

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

**В.В. Городецький, С.Б. Боднарук,
Ж.І. Довгей, В.С. Лучко**

Аналітична геометрія в теоремах і задачах

Навчальний посібник

Чернівці
2020

УДК 514.122(075.8)

ББК 22.151.54я73

Г 701

Городецький В.В.

Г 701 Аналітична геометрія в теоремах і задачах / навч. посіб.: В.В. Городецький, С.Б. Боднарук, Ж.І. Довгей, В.С. Лучко. – Чернівці: – Чернівецький нац. ун-т ім.. Ю.Федьковича, 2020. – 384 с.

У посібнику викладено основний теоретичний матеріал, який стосується аналітичної геометрії. У кожному розділі наведено розв'язання типових задач різного ступеня складності; даються завдання для самостійної роботи.

Для студентів університетів, які навчаються за спеціальностями „Математика”, „Середня освіта (математика, інформатика)”.

ББК 22.151.54я73
УДК 514.122(075.8)

© Чернівецький національний університет,
2020

© Городецький В.В., 2020

© Боднарук С.Б., 2020

© Довгей Ж.І., 2020

© Лучко В.С., 2020

Вступ

Аналітична геометрія – це розділ математики, в якому властивості геометричних об'єктів (точок, ліній, поверхонь, фігур, тіл тощо) вивчаються засобами алгебри на основі методу координат.

Основоположником аналітичної геометрії є Р. Декарт, який вперше в 1637 році у своїй книзі “Геометрія” дав чіткий виклад ідеї методу координат на площині. Р. Декарт запропонував положення точки на площині відносно заданої системи координат визначати за допомогою двох чисел – її координат, а кожна лінію на площині розглядати як множину точок, заданих певною геометричною умовою. Ця умова записується у вигляді рівняння, яке пов'язує змінні координати точки, що належить даній лінії, і називається рівнянням цієї лінії. Такий спосіб дослідження геометричних об'єктів і називають методом координат.

Наступний важливий внесок в аналітичну геометрію зробив французький учений Ж.– Л. Лагранж, який уперше 1788 року у своїй “Аналітичній механіці” запропонував положення вектора визначати за допомогою чисел – його проєкцій на координатні осі. Розвиток ідей Лагранжа привів до створення векторної алгебри.

Першим систематичним викладом аналітичної геометрії вважають другий том “Вступу в аналіз” Л. Ейлера, опублікований у 1748 році.

Метод координат та апарат векторної алгебри широко використовують не тільки у сучасній аналітичній геометрії, але і у диференціальній геометрії, лінійній алгебрі, тензорному аналізі, теорії поля, в багатьох загальнонаукових та інженерних дисциплінах.

Матеріал даного посібника відповідає діючій програмі з курсу “Аналітична геометрія” для студентів університетів, що навчаються за спеціальностями “Математика”, “Середня освіта (математика, інформатика)” і може бути корисний студентам інших спеціальностей, що вивчають елементи аналітичної геометрії.

Зупинимось коротко на структурі даного посібника.

У першому розділі розглядаються питання, пов'язані з поняттям систем координат на прямій, на площині та в просторі.

Другий розділ присвячено вивченню основних положень векторної алгебри.

Третій розділ посібника містить матеріал з теми “Пряма на площині”.

У четвертому розділі вивчаються питання, пов'язані з поняттями площини та прямої в просторі.

Всі розділи цього посібника супроводжуються детальним викладом теоретичного матеріалу і прикладами розв'язання типових для курсу задач різного рівня складності та містять умови завдань для самостійної роботи студентів.

Зауважимо, що якщо в умові задачі не вказано систему координат, в якій слід провести розв'язання задачі, то читачеві пропонується здійснити вибір самостійно, розглянувши при цьому найзагальніший з можливих випадків.

Використана і рекомендована література

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1979. – 512 с.
2. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968. – 912 с.
3. Бакельман И.Я. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. – М.: Просвещение, 1976. – 510 с.
4. Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1964. – 440 с.
5. Білоусова В.П. Аналітична геометрія. – К.: Вища школа, 1973. – 326 с.
6. Городецкий В.В., Боднарук С.Б. Алгебра та геометрія в теоремах і задачах: Навчальний посібник. Частина І. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2009. – 336 с.
7. Городецкий В.В., Боднарук С.Б., Лучко В.С. Аналітична геометрія. Системи координат. Найпростіші задачі аналітичної геометрії: навчальний посібник у 4-х част., - Ч1, Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2011. – 92 с.
8. Городецкий В.В., Боднарук С.Б., Довгей Ж.І. Аналітична геометрія: навчальний посібник: у 4 ч. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2012. – Ч.2. Елементи векторної алгебри – 100 с.
9. Городецкий В.В., Боднарук С.Б. Аналітична геометрія. Площина і пряма в просторі: навчальний посібник: у 4 ч., – Ч.4, Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2013. — 96 с.
10. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1981. – 232 с.
11. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Изд-во Московского университета. 1961. – 232 с.
12. Конет І. М., Мойко В.В., Сорич В.А. Алгебра та геометрія / За ред. І.М. Конета. – Кам'янець – Подільський : Абетка – НОВА, 2003. – 452 с.
13. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. – М.: Просвещение, 1966. – 366 с.
14. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1976. – 384 с.
15. Погорелов О.В. Геометрія: Навч. посібник для 7-11 кл. серед. шк. – 9-те вид. – К.: Рад. шк., 1990. – 286 с.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. СИСТЕМИ КООРДИНАТ. НАЙПРОСТІШІ ЗАДАЧІ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ.....	5
§1.1. Декартові системи координат на прямій	5
Приклади розв'язування задач.....	9
Завдання для самостійної роботи.....	13
§1.2. Системи координат на площині та в просторі	15
Приклади розв'язування задач.....	18
Завдання для самостійної роботи.....	24
§1.3. Задача про віддаль між двома точками.....	32
Приклади розв'язування задач.....	32
Завдання для самостійної роботи.....	40
§1.4. Задача про площу трикутника.....	46
Приклади розв'язування задач.....	47
Завдання для самостійної роботи.....	55
§1.5. Полярна, циліндрична та сферична системи координат	57
Приклади розв'язування задач.....	60
Завдання для самостійної роботи.....	66
§1.6. Поняття про лінію на площині та її рівняння.....	72
Приклади розв'язування задач.....	72
Завдання для самостійної роботи.....	86
РОЗДІЛ 2. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ	95
§2.1. Вектори. Лінійні операції над векторами. Лінійна залежність векторів	95
2.1.1. Основні означення	95
2.1.2. Координати вектора.....	97
2.1.3. Лінійні операції над векторами.....	100
2.1.4. Сума векторів і добуток вектора на число в координатах	103
2.1.5. Лінійна залежність векторів.....	104
2.1.6. Базис векторів.....	111
Приклади розв'язування задач.....	115
Завдання для самостійної роботи	125
§2.2. Скалярне множення векторів	137

Приклади розв'язування задач.....	140
Завдання для самостійної роботи	150
§2.3. Векторний добуток векторів	160
2.3.1. Означення векторного добутку.....	160
2.3.2. Геометричні властивості векторного добутку.....	161
2.3.3. Алгебраїчні властивості векторного добутку.....	162
2.3.4. Зображення векторного добутку векторів у декартових координатах	164
Приклади розв'язування задач.....	166
Завдання для самостійної роботи	170
§2.4. Мішаний добуток трьох векторів	174
2.4.1. Означення та геометричні властивості мішаного добутку	174
2.4.2. Зображення мішаного добутку векторів у декартових координатах.....	176
Приклади розв'язування задач.....	177
Завдання для самостійної роботи	186
§2.5. Подвійний векторний добуток	189
Приклади розв'язування задач.....	189
Завдання для самостійної роботи	195
РОЗДІЛ 3. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ.....	196
§3.1. Рівняння прямої на площині.....	196
3.1.1. Канонічне та параметричні рівняння прямої	196
3.1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом	198
3.1.3. Загальне рівняння прямої на площині	201
3.1.4. Неповні рівняння прямої. Рівняння прямої у відрізках .	203
3.1.5. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.	205
Приклади розв'язування задач	206
Завдання для самостійної роботи.....	221
§3.2. Взаємне розташування точок та прямих на площині	232
3.2.1. Геометричний міст нерівностей $Ax + By + C < 0$ та $Ax + By + C > 0$. Задача про віддаль від точки до прямої на площині	232
3.2.2. Нормоване рівняння прямої.....	236
Приклади розв'язування задач	238
Завдання для самостійної роботи.....	250

§3.3. Взаємне розташування прямих на площині.....	257
3.3.1. Кут між прямими	257
3.3.2. Взаємне розташування двох прямих на площині. Жмутки прямих на площині	263
Приклади розв'язування задач	267
Завдання для самостійної роботи.....	279
РОЗДІЛ 4. ПЛОЩИНА І ПРЯМА В ПРОСТОРІ	286
§4.1. Рівняння площини у координатному просторі	286
4.1.1. Різні види рівнянь площини	286
4.1.2. Неповні рівняння площини.....	290
Приклади розв'язування задач	293
Завдання для самостійної роботи.....	297
§4.2. Задача про взаємне розміщення площин в просторі .	301
4.2.1. Взаємне розміщення двох площин	301
4.2.2. Взаємне розміщення трьох площин.....	301
Приклади розв'язування задач	306
Завдання для самостійної роботи.....	312
§4.3. Геометричний зміст нерівностей $Ax + By + Cz + D < 0$ та $Ax + By + Cz + D > 0$. Задача про віддаль від точки до площини	316
4.3.1. Геометричний зміст нерівностей $Ax + By + Cz + D < 0$ та $Ax + By + Cz + D > 0$	316
4.3.2. Задача про віддаль від точки до площини.....	316
4.3.3. Нормоване рівняння площини.....	317
Приклади розв'язування задач	318
Завдання для самостійної роботи.....	323
§4.4. Пряма в просторі	331
4.4.1. Канонічні рівняння прямої у просторі.....	331
4.4.2. Рівняння прямої, яка проходить через дві точки. Параметричні рівняння прямої.....	331
4.4.3. Пряма в просторі як лінія перетину двох площин.....	332
Приклади розв'язування задач	334
Завдання для самостійної роботи.....	336
§4.5. Взаємне розміщення прямих та площин у просторі ...	341
4.5.1. Взаємне розміщення двох прямих у просторі.....	341
4.5.2. Взаємне розміщення прямої і площини в просторі	342

4.5.3. Кут між двома площинами	343
4.5.4. Кут між двома прямими в просторі	344
4.5.5. Кут між прямою і площиною в просторі.....	345
Приклади розв'язування задач	347
Завдання для самостійної роботи.....	358
§4.6. Віддаль від точки до прямої в просторі. Найкоротша віддаль між двома прямими	367
4.6.1. Віддаль від точки до прямої в просторі.....	367
4.6.2. Найкоротша віддаль між двома прямими	368
Приклади розв'язування задач	370
Завдання для самостійної роботи.....	374
Використана і рекомендована література	376
Зміст	377

Для нотаток

Навчальне видання

Городецький Василь Васильович

Боднарук Світлана Богданівна

Довгей Жанна Іллінічна

Лучко Вікторія Сергіївна

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

В ТЕОРЕМАХ І ЗАДАЧАХ

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск Городецький В.В.