності $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

3. Знакозмінні числові ряди. Їх абсолютна та умовна збіжності

Розглянемо ряд (84) з довільними членами, серед яких є як додатні, так і від'ємні. Поставимо йому у відповідність ряд з абсолютних величин (модулів) вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots \quad (93)$$

Означення 1. Ряд з довільними членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається абсолютно збіжним, якщо збігається ряд з абсолютних величин цього ряду (93).

Означення 2. Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається умовно збіжним, якщо він збігається, але ряд з абсолютних величин (93) розбігається.

Розглянемо знакозмінний ряд

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n,$$

де $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, знаки членів чергуються. Для дослідження його збіжності застосуємо таку ознаку.

Ознака Лейбніца: якщо 1) $a_n > a_{n+1} > 0$, $n \in \mathbb{N}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ збігається, причому його сума S додатна

і не перевищує a_1 .

Приклад 9. Дослідити на збіжність ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

Розв'язання. Спочатку дослідимо ряд на абсолютну збіжність. Розглянемо ряд з додатними членами

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

За інтегральною ознакою можемо показати, що він розбіжний. Справді, нехай $a_n = \frac{1}{n} = f(n)$. Замінімо n на x і розглянемо інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \frac{dx}{x} = \lim_{R \rightarrow +\infty} (\ln R - \ln 1) = +\infty,$$

а, отже, інтеграл є розбіжним, тому розбіжним є гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Отже, даний ряд не є абсолютно збіжний.

Перевіримо умови ознаки Лейбніца. Бачимо, що 1) $a_n = \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, – виконується; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ – виконується.

Тому за ознакою Лейбніца даний ряд збіжний. Оскільки він не є абсолютно збіжний, то збіжність умовна.

Тема 10. Функціональні ряди. Степеневі ряди. Ряди Маклорена і Тейлора

1. Поняття про функціональний ряд. Означення суми ряду, абсолютної, поточної, рівномірної збіжності. Ознака Вейєрштрасса

Розглянемо деяку послідовність функцій $\{u_n(x), n \in \mathbb{N}\}$, члени якої визначені на деякій множині $X \subset \mathbb{R}$. Вираз вигляду

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (94)$$

називається *функціональним рядом* (від слова "функція"). Зафіксуємо $x_0 \in X$ і розглянемо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$. Він може бути збіжним або розбіжним. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ збігається, то x_0 називають *точкою збіжності функціонального ряду* (94). Множина $D \subset X$ всіх точок збіжності функціонального ряду називається *його областю збіжності*. Скінченна сума

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) \quad (95)$$

називається *n-ою частинною сумою ряду* (94), а функція

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x),$$

яка визначена в D – *сумою ряду* (94).

Функція

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \quad (96)$$

називається *залишком ряду* (94). Очевидно, що для збіжного ряду $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0, x \in X$ (аналогічно як і для числових рядів).

Збіжність функціонального ряду в кожній точці $x \in D$ називається поточною збіжністю.

Функціональний ряд (94) називається *абсолютно збіжним* на множині $D_1 \subset X$, якщо в кожній точці цієї множини збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ (з абсолютних величин функцій).

Оскільки з абсолютної збіжності ряду в точці випливає його збіжність, тому $D_1 \subset D$.

Приклад 1. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n \cdot 3^n}.$$

Розв'язання. Будемо вважати, що x – стале, розглянемо ряд з абсолютних величин

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(x-1)^n}{n \cdot 3^n} \right|.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x-1|^{n+1}}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 3^n}{|x-1|^n} = \\ &= |x-1| \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{3(n+1)} = \frac{|x-1|}{3}, \end{aligned}$$

то, згідно з ознакою Даламбера, ряд збігається абсолютно, якщо $\frac{|x-1|}{3} < 1$. Розписавши останню нерівність $|x-1| < 3$, або $-3 < x-1 < 3$, отримаємо, що $-2 < x < 4$. Дослідимо окремо числові ряди, які отримаємо при $x = -2$ та $x = 4$.

У точці $x = -2$ матимемо

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2-1)^n}{3^n \cdot n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n \cdot n} = \\ &= -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n} + \dots \end{aligned}$$

З попередньої теми знаємо, що для цього ряду виконуються умови ознаки Лейбніца, тому він збіжний. У точці $x = 4$ отримаємо ряд

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

який є гармонічним рядом, а він, як відомо, розбігається.

Отже, множина $[-2, 4)$ є областю збіжності ряду.

Функціональний ряд називається *рівномірно збіжним* на множині X , якщо послідовність його частинних сум $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$, $x \in X$ збігається рівномірно на X , тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon), \text{ що } \forall n > n_0(\varepsilon) \text{ і } \forall x \in X :$$

$$|r_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon.$$

Відмінність між поточною і рівномірною збіжністю полягає в тому, що у першому випадку номер n_0 залежить від ε та $x \in X$, а в другому тільки від ε .

Сформулюємо достатню ознаку рівномірної збіжності функціонального ряду.

Ознака Вейєрштрасса. Якщо для функціонального ряду (94) існує такий збіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, що для всіх $x \in X$ і всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$|u_n(x)| \leq a_n, \tag{97}$$

то ряд (94) збігається абсолютно і рівномірно.

Приклад 2. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$ рівномірно збігається на всій числовій осі.

Розв'язання. Для всіх $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$\left| \frac{\cos nx}{n!} \right| \leq \frac{1}{n!}.$$

Покажемо за ознакою Даламбера, що числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ збігається (ряд з додатними членами). Справді, за ознакою Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n!(n+1)} = 0 < 1.$$

Отже, функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$ згідно з ознакою Вейєрштрасса збігається рівномірно на $\mathbb{R}$.

Поняття і факт рівномірної збіжності відіграє вирішальну роль при дослідженні рядів.

2. Неперервність суми ряду, інтегрування та диференціювання функціональних рядів

Теорема 1. *Якщо функції $u_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, визначені і неперервні на проміжку $X = [a, b]$ і ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (98)$$

збігається рівномірно до суми $S(x)$, то сума $S(x)$ неперервна на X .

Теорема 2. *Нехай члени ряду (98) неперервні на $X = [a, b]$ і невід'ємні. Якщо ряд має суму $S(x)$ також неперервну на X , то ряд (98) збігається рівномірно на $X = [a, b]$.*

Теорема 3 *(про граничний перехід під знаком ряду). Нехай функції $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) визначені в X і мають скінченну границю при $x \rightarrow a$*

$$\lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = c_n. \quad (99)$$

Якщо ряд (98) в області X збігається рівномірно, то по-перше:

збігається ряд із граничних значень c_n до C , тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = C, \quad (100)$$

а по-друге: сума ряду (98) – функція $S(x)$ також має границю при $x \rightarrow a$, а саме

$$\lim_{x \rightarrow a} S(x) = C. \quad (101)$$

Теорема 4 (про почленне інтегрування членів ряду). Якщо функції $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) неперервні на $X = [a, b]$ і ряд (98), записаний з них, збігається на X рівномірно, то інтеграл від суми $S(x)$ ряду (98) записується у вигляді

$$\begin{aligned} \int_a^b S(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b u_1(x) dx + \int_a^b u_2(x) dx + \dots + \\ &+ \int_a^b u_n(x) dx + \dots \end{aligned} \quad (102)$$

Теорема 5 (про почленне диференціювання членів ряду). Нехай функції $u_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) визначені на $X = [a, b]$ і мають у ньому неперервні похідні $u'_n(x)$. Якщо на цьому проміжку збігається не тільки ряд (98), але і рівномірно збігається ряд, складений з похідних

$$u'_1(x) + u'_2(x) + \dots + u'_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x), \quad (103)$$

то сума ряду $S(x)$ має похідну на X , причому

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x). \quad (104)$$

Приклад 3. Знайти суму ряду

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots$$

Розв'язання. Бачимо, що цей ряд отримується почленним диференціюванням ряду $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, а він, у свою чергу, збігається при $|x| < 1$ і його сумою є $S(x) = \frac{1}{1-x}$. Покажемо, що ряд з похідних, тобто даний ряд, збігається рівномірно. За ознакою Вейерштрасса можемо оцінити даний ряд збіжним числовим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}$, $|q| < 1$. Тому

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = ((1-x)^{-1})' = \\ &= -(1-x)^{-2} \cdot (-1) = \frac{1}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Отже, $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, $x \in (-1; 1)$ оскільки для довільного x з вказаного інтервалу завжди знайдеться q таке, що $|x| \leq q < 1$.

3. Поняття про степеневий ряд, інтервал, радіус збіжності степеневих рядів

Степеневим рядом називають функціональний ряд вигляду

$$a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad (105)$$

де a_n , $n \in \mathbb{N}$, – задані дійсні числа – коефіцієнти ряду, x_0 – фіксоване дійсне число.

Теорема Абеля. Для довільного степеневого ряду (105) існує R таке, що ряд (105) абсолютно збігається при $|x - x_0| < R$ і розбігається при $|x - x_0| > R$. У точках $x = \pm R$ ряд (105) може як збігатись, так і розбігатись.

Число R називають радіусом збіжності степеневого ряду (105), а інтервал $(x_0 - R; x_0 + R)$ – інтервалом збіжності степеневого ряду.

Розглянемо формули визначення радіуса збіжності ряду. Складемо ряд з модулів членів ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|, \quad (106)$$

покладаючи $x_0 = 0$ в ряді (105).

Припустимо, що існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| = L|x| \neq 0, \quad x \neq 0.$$

Згідно з ознакою Даламбера, ряд (106) збігається абсолютно тоді, коли $L|x| < 1$, тобто $|x| < \frac{1}{L}$, і є розбіжним при $L|x| > 1$, тобто $|x| > \frac{1}{L}$. Отже, інтервал збіжності $\left(-\frac{1}{L}; \frac{1}{L}\right)$ є інтервалом абсолютної збіжності ряду

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots \quad (107)$$

Число

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (108)$$

– радіус збіжності ряду (107).

Якщо скористаємось ознакою Коші, то можна встановити, що

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \quad (109)$$

Зауваження 1. Неважко переконатись, що коли

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = +\infty, \text{ або } L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0,$$

то ряд (107) абсолютно збігається на всій числовій осі.

Зауваження 2. Питання про збіжність ряду при $x = \pm R$ (на кінцях інтервалу збіжності) розв'язується для кожного ряду окремо.

Зауваження 3. Збіжність ряду (105) визначають за тими ж формулами, що і ряду (107). Інтервал збіжності знаходять з нерівності $|x - x_0| < R$, тобто він має вигляд $(x_0 - R; x_0 + R)$.

Приклад 4. Вказати область збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(3n+1)!}.$$

Розв'язання. Бачимо, що

$$a_n = \frac{1}{(3n+1)!}; \quad x_0 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{(3(n+1)+1)!} = \frac{1}{(3n+4)!}.$$

Скористаємось формулою (108). Маємо

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(3n+4)!}{(3n+1)!} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\cancel{(3n+1)!} (3n+2)(3n+3)(3n+4)}{\cancel{(3n+1)!}} \right| = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (3n+4)(3n+3)(3n+2) = +\infty. \end{aligned}$$

Отже, даний ряд збігається на всій числовій осі.

Приклад 5. Вказати область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} ((5n+1)x)^n.$$

Розв'язання. Тут $a_n = (5n + 1)^n$, $x_0 = 0$. Скористаємось формулою (109)

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(5n + 1)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5n + 1} = 0.$$

Отже, ряд збігається в одній точці $x = 0$.

Приклад 6. Вказати область збіжності степеневому ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4n + 5}.$$

Розв'язання. Тут $a_n = \frac{1}{4n + 5}$, $x_0 = 0$. Знайдемо R за формулою (108)

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + 9}{4n + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varkappa(4 + \frac{9}{n})}{\varkappa(4 + \frac{5}{n})} = 1.$$

Отже, інтервалом збіжності є $(-1; 1)$. Дослідимо окремо кінці інтервалу.

Нехай $x = -1$, отримаємо числовий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n + 5},$$

який, як можна показати, не є абсолютно збіжним

$$\left| \frac{(-1)^n}{4n + 5} \right| = \frac{1}{4n + 5},$$

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{4x + 5} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \ln |4x + 5| \Big|_1^A = +\infty,$$

але збігається за ознакою Лейбніца:

$$1) \ a_n = \frac{1}{4n + 5}; \ a_{n+1} = \frac{1}{4(n + 1) + 5} = \frac{1}{4n + 9}; \ a_{n+1} < a_n -$$

модулі членів спадають;

- 2) $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$;
- 3) знаки членів чергуються.

Отже, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+5}$ збігається за ознакою Лейбніца, збіжність умовна.

Нехай $x = 1$, як уже показано, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+5}$ є розбіжним.

Отже, $x = -1$ включимо в область збіжності, а $x = 1$ – ні. Остаточно маємо: область збіжності $x \in [-1; 1)$.

Розглянемо деякі **властивості степеневих рядів**:

- 1) Степеневий ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

абсолютно і рівномірно збіжний на будь-якому відрізку $[-\rho; \rho]$, який цілком міститься в інтервалі збіжності $(-R; R)$.

- 2) Сума степеневого ряду неперервна всередині його інтервалу збіжності.

- 3) Якщо межі інтегрування α та β лежать всередині інтервала збіжності $(-R; R)$, то на $[\alpha; \beta]$ його можна почленно інтегрувати.

Зокрема, якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ інтегрувати на $[0; x]$, де $|x| < R$, то у результаті дістанемо степеневий ряд, який має такий же інтервал збіжності, що і вказаний ряд, а його сума $S(x)$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

задовольняє співвідношення

$$\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_nt^n dt.$$

4) Якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ має інтервал збіжності $(-R; R)$, то ряд, утворений диференціюванням цього ряду, має той самий інтервал збіжності $(-R; R)$; при цьому якщо $S(x)$ – сума ряду, то

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad x \in (-R; R).$$

Приклад 7. Знайти суму ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| < 1$.

Розв'язання. Позначимо його суму $S(x)$, тоді

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \\ &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots \end{aligned}$$

Останній ряд можемо розглядати як геометричну прогресію з $q = -x^2$ і першим членом 1. Знайдемо суму прогресії, дістанемо

$$S'(x) = \frac{1}{1 - (-x^2)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Інтегруючи цю рівність на відрізку $[0; x] \subset (-1; 1)$, отримаємо

$$\begin{aligned} \int_0^x S'(t) dt &= \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^n t^{2n} + \dots) dt = \\ &= \int_0^x \frac{dt}{1 + t^2} = \operatorname{arctg} t \Big|_0^x = \operatorname{arctg} x = S(x). \end{aligned}$$

Отже,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \operatorname{arctg} x,$$

$$|x| < 1.$$

4. Ряд Тейлора і Маклорена. Розклад основних елементарних функцій в ряд Маклорена

Нехай функція f має в околі точки x_0 похідні довільного порядку. Рядом Тейлора для функції f за степенями $(x - x_0)$ називають степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (110)$$

Якщо для довільних $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$ усі похідні функції f обмежені сталою M , тобто

$$\left| f^{(k)}(x) \right| \leq M, \quad x \in (x_0 - R; x_0 + R),$$

то ряд Тейлора (110) збігається до функції f на цьому інтервалі.

При $x_0 = 0$ ряд Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ називається рядом Маклорена.

Наведемо основні розклади в ряд Маклорена

$$1) e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$2) \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$3) \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$4) \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots, \quad x \in (-1; 1];$$

$$5) (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots, \quad x \in (-1; 1);$$

$$6) (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Формула 6) не є рядом, а *формулою піднесення до n -го степеня суми*, відома як біном Ньютона.

Тема 11. Ряди Фур'є

1. Формули Ейлера–Фур'є. Теорема про розклад 2π -періодичної кусково-диференційовної функції у ряд Фур'є

Означення 1. Функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ називаються ортогональними на $[a, b]$, якщо

$$\int_a^b \varphi(x) \cdot \psi(x) dx = 0. \quad (111)$$

Означення 2. Система функцій $\varphi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, називається ортогональною на $[a, b]$, якщо функції $\varphi_n(x)$ та $\varphi_m(x)$ ортогональні при $m \neq n$ (довільних різних m та n).

Означення 3. Ортогональна система $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$ називається ортонормованою на $[a, b]$, якщо

$$\int_a^b \varphi_n^2(x) dx = 1 \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}. \quad (112)$$

Теорема 1. Система $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \dots, \sin nx, \dots\}$ ортогональна на $[-\pi, \pi]$.

Теорема 2. Система $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$ ортонормована на $[-\pi, \pi]$.

Доведення. Справді

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^2 dx = \frac{1}{2\pi} \cdot x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 1;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} \right)^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2}x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = 1;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} \right)^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \pi = 1.$$

Означення 4. Функція f називається абсолютно інтегрованою на $[a, b]$, якщо $\int_a^b |f(x)| dx$ збіжний.

Припустимо, що 2π -періодична функція $f(x)$ розкладається у ряд Фур'є – тригонометричний ряд вигляду

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (113)$$

причому ряд (113) *рівномірно збіжний* на $[-\pi, \pi]$. За умови рівномірної збіжності ряд (113) можна інтегрувати на $[-\pi, \pi]$, а отже

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) = 2\pi a_0;$$

$$\begin{aligned} \left(\text{Тут } \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0; \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = -\frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \right. \\ \left. -\frac{1}{n} (\cos n\pi - \cos(-n\pi)) = 0 \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx + b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx \right) = \pi a_n. \end{aligned}$$

Справді, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)x + \cos(m+n)x) dx = \frac{1}{2(m-n)} \sin(m-n)x \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(m+n)} \sin(m+n)x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$
 $m \neq n$; при $m = n$ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2n} \sin x \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi$; $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(m+n)x + \sin(n-m)x) dx = 0, \{m, n\} \subset \mathbb{N}.$

Розглянемо тепер

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx + b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx \right) = \pi b_n.$$

Справді, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x) dx = 0$ при $m \neq n$; при $m = n$ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) dx = \pi.$

Враховуючи все вище записане, маємо коефіцієнти розкладу $f(x)$ в ряд (113)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (114)$$

Формули (114) – формули Ейлера–Фур’є. Тут a_0 , a_n і b_n – коефіцієнти Фур’є функції $f(x)$.

Означення 5. Функція f називається кусково диференційовною на $[a, b]$, якщо відрізок $[a, b]$ можна розбити на скінченну кількість проміжків, на яких f диференційовна, а в точках розриву похідної існують односторонні похідні

$$f'(x_0 \pm 0) = \lim_{t \rightarrow \pm 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}.$$

Теорема 3. Нехай f – кусково диференційовна 2π -періодична функція. Тоді її ряд Фур’є збіжний в кожній точці $x_0 \in \mathbb{R}$, причому

$$S_0 = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}, \quad (115)$$

де S_0 – сума ряду Фур’є в точці x_0 .

Висновок: кожній диференційовній 2π -періодичній функції f можна поставити у відповідність ряд Фур’є:

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Наслідок 1. Якщо $f(x)$ неперервна в точці x_0 , то

$$f(x_0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0).$$

2. Розклад $2l$ -періодичних функцій

Нехай $f(x)$ кусково диференційовна на $[-l, l]$. Зробимо заміну змінних

$$x = \frac{yl}{\pi},$$

де $y \in [-\pi, \pi]$. Розглянемо функцію $g(y) = f(x) = f\left(\frac{yl}{\pi}\right)$. Бачимо, що $g(y)$ кусково диференційовна на $[-\pi, \pi]$. Тому

$$g \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos ny + b_n \sin ny),$$

$$\text{де } a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) dy, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \cos ny dy,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) \sin ny dy.$$

Зробимо заміну $y = \frac{\pi x}{l}$, тоді отримаємо такі формули для коефіцієнтів Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx,$$

і

$$f \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right).$$

Зокрема, у точках неперервності функції f маємо рівність

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right).$$

У всіх точках $x \in (-l, l)$

$$S(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

i

$$S(l) = S(-l) = \frac{f(l-0) + f(-l+0)}{2}.$$

Для довільної кусково диференційовної функції $f(x)$ на $[a, a+2l]$ отримаємо

$$f \sim S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l}x + b_n \sin \frac{n\pi}{l}x \right),$$

$$\text{де } a_0 = \frac{1}{2l} \int_a^{a+2l} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \cos \frac{n\pi}{l}x dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} f(x) \sin \frac{n\pi}{l}x dx.$$

3. Розклад парної і непарної функції на $[-\pi, \pi]$

Нагадаємо: 1) якщо $g(x)$ інтегровна і непарна на $[-a, a]$ (у симетричних межах), то $\int_{-a}^a g(x)dx = 0$; 2) якщо $g(x)$ інтегровна і парна на $[-a, a]$, то

$$\int_{-a}^a g(x)dx = 2 \int_0^a g(x)dx.$$

Нехай функція $f(x)$ кусково диференційовна і парна на $[-\pi, \pi]$. Тоді функції вигляду $f(x) \cos nx$ – парні на $[-\pi, \pi]$, а функції $f(x) \sin nx$ – непарні на $[-\pi, \pi]$. Тому

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)dx; \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx; \quad b_n = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Аналогічно, якщо $f(x)$ кусково-диференційовна і непарна на $[-\pi, \pi]$, то

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0; \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Приклад. Розкласти функцію у тригонометричний ряд Фур'є:

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & -\pi < x \leq 0, \\ 1 - x, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Розв'язання. Скористаємось формулами (114)

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 3x dx + \int_0^{\pi} (1 - x) dx \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left. \frac{3}{2} x^2 \right|_{-\pi}^0 + \left(x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{3}{2} \pi^2 + \pi - \frac{\pi^2}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} (\pi - 2\pi^2) = \frac{1}{2} - \pi = \frac{1 - 2\pi}{2}; \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \left(3 \int_{-\pi}^0 x \cos nx dx + \int_0^{\pi} (1 - x) \cos nx dx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(3 \left(\left. \frac{x}{n} \sin nx \right|_{-\pi}^0 - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^0 \sin nx dx \right) + \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\left. \frac{x}{n} \sin nx \right|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx \right) \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{3}{n^2} \cos nx \Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{3}{n^2} (1 - (-1)^n) - \frac{1}{n^2} ((-1)^n - 1) \right) = \frac{4(1 - (-1)^n)}{\pi n^2} = \\
&= \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ \frac{8}{\pi n^2}, & n = 2k - 1, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

$$\text{TyT } (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ 2, & n = 2k - 1. \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\left(3 \int_{-\pi}^0 x \sin nx dx \right) + \int_0^{\pi} (1 - x) \sin nx dx \right) = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(3 \left(-\frac{x}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^0 \cos nx dx \right) - \frac{1}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} - \right. \\
&\quad \left. - \left(-\frac{x}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right) \right) = \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\left(-\frac{3\pi}{n} \cos n\pi + \frac{3}{n^2} \sin nx \Big|_{-\pi}^0 \right) - \frac{1}{n} ((-1)^n - 1) + \frac{\pi}{n} \cos n\pi - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{3\pi}{n} (-1)^n - \frac{1}{n} ((-1)^n - 1) + \frac{\pi}{n} (-1)^n \right) = \\
&= \frac{1 - (-1)^n (1 + 2\pi)}{\pi n} = \begin{cases} \frac{2(1+\pi)}{\pi n}, & n = 2k - 1, \\ -\frac{2}{n}, & n = 2k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Остаточно можемо записати розклад $f(x)$ в $(-\pi, \pi)$

$$f(x) = \frac{1 - 2\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4 \cdot (1 - (-1)^n)}{\pi n^2} \cos nx + \frac{1 - (-1)^n (1 + 2\pi)}{\pi n} \sin nx \right).$$

Питання для самоконтролю

1. Що називають частинною сумою числового ряду та як через неї визначається збіжність ряду?
2. Сформулюйте необхідну ознаку збіжності ряду. Чи є вона достатньою?
3. У чому полягає суть ознак порівняння (граничної та звичайної) для рядів з додатними членами?
4. Порівняйте ознаку Даламбера та радикальну ознаку Коші?
5. Сформулюйте інтегральну ознаку Коші.
6. Сформулюйте означення абсолютної та умовної збіжності знакозмінних числових рядів.
9. Сформулюйте ознаку Лейбніца умовної збіжності для знакозмінних рядів.
10. Введіть поняття поточної та рівномірної збіжності функціонального ряду до своєї суми.
11. Що таке область збіжності функціонального ряду та чим вона відрізняється від області рівномірної збіжності?
12. Сформулюйте мажорантну ознаку Вейєрштрасса для рівномірної збіжності функціонального ряду.
13. Сформулюйте властивості функціональних рядів (неперервність суми, почленне диференціювання, почленне інтегрування, перехід до границі під знаком суми).
14. Введіть поняття степеневому ряду.
15. Що називають радіусом збіжності степеневому ряду та за якими формулами його можна знайти?
16. Яка структура області збіжності степеневому ряду?
17. Які операції (диференціювання, інтегрування) можна виконувати зі степеневими рядами всередині інтервалу збіжності?
18. Що ви знаєте про ряди Тейлора та Маклорена?
19. Запишіть розклади в ряд Маклорена для деяких елементарних функцій.

20. Дайте означення ортонормованої системи функцій, наведіть приклади.

21. Запишіть тригонометричний ряд Фур'є та сформулюйте теорему про розклад 2π -періодичних функцій у ці ряди. Запишіть коефіцієнти розкладу.

22. Запишіть формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є $2l$ -періодичної функції.

23. Як спрощується загальний вигляд ряду Фур'є для парних та непарних функцій?

Завдання для самостійної роботи

Задача 20. В пунктах а), б), в) дослідити на збіжність числові ряди з невід'ємними членами.

20.1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (n!)^2 2^{-n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$.

20.2. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^7}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n 2n!}{(2n)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$.

20.3. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 2^n}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n+1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{n^2}$.

20.4. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(3n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^n \left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

20.5. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 \cdot 3^n}{(2n+1)^n}$.

20.6. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3) \ln^2(2n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3n^2+1)(2n)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{\frac{n}{2}}}$.

20.7. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+4) \ln^2(5n+2)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n \cdot n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} n \arcsin^n \left(\frac{\pi}{4n}\right)$.

20.8. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2) \ln(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \sqrt[3]{n}}{3^{n+2}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n(n-1)}$.

20.9. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(3n+4)3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{n^{\frac{5}{2}}}$.

20.10. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n}{n^2 \sqrt[3]{n+5}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

20.11. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n^2+4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2) \cdot 2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+5}\right)^{n^2}$.

20.12. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3n^3+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n^2}$.

20.13. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(3n-2)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$.

20.14. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-2) \ln(n-3)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-4}{\sqrt{n \cdot 3^n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$.

20.15. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{5^n n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n$.

20.16. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n!)^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3n^n}$.

- 20.17. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-1) \ln n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{3^{n+1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^{\frac{n}{2}}$.
- 20.18. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln^n(n+1)}$.
- 20.19. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \ln(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n \cdot n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{5^{n+1}}$.
- 20.20. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-3) \ln(3n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)! \cdot 4^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)! \cdot 4^n}$.
- 20.21. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin \frac{\pi n}{2}}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n \left(\frac{n+2}{n+3} \right)$.
- 20.22. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{n^2-3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+5}{3n-1} \right)^{2n-1}$.
- 20.23. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln^2 n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^{n(n-1)}$.
- 20.24. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3) \ln^2(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^{n-1}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+2} \right)^{n^2+n}$.
- 20.25. а) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n-1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2}{2n+1} \right)^n \arcsin^n \frac{1}{n}$.
- 20.26. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n \sqrt{\ln(3n-1)}}$; б) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{7^{3n}}{(2n-5)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$.
- 20.27. а) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(3n-1) \sqrt{\ln(n-2)}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n+1}{2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg^n \frac{1}{n}$.
- 20.28. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{\pi n}{3}}{3^{n+5}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(2n+1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{\frac{n}{3}}$.
- 20.29. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2-1) \ln n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3^n \cdot (n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{-n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$.
- 20.30. а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n}{(2n^2+3) \ln n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n \cdot n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{n^3}$.

Задача 21. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд.

- 21.1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+5}{3n^2+4}$. 21.2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{7n-1}{4n^2+5}$.
- 21.3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}$. 21.4. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[5]{n-1}}$.
- 21.5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}}$. 21.6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+5}{4n+7}$.
- 21.7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[6]{n+1}}$. 21.8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{3}{n} \right)$.

$$21.9. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e^{\frac{n}{2}} - 1 \right).$$

$$21.10. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n+3}}.$$

$$21.11. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{5}{n} \right).$$

$$21.12. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right).$$

$$21.13. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+10}}.$$

$$21.14. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

$$21.15. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n+7}}.$$

$$21.16. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e^{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} - 1 \right).$$

$$21.17. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+9}}.$$

$$21.18. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+8}.$$

$$21.19. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e^{\frac{5}{\sqrt[4]{n}}} - 1 \right).$$

$$21.20. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e^{\frac{3}{\sqrt[7]{n}}} - 1 \right).$$

$$21.21. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[5]{n+2}}.$$

$$21.22. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{4}{\sqrt{n}} \right).$$

$$21.23. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{7}{\sqrt[4]{n}} \right).$$

$$21.24. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}.$$

$$21.25. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[5]{n^2+10}}.$$

$$21.26. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n^3+5}}.$$

$$21.27. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[5]{n^2+1}}.$$

$$21.28. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^3+5}{9n^4+1}.$$

$$21.29. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{6n+7}{5n+3}.$$

$$21.30. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+11}{3n+7}.$$

Задача 22. Знайти область збіжності функціонального ряду.

$$22.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 \cdot 2^n}.$$

$$22.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n\sqrt{n}}.$$

$$22.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 3^n}.$$

$$22.4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^n (x+2)^n.$$

$$22.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}.$$

$$22.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^3+1}.$$

$$22.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2 \cdot 3^n}.$$

$$22.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n+1} x^n.$$

$$22.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1) \cdot 2^n}.$$

$$22.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

$$22.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{n} (x+2)^n.$$

$$22.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n \cdot n!} x^n.$$

$$22.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

$$22.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{n^2}}{n^{n+1}}.$$

$$22.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n} \cdot 2^n}.$$

$$22.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{3^n(x-2)^n}.$$

$$22.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} x^n.$$

$$22.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{4^n}.$$

$$22.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(x+1)^{2n}}{n}.$$

$$22.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

$$22.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+x)^n}{(2n)!}.$$

$$22.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n!}.$$

$$22.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 2^n}.$$

$$22.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n \cdot n^2}.$$

$$22.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)x^n}{n^n}.$$

$$22.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n \cdot (2n+1)}.$$

$$22.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 \sqrt{n}}.$$

$$22.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1)7^n}.$$

$$22.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{9^n n}.$$

$$22.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}.$$

Задача 23. Розкласти в ряд Тейлора функцію $y = f(x)$ в околі точки x_0 і вказати область збіжності ряду.

$$23.1. y = \frac{2}{x}, x_0 = 2.$$

$$23.2. y = \frac{3}{x}, x_0 = 3.$$

$$23.3. y = \frac{4}{x}, x_0 = 4.$$

$$23.4. y = \frac{3}{x-1}, x_0 = 2.$$

$$23.5. y = \frac{2}{x-1}, x_0 = 4.$$

$$23.6. y = \frac{3}{x+1}, x_0 = 2.$$

$$23.7. y = \frac{3}{x+2}, x_0 = 1.$$

$$23.8. y = \frac{1}{x-2}, x_0 = 3.$$

$$23.9. y = \frac{2}{x-2}, x_0 = 3.$$

$$23.10. y = \frac{4}{x-3}, x_0 = 4.$$

$$23.11. y = \frac{4}{x+3}, x_0 = 1.$$

$$23.12. y = \frac{2}{x+3}, x_0 = -1.$$

$$23.13. y = \frac{2}{x+2}, x_0 = -4.$$

$$23.14. y = \frac{2}{x-6}, x_0 = 5.$$

$$23.15. y = \frac{1}{x+4}, x_0 = -3.$$

$$23.16. y = \frac{5}{x-3}, x_0 = 5.$$

$$23.17. y = \frac{2}{x+3}, x_0 = -1.$$

$$23.18. y = \frac{3}{x-4}, x_0 = 5.$$

$$23.19. y = e^{2x}, x_0 = 1.$$

$$23.20. y = e^{-3x}, x_0 = 2.$$

$$23.21. y = e^{4x}, x_0 = 3.$$

$$23.22. y = e^{-5x}, x_0 = 1.$$

$$23.23. y = \ln(x+3), x_0 = -2. \quad 23.24. y = \ln(x+2), x_0 = -1.$$

$$23.25. y = e^{2x}, x_0 = 2.$$

$$23.26. y = e^{-3x}, x_0 = 2.$$

$$23.27. y = e^{-4x}, x_0 = 1.$$

$$23.28. y = \ln(4-x), x_0 = 3.$$

$$23.29. y = \ln(5-x), x_0 = 4. \quad 23.30. y = \ln(2-x), x_0 = 1.$$

Задача 24. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = f(x)$ і вказати область збіжності ряду.

24.1. $y = x \sin 3x$.

24.2. $y = x \cos 2x$.

24.3. $y = x \sin 2x$.

24.4. $y = x^2 e^{2x}$.

24.5. $y = x e^{3x}$.

24.6. $y = x e^{2x}$.

24.7. $y = x^2 e^{2x}$.

24.8. $y = x e^{5x}$.

24.9. $y = x^2 e^{5x}$.

24.10. $y = x \ln(1 + x)$.

24.11. $y = x^3 \ln(1 + x)$.

24.12. $y = x^2 \sin x$.

24.13. $y = x^2 \cos x$.

24.14. $y = x^3 \sin x$.

24.15. $y = x^3 e^x$.

24.16. $y = x^3 e^{-x}$.

24.17. $y = x^2 e^{-2x}$.

24.18. $y = x^3 e^{-3x}$.

24.19. $y = x^2 \ln(1 + x)$.

24.20. $y = x^2 \ln(1 + 3x)$.

24.21. $y = x \ln(1 - x)$.

24.22. $y = x^3 \ln(1 - x)$.

24.23. $y = x^2 \sin 4x$.

24.24. $y = x \cos 4x$.

24.25. $y = x^3 \ln(1 + 2x)$.

24.26. $y = x \ln(1 + 4x)$.

24.27. $y = x \sin 5x$.

24.28. $y = x^4 \sin 5x$.

24.29. $y = x^2 \cos 3x$.

24.30. $y = x^2 \cos 5x$.

Задача 25. У завданнях 25.1-25.10 розкласти в ряд Фур'є функцію $y = f(x)$, задану на заданому проміжку. У завданнях 25.11-25.20 розкласти в ряд Фур'є за синусами функцію $y = f(x)$, задану на заданому проміжку. У завданнях 25.21-25.30 розкласти в ряд Фур'є за косинусами функцію $y = f(x)$, задану на заданому проміжку.

25.1. $y = \begin{cases} -1, & x \in [-2; 0), \\ x, & x \in [0; 2]. \end{cases}$

25.2. $y = \begin{cases} -x, & x \in [-2; 0), \\ 2, & x \in [0; 2]. \end{cases}$

25.3. $y = \begin{cases} -x, & x \in [-4; 0), \\ 2, & x \in [0; 4]. \end{cases}$

25.4. $y = \begin{cases} 2, & x \in [-\pi; 0), \\ 3x + 5, & x \in [0; \pi]. \end{cases}$

25.5. $y = \begin{cases} -x, & x \in [-\pi; 0), \\ -2, & x \in [0; \pi]. \end{cases}$

25.6. $y = \begin{cases} -2x + 1, & x \in [-\pi; 0), \\ -1, & x \in [0; \pi]. \end{cases}$

25.7. $y = \begin{cases} -x, & x \in [-\pi; 0), \\ 2x, & x \in [0; \pi]. \end{cases}$

25.8. $y = \begin{cases} -x - 1, & x \in [-\pi; 0), \\ x + 1, & x \in [0; \pi]. \end{cases}$

- 25.9. $y = \begin{cases} -x, & x \in [-\pi; 0), \\ 4, & x \in [0; \pi]. \end{cases}$ 25.10. $y = \begin{cases} -x + 2, & x \in [-\pi; 0), \\ 3, & x \in [0; \pi]. \end{cases}$
- 25.11. $y = -2x + 3, x \in [0; \pi].$ 25.12. $y = -x + \pi, x \in [0; \pi].$
- 25.13. $y = 2x - 1, x \in [0; \pi].$ 25.14. $y = x + 1, x \in [0; \pi].$
- 25.15. $y = 3x, x \in [0; \pi].$ 25.16. $y = -x + 4, x \in [0; \pi].$
- 25.17. $y = 2x + 1, x \in [0; \pi].$ 25.18. $y = x - 5, x \in [0; \pi].$
- 25.19. $y = x, x \in [0; \pi].$ 25.20. $y = -x, x \in [0; \pi].$
- 25.21. $y = x + 2, x \in [0; \pi].$ 25.22. $y = -x + 1, x \in [0; \pi].$
- 25.23. $y = 2x + 1, x \in [0; \pi].$ 25.24. $y = -x + \pi, x \in [0; \pi].$
- 25.25. $y = 2x, x \in [0; \pi].$ 25.26. $y = -2x + 1, x \in [0; \pi].$
- 25.27. $y = -2x + 4, x \in [0; \pi].$ 25.28. $y = 2x + 5, x \in [0; \pi].$
- 25.29. $y = 3x, x \in [0; \pi].$ 25.30. $y = 4x - 1, x \in [0; \pi].$

Задача 26. Розкласти періодичну з періодом $2l$ функцію $f(x)$ в ряд Фур'є.

- 26.1. $f(x) = |x|, \quad -1 < x \leq 1, \quad l = 1.$
- 26.2. $f(x) = 2x, \quad -3 < x \leq 3, \quad l = 3.$
- 26.3. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 3/2, \\ -1, & 3/2 \leq x \leq 3, \end{cases} \quad l = 3/2.$
- 26.4. $f(x) = |x - 2|, \quad -5 < x \leq 5, \quad l = 5.$
- 26.5. $f(x) = \begin{cases} 1, & -2 < x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 2, \end{cases} \quad l = 2.$
- 26.6. $f(x) = x, \quad -4 < x \leq 4, \quad l = 4.$
- 26.7. $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad l = 1.$
- 26.8. $f(x) = 10 - x, \quad -10 < x \leq 10, \quad l = 10.$
- 26.9. $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0, \\ 1 - x, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad l = 1.$
- 24.10. $f(x) = 2x + 3, \quad -1 < x \leq 1, \quad l = 1.$
- 26.11. $f(x) = \begin{cases} 0, & -3 < x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 3, \end{cases} \quad l = 3.$
- 26.12. $f(x) = 3 - x, \quad -2 < x \leq 2, \quad l = 2.$
- 26.13. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ -1, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases} \quad l = 1.$

$$26.14. f(x) = 5x + 1, \quad -5 < x \leq 5, \quad l = 5.$$

$$26.15. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & -2 < x \leq 0, \\ 2, & 0 < x \leq 2, \end{cases} \quad l = 2.$$

$$26.16. f(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad l = 1.$$

$$26.17. f(x) = |x| - 5, \quad -2 < x \leq 2, \quad l = 2.$$

$$26.18. f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0, \\ 2, & 0 \leq x \leq 2, \end{cases} \quad l = 2.$$

$$26.19. f(x) = 2x + 2, \quad -1 < x \leq 3, \quad l = 2.$$

$$26.20. f(x) = \begin{cases} 3, & -3 < x < 0, \\ -x, & 0 \leq x \leq 3, \end{cases} \quad l = 3.$$

$$26.21. f(x) = 1 - x, \quad -1 < x \leq 1, \quad l = 1.$$

$$26.22. f(x) = \begin{cases} 1 + x, & -4 < x < 0, \\ -2, & 0 \leq x \leq 4, \end{cases} \quad l = 4.$$

$$26.23. f(x) = 4x - 3, \quad -5 < x \leq 5, \quad l = 5.$$

$$26.24. f(x) = \begin{cases} x + 1, & -1 < x < 0, \\ 1 - x, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad l = 1.$$

$$26.25. f(x) = 1 - |x|, \quad -3 < x \leq 3, \quad l = 3.$$

$$26.26. f(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0, \\ x + 1, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad l = 1.$$

$$26.27. f(x) = x^2 + 1, \quad -1 < x \leq 1, \quad l = 1.$$

$$26.28. f(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x < 0, \\ x/2, & 0 \leq x \leq 2, \end{cases} \quad l = 2.$$

$$26.29. f(x) = 3 - |x|, \quad -5 < x \leq 5, \quad l = 5.$$

$$26.30. f(x) = \begin{cases} 2 + x, & -2 < x < 0, \\ 2 - x, & 0 \leq x \leq 2, \end{cases} \quad l = 2.$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Григорій Михайлович Фіхтенгольц. Курс диференціального та інтегрального числення. Переклад небайдужих до математики і України : Сергій Зінов'єв 2022-02-24–2023-06-22. – 664 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика : Навч. посібн. – ”А.С.К”, 2006. – 648 с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І., Вовкодав І.П. та ін. Вища математика : Збірник задач / навч. посібник. – К. : Ігнатекс–Україна, 2011. – 480 с.
4. Матаналіз у прикладах і задачах : У 2 ч. : Навч. посіб. / Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесник, М.Я. Лященко та ін. – К. : Вища шк., 2002. – Ч.1. – 462 с.
5. Веренич І.І., Лавренчук В.П., Пасічник Г.С. Вища математика : лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз. Частина 1 : Навчальний посібник. – Чернівці : Рута, 2003. – 205 с.
6. Веренич І.І., Лавренчук В.П., Пасічник Г.С., Черевко І.М. Вища математика : математичний аналіз, диференціальні рівняння : Підручник. – Чернівці : Рута, 2008. – 267 с.
7. Гонік Л. Матан / Ларрі Гонік : пер. з англ. Світлана Попадюк : худож. Ларрі Гонік. – Київ, РІДНА МОВА, 2020. – 240 с. (Серія ”Наука в коміксах”)
8. Математичний аналіз : короткий конспект лекцій і завдання для самостійної роботи. Частина 1 : навч. посіб. / Г.М. Перун, Л.М. Мельничук. – Чернівці : Чернівець. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2025. – 171 с.

ЗМІСТ

Передмова	3
РОЗДІЛ I. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ	
ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ	4
Тема 1. Функція багатьох змінних	4
1. Основні поняття та означення теорії функцій багатьох змінних	4
2. Поняття границі функції багатьох змінних	7
3. Неперервність функції багатьох змінних	10
4. Частинні похідні та диференційовність функції багатьох змінних	11
5. Диференціювання функцій, заданих неявно	15
6. Диференціювання складених функцій	16
7. Частинні похідні та диференціал II-го порядку	17
Тема 2. Екстремуми функції багатьох змінних	22
1. Поняття локального мінімуму і максимуму функції багатьох змінних. Необхідна умова екстремуму. Поняття стаціонарної точки. Достатні умови екстремуму функції багатьох змінних	22
2. Умовний екстремум з обмеженнями, заданими рівностями	25
3. Похідна за напрямком. Градієнт	33
Питання для самоконтролю	36
Завдання для самостійної роботи	38
РОЗДІЛ II. ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ	
БАГАТЬОХ ЗМІННИХ	47
Тема 3. Власні інтеграли, які залежать від параметра	47
Тема 4. Подвійний інтеграл	50
1. Означення подвійного інтеграла та його властивості	50

2.	Зведення подвійного інтеграла до повторного	51
3.	Заміна змінних у подвійному інтегралі	55
4.	Геометричні та фізичні застосування подвійного інтеграла	57
Тема 5.	Криволінійний інтеграл I-го роду	62
1.	Означення та властивості криволінійного інтеграла I-го роду	62
2.	Обчислення криволінійного інтеграла I-го роду ...	63
3.	Застосування криволінійного інтеграла	66
Тема 6.	Криволінійний інтеграл II-го роду	67
1.	Означення криволінійного інтеграла II-го роду, його фізичний зміст	67
2.	Обчислення та властивості криволінійного інтеграла II-го роду	68
3.	Формула Гріна	68
Тема 7.	Потрійні інтеграли	75
1.	Означення потрійного інтеграла, його властивості .	75
2.	Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах у випадку прямокутної і криволінійної областей	77
3.	Заміна змінних у потрійному інтегралі	80
4.	Застосування потрійного інтеграла	84
Тема 8.	Поверхневі інтеграли	87
1.	Поверхневі інтеграли 1-го роду	87
2.	Поверхневі інтеграли 2-го роду	90
3.	Формула Остроградського–Гаусса	95
4.	Формула Стокса	97
Питання для самоконтролю		102
Завдання для самостійної роботи		104
РОЗДІЛ III. РЯДИ		121
Тема 9.	Числові ряди	121

1. Основні поняття про числові ряди	121
2. Числові ряди з додатними членами. Ознаки збіжності числових рядів з додатними членами ...	126
3. Знакозмінні числові ряди. Їх абсолютна та умовна збіжності	130
Тема 10. Функціональні ряди. Степеневі ряди. Ряди Маклорена і Тейлора	132
1. Поняття про функціональний ряд. Означення суми ряду, абсолютної, поточної, рівномірної збіжності. Ознака Вейерштрасса	132
2. Неперервність суми ряду, інтегрування та диференціювання функціональних рядів	135
3. Поняття про степеневий ряд, інтервал, радіус збіжності степеневого ряду, властивості степеневих рядів	137
4. Ряд Тейлора і Маклорена. Розклад основних елементарних функцій в ряд Маклорена	143
Тема 11. Ряди Фур'є	145
1. Формули Ейлера–Фур'є. Теорема про розклад 2π -періодичної кусково-диференційовної функції у ряд Фур'є	145
2. Розклад $2l$ -періодичних функцій	148
3. Розклад парної і непарної функції на $[-\pi, \pi]$	150
Питання для самоконтролю	153
Завдання для самостійної роботи	155
Список використаної літератури	162

Навчальне видання

Математичний аналіз : короткий конспект лекцій і завдання для
самостійної роботи. Частина 2

Навчальний посібник

Автори: *Перун Галина Михайлівна*

Мельничук Лілія Михайлівна

Літературний редактор: Лупул О.В.