

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

М.М. Іваночко, В.А. Головацький, О.М. Маханець

МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Навчальний посібник

Чернівці
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича
2025

УДК 53:51 + 517.95
М 545

Друкується за ухвалою Вченої ради
Навчально-наукового інституту фізико-технічних та комп'ютерних наук
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича

(Протокол № 10 від 19 червня 2025 року)

Рецензенти:

Вихор Людмила Миколаївна, доктор фізико-математичних наук,
Головний науковий співробітник Інституту термoeлектрики НАН і МОН
України

Перун Галина Михайлівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент
кафедри диференціальних рівнянь факультету математики та інформатики
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

Іваночко М.М., Головацький В.А., Маханець О.М.

Методи математичної фізики: навч. посіб./ М.М.Іваночко, В.А.Головацький,
О.М.Маханець. Чернівці: Чернівець. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2025. -
120 с.

У пропонуваному навчальному посібнику викладено лише ту частину методів математичної фізики, яка необхідна для засвоєння студентам фізичних спеціальностей та споріднених з ними інженерних спеціальностей, зокрема спеціальності прикладна фізика та наноматеріали і яка уможливить їм подальше оволодіння університетськими курсами теоретичної фізики та спеціальними курсами їхнього напрямку підготовки.

Курс математичної фізики є заключним розділом фундаментальної підготовки названих фахівців, у якому використовуються практично всі поняття вищої математики. Під час вивчення цієї дисципліни майбутні фахівці ознайомляться з методами математичного моделювання різних фізичних процесів та зроблять висновки, що побудовані моделі у вигляді диференціальних рівнянь можуть описувати суттєво різні фізичні явища.

Зміст посібника поділено за темами, які відповідають навчальній програмі дисципліни, розташування матеріалу відповідає основним типам рівнянь математичної фізики.

В основу покладені лекції, що читаються для студентів спеціальності Е6 Прикладна фізика та наноматеріали.

УДК 53 : 51 + 517.95
М 545

© Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича 2025
© Іваночко М.М., Головацький В.А., Маханець О.М. 2025

Зміст

Вступ	5
Розділ 1. Виведення рівнянь математичної фізики.	
Фізичні задачі, що приводять до рівнянь математичної фізики .	7
1.1 Виведення одновимірного хвильового рівняння, яке описує вільні поперечні коливання струни із закріпленими кінцями ...	7
Рівняння для напруженості змінного електричного та магнітного полів у вакуумі	10
1.2 Виведення рівнянь параболічного типу. Виведення рівнянь теплопровідності та дифузії	12
Рівняння теплопровідності. Рівняння поширення тепла в ізотропному твердому тілі.	10
Рівняння дифузії	12
1.3 Задачі, що приводять до рівнянь еліптичного типу. Рівняння Пуассона, Лапласа та Гельмгольца.	15
Виведення рівнянь Пуассона та Лапласа	15
Температура, що встановилася в однорідному твердому тілі	15
Рівняння, що описує потенціальний або ламінарний рух нестисливої рідини або газу	16
Рівняння Гельмгольца. Хвильове рівняння для монохроматичної хвилі	16
Розділ 2. Розв'язування рівнянь математичної фізики	17
2.1 Розв'язування рівнянь гіперболічного типу. Постановка граничних та початкових умов	17
2.2 Розв'язування хвильових рівнянь методом відокремлення змінних Ейлера – Фур'є	19
2.3 Вимушені коливання струни, закріпленої на кінцях	27
2.4 Розв'язування хвильового рівняння, яке описує коливання закріпленої струни у середовищі	30
2.5 Загальна гранична задача	33
2.6 Поздовжні коливання стержня	43
2.7 Коливання струни, закріпленої на одному кінці, під дією вимушуючої сили на другому кінці	45
2.8 Рівняння коливань необмеженої струни. Розв'язок Даламбера ..	47
2.9 Поширення хвиль у необмеженому просторі. Формула Пуассона	50
Розділ 3. Спеціальні функції.	
3.1. Інтегрування рівняння Лапласа у циліндричних координатах. Рівняння Бесселя	56
3.2. Розв'язування рівняння Бесселя нульового порядку. Функції Бесселя нульового порядку.	59
3.3. Умова ортогональності функцій Бесселя нульового порядку ...	63

3.4. Розв'язування рівняння Бесселя першого порядку.	66
3.5. Розв'язки рівняння Бесселя $\nu - 20$ порядку: функції Бесселя та функції Неймана	70
3.6. Функції Бесселя напівцілого порядку.	74
Розділ 4. Інтегрування рівнянь математичної фізики у сферичній системі координат.	
4.1. Розв'язування рівняння Лапласа у сферичних координатах. Рівняння Лежандра.	77
4.2. Розв'язування рівняння Лежандра.	80
4.3. Поліноми Лежандра	83
4.4. Формула Родріга визначає розв'язки рівняння Лежандра	87
4.5. Доведення умови ортогональності поліномів Лежандра	89
4.6. Сферичні та кульові функції	91
4.7. Стаціонарний розподіл температури в кулі	93
Розділ 5. Розв'язування рівнянь параболічного типу	95
5.1. Постановка крайових задач для рівнянь параболічного типу ...	96
5.2. Метод відокремлення змінних для рівнянь параболічного типу. Розв'язування однорідної крайової задачі	97
5.3. Поширення тепла в стержні, кінці якого знаходяться при заданих змінних температурах	99
5.4. Розв'язування неоднорідного рівняння теплопровідності	102
5.5. Поширення тепла в необмеженому стержні	105
5.6. Задача про поширення тепла у нескінченному циліндрі	108
Розділ 6. Рівняння еліптичного типу	110
6.1. Фундаментальні розв'язки рівнянь Лапласа та Гельмгольца ...	110
6.2. Граничні задачі для рівнянь еліптичного типу	112
6.3. Метод відокремлення змінних для рівнянь еліптичного типу. .	113
Перша крайова задача для круга. Формула Пуассона	114
Література	120

Вступ

У навчальному посібнику розглянуто лише ті методи математичної фізики, які є необхідними для засвоєння студентами фізичних і суміжних інженерних спеціальностей, зокрема спеціальності «прикладна фізика та наноматеріали», для їх подальшого успішного опанування університетських курсів з теоретичної фізики та спеціалізованих дисциплін своєї освітньої програми.

Курс математичної фізики є завершальним етапом фундаментальної підготовки таких фахівців і охоплює майже всі основні поняття вищої математики. У процесі його вивчення студенти знайомляться з методами математичного моделювання фізичних процесів і доходять висновку, що математичні моделі, зокрема у вигляді диференціальних рівнянь, здатні описувати широкий спектр різноманітних фізичних явищ.

Розглянуті завдання математичної фізики, що призводять до основних типів рівнянь з частинними похідними. Вивчення кожного типу розпочинається з найпростіших фізичних задач. Особлива увага приділяється математичній постановці задач, строгому викладу вирішення завдань та фізичній інтерпретації результатів.

Безліч задач механіки та фізики призводять до диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку. Зокрема:

1) при вивченні й дослідженні різних хвильових процесів таких як пружні коливання, звукові чи електромагнітні хвилі, а також інших коливальних процесів прийдемо до *хвильового рівняння*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right); \quad (1)$$

2) явища теплопровідності у однорідних й ізотропних середовищах, а також процеси дифузії, описуються *рівняннями теплопровідності й дифузії*:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right); \quad (2)$$

3) при дослідженні встановленого теплового режиму в ізотропному однорідному тілі приходимо до *рівняння Пуассона*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -f(x, y, z). \quad (3)$$

За відсутності джерел тепла всередині тіла рівняння (3) переходить у

рівняння *Лапласа*
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (4)$$

Також рівнянню Лапласа (4) задовольняють потенціали потенціального поля тяжіння та стаціонарного електричного поля, в яких відсутні відповідно маси і електричні заряди.

Наведені рівняння називають *основними рівняннями математичної фізики*. Кожне із цих рівнянь має незліченну кількість частинних розв'язків. Для кожної конкретної фізичної задачі необхідно з усіх цих розв'язків відібрати

той, який задовольняє додатковим умовам, які слідують із фізики розглядуваної задачі. Отже, *завдання математичної фізики полягає у відшуванні розв'язків рівнянь у частинних похідних, які б задовольняли так звані граничні та початкові додаткові умови, які слідують з фізичного змісту задачі.*

Перші два розділи посібника присвячені виведенню рівнянь математичної фізики та розгляду фізичних задач і явищ, що приводять до цих рівнянь та вивчаються різні методи розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема, метод відокремлення змінних, метод Даламбера або метод характеристик для розв'язування задачі Коші, вивчення поширення хвиль у необмеженому просторі. Формула Пуассона.

У наступних розділах посібника розглянуто деякі додаткові функції, що часто з'являються у фізичних застосуваннях і є власними функціями певної крайової задачі Штурма-Ліувілля. Розпочнемо з набору спеціальних функцій, які відомі як класичні ортогональні поліноми. Серед них — поліноміальні функції, зокрема многочлени Лежандра. Досить часто трапляються також функції Бесселя. Ми приділили більше уваги вивченню саме функцій Лежандра та Бесселя. Зазвичай ці функції виникають як розв'язки диференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами при застосуванні методів степеневих рядів.

Функції Бесселя знаходять широке застосування при розв'язанні задач з теорії теплопровідності, задач про коливання пластинок, оболонок та інших подібних задач. Вивчення функцій Бесселя є важливим тому, що при побудові розв'язків основних крайових задач математичної фізики у симетричних областях (таких як круг, циліндр, куля тощо) за допомогою класичного методу відокремлення змінних виникають рівняння з частинними похідними, які містять оператор Лапласа, записаний у полярних, циліндричних або сферичних координатах. У результаті відповідна задача Штурма-Ліувілля на власні значення та власні функції зводиться до рівняння Бесселя, розв'язками якого і є функції Бесселя.

Спеціальні функції — це умовне позначення групи функцій, які не можуть бути подані через елементарні функції, тобто їх не можна виразити як комбінації поліномів, тригонометричних, гіперболічних, обернених тригонометричних і гіперболічних функцій, експоненти або логарифма. Зазвичай спеціальні функції задаються у вигляді рядів або інтегралів. Ці функції мають велике значення в різних наукових галузях, тому їхні властивості добре досліджені, а для обчислень застосовуються спеціальні таблиці та алгоритми, реалізовані у численних комп'ютерних програмах.

При викладі матеріалу посібника ми намагалися уникати зайвого заглиблення в суто математичні деталі, зосереджуючись на прикладному аспекті. Це особливо важливо для студентів фізичних спеціальностей, для яких математична фізика є інструментом, а не метою.

Розділ 1. Виведення рівнянь математичної фізики

Фізичні задачі, що приводять до рівнянь математичної фізики

1. Виведення одновимірного хвильового рівняння, яке описує вільні поперечні коливання струни із закріпленими кінцями.

Кінцеві точки струни закріплені, струна туго натягнута, у рівноважному положенні вона випрямлена вздовж осі Ox , при виведенні її з рівноважного положення вона здійснює тільки поперечні коливання, тобто всі точки струни рухаються перпендикулярно до її рівноважного положення, знаходячись весь час в одній площині. При коливаннях знехтуємо опором повітря і тертям в точках кріплення струни.

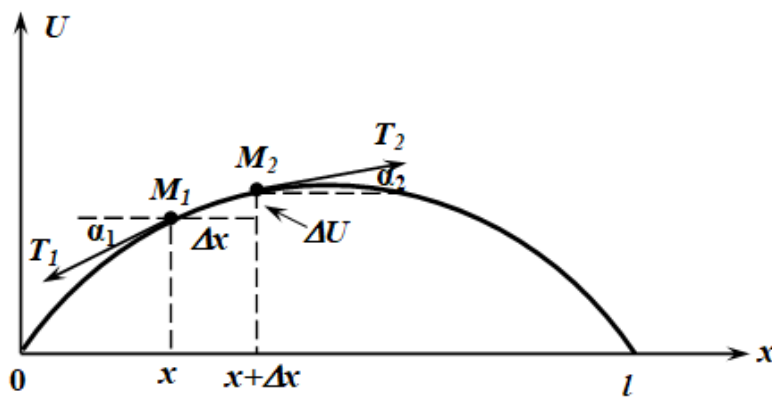


Рис. 1.1

В процесі коливань величина відхилення U будь-якої точки струни залежатиме від її координати x і змінюватиметься з часом t : $U = U(x, t)$.

При кожному фіксованому значенні t графік функції $U(x, t)$, очевидно, дає форму струни в цей момент

часу (рис. 1.1).

Наше завдання: вивести рівняння, якому задовольнятиме функція $U(x, t)$, яка описуватиме колильний рух закріпленої струни – одновимірної коливної структури довжиною l .

Наближення, в яких виводитимемо рівняння вільних коливань струни:

1. Розглядатимемо малі коливання струни, тобто відхилення від рівноважного положення малі, при цьому кути $\alpha(x, t)$, які утворює дотична до струни в довільній точці з віссю абсцис Ox , малі, відповідно в розкладі в ряд Маклорена

$\sin \alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots$ нехтуватимемо $\alpha^2 \approx 0$ і вищими степенями, тоді $\sin \alpha \approx \alpha$.

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha^2}{2} = 0, \quad \text{звідси } \cos \alpha = 1 \quad \text{і} \quad \operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha. \quad (1)$$

Розглядаючи далі тільки малі коливання, вважатимемо, що зміщення $U(x, t)$,

а також похідна $\frac{\partial U}{\partial x}$ настільки малі, що їх квадратами і добутками можна знехтувати в порівнянні з самими цими величинами.

З рис.1 видно, що частинна похідна

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{\partial U}{\partial x}$$

задає кутовий коефіцієнт нахилу дотичної до струни в точці з абсцисою x в момент часу t .

$$\frac{\partial U}{\partial t} = v, \text{ тобто похідна від зміщення по часу задає швидкість точок струни,}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a, \text{ задає прискорення точок струни.}$$

Так як $\frac{\partial U}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha$, то в силу умов (1) матимемо, що $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 \approx 0$.

2. Продемонструємо, що в наших припущеннях величину сили натягу T можна вважати однаковою в будь-якій точці струни в довільний момент часу. Для цього розглянемо довільний елементарний участок $M_1 M_2$ струни величиною Δx , і замінимо дію на нього відкинутих участків струни силами натягу $\vec{T}_1$ та $\vec{T}_2$.

Запишемо динамічне рівняння прискореного коливного руху для ділянки струни $M_1 M_2$ з довжиною Δx та масою $\Delta m = \rho \Delta x$:

$$\Delta m \vec{a} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2. \quad (2)$$

В (2) знехтувано силою тяжіння $\Delta m \vec{g}$ малої ділянки струни $M_1 M_2$ порівняно з силами натягу $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, які вважаємо значними.

Спроекуємо векторне рівняння руху (2) на вісь абсцис Ox :

$$0 = -T_1 \cos \alpha_1 + T_2 \cos \alpha_2. \quad (3)$$

Так як в наших наближеннях $\cos \alpha \approx 1$ згідно з (1), то з (3) слідує, що

$$T_1 = T_2 \equiv T_0. \quad (4)$$

Оскільки M_1 і M_2 вибрані довільним чином, то з (4) слідує, що сила натягу струни є однаковою у всіх точках струни, що коливається.

3. Перейдемо до виводу рівняння вільних коливань закріпленої струни. Спроекуємо векторне динамічне рівняння руху (2) на вісь Ou :

$$\Delta m a = -T_1 \sin \alpha_1 + T_2 \sin \alpha_2.$$

Враховуючи в ньому (4), запишемо

$$\Delta m a = T_0 (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1).$$

В силу (1) можна записати, що

$$\sin \alpha_2 \approx \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\partial U(x + \Delta x, t)}{\partial x}, \quad \sin \alpha_1 \approx \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\partial U(x, t)}{\partial x},$$

$$\Delta m a = T_0 \left[\frac{\partial U(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \right]. \quad (5)$$

Розкладемо перший доданок в правій частині (5) в ряд Тейлора в околі точки x по малому Δx :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x+\Delta x} = \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_x + \frac{1}{1!} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_x \cdot (x + \Delta x - x) + \dots ,$$

тоді

$$\Delta m a = T_o \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cdot \Delta x .$$

Враховуючи, що $\Delta m = \rho \Delta x$, де ρ - лінійна густина маси струни, а $a = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$, отримаємо

$$\rho \Delta x \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = T_o \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cdot \Delta x . \quad (6)$$

Розділивши останнє рівняння на ρ та ввівши позначення $a^2 = \frac{T_o}{\rho} > 0$, (7)

отримаємо рівняння *вільних коливань струни*

$$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}} \quad (8)$$

Рівняння (8) ще називають *одновимірним хвильовим рівнянням*. Воно є лінійним диференціальним рівнянням 2-го порядку в частинних похідних з постійними коефіцієнтами.

4. Нехай на закріплену струну завдовжки l діє зовнішня вимушуюча сила, розподілена так, що на кожну одиницю довжини струни припадає зусилля $f(x, t)$. Тоді на елемент довжини Δx ділянки $M_1 M_2$ струни припадає дія вимушуючої сили $f(x, t) \cdot \Delta x$ і рівняння коливань для елементарної довжини Δx з урахуванням (6) матиме вигляд:

$$\rho \cdot \Delta x \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = T_o \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cdot \Delta x + f(x, t) \cdot \Delta x$$

або

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho} \cdot f(x, t) . \quad (9)$$

Рівняння (9) є хвильовим рівнянням, яке описує *вимушені коливання* закріпленої струни. Воно є неоднорідним рівнянням порівняно з (8), яке можна записати як однорідне :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 .$$

Висновок: врахування вимушуючої сили приводить до неоднорідного диференційного рівняння коливань струни.

5. Якщо коливання здійснює двохвимірна система, наприклад квадратна пружна мембрана, то зміщення від рівноважного положення її точок залежатиме від двох координатних змінних і часу t , тоді хвильове рівняння, що описує колильний рух такої закріпленої по краях системи, буде **двохвимірним хвильовим рівнянням**:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right]. \quad (10)$$

У випадку коливань трьохвимірної системи, наприклад, початково стиснутого пружного куба, хвильове рівняння коливань буде трьохвимірним:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right] \quad (11)$$

або

$$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \Delta U} \quad (12)$$

Рівняння (8), (10), (11) є рівняннями у частинних похідних, які мають безліч розв'язків, які відрізняються константами інтегрування. Щоб виокремити необхідний частинний розв'язок, який відповідає поставленій фізичній задачі, необхідно на шуканий розв'язок, тобто функцію $U(x, t)$, накласти додаткові умови, які впливають з умови задачі.

При розгляді задачі про коливання струни завдовжки l додаткові умови можуть бути 2-х типів: **початкові** і **граничні** (крайові).

Початкові умови задають початковий профіль струни та початковий розподіл швидкостей її точок:

$$\begin{aligned} U|_{t=0} &= \varphi(x) & \text{Приклад: } U|_{t=0} &= ax^2 + bx + c \\ \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \psi(x) \end{aligned} \quad (13)$$

Оскільки кінці струни закріплені, то зміщення цих кінців від рівноважного положення дорівнюватиме нулю:

$$\begin{aligned} U(0, t) &= 0, \\ U(l, t) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

(14) – це нульові або **однорідні граничні умови**.

6. Рівняння для напруженості змінного електричного та магнітного полів у вакуумі.

Запишемо рівняння Максвелла у вакуумі в області, де відсутні електричні заряди (у Гауссовій системі одиниць СГС)

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \text{div} \vec{E} = 0, \quad \text{div} \vec{H} = 0, \quad \text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (15)$$

тут $\vec{E}$ - напруженість електричного, а $\vec{H}$ - напруженість магнітного полів.

Змінне в часі магнітне поле породжує зчеплене з ним вихрове електричне поле, яке, в свою чергу, породжує змінне магнітне поле. Цей процес поширюється в просторі (вакуумі) у вигляді електромагнітної хвилі.

Застосуємо операцію **rot** до першого рівняння системи (15), одержимо

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{E}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot}\vec{H}). \quad (16)$$

За відомою формулою векторного аналізу

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{E}) = \vec{\nabla}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E}.$$

В нашому випадку $\text{rot}(\text{rot}\vec{E}) = -\Delta\vec{E}$, оскільки $\text{div}\vec{E} = 0$.

Враховуючи це в рівнянні (16), а також використовуючи останнє рівняння системи (15), отримаємо хвильове рівняння для вектора $\vec{E}$ електромагнітної хвилі:

$$-\Delta\vec{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

або

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta\vec{E}} \quad (17)$$

Аналогічно, застосовуючи оператор **rot** до обох частин останнього рівняння системи (15), отримаємо

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{H}) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot}\vec{E}),$$

$$\text{rot}(\text{rot}\vec{H}) = \vec{\nabla}(\text{div}\vec{H}) - \Delta\vec{H} = -\Delta\vec{H}$$

та, враховуючи в правій частині перше рівняння системи (15), одержимо

$$-\Delta\vec{H} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

або

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = c^2 \Delta\vec{H}} \quad (18)$$

Одержані нами рівняння (17) та (18) є трьохвимірними **хвильовими рівняннями**, яким задовольняють вектори $\vec{E}$ та $\vec{H}$ електромагнітної хвилі, що поширюється у вакуумі.

Виведені нами **хвильові рівняння** відносяться до класу **гіперболічних рівнянь** математичної фізики.

2. Виведення рівнянь параболічного типу

Виведення рівнянь теплопровідності та дифузії

1. Рівняння теплопровідності. Рівняння поширення тепла в ізотропному твердому тілі.

Процеси поширення тепла в середовищі є незворотніми, вони завжди ідуть із збільшенням ентропії. Коли у середовищі відбуваються процеси теплопереносу, то температура середовища $T(\vec{r}, t)$ змінюється як у просторі $\vec{r}$, так і в часі t .

Виведемо рівняння теплопровідності, розв'язок якого уможливить визначити розподіл температури $T(x, y, z, t)$ у середовищі, в якому відбувається переніс тепла. Якщо в просторі існує перепад температури, виникає градієнт температур $\text{grad}T$, в протилежному напрямку до якого і здійснюватиметься переміщення тепла.

Рівняння для визначення функції $T(x, y, z, t)$ отримаємо, записавши рівняння теплового балансу для теплового процесу.

У середовищі подумки виділимо деякий об'єм V , обмежений замкнутою поверхнею S . Нехай всередині цього об'єму є джерела тепла, потужність яких позначимо функцією $f(\vec{r}, t)$, тобто це та кількість тепла, яка в одиницю часу виділяється в одиницю об'єму середовища цими джерелами тепла. Тоді тепло, яке *щосекундно* отримує об'єм середовища V від джерел тепла, визначимо наступним чином:

$$Q_1 = \int_V f(\vec{r}, t) dV. \quad (1)$$

Це тепло Q_1 іде на нагрівання середовища всередині об'єму V та виходить у вигляді потоків тепла за межі об'єму через поверхню S .

Кількість теплоти Q_2 , яка йде на *щосекундний* нагрів об'єму V , визначимо так:

$$Q_2 = \frac{\partial}{\partial t} \int_V c \rho T dV. \quad (2)$$

Визначимо кількість теплоти, яка у вигляді потоків виноситься за межі об'єму V .

Відповідно до *закону Фур'є* потік тепла, зумовлений градієнтом температур, який *щосекундно* переноситься через *одичну* площадку перпендикулярно до неї, дається виразом:

$$\vec{q} = -k \text{grad}T$$

тут k - коефіцієнт теплопровідності, $[q] = \frac{\text{Дж}}{\text{см}^2 \cdot \text{с}}$.

Тоді кількість тепла, яка у вигляді потоків *щосекундно* виноситься за межі поверхні S , задається виразом

$$Q_3 = \oint_S \vec{q} d\vec{S} . \quad (3)$$

Запишемо рівняння теплового балансу: $Q_1 = Q_2 + Q_3$
або

$$\int_V f(\vec{r}, t) dV = \oint_S \vec{q} d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V c\rho T dV ,$$

враховуючи вигляд $\vec{q}$, що дається законом Фур'є, перепишемо останнє рівняння у вигляді:

$$\int_V f(\vec{r}, t) dV = -k \oint_S \text{grad} T d\vec{S} + \int_V c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV .$$

Щоб вирівняти мірності інтегралів, перейдемо в першому доданку правої частини рівняння від поверхневого інтеграла до об'ємного, використовуючи теорему Остроградського – Гаусса:

$$\int_V f(\vec{r}, t) dV = -k \int_V \text{div}(\text{grad} T) dV + \int_V c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV .$$

Так як $\text{div}(\text{grad} T) = \Delta T$, де $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа, то одержимо

$$\int_V [f(\vec{r}, t) + k\Delta T - c\rho \frac{\partial T}{\partial t}] dV = 0 .$$

Оскільки об'єм V є довільним, то з рівності нулю інтеграла слідує рівність нулю підінтегрального виразу:

$$f(\vec{r}, t) + k\Delta T = c\rho \frac{\partial T}{\partial t}$$

або

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T + \frac{1}{c\rho} f(\vec{r}, t)} \quad (4)$$

де $a^2 = \frac{k}{c\rho} > 0$ - коефіцієнт теплопровідності.

За відсутності джерел тепла всередині V , коли тепло в об'єм поступає тільки за рахунок потоків тепла через поверхню S , яка обмежує цей об'єм, рівняння теплопровідності спрощується у цьому випадку і набуває вигляду:

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T} \quad (5)$$

(4) і (5) отримані нами *рівняння теплопровідності* неоднорідне та однорідне відповідно, які описують явища переносу тепла в різних структурах.

2. Рівняння дифузії

Продемонструємо, що рівняння дифузії має аналогічний вигляд як рівняння теплопровідності (5). Вони обидва описують явища переносу в природі: рівняння теплопровідності – явища переносу тепла, а рівняння дифузії – явища переносу речовини.

При дослідженні явища дифузії невідомо шуканою функцією є концентрація дифундуючої речовини, яку позначають $n = n(x, y, z, t)$.

Нехай частинки речовини дифундують з деякого об'єму середовища V , обмеженого замкнутою поверхнею S , в оточуюче середовище. Дифузія з однієї ділянки простору в іншу можлива при наявності градієнта концентрації.

Відповідно до **закону Фіка** кількість частинок, яка за *одиницю часу* у вигляді потоку перетинає *одиничну* площадку перпендикулярно до неї, дається виразом:

$$\bar{q} = -D \text{grad} n$$

тут D - коефіцієнт дифузії.

Тоді кількість частинок, яка *щосекундно* у вигляді потоку дифундує з об'єму V , дорівнюватиме: $\oint_S \bar{q} d\vec{S}$.

Нехай $N = \int_V n(\vec{r}, t) dV$ - початкова кількість частинок в об'ємі V . Тоді зміна з часом цієї кількості частинок N зумовлена потоками дифундуючих частинок через поверхню S :

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\oint_S \bar{q} d\vec{S} \quad \text{або} \quad \frac{\partial N}{\partial t} = D \oint_S \text{grad} n d\vec{S}.$$

Враховуючи в останньому рівнянні вираз для початкової кількості частинок, а також теорему Остроградського – Гаусса для переходу від поверхневого до об'ємного інтегралу від вектор – функцій, одержимо:

$$\int_V \frac{\partial n}{\partial t} dV = D \int_V \text{div}(\text{grad} n) dV.$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n \quad (6)$$

(6) – рівняння дифузії.

Ми отримали рівняння теплопровідності (5) та рівняння дифузії (6), які є рівняннями нового типу, що описують незворотні процеси, явища переносу в природі. Ці рівняння за класифікацією рівнянь математичної фізики відносяться до другого класу рівнянь – так званих **рівнянь параболічного типу**.

3. Задачі, що приводять до рівнянь еліптичного типу Рівняння Пуассона, Лапласа та Гельмгольца

1. Виведення рівнянь Пуассона та Лапласа

Розглянемо в просторі електростатичне поле, тобто незмінне в часі поле системи зарядів, розподілених в деякій області G з об'ємною густиною зарядів ρ . Для такого поля з напруженістю $\vec{E}$ з системи рівнянь Максвелла залишаються два рівняння, які його описують:

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{E} = 0 \\ \text{div} \vec{E} = 4\pi\rho \end{cases}.$$

З рівності $\text{rot} \vec{E} = 0$ слідує, що векторне електростатичне поле не вихрове або, інакше кажучи, потенціальне, тобто для нього можна ввести скалярний потенціал

$$\vec{E} = -\text{grad} \phi.$$

Тоді $\text{div} \vec{E} = -\text{div}(\text{grad} \phi) = 4\pi\rho$, а так як $\text{div}(\text{grad} \phi) = (\vec{\nabla}, \vec{\nabla} \phi) = \Delta \phi$, то остаточно отримаємо

$$\boxed{\Delta \phi = -4\pi\rho} \quad (1)$$

(1) – рівняння Пуассона, з якого можна знайти потенціал поля в тій області простору G , де заряд розподілений з густиною $\rho \neq 0$.

В тій частині простору, де заряд відсутній ($\rho = 0$), потенціал того ж поля задовольнятиме **рівнянню Лапласа**:

$$\boxed{\Delta \phi = 0} \quad (2)$$

2. Температура, що встановилася в однорідному твердому тілі

У пункті 1. Рівняння теплопровідності з попереднього параграфу було встановлено, що рівняння поширення тепла в однорідному ізотропному тілі за відсутності джерел тепла в ньому має вигляд

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right).$$

Припустимо, що температура в кожній точці всередині тіла встановилася, тобто не змінюється з часом. Тоді $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ і останнє рівняння набуває вигляду

рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \quad (1)$$

Отже, температура $U(x, y, z)$, що встановилася в однорідному твердому тілі, задовольняє рівнянню Лапласа (1). Для визначення $U(x, y, z)$ вже не потрібно задавати початкового розподілу температури, а достатньо задати одну незалежну від часу граничну умову.

3. Рівняння, що описує потенціальний або ламінарний рух нестисливої рідини або газу

Розглянемо встановлений ламінарний рух нестисливої рідини. Ламінарний або потенціальний рух рідини передбачає, що

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad , \quad \text{rot} \vec{v} = \mathbf{0} \quad , \quad \rho = \text{const} . \quad (1)$$

З (1) випливає, що швидкість рідини $\vec{v}(x, y, z)$ є потенціальним вектором

$$\vec{v} = -\text{grad} \varphi \quad , \quad \varphi - \text{функція неперервності}. \quad (2)$$

Для нестисливої рідини густина $\rho = \text{const}$ і з рівняння неперервності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0 \quad ,$$

так як $\rho = \text{const}$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, а $\vec{j} = \rho \vec{v}$, отримаємо

$$\rho \cdot \text{div} \vec{v} = 0 \quad \text{або} \quad \text{div} \vec{v} = 0 . \quad (3)$$

Підставивши (2) в (3), отримаємо $\text{div}(\text{grad} \varphi) = 0$ або

$$\Delta \varphi = 0 \quad (4)$$

Отже, ламінарний плин рідин і газів описується рівнянням Лапласа (4).

4. Рівняння Гельмгольца. Хвильове рівняння для монохроматичної хвилі

Хвильове рівняння, яке описує будь-який коливний процес, має вигляд

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \Delta U \quad , \quad U = U(x, y, z, t) \quad (1)$$

Запишемо це ж рівняння для монохроматичної хвилі. Монохроматичні хвилі – це ідеальні хвилі, в яких коливання полів відбувається за законом косинуса або синуса, тобто для монохроматичних хвиль часова залежність зміщення у коливному процесі наступна

$$U(x, y, z, t) = U_0(x, y, z) \cdot e^{i\omega t} \quad , \quad (2)$$

тут $U_0(x, y, z)$ - амплітуда коливань монохроматичної хвилі, яка є функцією тільки координат, часова залежність за Ейлером $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$,

ω - колова частота (або лінійна частота $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ (Гц)), яка визначає часову циклічність змін поля хвилі в заданій точці простору.

Так як $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\omega^2 U$, то хвильове рівняння для монохроматичної хвилі набуде вигляду

$$-\omega^2 U_0 e^{i\omega t} = a^2 e^{i\omega t} \Delta U_0 \quad ,$$

$$\Delta U_0 + \left(\frac{\omega}{a} \right)^2 U_0 = 0 .$$

$\frac{\omega}{a} = k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - хвильове число. Тоді остаточно *рівняння Гельмгольца*, з якого визначається закон зміни амплітудних значень монохроматичної хвилі в просторі, має вид

$$\Delta U_0 + k^2 U_0 = 0$$

Ми отримали *рівняння Пуассона* $\Delta U = f(x, y, z)$, *рівняння Лапласа* $\Delta U = 0$ та *рівняння Гельмгольца* $\Delta U + k^2 U = 0$, які є рівняннями нового типу, що описують стаціонарні в часі процеси. Ці рівняння за класифікацією рівнянь математичної фізики відносяться до третього класу рівнянь – так званих **рівнянь еліптичного типу**.

Розділ 2. *Розв'язування рівнянь математичної фізики*

1. Розв'язування рівнянь гіперболічного типу

Рівняння $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \Delta U + f(\vec{r}, t)$ є диференціальним хвильовим рівнянням другого порядку, яке описує вимушені коливання трьохвимірної структури, однак за відсутності вимушуючої сили воно може набувати форми днорідного хвильового рівняння, яке описуватиме поперечні коливання закріпленої та вільної струни, поздовжні коливання стержня, коливання пружної мембрани, електромагнітні коливання, тощо.

Звичайні диференціальні рівняння а тим більше диференціальні рівняння з частинними похідними, мають, взагалі кажучи, нескінченну множину розв'язків через те, що константи інтегрування в них можуть приймати безліч значень. Тому, якщо фізична задача зводиться до розв'язування рівнянь з частинними похідними, то для одгозначної характеристики досліджуваного процесу до рівняння необхідно приєднати деякі додаткові умови, які сліднують з фізики задачі.

1. *Постановка граничних та початкових умов*

Існує декілька різних типів граничних умов для рівнянь гіперболічного типу.

1. Розглянемо задачу про вільні поперечні коливання закріпленої струни завдовжки l . В цій задачі $U(x, t)$ є відхиленнями точок струни від рівноважного вздовж осі Ox положення. Якщо кінці струни закріпити, то вони не зазнаватимуть зміщення, тоді для розв'язку повинні виконуватись наступні граничні умови

$$U(0, t) = 0, \quad U(l, t) = 0. \quad (1)$$

Ці граничні умови називаються однорідними або нульовими.

Оскільки процес коливання струни залежить від її початкової форми і розподілу швидкостей точок струни в початковий момент, то граничні умови (1) слід доповнити початковими

$$U(x,0) = \varphi(x) , \quad \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x) , \quad (2)$$

$\varphi(x)$, $\psi(x)$ - відомі задані функції.

2. Якщо кінці струни не закріплені, а рухаються по визначеному закону, то граничні умови (1) набувають нового вигляду

$$U(0,t) = \mu_1(t) , \quad U(l,t) = \mu_2(t) . \quad (3)$$

Такі граничні умови називаються неоднорідними.

Можливі й інші типи граничних умов.

3. Для прикладу, розглянемо задачу про поздовжні коливання пружини завдовжки l , один кінець якої закріплений в точці підвісу, а другий вільний. Закон руху вільного кінця не заданий і є шуканим розв'язком задачі.

При $x = 0$ верхній кінець пружини закріплений, а тому

$$U(0,t) = 0 .$$

На вільному нижньому кінці пружини, оскільки зовнішні сили відсутні, сила

натягу пружини $T(x,t) = k \frac{\partial U}{\partial x}$ дорівнює нулю

$$T(l,t) = k \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 .$$

Математично свобідність другого кінця пружини позначається наступною краєвою умовою

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 .$$

Таким чином, граничні умови в цьому випадку будуть такими

$$U(0,t) = 0 , \quad \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 . \quad (4)$$

4. Якщо кінець $x = 0$ пружини рухається по визначеному закону, а на кінець $x = l$ діє сила $F(t)$, то граничні умови набувають вигляду

$$U(0,t) = \mu(t) , \quad U_x(l,t) = \frac{F(t)}{k} = v(t) . \quad (5)$$

В кожній конкретній задачі можна сформулювати свої крайові умови.

Однак в математичній фізиці виділяють *дві типові загальні граничні задачі*.

Перша крайова задача

Знайти функцію $U(x,t)$, визначену в області $0 < x < l$, $t > 0$, яка є розв'язком рівняння

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x, t) \quad \text{для } 0 < x < l, \quad t > 0$$

і задовольняє граничним

$$U(0, t) = \mu_1(t), \quad U(l, t) = \mu_2(t), \quad t > 0$$

і початковим умовам

$$U(x, 0) = \varphi(x), \quad U_t(x, 0) = \psi(x).$$

Задача Коші

Якщо нас цікавить явище впродовж малого проміжку часу, коли вплив границь на нього є ще не суттєвим, то замість повної задачі можна розглянути задачу тільки з початковими умовами для необмеженої області.

Знайти розв'язок рівняння

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x, t) \quad \text{для } -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

з початковими умовами

$$U(x, 0) = \varphi(x), \quad U_t(x, 0) = \psi(x) \quad \text{при } -\infty < x < \infty.$$

2. Розв'язування рівнянь гіперболічного типу

Розв'язування хвильових рівнянь методом відокремлення змінних Ейлера – Фур'є

Розглянемо задачу про вільні коливання струни завдовжки l , закріпленої з обох кінців під дією початкових збурень цієї коливної системи. Задача зводиться до розв'язування однорідного одновимірного рівняння коливань струни

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$\text{з крайовими} \quad U|_{x=0} = 0, \quad U|_{x=l} = 0 \quad (2)$$

$$\text{та початковими умовами} \quad U|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x). \quad (3)$$

Метод Фур'є або метод розділення змінних є одним із найважливіших методів розв'язування рівнянь математичної фізики, який використовуватимемо неодноразово до задач різного типу.

Перша частина цього методу полягає у відшуванні частинних розв'язків рівняння (1), які задовольняють граничним умовам (2).

Здійснимо відокремлення змінних: для цього розв'язок рівняння (1) шукаємо у вигляді

$$U(x, t) = X(x) \cdot T(t). \quad (4)$$

Тоді $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = X(x) \cdot T''(t)$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = X''(x) \cdot T(t)$ і, враховуючи це у рівнянні (1), отримаємо

$$X(x) \cdot T''(t) = a^2 X''(x) \cdot T(t) \quad | : a^2 X(x) \cdot T(t)$$

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} . \quad (5)$$

Зауважимо, що ліва частина рівняння (5) залежить тільки від часової змінної t і не змінюється при зміні координатної змінної x в правій частині рівняння. Тому, якщо зафіксувати час t і змінювати x , ліва частина рівняння, а відповідно і відношення в правій частині будуть зберігати однакові постійні значення. Міркуючи аналогічно, встановимо, що якщо зафіксувати значення x в правій частині (5), то права частина рівняння залишається сталою, при цьому не може змінюватися відношення і в лівій частині при зміні змінної t в ній. Це буде справедливо, коли обидві частини рівняння (5) не залежать ні від x , ні від t , тобто коли обидва відношення в лівій і правій частинах при довільних x і t є постійними величинами.

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = c = \text{const} . \quad (6)$$

Звідси слідує, що функції $X(x)$ та $T(t)$ мають задовольняти рівнянням

$$X''(x) - cX(x) = 0 \quad \text{і} \quad T''(t) - ca^2 T(t) = 0 . \quad (7)$$

Так як нас цікавлять частинні розв'язки, які задовольняють крайові умови (2), то при довільному значенні t повинні виконуватись рівності

$$U|_{x=0} = X(0) \cdot T(t) = 0, \quad U|_{x=l} = X(l) \cdot T(t) = 0.$$

Якщо б останні рівності в нуль перетворював другий співмножник, то розв'язок (4) дорівнював би нулю при всіх значеннях x і t . Щоб відшукати розв'язки не тотожно рівні нулю, які саме нас цікавлять, потрібно в останніх рівностях покласти

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0 .$$

Для знаходження функції $X(x)$ ми прийшли до наступної задачі: знайти розв'язок лінійного диференційного рівняння 2-го порядку

$$\begin{cases} X''(x) - cX(x) = 0 \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases} . \quad \begin{matrix} (8) \\ (9) \end{matrix}$$

Ця задача називається *задачею Штурма – Ліувілля* для визначення власних функцій та власних чисел.

Очевидно, що ця задача при довільному значенні константи c має розв'язок $X(x) \equiv 0$.

Виявляється, однак, що при деяких значеннях постійної c вона має і ненульові розв'язки.

Розв'язок рівняння (8) шукаємо в експоненціальному вигляді $X(x) = e^{rx}$, тоді, підставляючи його в (8), отримаємо *характеристичне рівняння*

$$r^2 - c = 0 \quad (10)$$

і розглянемо різні випадки:

1) Нехай константа $c = \lambda^2 > 0$ - додатня. Тоді корені характеристичного рівняння дійсні

$$r^2 - \lambda^2 = 0, \quad r = \pm \lambda$$

і загальний розв'язок рівняння (8) має вигляд

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}.$$

Задовільнивши граничні умови (9), матимемо систему рівнянь для визначення констант інтегрування C_1 і C_2

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\lambda l} + C_2 e^{-\lambda l} = 0 \end{cases}$$

Оскільки визначник цієї однорідної системи рівнянь

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda l} & e^{-\lambda l} \end{vmatrix} = e^{-\lambda l} - e^{\lambda l} \neq 0$$

то система має єдиний тривіальний розв'язок $C_1 = C_2 = 0$. В цьому випадку розв'язків, відмінних від тотожного нуля, не існує.

2) Нехай $c = 0$. В цьому випадку загальний розв'язок рівняння (8), яке при $c = 0$ переписється $X''(x) = 0$, має вигляд

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Граничні умови дають наступний результат

$$X(0) = [C_1 x + C_2]_{x=0} = C_2 = 0$$

$$X(l) = C_1 l = 0,$$

тобто $C_1 = C_2 = 0$, отже і в цьому випадку $X(x) \equiv 0$.

3) Нехай, нарешті, $c = -\lambda^2 < 0$. Корені характеристичного рівняння (10) в цьому випадку уявні $r = \pm i\lambda$ і розв'язок $X(x) = e^{rx}$ за Ейлером в цьому випадку подамо через тригонометричні функції

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x. \quad (11)$$

Вимагаємо, щоб розв'язок (11) задовольняв граничним умовам (9).

При $x = 0$: $X(0) = C_1 = 0$, а при $x = l$: $X(l) = C_2 \sin \lambda l = 0$, так як $C_2 \neq 0$, тоді

$$\sin \lambda l = 0,$$

рвідки $\lambda l = k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ($k \neq 0$, оскільки за умовою $\lambda \neq 0$).

Отже, якщо $\lambda = \frac{k\pi}{l}$, тобто $c = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$, то існують розв'язки (8) не рівні

тотожно нулю.

Величини $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$ називають *власними числами* задачі Штурма – Ліувілля, а функції $\sin \frac{k\pi}{l} x$ - *власними функціями* диференціального рівняння (8) цієї ж задачі з крайовими умовами (8).

Розв'язок, що відповідає фіксованому k , позначимо

$$X_k(x) = A_k \sin \frac{k\pi}{l} x \quad (12)$$

Він же буде розв'язком рівняння (8) і задовольнятиме граничним умовам (9). Так як індекс k пробігає значення $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, то (12) є системою власних функцій. Продemonструємо, що ця система власних функцій в інтервалі визначення $[0, l]$ складає повну ортонормовану систему функцій і задовольняє умовам ортогональності та нормування.

Означення: Система функцій $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\dots$, $\varphi_n(x)$, $\dots$ називається *ортogonalною* в інтервалі $[a, b]$, якщо інтеграл від добутку двох довільних різних функцій цієї системи дорівнює нулю:

$$\int_a^b \varphi_n(x) \cdot \varphi_m(x) dx = 0, \text{ якщо } m \neq n, \quad x \in [a, b].$$

Продemonструємо, що знайдені власні функції (12) ортогональні в інтервалі визначення $[0, l]$ і задовольняють наступним умовам ортогональності та нормування:

$$\int_0^l \sin \frac{\pi m}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x dx = 0 \quad \text{якщо } m \neq n. \quad (13)$$

$$\|X_k(x)\|^2 = \int_0^l \sin^2 \frac{k\pi}{l} x dx = \frac{l}{2} \quad \text{якщо } m = n. \quad (14)$$

Дійсно, використовуючи тригонометричну формулу перетворення добутку синусів в різницю,

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

доведемо правильність умови ортогональності, взявши інтеграл при $m \neq n$

$$\int_0^l \sin \frac{\pi m}{l} x \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x dx =$$

$$= \frac{l}{2\pi} \left[\frac{\sin \frac{\pi(m-n)x}{l}}{m-n} - \frac{\sin \frac{\pi(m+n)x}{l}}{m+n} \right]_0^l = 0$$

Для випадку, коли $m = n$,

$$\|X_k(x)\|^2 = \int_0^l \sin^2 \frac{k\pi}{l} x dx = \frac{l}{k\pi} \int_0^{k\pi} \sin^2 y dy = \frac{l}{k\pi} \int_0^{k\pi} \frac{1 - \cos 2y}{2} dy = \frac{l}{2k\pi} y \Big|_0^{k\pi} = \frac{l}{2}.$$

Отже, функцію $X(x)$, яка визначається виразом (12), для розв'язку (4) ми знайшли. Тепер повернемося до відшукування функції $T(t)$, яка є другою складовою розв'язку (4).

Кожному власному числу λ_k відповідає своя власна функція $T_k(t)$, яка визначається з другого рівняння (7), яке при $c = -\lambda_k^2 = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ набуде вигляду

$$T_k''(t) + \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 T_k(t) = 0. \quad (15)$$

Розв'язок диференційного рівняння з постійними коефіцієнтами (15) шукаємо в експоненціальному вигляді $T_k(t) = e^{rt}$, корені характеристичного

рівняння $r^2 + \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 = 0$ будуть уявними $r_{1,2} = \pm i \frac{k\pi}{l}$, а тому

загальний розв'язок рівняння (15) матиме вигляд

$$T_k(t) = B_k \cos \frac{k\pi}{l} t + D_k \sin \frac{k\pi}{l} t. \quad (16)$$

Підставляючи (12), (16) в (4)

$$U_k(x, t) = (B_k \cos \frac{k\pi}{l} t + D_k \sin \frac{k\pi}{l} t) \cdot A_k \sin \frac{k\pi}{l} x$$

і позначивши $A_k B_k = a_k$, $A_k D_k = b_k$, отримаємо

$$U_k(x, t) = (a_k \cos \frac{k\pi}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi}{l} t) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (17)$$

(17) називаються *власними функціями* задачі, а відповідні їм коливання струни називаються *власними коливаннями*.

Фізичний зміст отриманого розв'язку (17) вивчимо пізніше.

Друга частина методу Фур'є: використовуючи власні функції задачі (17), побудуємо загальний розв'язок, що задовольняє початковим умовам (3). Для цього знайдемо суму розв'язків (17), яка , через те, що рівняння (1) є лінійним і однорідним, теж буде його розв'язком

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \frac{k\pi x}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} t) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} . \quad (18)$$

Очевидно, що функція $U(x,t)$ задовольняє граничним умовам (2), оскільки кожна з функцій $U_k(x,t)$ їм задовольняє.

Будемо зараз підбирати постійні інтегрування a_k і b_k так, щоб задовольнити початкові умови (3).

При $t=0$ у (18) отримаємо

$$U|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l} = f(x) . \quad (19)$$

Диференціюючи ряд (18) по часу t , отримаємо

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} \left(-a_k \sin \frac{k\pi x}{l} t + b_k \cos \frac{k\pi x}{l} t \right) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l}$$

і, підставляючи $t=0$, задовільнимо другу початкову умову

$$\left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{l} b_k \sin \frac{k\pi x}{l} = F(x) . \quad (20)$$

Формули (19) та (20) показують, що величини a_k і $\frac{k\pi}{l} b_k$ є коефіцієнтами розкладу функцій $f(x)$ і $F(x)$ в ряд Фур'є по $\sin \frac{k\pi x}{l}$ в інтервалі $[0,l]$.

Для знаходження цих коефіцієнтів розкладу функцій в ряди Фур'є (19) і (20) використаємо доведені нами умови ортогональності (13) та нормування (14) для власних функцій цієї задачі.

Помножимо ліву і праву частини розкладу $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l} = f(x)$ на власну

функцію $\sin \frac{n\pi x}{l}$ та проінтегруємо рівняння в інтервалі визначення $[0,l]$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx . \quad (21)$$

Проаналізуємо нескінчену суму в лівій частині рівняння (21). Використовуючи умови ортогональності (13) та нормування (14) можемо стверджувати, що всі доданки цієї нескінченної суми, для яких $k \neq n$ дорівнюватимуть нулю з врахування (13) і тільки один доданок цієї суми, коли $k=n$, враховуючи умову нормування (14), дасть відмінний від нуля

результат

$$a_n \cdot \frac{l}{2} = \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx ,$$

звідки при заміні $n \rightarrow k$ отримаємо коефіцієнти розкладу

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x dx . \quad (22)$$

Здійснюючи аналогічні викладки для знаходження коефіцієнтів розкладу в ряд Фур'є (20) , отримаємо

$$\frac{k\pi a}{l} b_k = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x dx$$

або

$$b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l F(x) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x dx . \quad (23)$$

Отже, остаточно отримано розв'язок задачі у вигляді ряду

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi a}{l} t) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x \quad (18)$$

де коефіцієнти розкладу цього ряду даються виразами (22) і (23)

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x dx , \quad b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l F(x) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x dx .$$

Як слідує з (18), в моменти часу $t = \frac{2l}{a}$, $t = \frac{4l}{a}$, ... струна повертається у початкове положення, тобто коливання струни *незгасаючі* і *періодичні* з періодом $T = \frac{2l}{a}$. Зауважимо, що нами не враховано тертя в точках закріплення струни, яке привело б до згасаючих коливань.

Стоячі хвилі

Вияснимо фізичний зміст власних функцій

$$U_k(x,t) = (a_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi a}{l} t) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x , \quad (17)$$

з яких формується розв'язок (18) розглядуваної задачі. Зробимо деякі математичні перетворення, щоб розгледіти цей фізичний зміст в (17).

Введемо нові позначення

$$a_k = F_k \sin \varphi_k , \quad b_k = F_k \cos \varphi_k ,$$

такі, що $F_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, а $\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{a_k}{b_k}$. І оскільки коефіцієнти

розкладу a_k і b_k відомі і задаються виразами (22) і (23), то і введені нові сталі позначення F_k і φ_k теж є визначеними.

В цих позначеннях власні функції (17) набудуть вигляду

$$U_k(x, t) = F_k \left(\sin \varphi_k \cos \frac{k\pi}{l} t + \sin \frac{k\pi}{l} t \cos \varphi_k \right) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x . \quad (24)$$

Для спрощення виразу (24) використаємо тригонометричну тотожність

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] ,$$

тоді

$$U_k(x, t) = F_k \cdot \frac{1}{2} \left[\sin\left(\varphi_k + \frac{k\pi}{l} t\right) + \sin\left(\varphi_k - \frac{k\pi}{l} t\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{l} t + \varphi_k\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{l} t - \varphi_k\right) \right] \sin \frac{k\pi}{l} x = F_k \sin\left(\frac{k\pi}{l} t + \varphi_k\right) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x .$$

$$U_k(x, t) = \underbrace{F_k \sin \frac{k\pi}{l} x}_{A_k} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{l} t + \varphi_k\right) .$$

Отже,

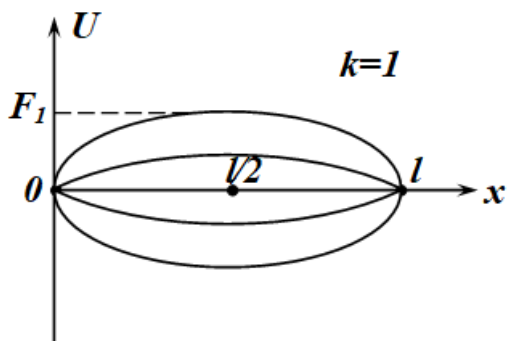
$$U_k(x, t) = A_k \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{l} t + \varphi_k\right) , \quad (25)$$

в (25) є повна аналогія з виразом для гармонічних коливань $x = A \sin(\omega t + \varphi)$.

З (25) випливає, що всі точки струни здійснюють гармонічні коливання з однією і тією ж частотою $\omega_k = \frac{k\pi}{l}$ і фазою φ_k . Амплітуда коливань залежить від абсциси точки коливань і визначається виразом

$$A_k = F_k \sin \frac{k\pi}{l} x . \quad (26)$$

При такому коливанні всі точки струни одночасно досягають свого максимального відхилення і одночасно проходять положення рівноваги. Такі коливання називаються **стоячими хвилями**.

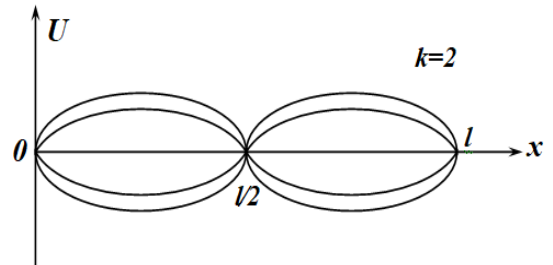


На рисунку зображена форма струни в різні моменти часу для випадку $k=1$. При цьому нерухомі тільки кінці струни (слідuje з (26), що при $x=0, l$ амплітуда коливань $A_1(x)=0$, а отже і зміщення $U_1(x, t)=0$), а найбільшого відхилення F_1 зазнає точка $x = \frac{l}{2}$.

Стояча хвиля $U_k(x, t)$ в інтервалі $[0, l]$ матиме стільки нерухомих точок, скільки коренів має рівняння $\sin \frac{k\pi}{l} x = 0$ в цьому інтервалі.

Так, наприклад, для $k = 2$ рівняння $\sin \frac{2\pi}{l} x = 0$ має розв'язками $\frac{2\pi}{l} x = \pi$, де $n = 0, 1, 2, \dots$. Звідси слідує, що нерухомих нульових точок, які попадають в інтервал довжини струни $[0, l]$, в цьому випадку буде три:

$$\begin{array}{lll} \text{при} & n = 0 & x = 0 \\ & n = 1 & x = \frac{l}{2} \\ & n = 2 & x = l \end{array}$$



Нерухомі точки називаються **вузлами** стоячої хвилі. Посередині між вузлами знаходяться точки, які зазнають максимального відхилення від рівноважного положення: вони називаються **пучностями** стоячої хвилі.

Кожна струна може мати власні коливання строго певних частот $\omega_k = \frac{k\pi a}{l}$, які називаються **власними частотами** струни. Найменша власна частота $\omega_1 = \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$. При коливаннях струна звучить, найнижчий тон цього звучання ω_1 . Звук тим вищий, чим більший натяг T_0 струни і чим коротша і легка струна. Решта тони, що відповідають частотам ω_k , називаються **обертонами**.

3. Вимушені коливання струни, закріпленої на кінцях

В попередньому параграфі продемонстровано застосування методу відокремлення змінних Ейлера – Фур'є до розв'язування задачі про вільні коливання закріпленої струни під дією початкових збурень.

Зараз розглянемо задачу про вимушені коливання однорідної струни, закріпленої на кінцях, під дією зовнішньої вимушуючої сили $p(x, t)$, розрахованої на одиницю довжини струни. Ця задача зводиться до розв'язування неоднорідного хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + g(x, t), \quad (1)$$

тут $g(x, t) = \frac{1}{\rho} p(x, t)$

з граничними умовами

$$U|_{x=0} = 0, \quad U|_{x=l} = 0 \quad (2)$$

та початковими умовами

$$U|_{t=0} = f(x) , \quad \frac{\partial U}{\partial t}|_{t=0} = F(x) . \quad (3)$$

Розв'язок задачі шукаємо у вигляді суми розв'язків

$$U(x,t) = V(x,t) + W(x,t) , \quad (4)$$

де $V(x,t)$ буде розв'язком неоднорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + g(x,t) , \quad (5)$$

що задовольняє нульовим граничним умовам

$$V|_{x=0} = 0 , \quad V|_{x=l} = 0 \quad (6)$$

і нульовим початковим умовам

$$V|_{t=0} = 0 , \quad \frac{\partial V}{\partial t}|_{t=0} = 0 . \quad (7)$$

А $W(x,t)$ - це розв'язок однорідного хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} , \quad (8)$$

що задовольняє граничним умовам

$$W|_{x=0} = 0 , \quad W|_{x=l} = 0 \quad (9)$$

і початковим умовам

$$W|_{t=0} = f(x) , \quad \frac{\partial W}{\partial t}|_{t=0} = F(x) . \quad (10)$$

Так як розв'язок вихідної задачі шукаємо у вигляді суми розв'язків (4), то є очевидним, що розділення задач здійснено таким чином, що задача (5)-(7) в сукупності з задачею (8)-(10) дає вихідну задачу (1)-(3).

Розв'язок $V(x,t)$ першої задачі описуватиме вимушені коливання закріпленої струни, які вона здійснюватиме під дією зовнішньої вимушуючої сили $g(x,t)$, коли початкові збурення відсутні.

Розв'язок $W(x,t)$ другої задачі описуватиме вільні коливання закріпленої струни - ті, які вона здійснюватиме під дією початкових збурень (10).

У попередньому параграфі методом Фур'є розв'язана задача (8)-(10) і її розв'язком є функція $W(x,t)$, яка дається у вигляді ряду

$$W(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi a}{l} t) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x ,$$

де коефіцієнти розкладу цього ряду визначаються виразами

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x dx , \quad b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l F(x) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x dx .$$

Зараз приступимо до відшукування розв'язків першої задачі (5)-(7). Як і у випадку вільних коливань, розв'язок неоднорідного хвильового рівняння (5)

шукаємо у вигляді розкладу функції $V(x, t)$ в ряд Фур'є по власних функціях $X_k(x) = A_k \sin \frac{k\pi}{l} x$ однорідної задачі:

$$V(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x . \quad (11)$$

Будь-яку аналітичну функцію можна розкласти в ряд по ортонормованій системі функцій $X_k(x) = A_k \sin \frac{k\pi}{l} x$, в тому числі і шуканий розв'язок $V(x, t)$, адже при цьому розв'язок у вигляді (11) завідома задовольнятиме граничним умовам (6).

Визначимо функції $T_k(t)$ таким чином, щоб ряд (11) задовольняв рівнянню (5) і початковим умовам (7). Підставимо (11) в (5):

$$\sum_{k=1}^{\infty} [T_k''(t) + a^2 T_k(t) \cdot \frac{k^2 \pi^2}{l^2}] \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x = g(x, t) .$$

Введемо позначення $\omega_k = \frac{k\pi a}{l}$, яке має зміст *частоти* коливань, тоді

$$\sum_{k=1}^{\infty} [T_k''(t) + \omega_k^2 T_k(t)] \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x = g(x, t) . \quad (12)$$

Щоб прирівняти ліву і праву частини рівняння (12) і отримати звідти рівняння, якому задовольняє складова розв'язку $T_k(t)$, розкладемо функцію $g(x, t)$ в ряд Фур'є по власних функціях $\sin \frac{k\pi}{l} x$:

$$g(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) \sin \frac{k\pi}{l} x , \quad (13)$$

де коефіцієнти розкладу відомі

$$g_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l g(\xi, t) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} \xi \cdot d\xi . \quad (14)$$

Отже, враховуючи (13) в (12), отримаємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} [T_k''(t) + \omega_k^2 T_k(t)] \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x .$$

З рівності сум слідує рівність виразів під знаками сум. Таким чином, приходимо до наступного диференційного рівняння

$$T_k''(t) + \omega_k^2 T_k(t) = g_k(t) , \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

з якого визначимо функцію $T_k(t)$.

Щоб розв'язок (11) задовольняв і початкові умови (7), достатньо, щоб функції $T_k(t)$ задовольняли умовам

$$T_k(0) = 0 , \quad T_k'(0) = 0 , \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (16)$$

В курсі «Диференційні рівняння» показано, що неоднорідне рівняння (15) з початковими умовами (16) розв'язком має функцію

$$T_k(t) = \frac{1}{\omega_k} \int_0^t g_k(\tau) \sin \omega_k(t - \tau) d\tau$$

або, підставляючи замість $g_k(\tau)$ вираз (14), отримаємо

$$T_k(t) = \frac{2}{l\omega_k} \int_0^t d\tau \int_0^l g(\xi, \tau) \sin \omega_k(t - \tau) \sin \frac{k\pi}{l} \xi \cdot d\xi. \quad (17)$$

Враховуючи (17) в (11), отримаємо розв'язок $V(x, t)$ неоднорідного рівняння (5), який задовольняє однорідні умови (6), (7)

$$V(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{l\omega_k} \int_0^t d\tau \int_0^l g(\xi, \tau) \sin \omega_k(t - \tau) \sin \frac{k\pi}{l} \xi \cdot d\xi \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (18)$$

Враховуючи (4), остаточний розв'язок задачі про вимушені коливання струни запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} U(x, t) &= V(x, t) + W(x, t) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{l\omega_k} \int_0^t d\tau \int_0^l g(\xi, \tau) \sin \omega_k(t - \tau) \sin \frac{k\pi}{l} \xi \cdot d\xi \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi a}{l} t) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x \end{aligned} \quad (19)$$

4. Розв'язування хвильового рівняння, яке описує коливання закріпленої струни у середовищі

Силу опору, яка виникає при коливаннях струни у середовищі, прийемо пропорційною до першої степені швидкості руху. Тоді на елемент струни завдовжки Δx у середовищі діятиме сила $F_{on} = \alpha \frac{\partial U}{\partial t} \Delta x$, α - коефіцієнт пропорційності, $\frac{\partial U}{\partial t}$ - швидкості точок струни. Враховуючи, що сила опору завжди протилежна до напрямку руху струни, прийдемо до наступного рівняння коливань

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2m \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (1)$$

$2m = \frac{\alpha}{\rho}$ - коефіцієнт опору (тертя).

Для закріпленої на кінцях струни завдовжки l граничні умови є нульовими

$$U(0,t) = 0, \quad U(l,t) = 0. \quad (2)$$

початкові задають початкові збурення струни

$$U|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x). \quad (3)$$

Розв'язуватимемо рівняння (1) з умовами (2), (3) методом відокремлення змінних Ейлера-Фур'є. Розв'язок вибираємо у вигляді

$$U(x,t) = X(x) \cdot T(t). \quad (4)$$

Підставляючи (4) в (1) та відокремлюючи часову і координатну змінні, отримаємо

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{T'' + 2mT'}{T} \right) = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

Звідси для координатної частини розв'язку $X(x)$, використовуючи однорідні граничні умови (2), отримаємо задачу *Штурма - Ліувіля*

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0,$$

з якої визначимо власні числа $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$, ($k=1,2,3,\dots$) та власні функції

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (5)$$

Для визначення функцій $T_k(t)$ отримаємо рівняння

$$T_k''(t) + 2mT_k'(t) + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T_k(t) = 0,$$

його характеристичне рівняння

$$r^2 + 2mr + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 = 0$$

має корені

$$r_{1,2} = -m \pm \sqrt{m^2 - \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2}.$$

Вважатимемо коефіцієнт опору " m " малим порівняно з величиною сили натягу струни, що входить в коефіцієнт $a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$, тому підкореневий вираз

буде від'ємним для будь-яких k ; ясно, що це буде тоді, коли $m < \frac{\pi a}{l}$.

Вводячи позначення $(\frac{k\pi a}{l})^2 - m^2 = q_k^2$, отримаємо $r_{1,2} = -m \pm iq_k$.

Відповідно розв'язок рівняння для функції $T_k(t)$ запишеться у вигляді

$$T_k(t) = e^{-mt} (a_k \cos q_k t + b_k \sin q_k t).$$

Тоді частинні розв'язки рівняння (1) з врахуванням функцій $X_k(x)$, що даються формулою (5), матимуть вигляд

$$U_k(x, t) = e^{-mt} (a_k \cos q_k t + b_k \sin q_k t) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (6)$$

Кожна з отриманих стоячих хвиль завдяки множнику e^{-mt} буде *згасаючою*. Переходячи до другої частини методу Фур'є, знайдемо *загальний розв'язок* рівняння (1), просумувавши частинні розв'язки (6); отримаємо розв'язок у вигляді ряду Фур'є

$$U(x, t) = e^{-mt} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos q_k t + b_k \sin q_k t) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x \quad (7)$$

та підберемо коефіцієнти цього ряду так, щоб задовольнялись початкові умови (3)

$$U|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x). \quad (8)$$

$$U|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l} x = f(x). \quad (8)$$

В (8) маємо розклад відомої функції $f(x)$ в ряд Фур'є по повній ортонормованій системі функцій $\sin \frac{k\pi}{l} x$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), коефіцієнти цього розкладу знаходимо за відомими правилами:

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x dx. \quad (9)$$

Знайшовши похідну від (7)

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (-m e^{-mt}) (a_k \cos q_k t + b_k \sin q_k t) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x + \right. \\ \left. + e^{-mt} (-a_k q_k \sin q_k t + b_k q_k \cos q_k t) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x \right\} \end{aligned}$$

і, покладаючи в ній $t = 0$, отримаємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-ma_k + b_k q_k) \sin \frac{k\pi}{l} x = F(x). \quad (10)$$

В (10) також маємо розклад в ряд Фур'є відомої функції $F(x)$, коефіцієнти цього розкладу

$$-ma_k + b_k q_k = \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x dx,$$

звідки

$$b_k = \frac{2}{l q_k} \int_0^l F(x) \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x dx + \frac{m}{q_k} a_k. \quad (11)$$

Висновок: Найважливіше в отриманому результаті (7) є те, що врахування опору середовища при коливаннях закріпленої струни приводить до згасання цих коливань, за що відповідальний множник e^{-mt} в розв'язку (7), який називається *декрементом* затухання.

5. Загальна гранична задача.

Ми розв'язали низку диференціальних рівнянь математичної фізики із заданими початковими та граничними умовами. Однак до цих пір ми розглядали задачі з однорідними (нульовими) граничними умовами. Вони необхідні були для того, щоб для координатної частини розв'язку $X(x)$ сформулювати задачу Штурма-Ліувіля для визначення власних чисел λ_k та повної ортонормованої системи власних функцій $X_k(x)$ задачі, яка уможливорює побудувати загальний розв'язок та визначити константи інтегрування для нього.

Як розв'язати поставлену задачу, коли граничні умови є *неоднорідними*?

Постановка задачі: Розв'язати задачу про вимушені коливання, які описуються рівнянням

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + g(x, t) \quad (1)$$

з початковими збуреннями

$$U|_{t=0} = f(x) , \quad \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x) \quad (2)$$

та неоднорідними (ненульовими) граничними умовами

$$\begin{aligned} U(0,t) &= \mu_1(t) \\ U(l,t) &= \mu_2(t) \end{aligned} \quad (3)$$

Сформульована задача є задачею про вимушені коливання струни довжиною l під дією початкових збурень (2), кінці якої коливаються за визначеними законами $\mu_1(t)$ та $\mu_2(t)$.

Для розв'язання задачі (1)-(3) методом відокремлення змінних нам не обійтися без *нульових граничних умов*, тому для її вирішення поступимо наступним чином: розв'язок $U(x,t)$ шукаємо у вигляді суми двох функцій

$$U(x,t) = V(x,t) + W(x,t) , \quad (4)$$

далі, підставляючи (4) в (1)-(3), для функції $V(x,t)$ сформулюємо нову задачу, а функцію $W(x,t)$ в кінці підберемо такою, щоб граничні умови для функції $V(x,t)$ занулились.

Підставляючи (4) в (1), отримаємо, що функція $V(x,t)$ має бути розв'язком диференціального рівняння

$$V_{tt} = a^2 V_{xx} + \bar{g}(x,t) , \quad (5)$$

де

$$\bar{g}(x,t) = g(x,t) - [W_{tt} - a^2 W_{xx}] ,$$

тут введені позначення: $V_{tt} = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$, $V_{xx} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$.

Так як в кінці ми встановимо правило, за яким підбиратимемо функцію $W(x,t)$, щоб занулити граничні умови для функції $V(x,t)$, тому вважатимемо її визначеною, а отже і функція $\bar{g}(x,t)$ в рівнянні (5) теж є визначеною.

Початкові умови для функції $V(x,t)$ виглядатимуть так:

$$\begin{aligned} V|_{t=0} &= \bar{f}(x) \\ V_t|_{t=0} &= \bar{F}(x) \end{aligned} , \quad \text{де} \quad \begin{aligned} \bar{f}(x) &= f(x) - W(x,0) \\ \bar{F}(x) &= F(x) - W_t(x,0) \end{aligned} \quad (6)$$

Граничні умови для функції $V(x,t)$ будуть наступними:

$$\begin{aligned} V(0,t) &= \bar{\mu}_1(t) \\ V(l,t) &= \bar{\mu}_2(t) \end{aligned} , \quad \text{де} \quad \begin{aligned} \bar{\mu}_1(t) &= \mu_1(t) - W(0,t) \\ \bar{\mu}_2(t) &= \mu_2(t) - W(l,t) \end{aligned} \quad (7)$$

А тепер підберемо функцію $W(x,t)$ так, щоб занулились граничні умови (7) для функції $V(x,t)$, тобто щоб

$$\bar{\mu}_1(t) = 0 , \quad \bar{\mu}_2(t) = 0 .$$

Для цього достатньо функцію $W(x,t)$ вибрати у вигляді:

$$W(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)] \quad (8)$$

Як бачимо функція $W(x,t)$ підбирається через функції $\mu_1(t)$ та $\mu_2(t)$ з неоднорідних граничних умов (3) вихідної задачі, які є заданими функціями. При такому підборі у вигляді (8) функції $W(x,t)$ та підстановці її виразу в (5)-(7), для знаходження функції $V(x,t)$ прийдемо до наступної задачі: розв'язати рівняння

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \bar{g}(x,t) \quad (9)$$

з однорідними граничними умовами

$$V(0,t) = V(l,t) = 0 \quad (10)$$

та початковими збуреннями

$$\begin{aligned} V|_{t=0} &= \bar{f}(x) \\ V_t|_{t=0} &= \bar{F}(x) \end{aligned} \quad (11)$$

Задача (9)-(11) розв'язана нами раніше в § «Вимушені коливання закріпленої струни».

Записавши розв'язок $V(x,t)$ задачі (9)-(11) та об'єднавши його з функцією $W(x,t)$, що дається виразом (8), згідно з (4) отримаємо розв'язок $U(x,t)$ поставленої задачі з неоднорідними граничними умовами (3).

Зрозуміло, що вибір функції $W(x,t)$, яка для цієї задачі дається у вигляді (8), залежить від типу неоднорідних граничних умов. Підбір цієї функції $W(x,t)$ для інших типів граничних умов приведемо у нижче поданій таблиці.

Таблиця 1.

№	Граничні умови	Функція $W(x,t)$
1.	$U(0,t) = \mu_1(t), \quad U(l,t) = \mu_2(t)$	$\mu_1 + \frac{x}{l}(\mu_2 - \mu_1)$
2.	$U(0,t) = \mu_1(t), \quad U_x(l,t) = \mu_2(t)$	$\mu_1 + x\mu_2$
3.	$U(0,t) = \mu_1(t), \quad U_x(l,t) + hU(l,t) = \mu_2(t)$	$\mu_1 + \frac{\mu_2 - h\mu_1}{1+hl} x$
4.	$U_x(0,t) - hU(0,t) = \mu_1(t)$ $U_x(l,t) + hU(l,t) = \mu_2(t)$	$\frac{\mu_2 - (1+lh)\mu_1}{(2+lh)h} + \frac{\mu_1 + \mu_2}{2+lh} x$
5.	$U_x(0,t) = \mu_1(t), \quad U_x(l,t) = \mu_2(t)$	$\mu_1 x + \frac{\mu_2 - \mu_1}{2l} x^2$
6.	$U_x(0,t) = \mu_1(t), \quad U(l,t) = \mu_2(t)$	$\mu_2 + (x-l)\mu_1$

Приклад розв'язування хвильових рівнянь методом Фур'є з неоднорідними граничними умовами

Розв'язати хвильове рівняння $U_{tt} = U_{xx}$, (1) $0 < x < l$ з такими граничними $U|_{x=0} = 0$, $U|_{x=l} = t$ (2) та початковими $U|_{t=0} = U_t|_{t=0} = 0$ (3) умовами.

Розв'язування: Так як граничні умови (2) неоднорідні, то в цьому випадку, як було продемонстровано в курсі в *Загальній граничній задачі*, розв'язок завдання необхідно подати у вигляді суми двох функцій

$$U(x, t) = V(x, t) + W(x, t), \quad (4)$$

де для функції $V(x, t)$ формується нова задача шляхом підстановки (4) у вихідну задачу (1)-(3), а функція $W(x, t)$ підбирається таким чином, щоб граничні умови в задачі для функції $V(x, t)$ занулились. Так як граничні умови (2) відносяться до першого типу, то, як було продемонстровано в курсі, функція $W(x, t)$ в цьому випадку вибирається у вигляді

$$W(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l} [\mu_2(t) - \mu_1(t)]. \quad (5)$$

Для даної задачі $\mu_1(t) = 0$, $\mu_2(t) = t$, отже $W(x, t)$ необхідно вибрати у вигляді $W(x, t) = 0 + \frac{x}{l} [t - 0] = \frac{xt}{l}$, $W(x, t) = \frac{xt}{l}$. (6)

Підставляючи (6) в (4), отримаємо

$$U(x, t) = V(x, t) + \frac{xt}{l}. \quad (7)$$

Враховуючи (7) в задачі (1)-(3), отримаємо нову задачу для частини розв'язку $V(x, t)$:

$$V_{tt} = V_{xx}, \quad (8)$$

$$\begin{cases} V|_{x=0} = 0 \\ V|_{x=l} = t - t = 0 \end{cases}, \quad (9)$$

$$V|_{t=0} = 0, \quad V_t|_{t=0} = -\frac{x}{l}. \quad (10)$$

Розв'язок цієї нової задачі шукаємо у вигляді

$$V(x, t) = X(x) \cdot T(t). \quad (11)$$

Підставляючи (11) в (8)-(10), після відокремлення змінних прийдемо до розв'язування наступних задач та рівнянь для складових частин розв'язку (11):

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad (12)$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad (13)$$

задача Штурма-Ліувілля

$$T''(t) + \lambda^2 T(t) = 0. \quad (14)$$

Розв'язуючи задачу (12)-(13), отримаємо власні числа $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$ та власні функції

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (15)$$

Розв'язок рівняння (14), з врахуванням що $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$, дається виразом

$$T_k(t) = a_k \cos \frac{k\pi}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi}{l} t. \quad (16)$$

Підставляючи (15), (16) в (11) та сумуючи частинні розв'язки, отримаємо загальний розв'язок задачі (8)-(10)

$$V(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos \frac{k\pi}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi}{l} t \right] \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (17)$$

Для знаходження констант інтегрування a_k та b_k вимагаємо, щоб розв'язок (17) задовольняв початковим умовам (10):

$$V|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l} x = 0.$$

Остання рівність може справджуватися тільки в тому випадку, коли всі $a_k = 0$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Враховуючи це в (17), залишиться тільки частина розв'язку

$$V(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{l} t \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x. \quad (18)$$

Диференціюючи (18) один раз по t та задовольнивши другу початкову умову (10), отримаємо

$$V_t|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \frac{k\pi}{l} \sin \frac{k\pi}{l} x = -\frac{x}{l}. \quad (19)$$

В (19) маємо розклад відомої функції $(-\frac{x}{l})$ в ряд Фур'є по $\sin \frac{k\pi}{l} x$, коефіцієнти цього розкладу знаходимо за правилом

$$\begin{aligned} b_k \cdot \frac{k\pi}{l} &= -\frac{2}{l^2} \int_0^l x \sin \frac{k\pi}{l} x dx = \\ &= -\frac{2}{l^2} \cdot \frac{l}{k\pi} \int_0^l x \sin \frac{k\pi}{l} x d \frac{k\pi}{l} x = -\frac{2}{k\pi} \int_0^l x \sin \frac{k\pi}{l} x d \frac{k\pi}{l} x = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} U &= x \\ dU &= dx \\ dV &= -d\left(\cos \frac{k\pi}{l} x\right) \\ V &= -\cos \frac{k\pi}{l} x \end{aligned} \right| = \frac{2}{k\pi l} \left[x \cos \frac{k\pi}{l} x \Big|_0^l + \frac{l}{k\pi} \int_0^l \cos \frac{k\pi}{l} x d\left(\frac{k\pi}{l} x\right) \right] = \\
& = \frac{2}{k\pi l} \left[l \cos k\pi + \frac{l}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{l} x \Big|_0^l \right] = \frac{2}{k\pi} \cos k\pi = \frac{2}{k\pi} (-1)^k
\end{aligned}$$

звідси $b_k = \frac{2l}{k^2 \pi^2} (-1)^k$. Враховуючи знайдені коефіцієнти в розв'язку (18), отримаємо

$$V(x, t) = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \sin \frac{k\pi}{l} t \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x \quad . \quad (20)$$

Підставляючи (20) в (7), остаточний розв'язок поставленої задачі набуде вигляду

$$U(x, t) = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \sin \frac{k\pi}{l} t \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x + \frac{xt}{l} \quad . \quad (21)$$

Приклад розв'язування неоднорідних хвильових рівнянь методом Фур'є

Розв'язати хвильове рівняння $U_{tt} = U_{xx} + x$, $0 < x < \pi$ (1)

з граничними умовами $U|_{x=0} = U|_{x=\pi} = 0$, (2)

та початковими умовами

$$\begin{cases} U|_{t=0} = \sin 2x \\ \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad . \quad (3)$$

Рівняння (1) неоднорідне одновимірне, граничні умови (2) нульові, отже, це задача про *вимушені* колювання закріпленої струни під дією початкових збурень (3).

В цьому випадку розв'язок шукаємо у вигляді суми двох розв'язків

$$U(x, t) = V(x, t) + W(x, t) \quad , \quad (4)$$

де функції $V(x,t)$ та $W(x,t)$ є розв'язками двох різних задач, які разом, згідно з (4), дають вихідну задачу (1)-(3). Зокрема:

$$V_{tt} = V_{xx} + x, \quad (5) \quad W_{tt} = W_{xx}, \quad (8)$$

$$V|_{x=0} = V|_{x=\pi} = 0, \quad (6) \quad W|_{x=0} = W|_{x=\pi} = 0, \quad (9)$$

$$V|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (7) \quad W|_{t=0} = \sin 2x, \quad \left. \frac{\partial W}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (10)$$

Нагадаємо, що (8)-(10) є задачею про вільні коливання закріпленої струни під дією початкових збурень (10); а (5)-(7) - це задача про вимушені коливання закріпленої струни за відсутності початкових збурень (7). Очевидно, що обидві ці задачі разом дадуть вихідну задачу. Зрозуміло, що як і раніше спочатку розв'язуватимемо однорідну задачу (8)-(10), а пізніше неоднорідну (5)-(7).

Розв'язок задачі (8)-(10) за методом відокремлення змінних вибираємо у вигляді:

$$W(x,t) = X(x) \cdot T(t), \quad (11) \quad X(x) \cdot T''(t) = X''(x) \cdot T(t) \quad | : X(x) \cdot T(t)$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2, \\ \begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}, \quad (12) \Leftarrow \text{задача } \textit{Штурма - Ліувілля}.$$

$$T''(t) + \lambda^2 T(t) = 0. \quad (13)$$

Розв'язок рівняння (12): $X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$, $\lambda, A, B = ?$

$$X(0) = A = 0, \quad X(\pi) = B \sin \lambda \pi = 0, \quad \lambda \pi = \pi k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\lambda_k = k, \quad X_k(x) = B_k \sin kx. \quad (14)$$

Рівняння (13) з урахуванням (14) набуде вигляду

$$T_k''(t) + k^2 T_k(t) = 0,$$

його розв'язок шукаємо в експоненціальному вигляді $T_k(t) = e^{rt}$, $r = ?$.

Характеристичне рівняння $r^2 + k^2 = 0$, $r_{1,2} = \pm ik$, тоді розв'язок подамо у вигляді

$$T_k(t) = C_k \cos kt + D_k \sin kt \quad . \quad (15)$$

(14), (15) $\rightarrow$ (11) і $\sum_{k=1}^{\infty} \dots$:

$$W(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \cdot \sin kx \quad . \quad (16)$$

Задовольнимо спочатку другу нульову початкову умову з (10):

$$\left. \frac{\partial W}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \sin kx = 0 \quad \Rightarrow \quad b_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Згідно з першою умовою в (10):

$$W|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx = \sin 2x.$$

Можна стверджувати, що останній запис є розкладом функції $\sin 2x$ в ряд Фур'є по $\sin kx$, коефіцієнти цього розкладу в даному випадку можна знайти двома способами.

1. Зверніть увагу, що функція $\sin 2x$ є однією із системи власних функцій $\sin kx$ задачі Штурма – Ліувілля (12) при значенні власного числа $k = 2$. А тому розпишемо декілька доданків в лівій частині останнього рівняння, тобто декілька доданків ряду Фур'є:

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \dots = \sin 2x.$$

З цієї рівності випливає, що коефіцієнти $a_1 = a_3 = a_4 = a_5 = \dots = 0$ і тільки один коефіцієнт розкладу $a_2 = 1$.

2. Цей же результат отримаємо, коли розглядатимемо останню рівність як розклад функції $\sin 2x$ в ряд Фур'є по $\sin kx$. Коефіцієнти цього розкладу знайдемо за відомим правилом:

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x \cdot \sin kx dx.$$

Так як $\sin kx$ є ортогональною системою функцій в інтервалі $x \in (0, \pi)$, то з умови ортогональності при $k \neq 2$ маємо:

$$\int_0^{\pi} \sin 2x \cdot \sin kx dx = 0,$$

а коли $k = 2$, то

$$\int_0^{\pi} \sin^2 2x dx = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, коефіцієнт $a_k = 0$ при $k \neq 2$ і

$$a_k|_{k=2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x \cdot \sin kx dx|_{k=2} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1, \quad \text{якщо } k = 2; \quad a_2 = 1.$$

Враховуючи отриманий результат, в розв'язку (16) тільки один доданок буде відмінним від нуля, а саме

$$W(x, t) = \cos 2t \cdot \sin 2x \quad (17)$$

Зауваження: Зверніть увагу, якщо початкові умови задачі (10) містять функції, які є серед власних функцій задачі *Штурма – Ліувілля*, то в цьому випадку розв'язок задачі (17) отримується не у вигляді нескінченного ряду Фур'є, а є аналітичною функцією від змінних (x, t) задачі.

Припустимо до розв'язку другої задачі (5)-(7). Розв'язок неоднорідного рівняння

$$V_{tt} = V_{xx} + x, \quad (5)$$

шукаємо як розклад в ряд Фур'є по власних функціях однорідної задачі:

$$V(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \cdot \sin kx, \quad T_k(t) = ? \quad (18)$$

Враховуючи (18) в (5), отримаємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} [T_k''(t) + k^2 T_k(t)] \cdot \sin kx = x. \quad (19)$$

Функцію x в правій частині рівняння (19) теж розкладемо в ряд Фур'є по власних функціях однорідної задачі:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx, \quad (20)$$

коефіцієнти цього розкладу знайдемо за правилом

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \sin kx dx = \left. \begin{array}{l} U = x, dU = dx \\ dV = \sin kx dx \\ V = -\frac{1}{k} \cos kx \end{array} \right| - \frac{2}{\pi k} x \cdot \cos kx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi k} \int_0^{\pi} \cos kx dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi k} \pi \cos k\pi + \frac{2}{\pi k^2} \sin kx \Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{k} (-1)^k = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}.$$

(21) $\rightarrow$ (20) :

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin kx. \quad (22)$$

(22) $\rightarrow$ (19) :

$$\sum_{k=1}^{\infty} [T_k''(t) + k^2 T_k(t)] \cdot \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin kx.$$

Звідси отримаємо рівняння для визначення частини розв'язку $T_k(t)$:

$$T_k''(t) + k^2 T_k(t) = (-1)^{k+1} \frac{2}{k},$$

з початковими умовами $T_k(0) = 0$, $T_k'(0) = 0$, які випливають з (7).

В лекційному курсі отримано, що рівняння

$$T_k''(t) + \omega_k^2 T_k(t) = g_k(t) ,$$

$$T_k(0) = 0 , \quad T_k'(0) = 0 ,$$

розв'язком має функцію

$$T_k(t) = \frac{1}{\omega_k} \int_0^t g_k(\tau) \cdot \sin \omega_k(t - \tau) d\tau .$$

Порівнюючи рівняння для функції $T_k(t)$ в даній задачі з рівнянням

лекційного курсу, запишемо, що $\omega_k = k$, $g_k(t) = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}$, тоді розв'язок задачі, згідно з останньою формулою, набуде вигляду

$$T_k(t) = \frac{1}{k} \int_0^t (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin k(t - \tau) d\tau .$$

$$T_k(t) = (-1)^{k+1} \frac{2}{k^2} \int_0^t \sin k(t - \tau) d\tau = (-1)^{k+1} \frac{2}{k^3} \int_0^t \sin k(t - \tau) d(k(t - \tau)) =$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{2}{k^3} \cos k(t - \tau) \Big|_0^t = (-1)^{k+1} \frac{2}{k^3} (1 - \cos kt)$$

Остаточно

$$T_k(t) = (-1)^{k+1} \frac{2}{k^3} (1 - \cos kt) . \quad (23)$$

Враховуючи (23) у (18), отримаємо

$$\boxed{V(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k^3} (1 - \cos kt) \cdot \sin kx} \quad (24)$$

Додавши обидва розв'язки (17) і (25), згідно з формулою (4), одержимо остаточний розв'язок задачі

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k^3} (1 - \cos kt) \cdot \sin kx + \cos 2t \cdot \sin 2x . \quad (26)$$

6. Поздовжні коливання стержня

Розглянемо тепер задачу про поздовжні коливання однорідного пружного стержня завдовжки l , один кінець якого $x=0$ закріплений, а інший $x=l$ вільний. Це завдання зводиться до розв'язання хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho} \quad (1)$$

з граничними умовами

$$U|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=l} = 0 \quad (2)$$

та початковими умовами

$$U|_{t=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x) \quad (0 \leq x \leq l). \quad (3)$$

Згідно з методом Фур'є, шукаємо частинні розв'язки рівняння (1) у вигляді

$$U(x, t) = X(x) \cdot T(t). \quad (4)$$

Підставивши (4) до рівняння (1), отримуємо

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2,$$

звідки одержуємо два рівняння

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad (5)$$

$$T''(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0. \quad (6)$$

Щоб розв'язок задачі (4) задовольняв граничні умови (2), очевидно, потрібно вимагати виконання наступних умов

$$X(0) = 0, \quad X'(l) = 0. \quad (7)$$

Отже, ми прийшли до завдання про відшукування власних чисел для рівняння (5) з граничними умовами (7). Інтегруючи рівняння (5), одержимо

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x.$$

З граничних умов (7) отримаємо

$$A = 0, \quad B \lambda \cos \lambda l = 0.$$

Вважаючи $B \neq 0$ (інакше мали б $X(x) \equiv 0$), вважаємо, що $\cos \lambda l = 0$, звідки

$$\lambda l = (2k+1) \frac{\pi}{2} \quad (k - \text{ціле число}).$$

Таким чином, нетривіальні розв'язки задачі (5), (7) можливі лише при значеннях λ_k

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l}.$$

Власним числам λ_k^2 відповідають власні функції

$$X_k(x) = \sin \frac{(2k+1)\pi}{2l} x \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

визначені з точністю до константи.

При $\lambda = \lambda_k$, загальний розв'язок рівняння (6) матиме вигляд

$$T_k(t) = a_k \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2l} + b_k \sin \frac{(2k+1)\pi t}{2l},$$

тут a_k і b_k - довільні константи. В силу (4), знайдемо, що функція

$$\begin{aligned} U_k(x,t) &= X_k(x) \cdot T_k(t) = \\ &= \left[a_k \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2l} + b_k \sin \frac{(2k+1)\pi t}{2l} \right] \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \end{aligned}$$

задовольняє рівнянню (1) і граничним умовам (2) при довільних a_k і b_k .

Складемо ряд

$$U(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_k \cos \frac{(2k+1)\pi t}{2l} + b_k \sin \frac{(2k+1)\pi t}{2l} \right] \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}. \quad (8)$$

Задовольняючи початкові умови (3), отримаємо

$$U(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} = f(x).$$

Отже для виконання цієї початкової умови необхідно, щоб

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}. \quad (9)$$

Задовольняючи другу початкову умову в (3), отримаємо, що для її виконання необхідно, щоб

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{(2k+1)\pi}{2l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}. \quad (10)$$

Вважаючи ряди (9) і (10) рівномірно збіжними, можемо визначити коефіцієнти a_k і b_k , помноживши обидві частини рівнянь (9) і (10) на $\sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$ і проінтегрувавши в межах зміни $x \in [0, l]$. Тоді, взявши до

уваги умову ортонормування функцій $\sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}$ у вказаному інтервалі

$$\int_0^l \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} \cdot \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} dx = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ \frac{l}{2}, & n = k \end{cases} \quad \text{визначення,}$$

отримаємо:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx \\ b_n &= \frac{4}{(2n+1)\pi} \int_0^l F(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx. \end{aligned} \quad (11)$$

Підставляючи знайдені значення коефіцієнтів в ряд (8) отримаємо розв'язок задачі, оскільки ряди, через які виражається розв'язок, є рівномірно збіжними.

Аналізуючи розв'язок (8), бачимо, що коливний рух стержня отримується внаслідок додавання простих гармонічних коливань

$$A_k \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \cdot \sin \left[\frac{(2k+1)\pi \omega t}{2l} + \varphi_k \right],$$

де $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_k = \frac{a_k}{b_k},$

які здійснюються з амплітудою $A_k \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2l}$ і з частотами

$$\omega_k = \frac{(2k+1)\pi \omega}{2l} = \frac{(2k+1)\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Основний тон при $k=0$ має період коливання

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 4l \sqrt{\frac{\rho}{E}}.$$

Оскільки амплітуда основного тону дорівнює

$$A_0 \sin \frac{\pi x}{2l},$$

То в закріпленому кінці стержня $x=0$ маємо вузол, а у вільному кінці $x=l$ маємо пучність.

7. Коливання струни, закріпленої на одному кінці, під дією вимушуючої сили на другому кінці

В якості прикладу розглянемо поперечні коливання струни завдовжки l , яка закріплена на кінці $x=0$, а на кінець $x=l$ діє вимушуюча сила, яка зумовлює зміщення цього кінця, яке дорівнює $x = A \sin \omega t$. При цьому вважаємо, що в момент часу $t=0$ початкові зміщення і початкові швидкості дорівнюють нулю.

Задача зводиться до розв'язування однорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (1)$$

з граничними умовами

$$U|_{x=0} = 0, \quad U|_{x=l} = A \sin \omega t. \quad (2)$$

та початкових умовах

$$U|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

Шукатимемо рішення задачі у вигляді суми розв'язків

$$U = V + W, \quad (4)$$

де W - розв'язок однорідного рівняння (1), який задовольняє тільки граничним умовам (2), а V - розв'язок того ж рівняння (1), що задовольняє нульовим граничним умовам

$$V|_{x=0} = 0, \quad V|_{x=l} = 0 \quad (5)$$

та початковим умовам

$$V|_{t=0} = f(x) = -W|_{t=0}, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x) = -\left. \frac{\partial W}{\partial t} \right|_{t=0}. \quad (6)$$

Розв'язок W шукаємо у вигляді

$$W = X(x) \sin \omega t. \quad (7)$$

Підставляючи (7) у рівняння (1), отримаємо

$$X''(x) + \frac{\omega^2}{a^2} X(x) = 0. \quad (8)$$

Щоби знайти розв'язок $W(x, t)$ у вигляді (7), який задовольнятиме граничним умовам(2), необхідно знайти розв'язок рівняння (8), який задовольнятиме наступним граничним умовам

$$X(0) = 0, \quad X(l) = A. \quad (9)$$

Загальний розв'язок рівняння (8) матиме вигляд

$$X(x) = C_1 \cos \frac{\omega}{a} x + C_2 \sin \frac{\omega}{a} x.$$

Вимагаючи виконання умов (9), отримаємо

$$C_1 = 0, \quad C_2 \sin \frac{\omega}{a} l = A,$$

відповідно,
$$X(x) = A \frac{\sin \frac{\omega}{a} x}{\sin \frac{\omega}{a} l}.$$

Звідси, на основі (7), отримаємо

$$W(x, t) = A \frac{\sin \frac{\omega}{a} x}{\sin \frac{\omega}{a} l} \sin \omega t. \quad (10)$$

Звернемось зараз до знаходження розв'язку $V(x, t)$. Із формул (6) знайдемо, що

$$V|_{t=0} = f(x) = 0, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{t=0} = F(x) = -\frac{A \omega \sin \frac{\omega}{a} x}{\sin \frac{\omega}{a} l}. \quad (11)$$

Але розв'язок однорідного рівняння (1), який задовольняє граничним умовам (5) та початковим умовам (11), дається, як нам відомо, рядом

$$V(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \sin \frac{k\pi}{l} x,$$

де

$$b_k = -\frac{2A\omega}{k\pi a \sin \frac{\omega l}{a}} \int_0^l \sin \frac{\omega x}{a} \sin \frac{k\pi x}{l} dx - (-1)^{k-1} \frac{2Aa\omega}{l \left[\omega^2 - \left(\frac{k\pi a}{l} \right)^2 \right]},$$

отже,

$$V = \frac{2A\omega a}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\omega^2 - \left(\frac{k\pi a}{l} \right)^2} \sin \frac{k\pi a t}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (12)$$

Додаючи, згідно з (4), вирази (10) і (12), отримаємо розв'язок задачі:

$$U(x, t) = A \frac{\sin \frac{\omega}{a} x}{\sin \frac{\omega}{a} l} \sin \omega t + \frac{2A\omega a}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\omega^2 - \left(\frac{k\pi a}{l} \right)^2} \sin \frac{k\pi a t}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (13)$$

причому вважаємо, що $\omega \neq \frac{k\pi a}{l}$.

Застосування методу характеристик до вивчення малих коливань струни

8. Рівняння коливань необмеженої струни. Розв'язок Даламбера.

Розглянемо необмежену струну. Рівняння вільних коливань такої однорідної струни матиме вигляд

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}. \quad (1)$$

Виберемо канонічні змінні

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at. \quad (2)$$

Неважко переконатися, що $x - at = C_1$, $x + at = C_2$ - по суті є характеристиками рівняння (1). Рівняння (1) у нових змінних (2) набуде вигляду

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

або, переписавши його у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right) = 0,$$

отримаємо

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = \omega(\xi),$$

тут $\omega(\xi)$ - довільна функція від ξ . Інтегруючи отримане рівняння по ξ , при цьому розглядаючи η як параметр, знайдемо, що

$$U = \int \omega(\xi) d\xi + f_2(\eta) ,$$

де $f_2(\eta)$ - довільна функція від η . Вважаючи тепер, що

$$\int \omega(\xi) d\xi = f_1(\xi)$$

отримаємо

$$U = f_1(\xi) + f_2(\eta) .$$

Повертаючись тепер до «старих» змінних (x, t) , матимемо

$$U(x, t) = f_1(x - at) + f_2(x + at) . \quad (3)$$

Розв'язок (3) рівняння (1) називається *розв'язком Даламбера*.

З'ясуємо фізичний зміст отриманого розв'язку (3).

Розглянемо спочатку частинний випадок коливання струни, коли $f_2 \equiv 0$, тоді зміщення точок струни визначається формулою

$$U_1 = f_1(x - at) . \quad (4)$$

Припустимо, що спостерігач, вийшовши в початковий момент часу $t = 0$ з точки струни x_0 , рухається в додатному напрямку вісі Ox зі швидкістю a , тоді його абсциса змінюється за законом $x = x_0 + at$ або $x - at = x_0$. Для такого спостерігача зміщення струни $U_1 = f_1(x - at)$ буде ввесь час однаковим і рівним $f_1(x_0)$. Саме явище, що описується функцією $U_1 = f_1(x - at)$, називається *поширенням прямої хвилі*. Розв'язок (4) описує *пряму хвилю*, яка поширюється зі швидкістю a в додатному напрямку вісі x . Аналогічно розв'язок $U_2 = f_2(x + at)$ описує *зворотню хвилю*, яка зі швидкістю a поширюється в протилежному напрямку до вісі x .

Отже, розв'язок (3) є сумою прямої та зворотної хвиль.

Задача Коші

Знайти розв'язок рівняння (1)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} , \quad a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} , \quad (1)$$

який задовольняє граничним умовам

$$U(x, 0) = \varphi(x) , \quad U_t(x, 0) = \psi(x) . \quad (5)$$

Так як струна безмежна, то функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ є заданими в інтервалі $(-\infty, \infty)$.

$$\text{В канонічних змінних} \quad \xi = x - at , \quad \eta = x + at \quad (2)$$

рівняння коливань струни (1) набуває вигляду $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ і має розв'язками

суму функцій $U = f_1(\xi) + f_2(\eta)$ або у старих змінних (2)

$$U(x, t) = f_1(x - at) + f_2(x + at) . \quad (3)$$

Визначимо функції f_1 та f_2 таким чином, щоб виконувались для них початкові умови (5):

$$U(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) ,$$

$$U_t(x,0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x) .$$

звідси

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) , \quad (6)$$

$$af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x) . \quad (7)$$

Інтегруючи рівняння (7), отримаємо

$$d(f_1(x) - f_2(x)) = \frac{1}{a} \psi(x) dx ,$$

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(x) dx + C . \quad (8)$$

Додаючи рівняння (6) і (8), отримаємо

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(x) dx + \frac{C}{2} . \quad (9)$$

Віднімаючи від рівняння (6) рівняння (8), отримаємо

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(x) dx - \frac{C}{2} . \quad (10)$$

Таким чином, в (9) та (10) ми визначили функції f_1 та f_2 , які формують розв'язок задачі (3), через задані з початкових умов функції φ і ψ , причому рівності (9) та (10) мають місце для любого значення їхнього аргумента.

Підставляючи (9), (10) в розв'язок задачі (3), одержимо

$$U(x,t) = \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] +$$

$$+ \frac{1}{2a} \left\{ \int_{x_0}^{x+at} \psi(x) dx - \int_{x_0}^{x-at} \psi(x) dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(x) dx$$

Остаточно

$$U(x,t) = \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(x) dx$$

Формула (13) називається *формулою Даламбера* або *розв'язком задачі Коші*.

Фізична інтерпретація розв'язку:

Функція $U(x,t)$, що виражається формулою Даламбера (11), визначає процес розповсюдження початкового відхилення і початкових швидкостей.

Якщо в (11) зафіксувати час t_0 , то функція $U(x, t_0)$ задає профіль струни в момент часу t_0 ; якщо ж зафіксувати x_0 , то отримаємо функцію $U(x_0, t)$, яка описуватиме процес руху точки x_0 в часі.

Повернемось до загального інтегралу (3)

$$U(x, t) = f_1(x - at) + f_2(x + at),$$

що є розв'язком канонічної форми хвильового рівняння $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

Продемонструємо, що функція $f_1(x - at)$ описує хвильовий процес, який поширюється в напрямку вісі $0x$ зі швидкістю a , тоді як функція $f_2(x + at)$ описує процес поширення зворотної хвилі, що рухається зі швидкістю a у зворотному до вісі $0x$ напрямку.

Дійсно, функція $f_1(x - at)$ в момент часу $t + 1c$ в точці $x + a$ повторить те своє значення, яке вона мала в момент часу t в точці x ,

$$f_1(x + a - a(t + 1)) = f_1(x + a - at - a) = f_1(x - at),$$

В момент часу $t + 2c$ у точці $x + 2a$:

$$f_1(x + 2a - a(t + 2)) = f_1(x - at) \text{ і т.д.}$$

Ці рівності матимуть місце у тому випадку, коли функція $f_1(x - at)$ описуватиме процес, який періодично повторюється в просторі і часі й поширюється зі швидкістю a в напрямку вісі $0x$.

Навпаки, функція $f_2(x + at)$ в момент часу $t + 1c$ в точці $x - a$ повторить те своє значення, яке вона мала в момент часу t в точці x :

$$f_2(x - a + a(t + 1)) = f_2(x - a + at + a) = f_2(x + at),$$

в момент часу $t + 2c$ в точці $x - 2a$:

$$f_2(x - 2a + a(t + 2)) = f_2(x + at), \dots$$

Отже, $f_2(x + at)$ описує хвильовий процес, який поширюється в протилежному до вісі $0x$ напрямку зі швидкістю a .

Формула Даламбера є розв'язком *задачі Коші*, який описує процес поширення прямої та зворотної хвиль вздовж нескінченної струни під дією початкових збурень.

9. Поширення хвиль у необмеженому просторі

Формула Пуассона

До цих пір ми вивчали коливні рухи об'єктів скінченної величини та поширення хвиль у обмежених середовищах.

Систему вважатимемо безмежною, якщо можна знехтувати відбитою хвилею або до того часу, поки відбита хвиля не повернеться в початкову вихідну точку.

Вивчатимемо і математично опишемо процес поширення хвиль у необмеженому просторі.

Позначимо через $U(\vec{r}, t)$ значення поля, яке описує коливний процес. Функція $U(\vec{r}, t)$ задовольняє рівнянню коливань

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right). \quad (1)$$

В цьому випадку можуть бути визначені початкові умови, які відображають початкові збурення, зосереджені в деякій обмеженій області

$$U(\vec{r}, t)|_{t=0} = \varphi(\vec{r}), \quad \left. \frac{\partial U(\vec{r}, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(\vec{r}). \quad (2)$$

Так як розглядувана область, де поширюється хвильовий процес, є безмежною, то граничні умови відсутні.

Отже, задача полягає у знаходженні функції $U(\vec{r}, t)$ для $t > 0$ для всіх точок області $-\infty < x, y, z < \infty$ безмежного простору, яка була б розв'язком хвильового рівняння і задовольняла б початковим умовам. Цю задачу вирішив *французький фізик Пуассон*.

При коливанні *обмежених* систем функція $U(\vec{r}, t)$ описується сукупністю окремих гармонік, оскільки частота приймає *дискретний спектр значень*.

У розглядуваному конкретному випадку частота змінюватиметься безперервно, а тому від сумування окремих гармонік необхідно перейти до неперервного сумування, тобто до інтегрування.

Розв'язок задачі шукатимемо у вигляді *інтегралу Фур'є*:

$$U(\vec{r}, t) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} U(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}, \quad (3)$$

$U(\vec{k}, t)$ - *Фур'є-образ* функції $U(\vec{r}, t)$.

$$\text{Для одновимірного випадку } U(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(k, t) e^{ikx} dk.$$

Запишемо *обернене перетворення Фур'є*:

$$U(\vec{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} U(\vec{r}', t) e^{-i\vec{k}\vec{r}'} d\vec{r}', \quad (4)$$

$\vec{r}'$ - змінна інтегрування.

Для знаходження Фур'є-образу $U(\vec{k}, t)$ підставимо (3) у вихідне рівняння (1).

Очевидно, що $\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{i\vec{k}\vec{r}} = -k_x^2 e^{i\vec{k}\vec{r}}$, тоді

$$\int \int \int_{-\infty}^{\infty} [\ddot{U}(\vec{k}, t) + a^2 k^2 U(\vec{k}, t)] e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} = 0.$$

Остання рівність виконуватиметься тоді, коли

$$\ddot{U}(\vec{k}, t) + a^2 k^2 U(\vec{k}, t) = 0. \quad (5)$$

Розв'язком диференціального рівняння 2-го порядку з постійними коефіцієнтами (5) буде функція

$$U(\vec{k}, t) = a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t, \quad (6)$$

де $\omega_k = ak$.

Здійснимо в (6) наступне перетворення

$$U(\vec{k}, t) = a_k \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k} + b_k \sin \omega_k t. \quad (7)$$

Для знаходження коефіцієнтів a_k , b_k використаємо початкові умови (2) і в (4) і (6) покладемо $t = 0$ і прирівняємо їх. Одержимо

$$a_k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int \varphi(\vec{r}') e^{-i\vec{k}\vec{r}'} d\vec{r}'. \quad (8)$$

Взявши похідну по часу від (4) і (6) та прирівнюючи їх при $t = 0$, отримаємо

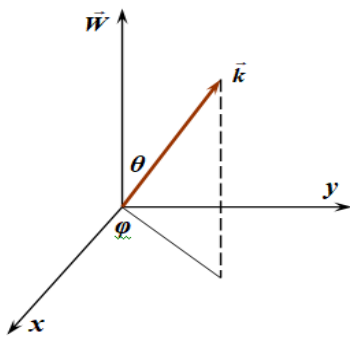
$$\omega_k b_k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int \psi(\vec{r}') e^{-i\vec{k}\vec{r}'} d\vec{r}'. \quad (9)$$

Підставляючи (8) і (9) в (7), одержимо

$$U(\vec{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial t} \int \int \int \varphi(\vec{r}') e^{-i\vec{k}\vec{r}'} \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k} d\vec{r}' + \\ + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int \psi(\vec{r}') e^{-i\vec{k}\vec{r}'} \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k} d\vec{r}'. \quad (10)$$

А далі підставимо (10) в (3) і остаточно отримаємо розв'язок задачі

$$U(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial t} \int \int \int \int \int e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} \varphi(\vec{r}') \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k} d\vec{r}' d\vec{k} + \\ + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int \int \int e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} \psi(\vec{r}') \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k} d\vec{r}' d\vec{k} \quad (11)$$



В (11) явно проведемо інтегрування за змінною $\vec{k}$: для цього зберемо під інтегралом тільки величини, які залежать від $\vec{k}$.

$$\text{Позначимо} \quad I = \int \int \int e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k} d\vec{k}. \quad (12)$$

Перейдемо до нового позначення $\vec{w} = \vec{r} - \vec{r}'$ і прийнемо напрям $\vec{w}$ за полярну вісь сферичної системи координат. Тоді скалярний добуток в експоненті у (12) розпишеться так:

$$\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}') = \vec{k}\vec{w} = |\vec{k}| \cdot |\vec{w}| \cos \theta,$$

а потрібний інтеграл по $\vec{k}$ в (12) у сферичних координатах розпишеться наступним чином

$$\int \int \int \dots d\vec{k} = \int_0^\infty k^2 dk \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \dots = \\ = \frac{1}{2} \int_0^\infty k^2 dk \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \dots \quad (14)$$

оскільки підінтегральна функція в (12) парна відносно k .

Врахуємо (13), (14) в (12), отримаємо

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} k^2 dk \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \cdot e^{ik\tilde{w}} \frac{\sin\omega_k t}{\omega_k} = \\
&= -\frac{2\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} k^2 dk \int_0^{\pi} d(\cos\theta) e^{ikw\cos\theta} \frac{\sin\omega_k t}{\omega_k} = , \\
&= +\pi \int_{-\infty}^{\infty} k^2 dk \int_{-1}^1 dx e^{ikwx} \frac{\sin\omega_k t}{\omega_k}
\end{aligned} \tag{15}$$

де позначено $x = \cos\theta$.

Розглянемо окремо інтеграл в (15)

$$\int_{-1}^1 e^{ikwx} dx = \frac{1}{ikw} e^{ikwx} \Big|_{-1}^1 = \frac{e^{ikw} - e^{-ikw}}{ikw} \tag{16}$$

і в (15) розпишемо $\sin\omega_k t = \sin akt$ за формулою Ейлера

$$\sin akt = \frac{1}{2i} (e^{iakt} - e^{-iakt}) . \tag{17}$$

Врахуємо результати (16) та (17) в (15), отримаємо

$$\begin{aligned}
I &= \pi \int_{-\infty}^{\infty} k^2 dk \frac{e^{ikw} - e^{-ikw}}{ikw} \cdot \frac{e^{iakt} - e^{-iakt}}{2i} \cdot \frac{1}{ak} = \\
&= -\frac{\pi}{2wa} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{ik(w+at)} - e^{ik(w-at)} - e^{-ik(w-at)} + e^{-ik(w+at)}] dk = \\
&= -\frac{\pi(-2)2\pi}{2wa} \delta(w-at) = \frac{2\pi^2}{wa} \delta(w-at)
\end{aligned} \tag{18}$$

При запису результату обчислень (18) нами використане представлення δ – функції *Дірака* у наступному вигляді

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x_0)} dk$$

і властивість парності δ – функції

$$\delta(x - x_0) = \delta(x_0 - x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x-x_0)} dk .$$

Отже,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(w-at)} dk = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(w-at)} dk = 2\pi \delta(w-at) ,$$

а ось $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(w+at)} dk = 2\pi \delta(w+at) = 0$, оскільки аргумент δ – функції в цьому випадку $w+at > 0$, тоді, згідно з означенням δ – функції, вона дорівнює нулю: $\delta(w+at) = 0$.

Тепер повернемося до розв'язку (11), в якому врахуємо (12), який згідно з обчисленнями доведений до результату (18):

$$U(r,t) = \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\vec{r}') \delta[|\vec{r} - \vec{r}'| - at] \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi a} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\vec{r}') \delta[|\vec{r} - \vec{r}'| - at] \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (19)$$

Для проведення подальших перетворень повернемося ще раз до нових змінних у (19): $\vec{w} = \vec{r} - \vec{r}'$, тоді $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{w}$. а $d\vec{r}' = d\vec{w}$ як елементарний об'єм.

$$U(r,t) = \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\vec{r} - \vec{w}) \delta[w - at] \frac{d\vec{w}}{w} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi a} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\vec{r} - \vec{w}) \delta[w - at] \frac{d\vec{w}}{w} \quad (20)$$

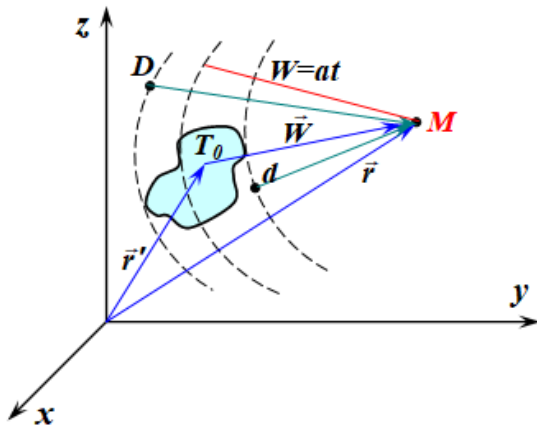
тут $d\vec{w} = w^2 dw d\Omega$ - елементарний об'єм, $d\Omega$ - елемент тілесного кута.

Використовуючи в (20) третю властивість δ - функції Дірака та записавши $\vec{w} = w\vec{n}$

$$U(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} [t \iint_{S_{at}} \varphi(\vec{r} - at \cdot \vec{n}) d\Omega] + \frac{1}{4\pi} [t \iint_{S_{at}} \psi(\vec{r} - at \cdot \vec{n}) d\Omega] \quad (21)$$

(21) – *формула Пуассона*.

Фізична інтерпретація розв'язку



Щоб яскравіше уявити фізичну картину поширення хвиль у 3-мірному просторі, яка описується *формулою Пуассона* (21), вважаємо, що початкове збурення зосереджене в деякій обмеженій області T_0 , тобто функції $\varphi(\vec{r})$ і $\psi(\vec{r})$, відмінні від нуля всередині цієї області і дорівнюють нулю поза областю T_0 . Нехай точка M спостереження за процесом знаходиться поза областю T_0 .

Позначимо через d і D відповідно найменшу та найбільшу відстані від точки M до точок області T_0 . При $t < \frac{d}{a}$ сфера S_{at} знаходитиметься поза областю T_0 , обидві функції φ і ψ при цьому дорівнюватимуть нулю на сфері S_{at} і з формули (21) маємо, що $U(M, t) = 0$, тобто початкові збурення ще не дійшли до точки спостереження M .

В момент часу $t = \frac{d}{a}$ сфера S_{at} доторкнеться до поверхні області T_0 і передній фронт хвилі пройде через точку M . Від моменту часу $t = \frac{d}{a}$ і до моменту $t = \frac{D}{a}$ сфера S_{at} буде перетинати область T_0 і формула (21) дасть відмінний від нуля результат - $U(M, T) \neq 0$.

Нарешті при $t > \frac{D}{a}$ сфера S_{at} не матиме спільних точок з областю T_0 (вся область T_0 лежатиме всередині сфери) і із (21) отримаємо, що $U(M, t) = 0$. Початкові збурення на цей час пройшли точку спостереження M . Моменту часу $t = \frac{D}{a}$ відповідає проходження заднього фронту хвилі через точку M .

Передній фронт хвиль – це поверхня, яка відділяє точки простору, які ще не почали здійснювати коливання, від точок, які вже здійснюють коливання. Передній фронт є *огинаючою* сімейства сфер, які мають центр в точках на поверхні області T_0 , і радіус яких at , " a " є швидкістю поширення фронту хвиль.

Висновок: Початкове збурення локалізоване в просторі, викликає в кожній точці M простору дію, локалізовану в часі; при цьому спостерігається поширення хвилі з переднім і заднім фронтами хвиль (*принцип Гюйгенса*).

Розділ 3. СПЕЦІАЛЬНІ ФУНКЦІЇ

1. Інтегрування рівняння Лапласа у циліндричних координатах. Рівняння Бесселя.

Рівняння Лапласа $\Delta U = 0$ у прямокутних декартових координатах має простий симетричний вигляд $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$. Воно порівняно просто розв'язується методом відокремлення змінних Ейлера-Фур'є. Однак, якщо задача, яку належить розв'язати, володіє циліндричною симетрією, то рівняння Лапласа $\Delta U = 0$ необхідно розв'язувати в циліндричних координатах, при цьому знаходження його розв'язку значно спрощується із симетрійних міркувань.

Оператор Лапласа у циліндричних координатах має вигляд

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

тоді розв'язок рівняння Лапласа

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

буде функцією від трьох змінних циліндричної системи координат $U = U(r, \varphi, z)$. Знайдемо його, використовуючи метод відокремлення змінних. Однак відразу зауважимо, що задачу розв'язуватимемо в загальному вигляді, не конкретизуючи граничні умови, а тому розв'язок міститиме константи інтегрування, які визначаються в практичних задачах.

Розв'язок задачі шукаємо у вигляді

$$U(r, \varphi, z) = V(r, z) \cdot \Phi(\varphi). \quad (2)$$

Відокремлення здійснимо почергово: спочатку частину розв'язку, яка залежить від кутової змінної $\Phi(\varphi)$, відділимо від частини розв'язку $V(r, z)$, яка залежить від радіальної r та z змінних, а пізніше розділимо частини розв'язку, які залежать від змінних r та z .

Підставимо (2) в (1):

$$\frac{\Phi}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} V \cdot \Phi'' + \Phi \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \cdot \quad \left| \cdot \frac{r^2}{V \Phi} \right.$$

$$\frac{r}{V} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{r^2}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Відношення $\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$, яке залежить тільки від кутової змінної φ , залишаємо в лівій частині рівняння, а всі решта доданків, які залежать від змінних r та z ,

переносимо в праву частину і, так як в правій частині теж маємо відношення других похідних від функції $V(r, z)$ до самої функції, то згідно з методом відокремлення змінних ці відношення прирівнюємо до константи відокремлення $(-\nu^2)$:

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = - \left[\frac{r}{V} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{r^2}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right] = -\nu^2 .$$

З цієї подвійної рівності отримаємо два рівняння

$$\frac{r}{V} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{r^2}{V} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \nu^2 = 0 , \quad (3)$$

$$\boxed{\Phi'' + \nu^2 \Phi = 0} \quad (4)$$

Оскільки (3) є диференціальним рівнянням в частинних похідних, то до нього також застосуємо метод відокремлення змінних:

$$V(r, z) = R(r) \cdot Z(z) . \quad (5)$$

Помножимо (3) на $\frac{V}{r^2}$:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{\nu^2}{r^2} V = 0$$

і підставимо в нього (5), отримаємо

$$\frac{Z}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + RZ'' - \frac{\nu^2}{r^2} RZ = 0 . \quad |:RZ$$

$$\frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{Z''}{Z} - \frac{\nu^2}{r^2} = 0 .$$

Доданки, залежні від радіальної змінної r , залишимо в лівій частині рівняння, а залежні від змінної z перенесемо вправо і відразу прирівняємо ці відношення за схемою методу до константи відокремлення $(-\lambda^2)$:

$$\frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - \frac{\nu^2}{r^2} = -\frac{Z''}{Z} = -\lambda^2 .$$

З останньої подвійної тотожності випливають два звичайних рівняння

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + [\lambda^2 - \frac{\nu^2}{r^2}] R = 0 , \quad (6)$$

$$\boxed{Z'' - \lambda^2 Z = 0} \quad (7)$$

Змінні відокремлені, кожне рівняння (4),(6),(7) залежить від однієї змінної. З рівняннями (4) та (7) ми знайомі, їх розв'язували і раніше; це диференціальні рівняння 2-го порядку з постійними коефіцієнтами, розв'язки яких шукаємо в експоненціальному вигляді.

$$\Phi'' + \nu^2 \Phi = 0 , \quad \Phi(\varphi) = e^{r\varphi} , \quad r - ?$$

Характеристичне рівняння: $r^2 + \nu^2 = 0$, $r_{1,2} = \pm i\nu$,

тоді розв'язок

$$\Phi(\varphi) = A \cos \nu \varphi + B \sin \nu \varphi \quad (8)$$

Розв'язок рівняння $Z'' - \lambda^2 Z = 0$ (7) шукаємо у вигляді $Z(z) = e^{r \cdot z}$, $r = ?$

характеристичне рівняння $r^2 - \lambda^2 = 0$, $r_{1,2} = \pm \lambda$ - дійсні, тоді розв'язок

$$Z(z) = C_1 e^{\lambda \cdot z} + C_2 e^{-\lambda \cdot z} \quad (9)$$

або, пам'ятаючи вирази для косинусів та синусів гіперболічних

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

розв'язок (9) тотожно можна подати у вигляді

$$Z(z) = C \operatorname{ch} \lambda z + D \operatorname{sh} \lambda z \quad (9')$$

Продемонструємо, що представлення розв'язку (9) та (9') тотожні. Дійсно

$$\begin{aligned} Z(z) &= C \operatorname{ch} \lambda z + D \operatorname{sh} \lambda z = C \frac{e^{\lambda \cdot z} + e^{-\lambda \cdot z}}{2} + D \frac{e^{\lambda \cdot z} - e^{-\lambda \cdot z}}{2} = \\ &= \frac{C + D}{2} e^{\lambda \cdot z} + \frac{C - D}{2} e^{-\lambda \cdot z} = C_1 e^{\lambda \cdot z} + C_2 e^{-\lambda \cdot z} \end{aligned}$$

Висновок: якщо корені характеристичного рівняння дійсні, то розв'язки рівняння виражаються через експоненти або через $\operatorname{ch} x$ або $\operatorname{sh} x$.

Щоб довести задачу до кінця, необхідно розв'язати рівняння (6) зі змінними коефіцієнтами

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left[\lambda^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right] R = 0 \quad (6)$$

Взявши за частинами похідну у першому доданку рівняння (6), отримаємо

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left[\lambda^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right] R = 0 \quad (6')$$

Якщо поділити кожний доданок в (6') на λ^2 і ввести нову незалежну змінну

$x = \lambda r$, то рівняння (6') спрощується і набуває вигляду так званого **рівняння Бесселя ν -го порядку**

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left[1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right] R = 0 \quad (10)$$

Розв'язки або інтеграли $R_\nu(x)$ рівняння (10) називаються **циліндричними функціями** або **функціями Бесселя ν -го порядку**. Перейдемо в наступних параграфах до розгляду методів визначення розв'язків **рівняння Бесселя (10)**.

2. Розв'язування рівняння Бесселя нульового порядку. Функції Бесселя нульового порядку.

У попередньому параграфі для знаходження радіальної частини розв'язку $R(x)$ отримане рівняння

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left[1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right] R = 0, \quad (1)$$

яке є диференціальним рівнянням другого порядку зі змінними коефіцієнтами, а константа інтегрування (відокремлення) ν визначає порядок рівняння Бесселя та його розв'язків. *Нагадаємо*, що в цьому рівнянні введено позначення $x = \lambda r$, тобто декартовою змінною x перепозначена радіальна змінна r циліндричної системи координат.

Для зручності запису введемо нове позначення

$$\boxed{y(x) = R(x)} \quad (2)$$

в якому вихідне рівняння (1) перепишеться у вигляді

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0. \quad (3)$$

Параметр ν в рівнянні (3) може приймати довільні додатні значення та визначає порядок рівняння Бесселя. Розв'язки рівняння (3) при конкретному значенні параметра ν називаються функціями Бесселя ν -го порядку.

Ми детально розглянемо розв'язування рівнянь (3) для двох випадків, коли $\nu = 0$ і $\nu = 1$, оскільки найчастіше при розгляді фізичних задач приходимо до розв'язування рівнянь Бесселя нульового і першого порядків. А пізніше, використовуючи метод аналогій, запишемо розв'язок для рівняння Бесселя будь-якого ν -го порядку.

Більш детально вивчити Бесселеві функції можна в Лебедева Н.Н. «Спеціальні функції і їх застосування».

Рівняння Бесселя нульового порядку, як випливає з (3) при $\nu = 0$, має вигляд

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0. \quad (4)$$

При $x = 0$ коефіцієнт при першій похідній в рівнянні (4) терпить розрив неперервності, точка $x = 0$ для рівняння (4) є особливою точкою. Тут зарання щось сказати про існування розв'язків, які приймають певні значення в точці $x = 0$, сказати не можна.

Рівняння (4) не належить до тих простих рівнянь 2-го порядку, які розв'язуються простими методами, а тому його розв'язок шукатимемо у вигляді нескінчених степеневих рядів.

Отже, розв'язок рівняння (4) визначимо у вигляді степеневого ряду

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots + C_n x^n + \dots, \quad (5)$$

де невідомим, які підлягають визначенню, є коефіцієнти ряду $C_0, C_1, C_2, \dots$.
Продиференціюємо ряд (5) двічі:

$$y' = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + \dots + nC_nx^{n-1} + \dots, \quad (6)$$

$$y'' = 2C_2 + 3 \cdot 2C_3x + 4 \cdot 3C_4x^2 + \dots + n(n-1)C_nx^{n-2} + \dots \quad (7)$$

і підставимо (5), (6), (7) у диференційне рівняння (4), отримаємо:

$$\begin{aligned} & 2C_2 + 3 \cdot 2C_3x + 4 \cdot 3C_4x^2 + 5 \cdot 4C_5x^3 + \dots + n(n-1)C_nx^{n-2} + \dots + \\ & + \frac{1}{x}(C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + \dots + nC_nx^{n-1} + \dots) + \dots = 0 \\ & + C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + \dots + C_nx^n + \dots = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Так як рівняння (8) є однорідним рівнянням, то в лівій частині потрібно прирівняти до нуля всі коефіцієнти доданків, зібрані при однакових степенях змінної x . Звідти і встановимо правило, за яким визначимо коефіцієнти ряду, у вигляді якого шукаємо розв'язок (5).

Почнемо з доданка з найменшою степінню $\frac{1}{x} = x^{-1}$ в рівнянні (8), при цій степені знаходиться один коефіцієнт C_1 , тому прирівняємо його до нуля:

$$C_1 = 0. \quad (9)$$

Те, що коефіцієнт C_1 в (9) дорівнює нулю, диктує додаткову умову, яка впливає з (6), яку необхідно накласти додатково на вибір розв'язку у вигляді степеневого ряду (5), а саме

$$C_1 = y' \Big|_{x=0} = 0. \quad (10)$$

Умова (9), а отже і (10), показує, що розв'язок у вигляді ряду (5) може існувати тільки тоді, коли в особливій точці $x=0$ для нього виконується додаткова умова, а саме

$$y' \Big|_{x=0} = 0. \quad (10.1)$$

Випишемо зараз коефіцієнти, зібрані в (8) при *непарних степенях* x :

$$\text{при } x: \quad 3 \cdot 2C_3 + 3C_3 + C_1 = 0,$$

$$\text{при } x^3: \quad 5 \cdot 4C_5 + 5C_5 + C_3 = 0,$$

.....

Так як згідно з (9) $C_1 = 0$, то, враховуючи це в останній системі рівнянь, отримаємо, що всі константи ряду (5) з непарним індексом дорівнюють нулю, тобто

$$C_3 = C_5 = C_7 = \dots = C_{2k+1} = \dots = 0 . \quad (11)$$

Зберемо зараз до купи усі коефіцієнти в (8) при однакових парних степенях x і порівнюємо їх до нуля:

$$\begin{aligned} \text{при } x^0 : \quad & 2C_2 + 2C_2 + C_0 = 0 , \\ \text{при } x^2 : \quad & 4 \cdot 3C_4 + 4C_4 + C_2 = 0 . \end{aligned} \quad (12)$$

.....

Виходячи із системи рівнянь (12), можна виписати *рекурентну формулу*, яка пов'язуватиме два довільних коефіцієнти, індекси яких відрізнятимуться на 2 одиниці:

$$(n+2)(n+1)C_{n+2} + (n+2)C_{n+2} + C_n = 0 ,$$

звідси

$$\boxed{(n+2)^2 C_{n+2} + C_n = 0} . \quad (13)$$

(13) – *рекурентна формула*, з якої визначимо

$$C_{n+2} = -\frac{C_n}{(n+2)^2} . \quad (14)$$

Очевидно, що всі раніше записані співвідношення для констант з парним індексом випливають з (13).

Залишивши коефіцієнт C_0 *довільним*, виходячи з (14), послідовно виразимо через нього всі решту коефіцієнти з парними індексами:

$$C_2 = -\frac{C_0}{2^2} , \quad C_4 = -\frac{C_2}{4^2} = \frac{C_0}{2^2 \cdot 4^2} , \quad C_6 = -\frac{C_4}{6^2} = -\frac{C_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} , \dots$$

і остаточно для коефіцієнта з будь-яким парним індексом по аналогії запишемо

$$C_{2n} = (-1)^n \frac{C_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \dots \cdot (2n)^2} . \quad (15)$$

Розглянемо окремо вираз у знаменнику (15), зробимо з ним деякі перетворення:

$$\begin{aligned} 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2 \cdot \dots \cdot (2n)^2 &= (1 \cdot 2)^2 \cdot (2 \cdot 2)^2 \cdot (2 \cdot 3)^2 \cdot (2 \cdot 4)^2 \cdot \dots \cdot (2 \cdot n)^2 = \\ &= (2^2 \cdot 1^2)(2^2 \cdot 2^2)(2^2 \cdot 3^2)(2^2 \cdot 4^2) \cdot \dots \cdot (2^2 \cdot n^2) = \\ &= \underbrace{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2^2}_n \cdot \underbrace{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot n^2}_{(n!)^2} = 2^{2n} \cdot (n!)^2 \end{aligned} \quad (16)$$

Враховуючи (16) в (15), отримаємо розв'язок рівняння Бесселя нульового порядку ($\nu = 0$) у вигляді степеневого ряду

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{C_0 \cdot x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} . \quad (17)$$

У розв'язку (17) залишилась недовизначеною єдина константа C_0 .

Перш ніж визначити константу C_0 , продемонструємо, що нескінченний степеневий парний ряд, через який визначається розв'язок (17), є **збіжним рядом** при всіх значеннях x .

Застосовуючи ознаку Даламбера, складемо відношення **абсолютних величин** двох послідовних доданків ряду (17):

$$\frac{x^{2(n+1)}}{2^{2(n+1)}[(n+1)!]^2} : \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{x^2}{2^2(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Це співвідношення при довільному значенні x прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$, що і доводить абсолютну збіжність ряду, який формує розв'язок (17).

Константа $C_0 = y|_{x=0}$ може бути довизначена довільним чином. Із симетрії вигляду розв'язку (17) випливає, що її доцільно вибрати у вигляді $C_0 = 1$. Це на перший погляд здається, що константу C_0 ми **довільним** чином вибрали рівною одиниці. Однак цей вибір диктує другу додаткову умову, яка повинна виконуватись для розв'язку рівняння, а саме

$$C_0^{(5)} = y|_{x=0} = 1 \quad \Rightarrow \quad y|_{x=0} = 1. \quad (18)$$

Якщо врахувати $C_0 = 1$ в розв'язку (17), то отримаємо функцію

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \quad (19)$$

яка називається **функцією Бесселя першого роду нульового ($\nu = 0$) порядку**. Функція $J_0(x)$ є розв'язком рівняння (4), для якого повинні виконуватися дві додаткових умови, а саме

$$y|_{x=0} = 1, \quad (18) \quad y'|_{x=0} = 0. \quad (10')$$

Отже, ми визначили один частинний розв'язок $y_1 = J_0(x)$ рівняння Бесселя нульового порядку (4). Так як це рівняння є диференціальним рівнянням **другого** порядку, то воно повинно мати два лінійно незалежних частинних розв'язки. Про другий розв'язок поговоримо трохи згодом.

Функція (19), яка є розв'язком рівняння (4), є табличною (затабульованою) функцією, як і всі розв'язки рівнянь Бесселя довільних вищих порядків ν . Таблиці цих функцій нагадують таблиці Брадїса для тригонометричних функцій.

Графік функції Бесселя $y = J_0(x)$ (рис.1.1) нагадує графік затухаючих коливань.

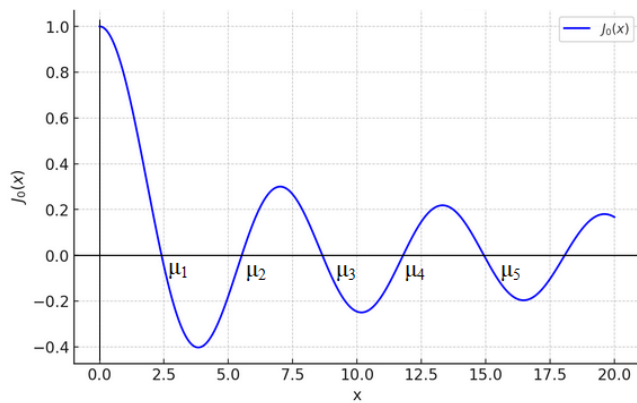


Рис.1.1. Графік функції Бесселя $J_0(x)$

Ця функція *парна*, а тому на рисунку зображена лише половина графіка, симетричного відносно вісі Oy , як і для будь-якої *парної* функції.

Функція $J_0(x)$ має нескінченну множину коренів μ_i , в яких ця функція приймає нульові значення: $J_0(\mu_i) = 0$. Наведемо значення декількох перших із них:

$$\mu_1 = 2,40 ; \quad \mu_2 = 5,52 ; \quad \mu_3 = 8,65 ; \quad \mu_4 = 11,79 \quad \text{і т.д.}$$

Зауважимо, що для великих n різниця значень для двох сусідніх коренів

$$\mu_n - \mu_{n-1} \approx \pi .$$

3. Умова ортогональності функцій Бесселя нульового порядку.

У попередньому параграфі отримано, що одним із розв'язків рівняння Бесселя 0-го порядку $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$ (1) є функція Бесселя $y(x) = J_0(x)$.

Розглянемо зараз рівняння Бесселя нульового порядку більш *загального вигляду*

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \lambda^2 y = 0 . \quad (2)$$

Рівняння (2) є рівнянням *більш загального вигляду* тому, що, в порівнянні з попереднім рівнянням (1), воно містить параметр λ^2 . Перепишемо (2) через диференціали для зручності здійснення наступних перетворень

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \lambda^2 y = 0 . \quad | : \lambda^2$$

$$\frac{d^2 y}{d(\lambda x)^2} + \frac{1}{\lambda x} \frac{dy}{d(\lambda x)} + y = 0 . \quad (3)$$

В рівнянні (3) замість змінної x введемо нову незалежну змінну $\xi = \lambda x$, тоді в нових змінних рівняння (3) набуде вигляду

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dy}{d\xi} + y = 0 . \quad (4)$$

Порівнюючи (1) і (4), стверджуємо, що вони тотожні, тому рівняння (4), як і рівняння (1), розв'язком матиме функцію Бесселя $J_0(\xi)$. Переходячи в

розв'язку до «старої» змінної $\xi = \lambda x$, отримаємо, що розв'язком узагальненого рівняння $y'' + \frac{1}{x}y' + \lambda^2 y = 0$ (2) є функція $J_0(\lambda x)$.

Нехай параметр λ в рівнянні (2) послідовно приймає значення $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ додатніх коренів функції Бесселя $J_0(x)$. Тоді послідовність розв'язків рівнянь Бесселя

$$J_0(\mu_1 x), J_0(\mu_2 x), J_0(\mu_3 x), \dots, J_0(\mu_n x), \dots$$

в інтервалі $[0,1]$ складає повну ортонормовану систему функцій і задовольняє умовам: **ортogonalності**

$$\int_0^1 x \cdot J_0(\mu_k x) J_0(\mu_n x) dx = 0, \quad \text{якщо } k \neq n \quad (5)$$

та **нормування**

$$\int_0^1 x \cdot J_0^2(\mu_k x) dx = \frac{1}{2} J_0'^2(\mu_k) \quad \text{якщо } k = n. \quad (6)$$

Множник x в умовах **ортонормування** (5) та (6) називається **ваговим множником** або **вагою** і позначається $\rho(x) = x$. Отже, згідно з (5) і (6), говорять, що система функцій Бесселя є ортонормованою системою функцій в інтервалі $[0,1]$ з ваговим множителем x і задовольняє умовам ортogonalності (5) та нормування (6).

Доведемо справедливості умов (5) та (6).

Функції $J_0(px)$ та $J_0(qx)$ задовольняють рівнянню (2), коли параметр λ в ньому послідовно приймає значення відповідно рівні p і q .

$$\frac{d^2 J_0(px)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dJ_0(px)}{dx} + p^2 J_0(px) = 0, \quad | \cdot x J_0(qx)$$

-

$$\frac{d^2 J_0(qx)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dJ_0(qx)}{dx} + q^2 J_0(qx) = 0, \quad | \cdot x J_0(px)$$

Помножимо кожне з рівнянь на вказані множники та віднімемо від першого рівняння друге, отримаємо

$$\begin{aligned} & x \cdot \left[J_0(qx) \frac{d^2 J_0(px)}{dx^2} - J_0(px) \frac{d^2 J_0(qx)}{dx^2} \right] + \\ & + \left[J_0(qx) \frac{dJ_0(px)}{dx} - J_0(px) \frac{dJ_0(qx)}{dx} \right] + \\ & + (p^2 - q^2) \cdot x J_0(px) J_0(qx) = 0 \end{aligned}$$

Отриманій рівності можна надати більш простого вигляду

$$\frac{d}{dx} \left\{ x \left[J_o(qx) \frac{dJ_o(px)}{dx} - J_o(px) \frac{dJ_o(qx)}{dx} \right] \right\} + (p^2 - q^2) \cdot x J_o(px) J_o(qx) = 0 \quad (7)$$

Взявши похідну в першому доданку, з (7) отримаємо попереднє рівняння.

Проінтегруємо рівняння (7) в межах $[0,1]$, отримаємо

$$x \cdot \left[J_o(qx) \frac{dJ_o(px)}{dx} - J_o(px) \frac{dJ_o(qx)}{dx} \right] \Big|_0^1 + (p^2 - q^2) \int_0^1 x \cdot J_o(px) J_o(qx) dx = 0 \quad (8)$$

Нехай параметри p і q в останньому рівнянні (8) відповідно приймають значення, які дорівнюють двом різним кореням рівняння $J_o(x) = 0$:

$$p = \mu_k, \quad q = \mu_n \quad (\mu_k \neq \mu_n).$$

Підставляючи в попередньому рівнянні (8) межі інтегрування і враховуючи, що $J_o(\mu_k) = J_o(\mu_n) = 0$ і так як $\mu_k \neq \mu_n$, отримаємо

$$\boxed{\int_0^1 x \cdot J_o(\mu_k x) J_o(\mu_n x) dx = 0}, \quad (9)$$

тобто умова ортогональності (5) доведена.

Щоб довести справедливість умови нормування (6), в рівнянні (8) покладемо спочатку $p = \mu_k$, а q поки що вважаємо довільним, тоді, після підстановки меж інтегрування в (8) та врахування того, що $J_o(\mu_k) = 0$, отримаємо:

$$J_o(q) \cdot \mu_k \cdot J_o'(\mu_k) = (q^2 - \mu_k^2) \int_0^1 x \cdot J_o(\mu_k x) J_o(qx) dx, \quad (10)$$

де в лівій частині останнього рівняння використано перетворення

$$\frac{dJ_o(px)}{dx} = \frac{dJ_o(px)}{d(px)} \cdot p = p J_o'(px).$$

З рівняння (10) отримаємо

$$\int_0^1 x \cdot J_o(\mu_k x) J_o(qx) dx = \frac{J_o(q) \mu_k J_o'(\mu_k)}{q^2 - \mu_k^2}. \quad (11)$$

Для доведення умови нормування (6) в лівій та правій частинах (11) необхідно покласти $q = \mu_k$. Але в правій частині (11) при цьому отримаємо

невизначеність типу $\frac{0}{0}$, яку розкриємо, використовуючи правило *Лопітала*.

Вважаючи в правій частині (11) q змінною величиною, застосуємо до неї вказане правило:

$$\lim_{q \rightarrow \mu_k} \frac{J_0(q) \mu_k J_0'(\mu_k)}{q^2 - \mu_k^2} = \frac{J_0'(\mu_k) \mu_k J_0'(\mu_k)}{2\mu_k} = \frac{1}{2} J_0'^2(\mu_k) . \quad (12)$$

Враховуючи (12) у правій частині (11), отримаємо

$$\int_0^1 x \cdot J_0^2(\mu_k x) dx = \frac{1}{2} J_0'^2(\mu_k) .$$

Отже, умова нормування (6) для функцій Бесселя теж доведена.

Остаточно умова ортонормування для функцій Бесселя нульового порядку запишеться так

$$\begin{cases} \int_0^1 x J_0(\mu_k x) J_0(\mu_n x) dx = 0 & \text{якщо } k = n \\ \int_0^1 x J_0^2(\mu_k x) dx = \frac{1}{2} J_0'^2(\mu_k) & \text{якщо } k \neq n \end{cases} . \quad (13)$$

Зауваження: Ми розв'язали рівняння Бесселя 0-го порядку, отримали тільки перший його частинний розв'язок $J_0(x)$ - функції Бесселя першого роду нульового ($\nu = 0$) порядку і продемонстрували, що ці функції в інтервалі $[0,1]$ складають повну ортонормовану систему функцій і задовольняють умовам ортонормування (13).

В наступних параграфах розв'яжемо рівняння Бесселя першого ($\nu = 1$) порядку, другого та вищих порядків, знайдемо їх обидва частинних розв'язки. Але тут необхідно зауважити, що **умови ортонормування** (13) **однакові** для функцій Бесселя усіх порядків - $J_0(x)$, $J_1(x)$, $J_2(x)$, ..., а також їх других частинних розв'язків, які називаються функціями Неймана, і про які поговоримо згодом.

4. Розв'язування рівняння Бесселя першого порядку.

Рівняння Бесселя 1-го ($\nu = 1$) порядку має вигляд

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) y = 0 . \quad (1)$$

Його розв'язок, як і рівняння Бесселя нульового порядку, шукаємо у вигляді нескінченного степеневого ряду

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots + C_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n , \quad (2)$$

де невідомим, які підлягають визначенню, є коефіцієнти ряду $C_0, C_1, C_2, \dots$.

Продиференціюємо знову ряд (2) двічі:

$$y' = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + \dots + nC_nx^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} nC_nx^{n-1}, \quad (3)$$

$$y'' = 2C_2 + 3 \cdot 2C_3x + 4 \cdot 3C_4x^2 + \dots + n(n-1)C_nx^{n-2} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_nx^{n-2} \quad (4)$$

Підставляючи ряд (2) та його похідні (3)-(4) в рівняння (1), отримаємо

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_nx^{n-2} + \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} nC_nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_nx^n - \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} C_nx^n = 0$$

або, внівши x під знак суми в другому та четвертому доданках, отримаємо

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_nx^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} nC_nx^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_nx^n - \sum_{n=0}^{\infty} C_nx^{n-2} = 0. \quad (5)$$

Виділимо у другій та четвертій сумах окремо доданки з $n=0$ та $n=1$, щоб вирівняти початок сумування в кожній сумі в (5):

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_nx^{n-2} + C_1x^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} nC_nx^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_nx^n - \frac{C_0}{x^2} - C_1x^{-1} - \sum_{n=2}^{\infty} C_nx^{n-2} = 0$$

В останньому рівнянні об'єднаємо 1-шу, 2-гу та 4-ту суми:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - 1)C_nx^{n-2} - \frac{C_0}{x^2} + \sum_{n=0}^{\infty} C_nx^n = 0. \quad (6)$$

Далі в (6), як і в § 2, необхідно згрупувати коефіцієнти C_n при однакових степенях x і прирівняти їх до нуля, так як рівняння (6) однорідне. Оскільки в (6) x^{-2} найнижча степінь x і так як зліва в (6) тільки один коефіцієнт C_0 стоїть при цій найнижчій степені, то прирівняємо його до нуля:

$$C_0 = 0. \quad (7)$$

З рівності нулю коефіцієнта C_0 в (7) випливає перша додаткова умова, яка накладається на існування розв'язку у вигляді степеневого ряду (2), а саме

$$y|_{x=0}^{(2)} = C_0 = 0, \quad \Rightarrow \quad y|_{x=0} = 0. \quad (8)$$

Прирівнюючи далі коефіцієнти при однакових степенях x до нуля, отримаємо *рекурентну формулу*, з допомогою якої коефіцієнт C_n виразимо через C_{n-2} (ця формула легко отримується з (6), якщо виписати коефіцієнти при степені x^{n-2}):

$$\boxed{(n^2 - 1)C_n + C_{n-2} = 0} \quad (n \geq 2) \quad (9)$$

З останньої формули (9) отримаємо, що

$$C_n = -\frac{C_{n-2}}{n^2 - 1}. \quad (10)$$

Оскільки, згідно з (7), $C_0 = 0$, то з (10) послідовно отримаємо, що всі коефіцієнти з парним індексом дорівнюватимуть нулю:

$$C_2 = C_4 = C_6 = \dots = C_{2n} = \dots = 0.$$

Всі коефіцієнти з непарним індексом виразимо через C_1 :

$$C_3 = -\frac{C_1}{(3^2 - 1)}, \quad C_5 = -\frac{C_3}{(5^2 - 1)} = \frac{C_1}{(3^2 - 1)(5^2 - 1)}, \quad \dots,$$

$$C_{2n+1} = (-1)^n \frac{C_1}{(3^2 - 1)(5^2 - 1)(7^2 - 1) \dots [(2n+1)^2 - 1]}. \quad (11)$$

Зробимо окремо перетворення в знаменнику виразу (11):

$$\begin{aligned} (3^2 - 1)(5^2 - 1)(7^2 - 1) \dots [(2n+1)^2 - 1] &= (2 \cdot 4)(4 \cdot 6)(6 \cdot 8) \dots (2n \cdot (2n+2)) = \\ &= (2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n)(4 \cdot 6 \cdot 8 \dots 2(n+1)) = 2^n (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n) 2^n (2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n+1)) = \\ &= 2^{2n} n!(n+1)! \end{aligned}$$

Підставимо останнє перетворення в (11): $C_{2n+1} = (-1)^n \frac{C_1}{2^{2n} n!(n+1)!}. \quad (12)$

Враховуючи у розв'язку (2), що коефіцієнти з парним індексом дорівнюють нулю, а з непарним даються виразом (12), отримаємо

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{C_1}{2^{2n} n!(n+1)!} x^{2n+1}. \quad (13)$$

Єдиним недовизначеним коефіцієнтом у розв'язку (13) залишився коефіцієнт C_1 . Як і раніше його можна визначити довільним чином, але при його виборі виходитимемо з міркувань симетричності вигляду розв'язку (13), а саме, так як степінь x в (13) – це x^{2n+1} , то логічно, щоб показникова функція в знаменнику (13) була б тієї ж степені, тобто 2^{2n+1} . Цього можемо добитися, вибравши невідому константу $C_1 = \frac{1}{2}$. Враховуючи це значення в (13), отримаємо розв'язок рівняння Бесселя першого порядку (1) у вигляді **функції Бесселя першого порядку першого роду**

$$\boxed{J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1} n!(n+1)!}} \quad (14)$$

Вибір константи інтегрування $C_1 = \frac{1}{2}$ диктує другу умову, якій повинен задовольняти розв'язок у вигляді степеневому ряду (2), а саме

$$y'|_{x=0} = C_1 = \frac{1}{2}, \quad \Rightarrow \quad y'|_{x=0} = \frac{1}{2}. \quad (15)$$

Отже, одним частинним розв'язком рівняння Бесселя першого порядку (1) є функція Бесселя 1-го порядку (14), для якого повинні виконуватися дві додаткових умови (8) та (15):

$$y|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = \frac{1}{2}.$$

Розв'язок (14) є непарною функцією. Її графік (рис.1.2) нагадує графік затухаючої синусоїди, симетричний відносно початку координат як графік будь-якої непарної функції.

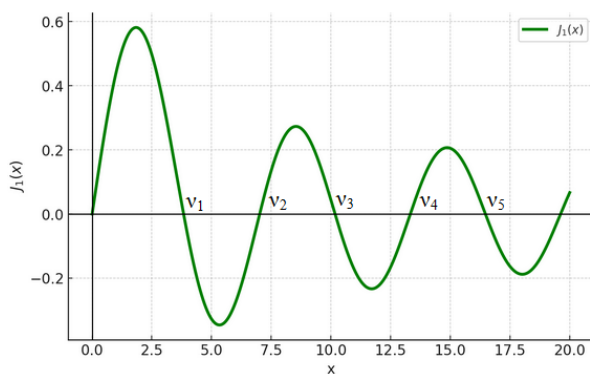


Рис.1.2. Функція Бесселя $J_1(x)$

Функція $J_1(x)$ як і функція $J_0(x)$ має нескінчену множину коренів v_i . Наведемо значення декількох перших із них

$$v_1 = 3,83; \quad v_2 = 7,02; \\ v_3 = 10,17; \quad v_4 = 13,32; \dots$$

Для великих n різниця значень двох сусідніх коренів $v_n - v_{n-1} \approx \pi$.

Функція $J_1(x)$ як і функція $J_0(x)$ табульована, таблиці цих функцій можна знайти в Люстерника Л.А., Акушського І.Я., Діткіна В.А. Таблиці Бесселевих функцій.

Почленно диференціюючи ряд для функції $J_0(x)$, прийдемо до наступного співвідношення

$$J'_0(x) = -J_1(x) \quad (16)$$

Прирівнюючи (16) до нуля, бачимо, що функція $J_0(x)$ має екстремуми в тих

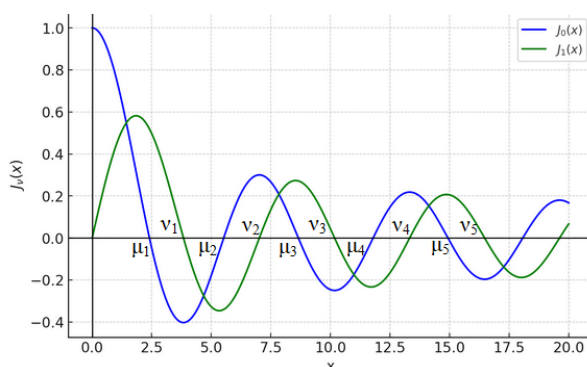


Рис.1.3. Функції Бесселя $J_0(x)$ та $J_1(x)$

точках, де функція $J_1(x)$ перетворюється в нуль, тобто в точках v_i .

З рисунка 1.3 видно, що корені функцій $J_0(x)$ та $J_1(x)$ перемежуються: тобто між двома коренями функції $J_0(x)$ знаходиться обов'язково один корінь функції $J_1(x)$ і навпаки.

І нарешті на завершення, порівнюючи рівняння Бесселя нульового порядку та першого порядку, а також їх частинні розв'язки, використовуючи метод аналогій, спробуємо

записати частинний розв'язок рівняння Бесселя для довільного цілочисленного ν - го порядку.

Отже, рівняння Бесселя нульового порядку

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$$

першим частинним розв'язком має функцію Бесселя нульового порядку

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} . \quad (17)$$

Рівняння Бесселя першого порядку

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) y = 0$$

розв'язком має функцію Бесселя першого порядку

$$J_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1} n! (n+1)!} . \quad (18)$$

Порівнюючи розв'язки (17) та (18), по аналогії можемо виписати перший частинний розв'язок рівняння Бесселя

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

довільного цілочисельного ν - го порядку. Очевидно, його розв'язком буде функція Бесселя ν - го порядку

$$J_{\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+\nu}}{2^{2n+\nu} n! (n+\nu)!} . \quad (19)$$

З (19) при $\nu = 0$ та $\nu = 1$ отримаємо відповідно розв'язки (17) та (18).

5. Розв'язки рівняння Бесселя ν – го порядку: функції Бесселя та функції Неймана.

В попередньому параграфі ми записали частинний розв'язок рівняння Бесселя

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \quad (1)$$

довільного цілочисленного ν - го порядку - це функцію Бесселя ν - го порядку

$$J_{\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+\nu}}{2^{2n+\nu} n! (n+\nu)!} \quad (2)$$

Отже, функція Бесселя $J_\nu(x)$, що задається виразом (2), є *першим* частинним розв'язком $y_1(x)$ диференційного рівняння Бесселя *другого порядку* (1), тобто

$$y_1(x) = J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+\nu}}{2^{2n+\nu} n!(n+\nu)!} . \quad (3)$$

Зараз поговоримо про другий частинний розв'язок рівняння (1). Але перед тим – про асимптотику розв'язку (2).

При великих значення $x \gg 1$ функцію Бесселя (2) можна апроксимувати *асимптотичною формулою*

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) , \quad (4)$$

з якої видно, що для великих x крива $J_\nu(x)$ має вигляд затухаючої косинусоїди.

Для того, щоб записати загальний розв'язок рівняння Бесселя (1), необхідно знати другий, лінійно незалежний з першим, частинний розв'язок рівняння $y_2(x)$.

В теорії Беселевих функцій **показано**:

1) якщо ν **не є цілим числом**, то функції $J_\nu(x)$, яка дається виразом (2), та

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-\nu}}{2^{2n-\nu} n!(n-\nu)!} \quad (5)$$

є лінійно незалежними, так як одна з них в околі особливої точки $x = 0$ веде себе як x^ν , а інша – як $x^{-\nu}$. Тому для **нецілих** ν загальний розв'язок рівняння Бесселя ν -го порядку може бути записаний у вигляді

$$y_\nu(x) = C_1(\nu)J_\nu(x) + C_2(\nu)J_{-\nu}(x) .$$

2) якщо ж ν **ціле**, то $J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$ (показано в Арсеніна В.Я. Методи математичної фізики і спеціальні функції, стор. 288), тобто ці функції є лінійно залежними і з їх допомогою не можна записати загальний розв'язок рівняння (1).

Тому другий частинний розв'язок **підбирають** таким чином, щоб він був **лінійно незалежним** з першим. Таким другим частинним розв'язком є **функція Бесселя 2-го роду** або **функція Неймана**, яку комбінують з врахуванням (2) та (5) таким чином:

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu} . \quad (6)$$

При $x \gg 1$ справедлива наступна *асимптотична формула* для функції Неймана

$$N_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} + \frac{\pi}{4}\right) . \quad (7)$$

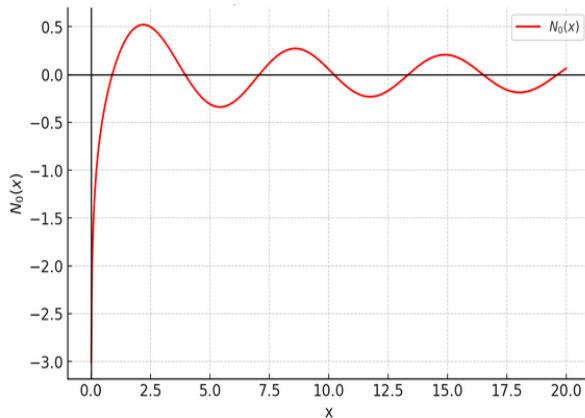


Рис. 1.4. Функція Неймана $N_0(x)$

Важливою властивістю функції Неймана довільного порядку є та, що

$$N_\nu(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$$

Отже, при **цілочисленних** $\nu = n$ загальний інтеграл рівняння Бесселя (1) запишемо у вигляді:

$$y_n(x) = C_n J_n(x) + D_n N_n(x) .$$

Повернемося до розв'язку рівняння Бесселя (1):

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+\nu}}{2^{2n+\nu} n!(n+\nu)!} . \quad (2)$$

Тут не виникає жодних проблем, якщо ν пробігає цілочисленні значення: $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Однак, якщо ν як довільна константа набуде **дробових значень**, то при запису розв'язку (2) з'являється проблема через те, що не існує поняття дробового факторіалу.

Щоб уникнути цих труднощів, поставимо перед собою завдання замінити $(n+\nu)!$ через Γ - функцію $\Gamma(\nu)$, для якої немає різниці чи константа ν - ціле число, чи дробове.

Нагадаємо, що Γ - функція задається інтегралом:

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\nu-1} dx , \quad (8)$$

причому

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -\int_0^{\infty} e^{-x} d(-x) = -\int_0^{\infty} d(e^{-x}) = e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1 ,$$

тобто $\Gamma(1) = 1$, аналогічно $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Виведемо одну з **основних властивостей** Γ - функції:

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\nu-1} dx = \frac{1}{\nu} \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-x}}_U \underbrace{d(x^{\nu})}_{dV} = \frac{1}{\nu} \cdot \left[e^{-x} x^{\nu} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} x^{\nu} d(e^{-x}) \right] =$$

$$= \frac{1}{\nu} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\nu} dx = \frac{1}{\nu} \Gamma(\nu + 1)$$

звідси

$$\boxed{\Gamma(\nu + 1) = \nu \cdot \Gamma(\nu)} . \quad (9)$$

А зараз виразимо $(n + \nu)!$ в знаменнику (2) через Γ - функцію $\Gamma(\nu)$. Для цього розпишемо $(n + \nu)!$:

$$(n + \nu)! = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \nu}_{\nu!} \cdot (\nu + 1)(\nu + 2)(\nu + 3) \cdots (\nu + n). \quad (10)$$

Для подальшого перетворення виразу (10) розпишемо $\Gamma(\nu + 1)$, послідовно використовуючи властивість (9) Γ - функції:

$$\begin{aligned} \Gamma(\nu + 1) &= \nu \cdot \overset{(9)}{\Gamma(\nu)} = \nu(\nu - 1) \overset{(9)}{\Gamma(\nu - 1)} = \nu(\nu - 1)(\nu - 2) \Gamma(\nu - 2) = \dots = \\ &= \nu(\nu - 1)(\nu - 2)(\nu - 3) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (\nu - 2)(\nu - 1)\nu = \nu! \end{aligned}$$

$$\Gamma(\nu + 1) = \nu! . \quad (11)$$

Враховуючи (11), вираз (10) можемо переписати у вигляді

$$(n + \nu)! = (\nu + 1)(\nu + 2)(\nu + 3) \cdots (\nu + n) \Gamma(\nu + 1) . \quad (12)$$

Тепер застосуємо правило (9) декілька разів, постійно збільшуючи на одиницю аргумент Γ - функції в лівій його частині:

$$\begin{aligned} \Gamma(\nu + 2) &= (\nu + 1) \Gamma(\nu + 1) , \\ \Gamma(\nu + 3) &= (\nu + 2) \Gamma(\nu + 2) = (\nu + 2)(\nu + 1) \Gamma(\nu + 1) , \\ \Gamma(\nu + 4) &= (\nu + 3) \Gamma(\nu + 3) = (\nu + 3)(\nu + 2)(\nu + 1) \Gamma(\nu + 1) . \\ &\dots\dots\dots \\ \Gamma(\nu + n + 1) &= (\nu + n) \cdots (\nu + 3)(\nu + 2)(\nu + 1) \Gamma(\nu + 1). \end{aligned} \quad (13)$$

Порівнюючи (12) та (13), з рівності їх правих частин випливає рівність лівих, тобто

$$(n + \nu)! = \Gamma(\nu + n + 1) . \quad (14)$$

Зараз, враховуючи (14) у розв'язку (2), запишемо вираз для функції Бесселя довільного ν -го порядку через Γ - функцію:

$$\boxed{J_{\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+\nu}}{2^{2n+\nu} n! \Gamma(\nu + n + 1)}} . \quad (15)$$

Нагадаємо, що Γ - функція теж є табличною функцією.

Так як Γ - функція, як випливає з (8), може бути визначеною для довільних ν , в тому числі і дробових, то записана функція Бесселя $J_\nu(x)$ в (15) через Γ - функцію уможливорює обчислювати вирази для функцій як цілочисленних значень ν , так і дробових. Цим і займемося в наступному параграфі, записуючи вирази для функцій Бесселя напівцілих порядків.

6. Функції Бесселя напівцілого порядку.

Розглянемо зараз функції Бесселя напівцілого порядку $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$, де n - ціле число ($n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$). Знайдемо перш за все $J_{\frac{1}{2}}(x)$ і $J_{-\frac{1}{2}}(x)$. Для цього повернемося до виразу (15) §5 для функції Бесселя довільного ν -го порядку, виражений через Γ - функцію:

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+\nu}}{2^{2n+\nu} n! \Gamma(\nu + n + 1)} . \quad (1)$$

Для $\nu = \frac{1}{2}$ вираз (1) набуде вигляду :

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+\frac{1}{2}}}{2^{2n+\frac{1}{2}} n! \Gamma(\frac{1}{2} + n + 1)} . \quad (2)$$

У (2) ввійшла $\Gamma(\frac{1}{2} + n + 1)$, яку розпишемо, використовуючи правило (13) §5, а саме

$$\Gamma(\nu + n + 1) = (\nu + n) \cdots (\nu + 3)(\nu + 2)(\nu + 1)\Gamma(\nu + 1),$$

яке для $\nu = \frac{1}{2}$ запишеться наступним чином

$$\begin{aligned} \Gamma(\frac{1}{2} + n + 1) &= (\frac{1}{2} + 1)(\frac{1}{2} + 2)(\frac{1}{2} + 3) \cdots (\frac{1}{2} + n)\Gamma(\frac{1}{2} + 1) = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdots \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{2^{n+1}} \cdot \sqrt{\pi} , \end{aligned} \quad (3)$$

оскільки $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Враховуючи (3) в (2), отримаємо

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+\frac{1}{2}} \cdot 2^{2n+1}}{2^{2n} \cdot 2^{\frac{1}{2}} n! \cdot \sqrt{\pi} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \end{array} \right.$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n! \cdot 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)} . \quad (4)$$

Продемонструємо, що вираз у знаменнику (4) можна представити у вигляді:

$$n! \cdot 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1) = (2n+1)! . \quad (5)$$

Покажемо, справедливність співвідношення (5) для випадку $n = 3$:

$$1 \cdot \overbrace{2 \cdot 3}^6 \cdot \overbrace{2 \cdot 2}^4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = (2n+1)! \quad \text{при } n = 3 .$$

В такий спосіб можна продемонструвати справедливність (5) при довільному n . А тому, враховуючи (5) у знаменнику в (4), остаточно отримаємо

$$\boxed{J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} . \quad (6)$$

Але пам'ятаємо, що сума у виразі (6) є розкладом функції $\sin x$ через непарний степеневий ряд; тому виразу (6) можна надати іншого вигляду

$$\boxed{J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x} . \quad (7)$$

Здійснивши аналогічні розрахунки для випадку $\nu = -\frac{1}{2}$, отримаємо

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} . \quad (8)$$

і так як сума в (8) є розкладом функції $\cos x$ у вигляді парного степеневого ряду, то

$$\boxed{J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x} . \quad (9)$$

Диференціюючи ряди для функцій Бесселя (1), можна встановити **рекурентні співвідношення**, яким вони задовольняють. **Без доведення** випишемо співвідношення між функціями Бесселя 1-го роду різних порядків:

Рекурентні формули для функцій Бесселя:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} \right] = - \frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu} \quad (10)$$

$$\frac{d}{dx} [x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x) \quad (11)$$

Відмітимо два важливих випадки, які випливають із співвідношення (10) при $\nu = 0$:

$$J_0'(x) = -J_1(x) \quad (12)$$

та з формули (11) при $\nu = 1$:

$$[xJ_1(x)]' = xJ_0(x) \quad (13)$$

На завершення встановимо рекурентні співвідношення, які пов'язують функції Бесселя 1-го роду $J_\nu(x)$, $J_{\nu+1}(x)$, $J_{\nu-1}(x)$. Здійснюючи диференціювання в (10) та (11), отримаємо

$$\frac{\nu \cdot J_\nu(x)}{x} - J_\nu'(x) = J_{\nu+1}(x) , \quad (14)$$

$$\frac{\nu \cdot J_\nu(x)}{x} + J_\nu'(x) = J_{\nu-1}(x) . \quad (15)$$

Додаючи та віднімаючи співвідношення (14) та (15), отримаємо

$$J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) , \quad (16)$$

$$J_{\nu+1}(x) - J_{\nu-1}(x) = -2J_\nu'(x) . \quad (17)$$

З формули (17) випишемо правило, яке уможливорює знаходження похідної від функцій Бесселя довільного порядку

$$J_\nu'(x) = \frac{1}{2} [J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)] \quad (18)$$

З рівності (16) випишемо формулу, з допомогою якої можна знаходити функцію Бесселя старшого порядку $J_{\nu+1}(x)$, якщо відомі $J_\nu(x)$ та $J_{\nu-1}(x)$:

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x) - J_{\nu-1}(x) \quad (19)$$

Приклад 1: В попередніх параграфах ми встановили вирази для функцій Бесселя нульового порядку $J_0(x)$ та першого порядку $J_1(x)$. Як слідує з (19) при $\nu=1$: $J_2(x) = \frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x)$. Отже, формула (19) уможливило функції Бесселя «старших» порядків виражати через функції Бесселя «молодших» порядків.

Приклад 2: Знайдемо згідно з формулою (19) функцію Бесселя $J_{\frac{3}{2}}(x)$ через уже нам відомі функції $J_{\frac{1}{2}}(x)$, що дається виразом (7), та $J_{-\frac{1}{2}}(x)$, що дається виразом (8).

$$\begin{aligned} J_{\frac{3}{2}}(x) &= J_{\frac{1}{2}+1}(x) \stackrel{(19)}{=} \frac{1}{x} J_{\frac{1}{2}}(x) - J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{\sin x}{x} - \cos x \right] = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Таким способом можна визначити функції Бесселя довільного напівцілого порядку $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$.

Розділ 4. *ІНТЕГРУВАННЯ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ У СФЕРИЧНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ*

1. Розв'язування рівняння Лапласа у сферичних координатах. Рівняння Лежандра.

Рівняння Лапласа $\Delta U = 0$ у прямокутних декартових координатах має простий симетричний вигляд $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$. Воно порівняно просто розв'язується методом відокремлення змінних Ейлера-Фур'є. Однак, якщо задача, яку належить розв'язати, володіє *сферичною симетрією*, то рівняння Лапласа $\Delta U = 0$ необхідно розв'язувати у сферичних координатах, при цьому знаходження його розв'язку значно спрощується в цій системі координат із симетрійних міркувань.

Рівняння Лапласа $\Delta U = 0$ у сферичних координатах має вигляд

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (1)$$

Його розв'язок є функцією від трьох змінних сферичної системи координат $U = U(r, \theta, \varphi)$. Знайдемо його, використовуючи метод відокремлення змінних. Однак відразу зауважимо, що задачу розв'язуватимемо в загальному, не конкретизуючи граничні умови, а тому розв'язок міститиме константи інтегрування, які визначаються в практичних задачах.

Розв'язок шукаємо у вигляді

$$U(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi). \quad (2)$$

Врахуємо (2) в(1):

$$\begin{aligned} \frac{Y}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right\} &= 0, \quad \left| \cdot \frac{r^2}{RY} \right. \\ \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{Y} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

На першому етапі відокремлення змінних частину оператора Лапласа, яка залежить від кутових змінних (θ, φ) , залишаємо в лівій частині рівняння, а ту, що залежить від радіальної змінної r , переносимо в праву частину і так як зліва і справа матимемо відношення другої похідної від функції до самої функції, то, як і раніше, прирівняємо ці відношення до константи $-\lambda$:

$$\frac{1}{Y} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right\} = -\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = -\lambda, \quad \lambda > 0. \quad (4)$$

Прирівнюючи обидві частини подвійної рівності (4) до постійної відокремлення, яку знову ж таки вважаємо невід'ємною, отримаємо два рівняння:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \lambda R = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \lambda Y = 0. \quad (6)$$

Звернемо увагу, що рівняння (6) є рівнянням у частинних похідних, тому до нього знову можна застосувати метод відокремлення змінних:

$$Y(\theta, \varphi) = V(\theta)\Phi(\varphi). \quad (7)$$

тоді, враховуючи (7) в (6), отримаємо

$$\frac{\Phi}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) + \frac{V}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \lambda V \Phi = 0, \quad \left| \cdot \frac{\sin^2 \theta}{V \Phi} \right.$$

$$\frac{\sin \theta}{V} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) + \lambda \sin^2 \theta + \frac{\Phi''}{\Phi} = 0 .$$

На другому етапі відокремлення змінних відношення $\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$, яке залежить від азимутального кута φ , залишаємо в лівій частині рівняння, решту доданків переносимо в праву частину і прирівнюємо їх знову ж до константи відокремлення:

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = - \left\{ \frac{\sin \theta}{V} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) + \lambda \sin^2 \theta \right\} = -\nu^2 ,$$

звідси

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \nu^2 \Phi(\varphi) = 0 \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) + \left[\lambda - \frac{\nu^2}{\sin^2 \theta} \right] V = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (8) \\ (9) \end{matrix}$$

(8) є рівнянням 2-го порядку з постійними коефіцієнтами, розв'язок якого ми неодноразово знаходили:

$$\Phi(\varphi) = A \cos \nu \varphi + B \sin \nu \varphi , \quad (10)$$

Так як розв'язок повинен задовольняти умові *циклічності* (періодичності) за кутом φ , то $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$. Ця умова, як було продемонстровано раніше, може виконуватися тільки при цілочисленних значеннях ν :

$$\nu = m = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

Відповідно функція (10) прийме вигляд:

$$\Phi_m(\varphi) = A_m \cos m \varphi + B_m \sin m \varphi , \quad (12)$$

а рівняння (9) з врахуванням того, що $\nu = m$, запишеться у вигляді:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) + \left[\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] V = 0 , \quad (13)$$

Рівняння (13), якому задовольняє частина розв'язку, залежна від кута θ , називається *узагальненим рівнянням Лежандра*.

Введемо нову незалежну змінну

$$x = \cos \theta , \quad (14)$$

і оскільки $0 \leq \theta \leq \pi$, то $-1 \leq x \leq 1$.

(Тут ми декартовою змінною x позначили залежність розв'язку від змінної θ сферичної системи координат).

Здійснимо в (13) перехід до нової змінної x , для цього проведемо ряд перетворень:

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta ,$$

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta \frac{dV}{dx},$$

$$\frac{d}{d\theta}(\sin\theta \frac{dV}{d\theta}) = \frac{d}{dx}(\sin\theta \frac{dV}{dx} \frac{dx}{d\theta}) \frac{dx}{d\theta} = \sin\theta \frac{d}{dx}(\sin^2\theta \frac{dV}{dx}). \quad (15)$$

Підставляючи (15) в (13), отримаємо

$$\frac{d}{dx}(\sin^2\theta \frac{dV}{dx}) + \left[\lambda - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] V = 0. \quad (16)$$

Враховуючи в (16), що $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \stackrel{(14)}{=} 1 - x^2$, а також, вводячи нове позначення $y(x) = V(x)$, останнє рівняння в позначеннях (14) набуде вигляду:

$$\boxed{\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y = 0} \quad (17)$$

(17) – узагальнене рівняння Лежандра.

При $m = 0$ це рівняння приймає простішу форму:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y &= 0 \\ (1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y &= 0 \end{aligned}} \quad (18)$$

і називається **рівнянням Лежандра**.

Задача звелася до знаходження розв'язків рівняння Лежандра (13) або (17) та рівняння (5) для радіальної частини розв'язку $R(r)$, до вивчення методів відшукування яких приступимо в наступних параграфах.

2. Розв'язування рівняння Лежандра.

В попередньому параграфі було продемонстровано, що складова $V(\theta)$ розв'язку рівняння Лапласа у сферичних координатах при замінах $x = \cos\theta$ (14) та $y(x) = V(x)$ задовольняє **узагальненому рівнянню Лежандра**

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y = 0, \quad (17)$$

яке при $m = 0$ переходить у просте **рівняння Лежандра** (18):

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y &= 0 \\ (1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y &= 0 \end{aligned}} \quad (1)$$

Шукатимемо інтеграл рівняння зі **змінними** коефіцієнтами (1) у вигляді нескінченного **степеневого** ряду:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad a_k - ? \quad (2)$$

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad (2.1) \quad y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}. \quad (2.2)$$

Підставляючи (2), (2.1), (2.2) в (1), отримаємо таке рівняння:

$$(1-x^2) \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} - 2x \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0.$$

Перенесемо всі доданки, що містять x^k , в праву частину рівняння:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} [k(k-1) + 2k - \lambda] a_k x^k$$

або

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} [k(k+1) - \lambda] a_k x^k. \quad (3)$$

Згідно з (3), повинні бути однаковими коефіцієнти при однакових степенях x . Тому, прирівнюючи коефіцієнти зліва і справа в (3) при x^k , отримаємо наступне рекурентне співвідношення

$$(k+2)(k+1) a_{k+2} = [k(k+1) - \lambda] a_k.$$

Звідси отримаємо **рекурентну формулу**

$$\boxed{a_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+2)(k+1)} a_k} \quad (4)$$

яка уможливорює виразити всі коефіцієнти ряду (2) з парним індексом через a_0 , а з непарним індексом - через a_1 . Таким чином, ряд (2) з коефіцієнтами, які визначаються зі співвідношення (4) через довільні a_0 та a_1 , буде загальним розв'язком рівняння Лежандра (1). Залишиться в кінці встановити правила, за якими будемо до визначати невідомі константи a_0 та a_1 .

Звернемо увагу, якщо $a_1 = 0$, тоді, згідно з (4), всі коефіцієнти з непарним індексом перетворюються в нуль ($a_3 = a_5 = a_7 = \dots = a_{2k+1} = \dots = 0$). При цьому розв'язок рівняння отримується у вигляді «**парного**» ряду

$$y_0(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots, \quad (5)$$

який є першим частинним розв'язком рівняння (1). Аналогічно, якщо поставити $a_0 = 0$ ($a_1 \neq 0$), то отримаємо розв'язок у вигляді «*непарного*» степеневому ряду, який буде другим частинним розв'язком рівняння (1):

$$y_1(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots. \quad (6)$$

Таким чином, загальний розв'язок вихідного рівняння (1) запишемо у вигляді

$$y(x) = Ay_0(x) + By_1(x). \quad (7)$$

Однак, задачу ще не можна вважати вирішеною, оскільки в курсі математичної фізики нас завжди цікавлять розв'язки, які задовольняють трьома вимогам:

однозначності, неперервності, кінцевості !

Аналіз розв'язків (5) та (6), незважаючи на те, що $-1 \leq x \leq 1$, показує, що останній умові **кінцевості** вони не задовольняють через нескінченну кількість доданків у ряді і тільки в тому частинному випадку, коли будь-який з цих рядів «**обривається**» на деякому доданку і містить кінцеве число доданків, умова **кінцевості** функції, яку виражає цей ряд, виконується на всьому відрізку визначення $-1 \leq x \leq 1$. Це може статися тоді, коли один із коефіцієнтів ряду (5) або (6) дорівнює нулю, тоді, згідно з (4), всі решта коефіцієнтів ряду, які слідує після нього, теж стануть рівними нулю і на цьому доданку ряд «обривається».

Зауважимо, що як слідує з (4), якщо коефіцієнт ряду $a_l \neq 0$, то $a_{l+2} = 0$, тобто наступний коефіцієнт ряду можемо занулити тільки в тому випадку, коли виберемо константу $\lambda = l(l+1)$. Константа інтегрування λ на даний момент була невизначеною константою. Однак, вибираючи її власноруч у вигляді

$$\boxed{\lambda = l(l+1)} \quad (8)$$

можна отримати **кінцевий** розв'язок рівняння Лежандра (1) у вигляді многочлена l -ї степені з кінцевою кількістю доданків.

Отже, рівняння Лежандра (1), у якому параметр λ вибраний у вигляді (8)

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0 \quad (9)$$

має кінцевим розв'язок у вигляді многочлена l -ї степені:

при l -парному цей розв'язок матиме вигляд

$$y_0(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots + a_l x^l, \quad (10)$$

при l - непарному цей розв'язок матиме вигляд

$$y_1(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots + a_l x^l. \quad (11)$$

Коефіцієнти a_k визначаються через довільні a_0 чи a_1 і в тому і в іншому випадках за формулою (слідуює з (4) при $\lambda = l(l+1)$)

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - l(l+1)}{(k+2)(k+1)} a_k \quad (12)$$

(З формули (12) видно, що якщо поставити $k = l$ і вважати $a_l \neq 0$, то вже a_{l+2} і коефіцієнти зі «старшим» за нього індексом перетворюються в нуль і ряд «обірветься» на l - му доданку).

Залишилось до визначити довільні невизначені на даний момент коефіцієнти: для парного ряду a_0 та для непарного ряду a_1 . *Правило*, за яким їх вибирати, вказане в *означенні поліномів Лежандра*.

Означення: Многочлени (10), (11), у яких відповідні коефіцієнти a_0 та a_1 вибрані таким чином, щоб в точці $x=1$ значення цих многочленів дорівнювали 1 , називаються **поліномами Лежандра l - ї степені** і позначаються наступним чином $P_l(x)$.

Резюме: Рівняння Лежандра (1) тільки при $\lambda = l(l+1)$ має обмежені на відріжку $-1 \leq x \leq 1$ розв'язки, які з точністю до постійного множника є поліномами Лежандра.

(Зверніть увагу: значення l в параметрі $\lambda = l(l+1)$ означає кількість доданків, з яких складаються *кінцеві* розв'язки (10) чи (11) рівняння Лежандра).

3. Поліноми Лежандра.

Знайдемо поліноми Лежандра найнижчих степенів $l = 0, 1, 2, 3$.

1. $l = 0$, згідно з формулою (10): $P_0(x) = a_0$, але, щоб виконувалась умова з означення поліномів, а саме $P_0(1) = 1$, необхідно покласти $a_0 = 1$. Отже,

$$P_0(x) = 1 \quad (1)$$

2. $l = 1$, тоді згідно з формулою (11): $P_1(x) = a_1 x$, але, щоб виконувалась умова $P_1(1) = 1$, необхідно покласти $P_1(1) = a_1 \cdot 1 = 1$, звідси $a_1 = 1$. Отже,

$$P_1(x) = x \quad (2)$$

3. $l = 2$, тоді згідно з формулою (10): $P_2(x) = a_0 + a_2 x^2$ (3). Щоб виразити коефіцієнт a_2 через a_0 , використаємо вираз (12) §2, в якому поставимо $l = 2$, а $k = 0$:

$$a_{0+2} = \frac{0(0+1) - 2(2+1)}{(0+2)(0+1)} a_0 \Rightarrow a_2 = -3a_0.$$

Тоді, враховуючи це в (3), отримаємо $P_2(x) = a_0 - 3a_0 x^2$ або $P_2(x) = a_0(1 - 3x^2)$. Для визначення константи a_0 з означення поліномів вимагаємо, щоб $P_2(1) = 1$: $a_0(1 - 3) = 1$, звідси $a_0 = -\frac{1}{2}$, тоді

$$\boxed{P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)} \quad (4)$$

4. $l = 3$, згідно з (11) $P_3(x) = a_1 x + a_3 x^3$, а згідно з (12)

$$a_3 = \frac{1(1+1) - 3(3+1)}{(1+2)(1+1)} a_1 = -\frac{10}{6} a_1 = -\frac{5}{3} a_1.$$

$$P_3(x) = a_1 x - \frac{5}{3} a_1 x^3 = a_1 \left(x - \frac{5}{3} x^3 \right).$$

В точці $x = 1$: $P_3(1) = -\frac{2}{3} a_1 = 1$, звідси $a_1 = -\frac{3}{2}$.

$$P_3(x) = -\frac{3}{2} x + \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} x^3 = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x).$$

$$\boxed{P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)} \quad (5)$$

Обчислення *поліномів Лежандра* вищих степенів у такий спосіб досить громіздкі. Математикам вдалося підібрати *формулу Родріга*

$$\boxed{P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l} \quad (6)$$

з допомогою якої можна визначити поліноми довільного степеня l , і довести, що (6) є розв'язками рівняння Лежандра (2.1). Якщо в (6) поставити $l = 0, 1, 2, 3$, то отримаємо поліноми Лежандра (1), (2), (4), (5).

Графіки декількох поліномів Лежандра нижчих степенів приведені на рисунку 2.1. Всі вони визначені в інтервалі $-1 \leq x \leq 1$ і всі вони в точці $x = 1$ приймають значення рівне 1 за означенням поліномів.

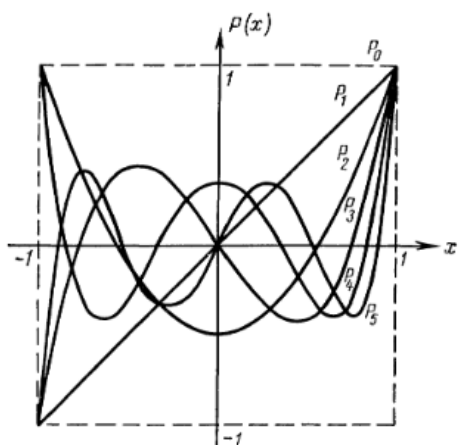


Рис.2.1. Поліноми Лежандра перших шести порядків

Поліноми Лежандра в інтервалі $-1 \leq x \leq 1$ складають **повну ортонормовану систему функцій** і задовольняють:

умові ортогональності

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0, \quad n \neq m \quad (7)$$

та умові нормування

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1}, \quad n = m \quad (8)$$

Деякі властивості поліномів Лежандра.

1. Поліном Лежандра n -ї степені є функцією тієї ж парності, що і n :

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad (9)$$

тобто поліноми парного степеня є парними функціями, а непарного – непарними.

Це твердження випливає безпосередньо з (6), якщо зауважити, що $(x^2 - 1)^l$ є парною функцією, а кожне наступне диференціювання змінює її парність.

2. $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$. Перша умова випливає з означення поліномів Лежандра, а друга – з (9) при $x = 1$.
2. Всі корені полінома Лежандра $P_n(x)$ дійсні, різні і лежать в інтервалі $[-1, 1]$. $P_n(x)$ має n різних коренів у вказаному інтервалі визначення.

Для поліномів Лежандра (6) справедливе рекурентне співвідношення:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

яке уможливорює поліном «старшого» порядку виразити через знайдені поліноми «молодшого» порядку.

Повернемося до узагальненого рівняння Лежандра (17) §1:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y = 0.$$

При $\lambda = l(l+1)$ воно набуде вигляду

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y = 0, \quad (10)$$

кінцевими розв'язками якого є *приєднані поліноми Лежандра* $P_l^{(m)}(x)$, які визначаються теж *формулою Родріга*:

$$P_l^{(m)}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad (11)$$

Зауважимо, що при $m > l$ має місце тотожність $P_l^{(m)}(x) \equiv 0$. В цьому випадку похідна «старша» ніж степінь полінома, тобто старша за степінь степеневого ряду. Тому кожному значенню l відповідає $l+1$ приєднаний поліном Лежандра: $P_l^{(m)}(x)$, де $m = 0, 1, 2, \dots, l$.

Як приклад, знайдемо всі приєднані поліноми Лежандра, що відповідають $l=2$, тобто всі приєднані поліноми Лежандра другого степеня. Параметр m в цьому випадку прийматиме значення $m = 0, 1, 2$, тобто можливі три приєднаних поліноми Лежандра 2-го порядку:

$$P_2^{(0)}(x) = P_2(x), \quad P_2^{(1)}(x), \quad P_2^{(2)}(x).$$

Ми вже показали, що $P_2^{(0)}(x) = P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$. Далі за формулою (11)

$$\text{знаходимо} \quad P_2^{(1)}(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \right\} = 3x\sqrt{1-x^2},$$

$$P_2^{(2)}(x) = (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} \left\{ \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \right\} = 3(1-x^2).$$

Приєднані поліноми Лежандра теж *ортонормовані* на відрізку $[-1, 1]$:

$$\int_{-1}^1 P_l^{(m)}(x) P_{l'}^{(m)}(x) dx = 0, \quad \text{якщо } l \neq l', \quad (12)$$

$$\|P_l^{(m)}(x)\|^2 = \int_{-1}^1 [P_l^{(m)}(x)]^2 dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1}, \quad \text{якщо } l = l'. \quad (13)$$

4. Формула Родріга визначає розв'язки рівняння Лежандра

Як приклад, продемонструємо, що поліноми Лежандра, які визначаються згідно з **формулою Родріга** (6), є розв'язками рівняння Лежандра (2.1).

Отже, рівняння Лежандра при $\lambda = l(l+1)$ має вид:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + l(l+1)y = 0 . \quad (1)$$

Покажемо, що

$$y^* = P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} [(x^2-1)^l] \quad (2)$$

є розв'язком рівняння Лежандра (1), тобто, що формула Родріга (2) визначає розв'язки рівняння.

Введемо позначення:

$$\begin{cases} z = (x^2-1)^l \\ y = z^{(l)} \end{cases}, \quad \text{тут } z^{(l)} - l\text{-та похідна від } z.$$

Тоді

$$z' = 2lx(x^2-1)^{l-1} = 2lx \frac{(x^2-1)^l}{x^2-1} = \frac{2lxz}{x^2-1}$$

або

$$(x^2-1)z' = 2lxz . \quad (3)$$

Візьмемо l -ту похідну від лівої та правої частини рівності (3):

$$\frac{d^l}{dx^l} [(x^2-1)z'] = 2l \frac{d^l}{dx^l} (xz) . \quad (4)$$

Для взяття старшої l -ї похідної в (4) використаємо правило **Лейбніца**, що уможливорює диференціювання добутку двох функцій:

$$\frac{d^l}{dx^l} (UV) = U \cdot V^{(l)} + lU'V^{(l-1)} + \frac{l(l-1)}{2!} U''V^{(l-2)} + \dots + lU^{(l-1)}V' + U^{(l)}V . \quad (5)$$

Застосуємо формулу Лейбніца (5) до взяття похідних в лівій та правій частинах (4). При $U = x^2 - 1$, $V = z'$ отримаємо:

$$\frac{d^l}{dx^l} [(x^2-1)z'] = (x^2-1)z^{(l+1)} + 2lxz^{(l)} + \frac{2l(l-1)}{2!} z^{(l-1)} ,$$

так як всі похідні вищі другого порядку від функції $U = x^2 - 1$ дорівнюють нулю.

Аналогічно за правилом Лейбніца при $U = x$, $V = z$, продемонструємо взяття похідної в правій частині рівності (4):

$$\frac{d^l}{dx^l} (xz) = xz^{(l)} + lz^{(l-1)} .$$

З врахуванням цих результатів рівність (4) може бути записана в виді:

$$(x^2-1)z^{(l+1)} + 2lxz^{(l)} + l(l-1)z^{(l-1)} = 2lxz^{(l)} + 2l^2z^{(l-1)} ,$$

або

$$(x^2-1)z^{(l+1)} - l(l+1)z^{(l-1)} = 0 . \quad (6)$$

Продиференціюємо (6) ще раз по x :

$$\frac{d}{dx}[(x^2 - 1)z^{(l+1)}] - l(l+1)z^{(l)} = 0 ,$$

домноживши останню рівність на (-1) , матимемо

$$\frac{d}{dx}[(1 - x^2)z^{(l+1)}] + l(l+1)z^{(l)} = 0 .$$

Враховуючи позначення $y = z^{(l)}$, останнє рівняння набуде вигляду

$$\boxed{\frac{d}{dx}[(1 - x^2)\frac{dy}{dx}] = l(l+1)y = 0}$$

Це підтверджує те, що $y = z^{(l)} = \frac{d^l}{dx^l}[(x^2 - 1)^l]$ є розв'язком рівняння Лежандра (1).

Відповідно, будь-який розв'язок рівняння, помножений на константу інтегрування C , теж буде розв'язком цього рівняння:

$$y^* = Cy = C \frac{d^l}{dx^l}[(x^2 - 1)^l] .$$

Вибір постійної $C = \frac{1}{2^l l!}$ в многочленах Лежандра залежить від умови нормування.

Вимагаємо, щоб при $x = 1$ многочлен Лежандра $P_l(x)$ приймав значення 1 : $P_l(1) = 1$. Тоді постійну C можна вибрати таким чином, щоб виконувалась

$$\text{умова:} \quad C \frac{d^l}{dx^l}[(x^2 - 1)^l] \Big|_{x=1} = 1 . \quad (7)$$

Скориставшись в (7) правилом *Лейбніца* (5), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{d^l}{dx^l}[(x^2 - 1)^l] &= \frac{d^l}{dx^l} \left[\underbrace{(x+1)^l}_u \underbrace{(x-1)^l}_v \right] = \\ &= (x+1)^l \frac{d^l}{dx^l}[(x-1)^l] + l \frac{d}{dx}[(x+1)^l] \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}[(x-1)^l] + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Розглянемо похідну в першому доданку правої частини рівності (8):

$$\text{при } l = 1 : \quad \frac{d}{dx}(x-1) = 1$$

$$\text{при } l = 2 : \quad \frac{d^2}{dx^2}(x-1)^2 = \frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx}(x-1)^2 \right] = 2 \cdot 1 = 2!$$

$$\text{при } l = 3 : \quad \frac{d^3}{dx^3}(x-1)^3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$$

.....

$$\frac{d^l}{dx^l}(x-1)^l = l!$$

Всі доданки в (8), починаючи з другого, міститимуть множник $(x-1)$, а при $x=1$ в (7) всі вони перетворюються в нуль; єдиний перший доданок в (8) дасть відмінний від нуля результат і він буде таким: $2^l l!$. Тоді згідно з (7) отримаємо, що $C = \frac{1}{2^l l!}$.

Тоді $y^* = Cy = C \frac{d^l}{dx^l} [(x^2-1)^l]$ з урахуванням останнього результату набуде вигляду

$$y^* = P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} [(x^2-1)^l]$$

і буде розв'язком рівняння Лежандра (1).

5. Доведення умови ортогональності поліномів Лежандра

Доведемо, що многочлени Лежандра в області визначення $[-1,1]$ складають повну ортонормовану систему функцій і задовольняють **умові ортогональності**:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0, \quad m \neq n. \quad (1)$$

Нехай $m \neq n$, тоді $P_m(x)$ і $P_n(x)$ будуть розв'язками рівнянь Лежандра відповідно при $\lambda = m(m+1)$ та $\lambda = n(n+1)$:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_n(x)}{dx} \right] + n(n+1) P_n(x) = 0 \quad | \cdot P_m(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_m(x)}{dx} \right] + m(m+1) P_m(x) = 0 \quad | \cdot P_n(x)$$

і відніmemo від першого рівняння друге, отримаємо

$$\begin{aligned} P_m(x) \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_n(x)}{dx} \right] - P_n(x) \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_m(x)}{dx} \right] = \\ = \{n(n+1) - m(m+1)\} P_n(x) P_m(x) \end{aligned} \quad (2)$$

Неважко побачити, що

$$\begin{aligned} P_m(x) \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_n(x)}{dx} \right] - P_n(x) \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP_m(x)}{dx} \right] = \\ = \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \left\{ P_m(x) \frac{dP_n(x)}{dx} - P_n(x) \frac{dP_m(x)}{dx} \right\} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

Враховуючи (3) в (2) і інтегруючи отриманий вираз в межах $[-1,1]$, отримаємо

$$\begin{aligned} & \{n(n+1) - m(m+1)\} \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \\ & = \left[(1-x^2) \left\{ P_m(x) \frac{dP_n(x)}{dx} - P_n(x) \frac{dP_m(x)}{dx} \right\} \right]_{-1}^1 = 0 \end{aligned}$$

Звідки слідує, що при $m \neq n$

$$\boxed{\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0} \quad .$$

Доведемо умову нормування поліномів Лежандра. Обчислимо квадрат норми поліномів Лежандра

$$\|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx.$$

Використовуючи формулу для поліномів

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n],$$

перепишемо інтеграл у вигляді

$$\|P_n(x)\|^2 = \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \cdot \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} dx.$$

Інтегруючи в останньому виразі n разів за частинами і враховуючи, що кожного разу позаінтегральний доданок дорівнюватиме нулю, отримаємо

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \frac{d^{2n} (x^2 - 1)^n}{dx^{2n}} dx$$

або

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{(-1)^n (2n!)}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx.$$

Відомо, що

$$\int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = (-1)^n 2 \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)},$$

і попередня формула остаточно дасть:

$$\|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Таким чином, ми остаточно довели умову ортонормування для многочленів Лежандра

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm},$$

тут δ_{nm} - дельта-символ Кронекера.

6. Сферичні та кульові функції.

Повернемося до задачі, сформульованої в **п.1. Розв'язування рівняння Лапласа у сферичних координатах**. Так як рівняння Лежандра

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y = 0$$

отримане заміною змінної

$$\boxed{x = \cos \theta} \quad ,$$

То, очевидно, що це рівняння, яке при $\lambda = l(l+1)$ прийме вигляд:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] V = 0$$

матиме інтегралами приєднані поліноми Лежандра l -ї степені

$$\boxed{V(\theta) = P_l^{(m)}(\cos \theta)} \quad . \quad (1)$$

Отже, для того, щоб знайти інтеграл рівняння Лапласа $U(r, \theta, \varphi) = R(r)V(\theta)\Phi(\varphi)$, залишилося визначити $R(r)$ як розв'язок «радіального» рівняння

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \lambda R = 0$$

з уже визначеним параметром $\lambda = l(l+1)$:

$$r^2 R''(r) + 2rR'(r) - l(l+1)R(r) = 0 \quad . \quad (2)$$

Це диференціальне рівняння 2-го порядку зі **змінними** коефіцієнтами типу Ейлера, розв'язок якого шукаємо у вигляді показникової функції

$$R(r) = r^S \quad , \quad S = ? \quad (3)$$

Враховуючи в (2) розв'язок $R(r) = r^S$ та його похідні $R'(r) = S r^{S-1}$ і $R''(r) = S(S-1)r^{S-2}$, отримаємо

$$r^2 S(S-1)r^{S-2} + 2r S r^{S-1} - l(l+1)r^S = 0$$

або

$$S(S-1)r^S + 2S r^S - l(l+1)r^S = 0 \quad . \quad \Big| : r^S$$

$$S(S+1) = l(l+1) \quad ,$$

звідки

$$s_1 = l \quad , \quad s_2 = -(l+1) \quad . \quad (4)$$

Враховуючи (4) в (3), отримаємо два частинних розв'язки рівняння (2):

$$\boxed{R_1(r) = r^l \quad , \quad R_2(r) = \frac{1}{r^{l+1}} \quad .} \quad (5)$$

Зауважимо, що $R_1(r) = r^l$ є розв'язком *внутрішньої* задачі Діріхле, оскільки другий розв'язок $R_2(r) = \frac{1}{r^{l+1}}$ для внутрішньої точки $r = 0$ сферично-симетричної області є необмеженим, тобто $R_2(r) = \frac{1}{r^{l+1}} \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$.

І навпаки, $R_2(r) = \frac{1}{r^{l+1}}$ є розв'язком *зовнішньої* задачі Діріхле, так як перший розв'язок для зовнішньої області $R_1(r) = r^l \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$.

А тепер приступимо до формування *загального розв'язку* задачі. Передусім нагадаємо, що розв'язок рівняння (6)

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \lambda Y = 0. \quad (6)$$

ми шукали у вигляді

$$Y(\theta, \varphi) = V(\theta) \Phi(\varphi), \quad (7)$$

причому при $\lambda = l(l+1)$ інтеграли рівняння $V(\theta)$ даються виразом

$$V(\theta) = P_l^{(m)}(\cos \theta)$$

Згідно з (7) розв'язками рівняння (6) будуть *фундаментальні сферичні функції l -го порядку*:

$$Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) = P_l^{(m)}(\cos \theta) \sin m \varphi,$$

$$Y_l^{(-m)}(\theta, \varphi) = P_l^{(m)}(\cos \theta) \cos m \varphi, \quad (8)$$

$$Y_l^{(0)}(\theta, \varphi) = P_l^{(0)}(\cos \theta) = P_l(\cos \theta).$$

Очевидно, що сума частинних розв'язків (8) рівняння (6) теж буде розв'язком цього рівняння:

$$Y_l(\theta, \varphi) = \sum_{m=-l}^l C_m Y_l^{(m)}(\theta, \varphi) \quad (9)$$

Функції $Y_l(\theta, \varphi)$ теж є сферичними функціями. Вони називаються *сферичними функціями l -го порядку*. (Просумувавши в (9) по m від $-l$ до 0 , зберемо з (8) всі функції з $\cos m \varphi$, а, сумуючи від 0 до l , - всі функції з $\sin m \varphi$).

Враховуючи (9) та (5) в розв'язку $U(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$, отримаємо

$$U_{1l}(r, \theta, \varphi) = r^l Y_l(\theta, \varphi), \quad U_{2l}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^{l+1}} Y_l(\theta, \varphi). \quad (10)$$

Функції (10) називаються *кульовими функціями l -го порядку*. Вони є частинними розв'язками задачі. Просумувавши по l розв'язки (10), отримаємо загальний розв'язок вихідної задачі.

$$U_1(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_{lm} r^l P_l^{(m)}(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos m \varphi \\ \sin m \varphi \end{Bmatrix}, \quad (11)$$

$$U_2(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_{lm} \frac{1}{r^{l+1}} P_l^{(m)}(\cos \theta) \begin{Bmatrix} \cos m \varphi \\ \sin m \varphi \end{Bmatrix}. \quad (12)$$

Сферичні функції *ортгональні* на сфері одиничного радіуса:

$$\iint_{S_{00}} Y_l(\theta, \varphi) Y_n(\theta, \varphi) dS = 0, \quad \text{якщо } l \neq n$$

або, так як $dS = \sin \theta d\theta d\varphi$,

$$\iint_{S_{00}} Y_l(\theta, \varphi) Y_n(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = 0, \quad \text{якщо } l \neq n. \quad (13)$$

Умова (13) слідує з того, що є ортогональними *фундаментальні* сферичні функції:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_l^{(-m)}(\theta, \varphi) Y_n^{(-s)}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos m \varphi \cdot \cos s \varphi d\varphi \int_{-1}^1 P_l^{(m)}(x) P_n^{(s)}(x) dx = 0$$

при $(l, m) \neq (n, s)$. (Тут для однозначності ми взяли $m < 0$, $s < 0$). Якщо $m \neq s$, то перший інтеграл дорівнює нулю; якщо $m = s$, а $l \neq n$, то другий інтеграл дорівнює нулю.

Квадрат норми *сферичних функцій*:

$$\|Y_l^{(m)}(\theta, \varphi)\|^2 = \int_0^{2\pi} \cos^2 m \varphi d\varphi \int_{-1}^1 [P_l^{(m)}(x)]^2 dx = \frac{2\pi}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon = \begin{cases} 1, m \neq 0 \\ 2, m = 0 \end{cases}.$$

7. Стаціонарний розподіл температури в кулі.

Як приклад, використаємо результати інтегрування рівняння Лапласа у сферичній системі координат до конкретної фізичної задачі про встановлення стаціонарного розподілу температури всередині кулі.

Постановка задачі: Нехай на поверхні кулі з радіусом a підтримується постійна температура, яка змінюється за законом $f(\theta)$. Знайти розподіл температури всередині цієї кулі.

Задача зводиться до розв'язування рівняння Лапласа $\Delta T = 0$ всередині кулі з граничною умовою $T|_{r=a} = f(\theta)$. Це є *внутрішньою* задачею Діріхле для кулі.

За умовою задачі температура на поверхні кулі, тобто на сфері з радіусом $r = a$, не залежить від довготного кута φ , відповідно вона не залежатиме від цієї змінної для внутрішніх точок кулі; тобто $T = T(r, \theta)$. Тому рівняння Лапласа у сферичних координатах спрощується і набуває вигляду

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = 0 . \quad (1)$$

З (1) слідує, що параметр $m = 0$ і $T(r, \theta) = R(r)V(\theta)$, причому $V(\theta)$ є розв'язком простого рівняння Лежандра

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dV}{d\theta} \right) + \lambda V = 0 , \quad \lambda = l(l+1) , \text{ тоді } V(\theta) = P_l(\cos \theta) ,$$

а $R(r)$ є розв'язком «радіального» рівняння $\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \lambda R = 0$ з $\lambda = l(l+1)$,

який для внутрішньої задачі Діріхле має вигляд $R(r) = r^l$. Відповідно кульові функції, як розв'язки рівняння (1), мають вигляд

$$T(r, \theta) = R(r)V(\theta) = r^l P_l(\cos \theta) ,$$

а загальний розв'язок задачі дорівнює сумі частинних розв'язків

$$T(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^l P_l(\cos \theta) . \quad (2)$$

Задача звелася до такого вибору коефіцієнтів ряду (2), щоб на поверхні S кулі, тобто при $r = a$, розв'язок (2) змінювався за законом $f(\theta)$:

$$T|_{r=a} = \sum_{l=0}^{(2)\infty} C_l a^l P_l(\cos \theta) = f(\theta) . \quad (3)$$

В (3) маємо розклад відомої функції $f(\theta)$ в ряд за поліномами Лежандра $P_l(\cos \theta)$. Щоб знайти коефіцієнти цього розкладу, скористаємося умовами ортонормування поліномів Лежандра:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0 , \quad n \neq m , \quad (4)$$

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} , \quad n = m , \quad (5)$$

Перепишемо (3) у вигляді

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l a^l P_l(x) ,$$

Домножимо ліву і праву частини цього рівняння на $P_n(x)$ та проінтегруємо обидві частини рівності в межах зміни змінної $[-1, 1]$:

$$\sum_{l=0}^{\infty} C_l a^l \int_{-1}^1 P_l(x) P_n(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx . \quad (6)$$

Розписавши суму в лівій частині (6) та використовуючи умови ортонормування поліномів Лежандра, отримаємо, що із нескінченної суми

доданків в (6) тільки один при $l = n$ дасть відмінний від нуля результат - $\frac{2}{2n+1}$:

$$C_n a^n \frac{2}{2n+1} = \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx .$$

Звідси, замінюючи $n \rightarrow l$, отримаємо

$$C_l = \frac{2l+1}{2a^l} \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx$$

або

$$C_l = \frac{2l+1}{2a^l} \int_0^\pi f(\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta d\theta . \quad (7)$$

Враховуючи (7) в (2), отримаємо розв'язок задачі:

$$T(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos\theta) \int_0^\pi f(\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta d\theta . \quad (8)$$

Розділ 5. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Раніше ми розглянули декілька фізичних задач, які приводять до розв'язування рівнянь параболічного типу. Зокрема, такими є задачі про поширення тепла в обмежених та необмежених середовищах та задачі дифузії. Нами були отримані *рівняння теплопровідності*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T + \frac{1}{c\rho} f(\vec{r}, t) , \quad a^2 = \frac{k}{c\rho} , \quad (1)$$

(k - коефіцієнт теплопровідності, c - теплоємність, ρ - густина середовища) та *рівняння дифузії*

$$\frac{\partial n}{\partial t} = a^2 \Delta n .$$

Ці рівняння відносяться до рівнянь параболічного типу і відмінність їх від уже розглянутих нами хвильових рівнянь (рівнянь гіперболічного типу) полягає в тому, що в цих рівняннях міститься перша часова похідна від невідомої функції.

Рівняння теплопровідності (1) описує процес поширення тепла в *однорідному* середовищі. Якщо ж середовище *неоднорідне* і теплопровідність його змінюється від точки до точки середовища, то тоді рівняння теплопровідності, яке описуватиме процес поширення тепла в такому середовищі запишеться так:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) .$$

1. Постановка крайових задач для рівнянь параболічного типу.

Для виділення *єдиного розв'язку* рівнянь теплопровідності чи дифузії або рівнянь параболічного типу необхідно до нього приєднати *початкові* та *граничні умови*. Конкретизуємо завдання тим, що розглянемо крайові умови для рівнянь *теплопровідності*.

Задати початкові умови означає задати значення температури $T(x, t)$ в початковий момент часу.

Граничні умови можуть бути різними в залежності від температурного режиму на краях (границях) області.

Існують **3 основних типи граничних умов**:

1. На кінці стержня $x = 0$ задана температура торця цього стержня:

$$T(0, t) = \mu(t).$$

2. На кінці стержня $x = l$ задане значення координатної похідної:

$$\left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = \nu(t).$$

До такої умови приходимо в тому випадку, коли заданий тепловий потік $Q(l, t)$ через крайній переріз стержня в точці $x = l$:

$$Q(l, t) = -k \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l}, \quad Q(l, t) - \text{заданий},$$

тоді

$$\left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = -\frac{Q(l, t)}{k} = \nu(t).$$

3. Змішана гранична умова: на кінці $x = l$ задане лінійне співвідношення похідної від шуканої функції та самої функції.

$$\left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = -\lambda [T(l, t) - \theta(t)].$$

Ця гранична умова відповідає **теплообміну за законом Ньютона** на поверхні тіла з оточуючим середовищем, температура $\theta(t)$ якого відома.

Оскільки тепловий потік через переріз на кінці стержня $x = l$:

$$\text{з одного боку за Ньютоном} \quad Q = h(T - \theta),$$

$$\text{з іншого} \quad Q = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \text{то прирівнюючи їх на межі } x = l,$$

отримаємо

$$\left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = -\lambda [T(l, t) - \theta(t)], \quad \text{тут } \lambda = \frac{h}{k}.$$

Аналогічні граничні умови можна сформулювати для функції $n(x, t)$ як розв'язку рівняння дифузії.

Оскільки наші подальші викладки стосуватимуться рівнянь параболічного типу, якими є рівняння теплопровідності та дифузії, то надалі невідому функцію позначатимемо $U(x,t)$, підрозуміваючи в цьому позначенні температуру для задач теплопровідності та концентрацію для задач дифузії.

Сформулюємо зараз найбільш загальну граничну задачу.

Перша крайова задача.

Знайти розв'язок $U = U(x,t)$ рівняння теплопровідності $U_t = a^2 U_{xx}$

при $0 < x < l$, $0 < t < T$, який задовольняє умовам

$$U(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$U(0,t) = \mu_1(t),$$

$$U(l,t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

2. Метод відокремлення змінних для рівнянь параболічного типу.

Розв'язування однорідної крайової задачі.

Розв'яжемо однорідне рівняння $U_t = a^2 U_{xx}$ ($0 < x < l$) ($t > 0$), (1)

розв'язок якого повинен задовольняти початковій умові $U(x,0) = \varphi(x)$ (2)

і однорідним крайовим $U(0,t) = 0$, $U(l,t) = 0$. (3)

Згідно з методом Ейлера-Фур'є розв'язок задачі шукаємо у вигляді:

$$U(x,t) = X(x)T(t). \quad (4)$$

Підставляючи (4) в (1), отримаємо

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2.$$

З цієї подвійної рівності отримаємо два рівняння:

$$T'(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0 \quad (5)$$

та

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (6)$$

Останні дві умови в (6) слідує з граничних умов (3) з урахуванням (4).

(6) є задачею Штурма-Ліувілля для визначення власних чисел та власних функцій, з якої слідує, що тільки для власних чисел

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

існує нетривіальний розв'язок

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (8)$$

і, як ми демонстрували раніше, система функцій (8) в інтервалі визначення $x \in [0, l]$ є повною ортонормованою системою функцій і задовольняє умовам:

$$\text{ортogonalності} \quad \int_0^l \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{k\pi}{l} x dx = 0, \quad \text{якщо } k \neq n, \quad (9)$$

$$\text{нормування} \quad \|X_n(x)\|^2 = \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{l}{2}, \quad \text{якщо } k = n. \quad (9)$$

Враховуючи значення $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$ в рівнянні (5), отримаємо

$$T'(t) + \lambda_n^2 a^2 T(t) = 0,$$

розв'язок якого, як рівняння першого порядку з постійними коефіцієнтами шукатимемо в експоненціальному вигляді

$$T(t) = e^{rt}, \quad r = ?$$

$$re^{rt} + \lambda_n^2 a^2 e^{rt} = 0, \quad r + \lambda_n^2 a^2 = 0, \quad r = -\lambda_n^2 a^2.$$

Тоді розв'язок рівняння матиме вигляд

$$T_n(t) = C_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t}. \quad (10)$$

Функції

$$U_n(x, t) \stackrel{(4)}{=} X_n(x) T_n(t) \stackrel{(8,10)}{=} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x$$

є частинними розв'язками однорідного рівняння теплопровідності (1). Загальний розв'язок подамо як суму частинних розв'язків

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (11)$$

Розв'язок (11) повинен задовольняти початкову умову (2):

$$U(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \varphi(x). \quad (12)$$

В (12) маємо розклад відомої функції $\varphi(x)$ в ряд Фур'є по повній ортонормованій системі функцій $X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x$; коефіцієнти цього розкладу знайдемо за відомим уже нам правилом

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx$$

або, змінивши змінну інтегрування,

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi. \quad (13)$$

Враховуючи (13), розв'язок (11) набуде вигляду

$$U(x,t) = \int_0^l d\xi \varphi(\xi) \left[\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} \xi \right]. \quad (14)$$

У розв'язку (14) введемо *позначення*:

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} \xi \quad (15)$$

Функція $G(x,\xi,t)$ називається *функцією миттєвого точкового джерела тепла* або *функцією Гріна*. В позначенні (15) розв'язок (14) набуде вигляду:

$$U(x,t) = \int_0^l G(x,\xi,t) \varphi(\xi) d\xi \quad (16)$$

Функція $G(x,\xi,t)$ задає розподіл температури всередині в стержні $0 \leq x \leq l$ в довільний момент часу t , зумовлений дією миттєвого джерела тепла, поміщеного в момент часу $t=0$ в точці $x=\xi$ проміжку $(0,l)$, тоді як на кінцях стержня підтримується нульова температура.

3. Поширення тепла в стержні, кінці якого знаходяться при заданих змінних температурах.

Ця задача зводиться до розв'язування рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (1)$$

$$\text{з граничними умовами} \quad U|_{x=0} = \psi_1(t), \quad U|_{x=l} = \psi_2(t) \quad (2)$$

$$\text{і початковою} \quad U|_{t=0} = \varphi(x). \quad (3)$$

Задачу можна розв'язувати методом Фур'є (як задачу про коливання струни, кінці якої коливаються по визначеному закону), однак, виходячи з попередньої задачі, відразу можемо шукати розв'язок у вигляді розкладу в ряд Фур'є за власними функціями однорідної задачі $\left\{ \sin \frac{n\pi}{l} x \right\}$:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (4)$$

де $T_n(t)$ в (4) можна вважати коефіцієнтом розкладу невідомої функції $U(x,t)$ в ряд Фур'є по $\sin \frac{n\pi}{l} x$, тоді

$$T_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l U(x,t) \sin \frac{n\pi}{l} x dx. \quad (5)$$

Проінтегруємо (5) двічі за частинами:

$$\begin{aligned}
 T_n(t) &= -\frac{2}{l} \frac{1}{\pi n} \int_0^l U(x,t) d\left(\cos \frac{\pi n}{l} x\right) = -\frac{2}{\pi n} \left[U(x,t) \cos \frac{\pi n}{l} x \right]_0^l - \int_0^l \cos \frac{\pi n}{l} x \frac{\partial U}{\partial x} dx = \\
 &= \frac{2}{\pi n} [U(0,t) - (-1)^n U(l,t)] + \frac{2l}{\pi^2 n^2} \int_0^l \frac{\partial U}{\partial x} d\left(\sin \frac{\pi n}{l} x\right) = \\
 &= \frac{2}{\pi n} [U(0,t) - (-1)^n U(l,t)] + \frac{2l}{\pi^2 n^2} \left[\frac{\partial U}{\partial x} \sin \frac{\pi n}{l} x \right]_0^l - \int_0^l \sin \frac{\pi n}{l} x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} dx = \\
 &= \frac{2}{\pi n} [U(0,t) - (-1)^n U(l,t)] - \frac{2l}{\pi^2 n^2} \int_0^l \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \sin \frac{\pi n}{l} x dx
 \end{aligned}$$

Враховуючи в останньому виразі граничні умови (2), перепишемо його у вигляді

$$T_n(t) = \frac{2}{\pi n} [\psi_1(t) - (-1)^n \psi_2(t)] - \frac{2l}{\pi^2 n^2} \int_0^l \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \sin \frac{\pi n}{l} x dx .$$

Але так як $U(x,t)$ задовольняє рівнянню (1), то замінімо в останньому інтегралі другу похідну по координаті $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ першою часовою похідною $\frac{\partial U}{\partial t}$ згідно з (1):

$$T_n(t) = \frac{2}{\pi n} [\psi_1(t) - (-1)^n \psi_2(t)] - \frac{2l}{\pi^2 n^2 a^2} \int_0^l \frac{\partial U}{\partial t} \sin \frac{\pi n}{l} x dx . \quad (6)$$

А тепер повернемося до виразу (5) і продиференціюємо його один раз по t :

$$\frac{dT_n(t)}{dt} = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{\partial U}{\partial t} \sin \frac{\pi n}{l} x dx . \quad (7)$$

Виключаючи інтеграл з рівностей (6) та (7), отримаємо

$$T_n(t) = \frac{2}{\pi n} [\psi_1(t) - (-1)^n \psi_2(t)] - \frac{l^2}{\pi^2 n^2 a^2} \frac{dT_n(t)}{dt}$$

або звідси

$$\boxed{\frac{dT_n(t)}{dt} + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) = \frac{2\pi n a^2}{l^2} [\psi_1(t) - (-1)^n \psi_2(t)]} \quad (8)$$

(8) є **лінійним** неоднорідним диференціальним рівнянням 1-го порядку.

Щоб записати його розв'язок розглянемо наступний **допоміжний** матеріал:

Додаток:

Лінійним рівнянням 1-го порядку називається рівняння лінійне відносно невідомої функції та її 1-ї похідної

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) . \quad (9)$$

Розв'язок рівняння (9) шукаємо у вигляді добутку двох функцій

$$y = U(x)V(x) . \quad (10)$$

Одну з цих функцій можна вибрати довільним чином, а друга визначається з рівняння (9).

$$\frac{dy}{dx} = U \frac{dV}{dx} + V \frac{dU}{dx} ,$$

тоді

$$\begin{aligned} U \frac{dV}{dx} + V \frac{dU}{dx} + PUV &= Q , \\ U \left(\frac{dV}{dx} + PV \right) + V \frac{dU}{dx} &= Q . \end{aligned} \quad (11)$$

Виберемо функцію V такою, щоб вираз в дужках був рівним нулю:

$$\frac{dV}{dx} + PV = 0 . \quad (12)$$

Розділяючи змінні в (12), отримаємо $\frac{dV}{V} = -Pdx$. Інтегруючи останню рівність, отримаємо:

$$\ln V - \ln C_1 = -\int Pdx , \quad V = C_1 e^{-\int Pdx} .$$

Так як нам достатньо будь-якого розв'язку рівняння (12) відмінного від нуля, то за функцію $V(x)$ візьмемо

$$V(x) = e^{-\int Pdx} . \quad (13)$$

Знайдемо $U(x)$. Враховуючи (12) в (11), отримаємо

$$V \frac{dU}{dx} = Q \quad \text{або} \quad \frac{dU}{dx} = \frac{Q(x)}{V(x)} , \quad \text{звідки}$$

$$U(x) = \int \frac{Q(x)}{V(x)} dx + C .$$

Підставляючи в (10), остаточно отримаємо

$$y(x) = V(x) \left[\int \frac{Q(x)}{V(x)} dx + C \right] , \quad (14)$$

де

$$V(x) = e^{-\int P(x)dx} .$$

Повернемося до лінійного диференційного рівняння (8). Порівнюючи його з (9), бачимо, що в якості $P(t)$ маємо

$$P = \left(\frac{\pi m a}{l}\right)^2, \quad \text{а} \quad Q = \frac{2\pi m a^2}{l^2} [\psi_1(t) - (-1)^n \psi_2(t)],$$

тоді

$$T_n(t) = e^{-\left(\frac{\pi m a}{l}\right)^2 t} \left[C_n + \frac{2\pi m a^2}{l^2} \int_0^t e^{\left(\frac{\pi m a}{l}\right)^2 \tau} [\psi_1(\tau) - (-1)^n \psi_2(\tau)] d\tau \right] \quad (15)$$

з (15) слідує, що невідома константа інтегрування

$$C_n = T_n(0).$$

Щоб знайти C_n , задовольнимо для розв'язку початкову умову (3). Для цього повернемося до ряду (4) і вимагаємо виконання для нього умови (3):

$$U(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = \varphi(x).$$

звідси $T_n(0)$ є коефіцієнтом розкладу відомої функції $\varphi(x)$ в ряд Фур'є по

$$\sin \frac{\pi n}{l} x : \quad T_n(0) = C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx. \quad (16)$$

Остаточню: розв'язком задачі (1), (2), (3) є ряд (4), де $T_n(t)$ визначається за формулами (15) та (16).

4. Розв'язування неоднорідного рівняння теплопровідності.

1. Розглянемо неоднорідне рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \quad (1)$$

з нульовими початковою $U|_{t=0} = 0$ (2)

та граничними умовами $U|_{x=0} = 0, \quad U|_{x=l} = 0$. (3)

Це задача про поширення тепла у стержні $0 < x < l$, кінці якого знаходяться при нульовій температурі за відсутності початкового розподілу температури за рахунок джерел тепла всередині стержня.

Розв'язок задачі (1)-(3) шукаємо у вигляді ряду

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad T_n(t) = ? \quad (4)$$

так що граничні умови (3) цей розв'язок (4) завідома задовольняє.

Допустимо, що функція $f(x, t)$, яка є неоднорідністю у вихідному рівнянні (1), може бути розкладена в ряд Фур'є за тією ж самою системою

власних функцій $\sin \frac{n\pi}{l} x$:

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (5)$$

тут коефіцієнт розкладу знайдемо за правилом

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{n\pi}{l} x dx. \quad (6)$$

Підставляючи (4) в рівняння (1) і беручи до уваги розклад (5), отримаємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} [T_n'(t) + \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) - f_n(t)] \sin \frac{n\pi}{l} x = 0.$$

Звідки, замінюючи $\frac{\pi a}{l} = \omega_n$, одержимо рівняння для визначення $T_n(t)$:

$$T_n'(t) + \omega_n^2 T_n(t) = f_n(t). \quad (7)$$

Використовуючи початкову умову (2), для розв'язку (4) матимемо:

$$U(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{n\pi}{l} x = 0,$$

звідки одержимо початкову умову для $T_n(t)$:

$$T_n(0) = 0. \quad (8)$$

Необхідно знайти розв'язки лінійного неоднорідного диференційного рівняння (7). Ми показали, що розв'язком рівняння

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

є

$$y(x) = V(x) \left[\int \frac{Q(x)}{V(x)} dx + C \right], \quad \text{де} \quad V(x) = e^{-\int P(x) dx},$$

для нашого випадку

$$P = \omega_n^2, \quad Q(t) = f_n(t).$$

Отже,

$$T_n(t) = e^{-\omega_n^2 t} \int_0^t \frac{f_n(\tau)}{e^{-\omega_n^2 \tau}} d\tau = \int_0^t e^{-\omega_n^2(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau,$$

тут $C_n = T_n(0) = 0$.

Підставляючи цей вираз у (4), отримаємо розв'язок задачі:

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\omega_n^2(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right] \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (9)$$

Використаємо вираз (6) для $f_n(t)$ в (9) і перетворимо знайдений розв'язок наступним чином:

$$U(x,t) = \int_0^t \int_0^l \left\{ \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\omega_n^2(t-\tau)} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} \xi \right\} f(\xi, \tau) d\tau d\xi =$$

$$= \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) d\tau d\xi \quad (10)$$

де

$$G(x, \xi, t - \tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\omega_n^2(t-\tau)} \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} \xi \quad (11)$$

функція *миттєвого точкового джерела тепла* або *функція Гріна*.

2. Розглянемо зараз другий випадок *розв'язування неоднорідного рівняння теплопровідності*, коли *початкові та граничні умови є неоднорідними*.

Тобто, належить розв'язати рівняння

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (12)$$

$$U|_{t=0} = \varphi(x), \quad (13) \quad U(0, t) = \psi_1(t), \quad U(l, t) = \psi_2(t). \quad (14)$$

Ця задача легко зводиться до задач, уже розв'язаних нами, якщо взяти

$$U = V + W, \quad (15)$$

де функція $V(x, t)$ є розв'язком однорідного рівняння

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

з неоднорідними початковою та граничними умовами

$$V|_{t=0} = \varphi(x), \quad V(0, t) = \psi_1(t), \quad V(l, t) = \psi_2(t),$$

а функція $W(x, t)$ задовольняє неоднорідному рівнянню теплопровідності

$$\frac{\partial W}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + f(x, t)$$

з нульовими початковою та граничними умовами

$$W|_{t=0} = 0, \quad W(0, t) = 0, \quad W(l, t) = 0.$$

Обидві ці задачі розв'язані раніше: перша – в п.3 цього розділу «Поширення тепла в стержні, кінці якого знаходяться при заданих змінних температурах», а друга – в п.1 цього параграфу.

5. Поширення тепла в необмеженому стержні. Задача Коші для рівнянь параболічного типу

Постановка задачі Коші. Знайти функцію $U(x, t)$ ($t > 0, -\infty < x < \infty$), яка задовольняє рівнянню теплопровідності

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

та початковій умові

$$U|_{t=0} = \varphi(x) \quad (-\infty < x < \infty),$$

де $\varphi(x)$ - обмежена неперервна функція.

Задача про поширення тепла у необмеженому однорідному стержні, бічна поверхня якого є теплоізолюваною, математично формулюється наступним чином.

Знайти обмежену функцію $U(x, t)$ ($t > 0, -\infty < x < \infty$), що задовольняє рівнянню теплопровідності

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (t > 0, -\infty < x < \infty) \quad (1)$$

і початковій умові

$$U|_{t=0} = \varphi(x) \quad (-\infty < x < \infty). \quad (2)$$

$\varphi(x)$ - неперервна і обмежена.

Знайдемо спочатку часткові розв'язки рівняння (1) за методом відокремлення змінних Ейлера – Фур'є у вигляді

$$U(x, t) = X(x) \cdot T(t). \quad (3)$$

Підставляючи (3) в (1), маємо

$$X(x) \cdot T'(t) = a^2 X''(x) \cdot T(t)$$

або

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2.$$

З останньої подвійної рівності отримуємо, таким чином,

$$T'(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0, \quad X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0,$$

звідки, відкидаючи постійний множник у виразі для $T(t)$:

$$T(t) = e^{-\lambda^2 a^2 t}, \quad X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x.$$

Так як область визначення у цієї задачі є необмеженою ($-\infty < x < \infty$), то сформулювати граничні умови як і задачу Штурма – Ліувілля неможливо, а отже знайти дискретний ряд власних чисел та власних функцій нереально здійснити.

Постійні A і B можуть залежати від λ . Оскільки граничних умов немає, то параметр λ залишається цілком довільним.

Згідно з (3) отримаємо, що

$$U(x, t) = e^{-\lambda^2 a^2 t} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] \quad (4)$$

є частковим розв'язком рівняння (1) при довільних $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$.

При визначених дискретних значеннях λ_n та власних функціях $X_n(x)$ в задачах з обмеженими областями загальний розв'язок ми шукали у вигляді дискретної суми часткових розв'язків по власних числах λ_n задачі.

В вихідній задачі параметр λ цілком довільний і змінюється неперервно, а тому загальний розв'язок задачі знайдемо у вигляді неперервної суми, тобто у вигляді інтеграла від часткових розв'язків (4) по параметру λ . Отже, інтегруючи (4) по параметру λ , отримаємо загальний розв'язок рівняння (1) у вигляді:

$$U(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda, \quad (5)$$

Якщо цей інтеграл збіжний і допускає одне диференціювання по t і два диференціювання по x під знаком інтегралу.

Виберемо $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ таким чином, щоб виконувались початкові умови (2).

Вважаючи в (5) $t = 0$, отримаємо, в силу (2),

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda. \quad (6)$$

Порівнюючи інтеграл в правій частині з інтегралом Фур'є для функції $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cos \lambda(\xi - x) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\cos \lambda x \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cos \lambda \xi d\xi + \sin \lambda x \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \sin \lambda \xi d\xi \right] d\lambda, \end{aligned}$$

бачимо, що можна задовольнити рівнянню (6), поклавши

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cos \lambda \xi d\xi; \quad B(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \sin \lambda \xi d\xi. \quad (7)$$

Підставляючи (7) у вираз (5), отримаємо:

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda(\xi - x) d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda(\xi - x) d\xi \end{aligned}$$

або, змінюючи порядок інтегрування,

$$U(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda(\xi - x) d\lambda. \quad (8)$$

Внутрішній інтеграл можна обчислити. Покладемо

$$\begin{aligned} \lambda a \sqrt{t} &= z, & \lambda(\xi - x) &= \mu \cdot z, \\ d\lambda &= \frac{dz}{a\sqrt{t}}, & \mu &= \frac{\xi - x}{a\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

Тому внутрішній інтеграл в (8) в нових змінних набуде вигляду:

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda(\xi - x) d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos \mu z dz = \frac{1}{a\sqrt{t}} J(\mu), \quad (9)$$

де

$$J(\mu) = \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos \mu z dz . \quad (10)$$

Інтеграл $J(\mu)$ визначається способом диференціювання по параметру μ :

$$J'(\mu) = -\int_0^{\infty} e^{-z^2} z \sin \mu z dz ,$$

Причому це диференціювання є законним в силу того, що отриманий інтеграл є рівномірно збіжним. А тепер інтегруємо за частинами, вибравши

$$U = \sin \mu z , \quad dV = e^{-z^2} z dz = \frac{1}{2} e^{-z^2} dz^2 , \quad V = -\frac{1}{2} e^{-z^2} ,$$

одержимо

$$\begin{aligned} J'(\mu) &= -\int_0^{\infty} e^{-z^2} z \sin \mu z dz = \\ &= \frac{1}{2} e^{-z^2} \sin \mu z \Big|_0^{\infty} - \frac{\mu}{2} \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos \mu z dz = -\frac{\mu}{2} J(\mu) \end{aligned}$$

або

$$J'(\mu) + \frac{\mu}{2} J(\mu) = 0 , \quad \frac{dJ(\mu)}{J(\mu)} = -\frac{\mu}{2} d\mu ,$$

$$J(\mu) = C e^{-\frac{\mu^2}{4}} . \quad (11)$$

Константу інтегрування знайдемо, поклавши в (11) $\mu = 0$, отримаємо:

$$C = J(0) = \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} , \quad (12)$$

як *інтеграл Пуассона*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \cdot z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}$$

в нашому випадку

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha z^2} dz = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} , \quad \text{при цьому } \alpha = 1 .$$

Вираз (11) з урахуванням (12) набуде вигляду: $J(\mu) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\mu^2}{4}} .$

Повертаючись до старих змінних та враховуючи останній результат в (9), отримаємо

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} \cos \lambda (\xi - x) d\lambda = \frac{\pi}{2a\sqrt{t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} .$$

Підставляючи це співвідношення в (8), отримаємо остаточно розв'язок задачі

$$U(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi . \quad (13)$$

6. Задача про поширення тепла у нескінченному циліндрі.

Цю задачу розглянемо як приклад застосування методу розв'язування рівняння теплопровідності для конкретної фізичної задачі, яка володіє **циліндричною симетрією** і її розв'язки виражаються через спеціальні функції.

Встановимо радіальний розподіл тепла в нескінченному циліндрі з радіусом R , бічна поверхня якого підтримується при постійній температурі, яка дорівнює нулю, а початковий розподіл температури всередині циліндра є відомим. Задача зводиться до інтегрування рівняння теплопровідності в циліндричних координатах

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right), \quad 0 \leq r < R \quad (1)$$

з граничною умовою $U|_{r=R} = 0$, (2) та початковою $U|_{t=0} = \varphi(r)$. (3)

З умови та симетрії задачі випливає, що розв'язок задачі не залежатиме від азимутального кута φ рівно як і від змінної z .

За методом Фур'є розв'язок шукаємо у вигляді $U(r, t) = W(r)T(t)$ (4) і після відокремлення змінних прийдемо до рівнянь

$$T'(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0, \quad (5)$$

$$W''(r) + \frac{1}{r} W'(r) + \lambda^2 W(r) = 0. \quad (6)$$

Загальний розв'язок рівняння (6) – рівняння Бесселя нульового порядку має вигляд:

$$W(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 N_0(\lambda r).$$

Так як при $r \rightarrow 0$ функція Неймана $N_0(\lambda r) \rightarrow -\infty$, то з умови кінцевості температури на осі циліндра слідує, що треба поставити константу інтегрування $C_2 = 0$. Тоді розв'язок набуде вигляду

$$W(r) = C_1 J_0(\lambda r).$$

Що стосується параметра λ , то його визначимо, задовольнивши граничну умову (2):

$$J_0(\lambda R) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_n R = \mu_n,$$

де μ_n - додатні корені функції Бесселя $J_0(x)$.

$$\lambda_n = \frac{\mu_n}{R}.$$

Кожному власному значенню λ_n відповідатиме власна функція

$$W_n(r) = J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right). \quad (7)$$

Розв'язок рівняння (5) дається у вигляді експоненти

$$T_n(t) = a_n e^{-\left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2 t}. \quad (8)$$

Тоді з урахуванням (7) та (8) згідно з формулою (4) знайдемо, що

$$U_n(r, t) = a_n e^{-\left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right)$$

і ці частинні розв'язки задовольняють рівнянню (1) та граничній умові (2) при довільних значеннях константи a_n . Для знаходження цих констант інтегрування запишемо загальний розв'язок задачі

$$U(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) \quad (9)$$

і вимагаємо, щоб цей розв'язок (9) задовольняв початковій умові (3):

$$U(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) = \varphi(r) . \quad (10)$$

В (10) маємо розклад відомої функції $\varphi(r)$ в ряд Фур'є-Бесселя в інтервалі $(0, R)$. Коефіцієнти цього розкладу визначимо, використовуючи умови ортонормування функцій Бесселя

$$\begin{cases} \int_0^1 x J_0(\mu_k x) J_0(\mu_n x) dx = 0 & \text{якщо } k = n \\ \int_0^1 x J_0^2(\mu_k x) dx = \frac{1}{2} J_0'^2(\mu_k) & \text{якщо } k \neq n \end{cases} . \quad (11)$$

Здійснимо в (10) деякі перетворення: помножимо ліву та праву частини на функцію Бесселя $J_0\left(\frac{\mu_k}{R} r\right)$ з ваговим множником r та проінтегруємо обидві частини рівняння в межах зміни змінної $r \in [0, R]$, отримаємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) J_0\left(\frac{\mu_k}{R} r\right) dr = \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k}{R} r\right) dr . \quad (12)$$

Ліву частину рівності (12) помножимо на $\frac{R^2}{R^2}$ і перепишемо її в такому вигляді

$$R^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^R \frac{r}{R} J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) J_0\left(\mu_k \frac{r}{R}\right) d\left(\frac{r}{R}\right) = \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k}{R} r\right) dr .$$

Здійснимо в лівій частині останнього рівняння заміну змінної $x = \frac{r}{R}$ і так як $r \in [0, R]$, то $x \in [0, 1]$:

$$R^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^1 x J_0(\mu_n x) J_0(\mu_k x) dx = \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k}{R} r\right) dr . \quad (13)$$

Враховуючи в лівій частині (13) умови ортонормування (11), отримаємо, що з нескінченної суми тільки один доданок при $k = n$ дасть відмінний від нуля результат:

$$R^2 a_k \frac{1}{2} J_0'^2(\mu_k) = \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_k}{R} r\right) dr . \quad (14)$$

Замінюючи в (14) $k \rightarrow n$ та враховуючи, що $J_0'(x) = -J_1(x)$, отримаємо

$$a_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R r \varphi(r) J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) dr . \quad (15)$$

Підставляючи коефіцієнти (15) у розв'язок задачі (9), остаточно отримаємо

$$U(r, t) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_1^2(\mu_n)} e^{-\left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) \int_0^R \rho \varphi(\rho) J_0\left(\frac{\mu_n}{R} \rho\right) d\rho . \quad (16)$$

Розділ 6. РІВНЯННЯ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ.

До цього класу рівнянь належать рівняння Пуассона $\Delta U = f(x, y, z)$ (в електростатиці $\Delta U = -4\pi\rho(x, y, z)$), рівняння Лапласа $\Delta U = 0$ та рівняння Гельмгольца – однорідне $\Delta U + k^2 U = 0$ та неоднорідне – $\Delta U + k^2 U = f(x, y, z)$, які описують стаціонарні, незалежні від часу, процеси, зокрема електростатичні поля, стаціонарний розподіл температури в нагрітому тілі, процес поширення монохроматичних хвиль тощо.

1. Фундаментальні розв'язки рівнянь Лапласа та Гельмгольца.

Розв'язок рівнянь Лапласа, який *залежить* тільки *від однієї геометричної змінної*, називається *фундаментальним*.

1. Розглянемо *рівняння Лапласа* $\Delta U = 0$. Оператор Лапласа вибирають у тій системі координат, симетрією якої володіє поставлена задача. Зокрема, якщо задача *сферично-симетрична*, то рівняння Лапласа в цьому випадку набуває вигляду

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi} U = 0 . \quad (1)$$

Для сферично-симетричної задачі функція U є функцією тільки від однієї радіальної змінної r , тобто $U = U(r)$, і тоді

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = 0 ,$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = 0$$

або, проінтегрувавши останнє рівняння, отримаємо

$$r^2 \frac{dU}{dr} = C, \quad dU = C \frac{dr}{r^2}, \quad U(r) = -\frac{C}{r} + C_1. \quad (2)$$

Знак «мінус» можна внести в константу, тоді з (2) слідує, що функція

$$\boxed{U(r) = \frac{1}{r}} \quad (3)$$

є **фундаментальним розв'язком** рівняння Лапласа у **сферичних координатах**.

Якщо в (2) покласти $C = -e$, а $C_1 = 0$, то отримаємо, що розв'язком рівняння

Лапласа (1) є потенціал точкового заряду $U = \frac{e}{r}$.

Іншими словами, завжди справедливе співвідношення

$$\boxed{\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0}, \text{ крім точки } r = 0.$$

2. Нехай поставлена задача володіє циліндричною симетрією і є двохвимірною (наприклад, знаходимо розв'язок **рівняння Лапласа** для двовимірної області круга). Для циліндрично-симетричної області розв'язок рівняння Лапласа не залежатиме від кутової змінної φ , а тому рівняння $\Delta U = 0$ набуде вигляду

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) = 0 \Rightarrow r \frac{dU}{dr} = C, \quad dU = C \frac{dr}{r},$$

$$\boxed{U(r) = C \ln r + C_1} \quad (4)$$

(4) є **фундаментальним розв'язком** рівняння Лапласа у циліндричних координатах для двовимірної області.

Якщо в (4) покласти з крайових умов $C_1 = 0$, а константу інтегрування $C = -2e$, то

$$U(r) = 2e \ln \frac{1}{r}$$

- це потенціал безмежної зарядженої провідної тонкої нитки, в якій на одиницю довжини припадає заряд e .

3. Розглянемо однорідне **рівняння Гельмгольца** $\Delta U + k^2 U = 0$ і нехай U є функцією тільки від радіальної змінної: $U = U(r)$. Тоді запишемо для функції U наступне рівняння Гельмгольца у сферичних координатах:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) + k^2 U = 0. \quad (5)$$

Розв'язки рівняння (5) шукатимемо у вигляді

$$U(r) = \frac{V(r)}{r}. \quad (6)$$

Перепишемо рівняння (5), розписавши похідну в першому доданку,

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dU}{dr} + k^2 U = 0. \quad (7)$$

Знайдемо окремо похідні, враховуючи в них вигляд розв'язку (6):

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dr} &= \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \cdot V(r) \right) = -\frac{1}{r^2} V + \frac{V'}{r}, \\ \frac{d^2 U}{dr^2} &= \frac{2}{r^3} V - \frac{V'}{r^2} - \frac{V'}{r^2} + \frac{V''}{r} = \frac{V''}{r} - \frac{2V'}{r^2} + \frac{2V}{r^3}. \end{aligned}$$

Підставивши похідні і (6) в рівняння (7), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{V''}{r} - \frac{2V'}{r^2} + \frac{2V}{r^3} + \frac{2V'}{r^2} - \frac{2V}{r^3} + k^2 \frac{V}{r} &= 0 \quad | \cdot r \\ V'' + k^2 V &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

(8) є диференціальним рівнянням другого порядку з постійними коефіцієнтами. Знаходячи його розв'язки у експоненціальній формі

$$V(r) = e^{\pm ikr},$$

згідно з (6), отримаємо

$$U(r) = \frac{e^{\pm ikr}}{r} \quad (9)$$

Згідно з (9) рівняння Гельмгольца (5) має два ($\pm$) фундаментальних розв'язки.

Якщо $k = 0$, то рівняння Гельмгольца (5) переходить у рівняння Лапласа $\Delta U = 0$, а фундаментальний розв'язок рівняння Гельмгольца (9) переходить при цьому у фундаментальний розв'язок (3) рівняння Лапласа.

Розв'язки (9) однорідного рівняння Гельмгольца (5) описують **збіжні** та **розбіжні** сферичні хвилі в залежності від знаку.

2. Граничні задачі для рівнянь еліптичного типу.

Для рівнянь еліптичного типу можна сформулювати три типи граничних задач.

1 тип. Задача Діріхле.

Необхідно знайти функцію U в деякій області V , щоб вона була:

- а) гармонічною в області V : $\Delta U = 0$;
- б) неперервною в замкнутій області $V + S$;
- в) на поверхні S , яка обмежує область V , приймала б відомі наперед задані значення: $U|_S = \varphi(x, y, z)$.

Зауваження: будь-які розв'язки рівняння Лапласа $\Delta U = 0$ називаються **гармонічними функціями**.

2 тип. Задача Неймана.

Необхідно знайти функцію U в деякій області V , щоб вона була:

- а) гармонічною в області V : $\Delta U = 0$;
- б) неперервною в замкнутій області $V + S$;
- в) на поверхні S , яка обмежує область V , її нормальна похідна

приймає відомі наперед задані значення: $\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_S = \psi(x, y, z)$.

Приклад: Продемонструємо, в яких фізичних задачах може отримуватися гранична умова для задачі Неймана. Поверхня S , яка обмежує область V заряджена з поверхневою густиною заряду σ . Якщо U - потенціал зарядженої системи, то напруженість поля $\vec{E} = -\text{grad}U$, а нормальна складова вектора $\vec{E}$ дорівнює його проекції на нормаль $\vec{n}$:

$$E_n = n p_{\vec{n}} \vec{E} = (\vec{E}, \vec{n}) = -(\text{grad}U, \vec{n}) = -\frac{\partial U}{\partial n}.$$

З фізики задачі випливає, що нормальна складова E_n на зарядженій поверхні із зарядом σ зазнає скачка, який дорівнює $2\pi\sigma$. Отже, $E_n = 2\pi\sigma$ або

$$-\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_S = 2\pi\sigma.$$

Таким чином, можна поставити задачу про знаходження розв'язку рівняння $\Delta U = 0$ з додатковою умовою для потенціалу на зарядженій поверхні

$$-\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_S = 2\pi\sigma.$$

3 тип. Змішана задача.

Необхідно знайти функцію U в деякій області V , щоб вона була:

- а) гармонічною в області V : $\Delta U = 0$;
- б) неперервною в замкнутій області $V + S$;
- в) на поверхні S , яка обмежує область V , $\left. \frac{\partial U}{\partial n} + kU \right|_S = \psi(x, y, z)$.

3. Метод відокремлення змінних для рівнянь еліптичного типу.

Цей метод застосовується при розв'язуванні рівняння Лапласа та інших рівнянь еліптичного типу в деяких найпростіших областях (круг, прямокутник, куля, циліндр та ін.). Задачі, які при цьому виникають, на знаходження власних значень та власних функцій (задачі Штурма-Ліувіля) приводять до різних класів спеціальних функцій (функцій Беселя, поліномів Лежандра та ін.), які ми розглядали в попередніх розділах. Зараз розглянемо задачу *Діріхле*, при розв'язуванні якої використовуються тільки тригонометричні функції.

Перша крайова задача для круга. Формула Пуассона.

Задача: Знайти розподіл температури $T(x, y)$ для точок круглої пластини з радіусом a , якщо на її границі, тобто на колі G , підтримується незмінна температура, яка є відомою функцією від координат точок кола (рис.4.1).

Розв'язування: Необхідно знайти регулярну функцію $T(x, y)$, яка в точках

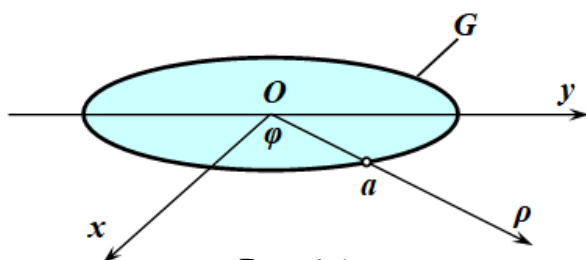


Рис.4.1

круга задовольняє рівнянню Лапласа

$$\Delta T = 0 \quad (1)$$

і граничній умові $T|_G = f(x, y)$. (2)

Задача (1), (2) є *внутрішньою* задачею Діріхле для круга. Необхідно знайти розподіл $T(x, y)$ як розв'язок рівняння

Лапласа *всередині* круга, зумовлений

змінною температури на ободі круга, тобто на колі G .

Із симетрії задачі випливає, що вона найпростіше розв'язуватиметься в полярній (плоскій циліндричній) системі координат (ρ, φ) .

Зв'язок декартових прямокутних з полярними координатами:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}, \quad (3) \quad \text{в точках кола } G: \begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = a \sin \varphi \end{cases}. \quad (4)$$

Рівняння (1) в цій системі координат набуде вигляду:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (5)$$

а гранична умова (2) з врахуванням в ній переходу для точок кола (4) прийме вигляд:

$$T|_{\rho=a} = f(\varphi). \quad (6)$$

Використовуючи метод Фур'є, розв'язок задачі шукатимемо у вигляді

$$T(\rho, \varphi) = R(\rho) \cdot \Phi(\varphi). \quad (7)$$

(7) врахуємо в (5):

$$R''(\rho) \cdot \Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho} R'(\rho) \cdot \Phi(\varphi) + \frac{1}{\rho^2} R(\rho) \cdot \Phi''(\varphi) = 0, \quad \left| \cdot \frac{\rho^2}{R\Phi} \right.$$

$$\frac{\rho^2 R''(\rho) + \rho \cdot R'(\rho)}{R(\rho)} + \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = 0,$$

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\frac{\rho^2 R''(\rho) + \rho \cdot R'(\rho)}{R(\rho)} . \quad (8)$$

Ліва частина рівняння (8) залежить тільки від кутової змінної φ , а права тільки від радіальної змінної ρ , тому, як раніше, прирівняємо ці відношення до константи відокремлення $-\lambda^2$.

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\frac{\rho^2 R''(\rho) + \rho \cdot R'(\rho)}{R(\rho)} = -\lambda^2 .$$

З останньої подвійної рівності отримаємо два незалежних рівняння:

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho \cdot R'(\rho) - \lambda^2 R(\rho) = 0 , \quad (9)$$

$$\Phi''(\varphi) + \lambda^2 \Phi(\varphi) = 0 . \quad (10)$$

Змінні відокремились, рівняння (9) залежить тільки від радіальної змінної ρ , а рівняння (10) – від кутової змінної φ . Звернемо увагу на те, що (9) є диференціальним рівнянням другого порядку **зі змінними** коефіцієнтами, а рівняння (10) просте диференціальне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами, розв'язок якого шукаємо в експоненціальному вигляді

$$\Phi(\varphi) = e^{r\varphi} , \quad r = ?$$

Характеристичне рівняння $r^2 + \lambda^2 = 0$, $r_{1,2} = \pm i\lambda$, тому загальний інтеграл рівняння (10) набуде вигляду

$$\Phi(\varphi) = A \cos \lambda \varphi + B \sin \lambda \varphi , \quad \lambda, A, B = ? \quad (11)$$

Одна з граничних умов, виконання якої ми повинні вимагати для всіх розв'язків, залежних від азимутального кута φ , - це **умова циклічності** або **умова періодичності**, суть якої в тому, що якщо ми розглядаємо розв'язок задачі в точці області з координатами (ρ, φ) , а потім замінимо $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi$, то розв'язок при цьому повторить своє попереднє значення, тобто

$$T(\rho, \varphi) = T(\rho, \varphi + 2\pi) . \quad (12)$$

(12) - умова циклічності або періодичності, яка з урахуванням (7) набуде вигляду

$$R(\rho)\Phi(\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi + 2\pi) \quad \Rightarrow$$

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi) . \quad (13)$$

Виконання умови періодичності (13) по куту φ , уможливить знаходження однієї з невідомих констант відокремлення у розв'язку (11). Враховуючи (11) в (13), запишемо

$$A \cos \lambda \varphi + B \sin \lambda \varphi = A \cos \lambda (\varphi + 2\pi) + B \sin \lambda (\varphi + 2\pi) .$$

Звідси випливає, що умова (13) виконуватиметься тоді, коли

$$\begin{aligned} \cos \lambda \varphi &= \cos \lambda (\varphi + 2\pi) , \\ \sin \lambda \varphi &= \sin \lambda (\varphi + 2\pi) . \end{aligned} \quad (14)$$

Рівності (14) виконуються не при будь-якому значенні константи λ , а тільки при цілочисленних значеннях; отже константа λ може приймати значення:

$$\lambda_n = n , \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

Отже, $\lambda_n = n$, тобто параметр λ приймає дискретний ряд значень. З врахуванням цього факту в (11), отримаємо множину функцій

$$\boxed{\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi} \quad (16)$$

Враховуючи значення параметра $\lambda_n = n$ в рівнянні (9), отримаємо

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho \cdot R'(\rho) - n^2 R(\rho) = 0 . \quad (17)$$

(17) є диференціальним рівнянням другого порядку *зі змінними коефіцієнтами* типу Ейлера, яке розв'язується порівняно просто. Його розв'язок шукаємо у вигляді *показникової* функції

$$R(\rho) = \rho^S , \quad S = ?$$

$$R'(\rho) = S \rho^{S-1} , \quad R''(\rho) = S(S-1) \rho^{S-2} ,$$

$$\rho^2 S(S-1) \rho^{S-2} + \rho S \rho^{S-1} - n^2 \rho^S = 0 . \quad | : \rho^S$$

$$S(S-1) + S - n^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad S^2 = n^2 \quad \Rightarrow \quad S = \pm n .$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (17) отримаємо у вигляді

$$R_n(\rho) = C_n \rho^n + D_n \rho^{-n} . \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

Так як нас цікавлять регулярні розв'язки всередині круга, то необхідно в розв'язку (18) покласти константу $D_n = 0$, в іншому випадку в точці $\rho = 0$, яка належить серединній області круга, розв'язок (18) завдяки другому доданку $\rightarrow \infty$.

$$\text{Отже,} \quad R_n(\rho) = C_n \rho^n. \quad (19)$$

Враховуючи (16) та (19) в (7) та сумуючи частинні розв'язки, отримаємо

$$T(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi), \quad (20)$$

тут $M_n = C_n A_n$, $N_n = C_n B_n$.

Константи інтегрування в (20) визначимо з крайових умов так, щоб ряд (20) збігався до функції $f(\varphi)$, яка задає, згідно з (6), розподіл температури на кільці G , яке обмежує область круга, всередині якої і шукаємо розподіл температури (20).

$$\text{Задовольнимо граничну умову} \quad T|_{\rho=a} = f(\varphi). \quad (6)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n (M_n \cos n\varphi + N_n \sin n\varphi) = f(\varphi). \quad (21)$$

В (21) маємо розклад заданої функції $f(\varphi)$ в ряд Фур'є одночасно по $\cos n\varphi$ та $\sin n\varphi$ в інтервалі $\varphi \in (0, 2\pi)$; коефіцієнти цього розкладу знайдемо за правилом

$$a^n M_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi \cdot d\varphi, \quad a^n N_n = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi \cdot d\varphi.$$

Звідси знайдемо константи інтегрування

$$M_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} f(\tau) \cos n\tau \cdot d\tau, \quad (22)$$

$$N_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} f(\tau) \sin n\tau \cdot d\tau, \quad (23)$$

$$M_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \cdot d\tau, \quad (24)$$

$$N_0 = 0. \quad (25)$$

Таким чином, враховуючи (22)-(25), розв'язок (20) внутрішньої задачі Діріхле для круга може бути поданий у вигляді

$$T(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) d\tau + \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a} \right)^n \left[\cos n\varphi \int_0^{2\pi} f(\tau) \cos n\tau \cdot d\tau + \sin n\varphi \int_0^{2\pi} f(\tau) \sin n\tau \cdot d\tau \right]$$

або

$$T(\rho, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\tau \cdot f(\tau) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a} \right)^n (\cos n\tau \cos n\varphi + \sin n\tau \sin n\varphi) \right].$$

Остаточно

$$T(\rho, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\tau \cdot f(\tau) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a} \right)^n \cos n(\tau - \varphi) \right], \quad 0 \leq \rho < a. \quad (26)$$

$$T|_{\rho=a} = f(\varphi). \quad (26)$$

(26) є розв'язком *внутрішньої задачі Діріхле* для круга. Сума в (26) обчислюється, так як є нескінченною спадною геометричною прогресією.

Позначимо вираз у квадратних дужках

$$S = \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a} \right)^n \cos n(\tau - \varphi) \right], \quad \frac{\rho}{a} = q, \quad \tau - \varphi = \theta \quad (27)$$

У введених позначеннях у (27) сума перепишеться у вигляді

$$S = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos n\theta. \quad (28)$$

Звернемо увагу: так як для внутрішньої області круга $0 \leq \rho < a$, то нова змінна $0 \leq q < 1$ дробова, а функція $\cos n\theta$ обмежена $[-1, 1]$, тому продемонструємо зараз, що сума в (28) є нескінченною спадною прогресією. Щоб здійснити наступні перетворення, з формули Ейлера

$$e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

виразимо $\cos n\theta$ таким чином

$$\cos n\theta = \operatorname{Re}[e^{in\theta}];$$

з урахуванням цього (28) перепишемо так

$$S = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos n\theta = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} q^n e^{in\theta} \right]. \quad (29)$$

Позначимо в (29) $q' = qe^{i\theta}$ і оскільки $0 \leq q < 1$, то і $0 \leq q' < 1$, тобто теж є дробовим, а тому

$$S = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} q^n e^{in\theta} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (qe^{i\theta})^n \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (q')^n \right] \quad (30)$$

Сума є нескінченною спадною геометричною прогресією. Пам'ятаємо, що сума такої прогресії

$$S = \frac{b_1}{1-q}, \quad (31)$$

де b_1 - перший доданок прогресії, а q - її знаменник. У нашому випадку в (30) $b_1 = q'$, рівно як і знаменник $q = q'$, а тому згідно з (31) матимемо

$$S = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} + \frac{q'}{1-q'} \right] = \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \frac{q'}{1-q'}.$$

Врахуємо позначення $q' = qe^{i\theta}$, отримаємо

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \frac{q'}{1-q'} = \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \left[\frac{qe^{i\theta}}{1-qe^{i\theta}} \right] = \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \left[\frac{qe^{i\theta}(1-qe^{-i\theta})}{(1-qe^{i\theta})(1-qe^{-i\theta})} \right] = \\ &= \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \frac{qe^{i\theta} - q^2}{1 - q(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + q^2} = \frac{1}{2} + \operatorname{Re} \frac{q \cos \theta + iq \sin \theta - q^2}{1 - 2q \cos \theta + q^2} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{q \cos \theta - q^2}{1 - 2q \cos \theta + q^2} = \frac{1 - q^2}{2(1 - 2q \cos \theta + q^2)} \end{aligned} \quad (32)$$

Повертаючись до старих позначень (27) $\frac{\rho}{a} = q$ та $\tau - \varphi = \theta$ і враховуючи (32) в (26), отримаємо розв'язок внутрішньої задачі Діріхле для круга у вигляді *інтеграла Пуассона*

$$\boxed{T(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 - 2\rho a \cos(\tau - \varphi) + \rho^2} d\tau, \quad 0 \leq \rho < a} \quad (33)$$

$$T|_{\rho=a} = f(\varphi). \quad (26)$$

Література

1. Піх С. С., Попель О. М., Ровенчак А. А., Тальянський І. І. Методи математичної фізики. — Л. : ЛНУ ім. Івана Франка, 2011. — 404 с.
2. Карбованець М.І., Лазур В.Ю. Методи математичної фізики: навчальний посібник. — Ужгород: Видавництво УжНУ “Говерла”, 2019. — 74 с.
3. Бугаєнко Г.О. Методи математичної фізики. К.: Вища школа, 1970.
4. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. — К.: Либідь, 2001.- 333с.
5. Мартинюк П.М. Рівняння математичної фізики: Навч. посібник — Рівне: НУВГП, 2007. - 178 с.
6. Блажевський С.Г., Ленюк О.М. Диференціальні рівняння та елементи математичної фізики: навчально-методичний посібник. — Чернівці: Чернівецький національний ун-т ім. Юрія Федьковича, 2021. — 248 с.
7. Вакал Є.С., Ловейкін А.В. Методи математичної фізики в прикладах і задачах: навч. посібник. — Київ: Видавець Кравченко Я.О., 2020. — 187 с.
8. Рудавський Ю. К, Костробій П. П. , Сухорольський М. А. , Зашкільняк І. М. , Колісник В. М. Рівняння математичної фізики. Узагальнені розв'язки крайових задач: Навч. посіб. для студ. техн. спец. вищ. закл. освіти . - Нац. ун-т «Львів. політехніка». — Л., 2002. — 236 с.
9. Самойленко, А. М. Методи математичної фізики: навч. посіб. / А. М. Самойленко, В. П. Шевчук. — Київ: Наукова думка, 2005. — 456 с.
10. Поляков, А. А. Диференціальні рівняння математичної фізики / А. А. Поляков. — Київ: Вища школа, 1990. — 280 с.
11. Коробейников, В. П. Математичні методи фізики / В. П. Коробейников. — Харків: ХНУ, 2007. — 312 с.
12. Кириченко, О. А. Методи математичної фізики: підручник / О. А. Кириченко. — Київ: КНУ ім. Т. Шевченка, 2013. — 370 с.