БІФУРКАЦІЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ У ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМАХ ІЗ МАЛОЮ ДИФУЗІЄЮ

Іван Клевчук, Микола Гритчук

Кафедра математичного моделювання, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

E-mail: i.klevchuk@chnu.edu.ua

АНОТАЦІЯ. Доведено існування періодичних розв'язків автономної параболічної системи диференціальних рівнянь з малою дифузією на колі. Вивчено питання існування та стійкості біжучих хвиль рівняння брюсселятора із малою дифузією.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: параболічна система, біфуркація, інтегральний многовид, стійкість, біжуча хвиля.

І. Вступ

Дослідимо існування та стійкість як завгодно великого скінченного числа циклів параболічної системи із малою дифузією (феномен буферності). Питання стійкості та біфуркації розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними вивчалися, наприклад, у працях [1 −7]. Такі математичні моделі описують складні фізичні явища.

II. Існування та стійкість біжучих хвиль параболічних систем із малою дифузією

Дослідимо біфуркацію як завгодно великої кількості циклів параболічних систем із малою дифузією. Розглянемо систему

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \varepsilon\gamma\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \varepsilon\delta\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \omega_0 u_2 + \varepsilon(\alpha u_1 - \beta u_2) + \\ +(d_0 u_1 - c_0 u_2)(u_1^2 + u_2^2),$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \varepsilon\gamma\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \varepsilon\delta\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \omega_0 u_1 + \varepsilon(\alpha u_2 + \beta u_1) + \\ +(d_0 u_2 + c_0 u_1)(u_1^2 + u_2^2) \quad (1)$$

з періодичною умовою

$$u_1(t, x + 2\pi) = u_1(t, x),\ u_2(t, x + 2\pi) = u_2(t, x), \quad (2)$$

де ε – малий додатний параметр, $\omega_0 > 0,\ \alpha > 0,\ \gamma > 0,\ d_0 < 0.$

Перейшовши до комплексних змінних $u = u_1 + iu_2,\ \bar{u} = u_1 - iu_2$, одержимо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\omega_0 u + \varepsilon\left[(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha + i\beta)u\right] + (d_0 + ic_0)u^2\bar{u}. \quad (3)$$

Дослідимо існування і стійкість хвильових розв'язків задачі (1), (2). Розв'язок рівняння (3) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $u = \theta(y),\ y = \sigma t + x,$ де функція $\theta(y)$ має період 2π. Тоді одержимо рівняння

$$\sigma \frac{d\theta}{dy} = i\omega_0\theta + \varepsilon\left[(\gamma + i\delta)\frac{d^2\theta}{dy^2} + (\alpha + i\beta)\theta\right] + (d_0 + ic_0)\theta^2\overline{\theta}.$$

Це рівняння заміною $\frac{d\theta}{dy} = \theta_1$ зведемо до вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = \theta_1,$$

$$\sigma\theta_1 = i\omega_0\theta + \varepsilon[(\gamma + i\delta)\frac{d\theta_1}{dy} + (\alpha + i\beta)\theta] + (d_0 + ic_0)\theta^2\overline{\theta}. \qquad (4)$$

Інтегральний многовид системи (4) можна зобразити у вигляді

$$\theta_1 = \frac{i\omega_0}{\sigma}\theta + \varepsilon\left[\frac{\alpha + i\beta}{\sigma}\theta - \frac{\omega_0^2}{\sigma^3}(\gamma + i\delta)\theta\right] + \frac{d_0 + ic_0}{\sigma}\theta^2\bar{\theta} + \cdots.$$

Тут у лінійних доданках збережено члени порядку $O(\varepsilon)$, а в нелінійних – $O(1)$. Рівняння на цьому многовиді набере вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{i\omega_0}{\sigma}\theta + \varepsilon\left[\frac{\alpha + i\beta}{\sigma}\theta - \frac{\omega_0^2}{\sigma^3}(\gamma + i\delta)\theta\right] + \frac{d_0 + ic_0}{\sigma}\theta^2\bar{\theta} + \cdots. \qquad (5)$$

Перейшовши у рівнянні (5) до полярних координат, $\theta = r\exp(i\varphi)$, одержимо рівняння

$$\frac{dr}{dy} = \varepsilon\left(\frac{\alpha}{\sigma} - \frac{\gamma}{\sigma^3}\omega_0^2\right)r + \frac{d_0}{\sigma}r^3. \qquad (6)$$

Нехай $d_0 < 0$ і виконується нерівність $\alpha > \frac{\gamma}{\sigma^2}\omega_0^2$. Тоді рівняння (6) має стаціонарний розв'язок

$$r = \sqrt{\varepsilon}R_0, \quad R_0 = \sqrt{\left(\alpha - \frac{\gamma}{\sigma^2}\omega_0^2\right)|d_0|^{-1}},$$

отже, періодичний розв'язок рівняння (5) має вигляд $\theta = \sqrt{\varepsilon}R_0\exp\left(\frac{i\omega_0}{\sigma}y\right) + O(\varepsilon)$. Враховуючи, що функція θ має період 2π, одержуємо $\sigma = \frac{\omega_0}{n} + O(\varepsilon)$, $n = \pm1, \pm2, \dots$. Отже, періодичний розв'язок рівняння (3) має вигляд

$$u_n = u_n(t, x) = \sqrt{\varepsilon}r_n\exp(i(\chi_n(\varepsilon)t + nx)) + O(\varepsilon), \qquad (7)$$

де $r_n = \sqrt{(\alpha - n^2\gamma)|d_0|^{-1}}$, $\chi_n(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2 - \varepsilon\delta n^2$, $n \in \mathbb{Z}$. Тоді періодичний розв'язок задачі (1), (2) має вигляд

$$u_1 = \sqrt{\varepsilon}r_n\cos(\chi_n(\varepsilon)t + nx),$$
$$u_2 = \sqrt{\varepsilon}r_n\sin(\chi_n(\varepsilon)t + nx), \quad n \in \mathbb{Z}. \qquad (8)$$

Тому правильні наступні твердження.

Теорема 1. *Нехай* $\omega_0 > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $d_0 < 0$ *і для деякого цілого* n *виконується нерівність* $\alpha > \gamma n^2$. *Тоді знайдеться таке* $\varepsilon_0 > 0$, *що при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *задача (1), (2) має періодичні відносно* t *розв'язки (8).*

Теорема 2. *Біжучі хвилі* $u_n(t,x)$ *задачі (1), (2) експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$(d_0 r_n^2 - \gamma k^2)^2 (\gamma^2 k^2 + \delta^2 k^2 - 2\gamma d_0 r_n^2 - 4\gamma^2 n^2 - \\ -2\delta c_0 r_n^2) > 4\gamma^2 n^2 (c_0 r_n^2 - \delta k^2)^2,$$

при всіх $k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, де $r_n^2 = (\gamma n^2 - \alpha)/d_0$.

Як приклад розглянемо систему (1), в якій $\delta = 0$, $\beta = 0$, $c_0 = 0$. Тоді з теореми 1 випливає, що при $d_0 < 0$, $\gamma n^2 < \alpha$ існує періодичний розв'язок

$$u_n = \sqrt{\varepsilon(\alpha - \gamma n^2)|d_0|^{-1}} \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t + nx) \\ \sin(\omega_0 t + nx) \end{pmatrix}.$$

Згідно з теоремою 2 біжучі хвилі $u_n(t,x)$ експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли $n^2 < \frac{1}{6\gamma}(\gamma + 2\alpha)$.

References

1. Fodchuk V.I., Klevchuk I.I. Integral sets and the reduction principle for differential-functional equations // Ukrainian Mathematical Journal -- 1982. -- **34**, No. 3. -- P. 272--277. https://doi.org/10.1007/BF01682117
2. Klevchuk I.I., Fodchuk V.I. Bifurcation of singular points of differential-functional equations // Ukrainian Mathematical Journal -- 1986. -- **38**, No. 3. -- P. 281--286. https://doi.org/10.1007/BF01056824
3. Klevchuk I.I. On the reduction principle for functional-differential equations of the neutral type // Differ. Equ. -- 1999. -- **35**, No. 4. -- P. 464--473.
4. Klevchuk I.I. Bifurcation of the state of equilibrium in the system of nonlinear parabolic equations with transformed argument // Ukrainian Mathematical Journal – 1999. **51**, No. 10. – P. 1512 – 1524. https://doi.org/ 10.1007/BF02981684
5. Klevchuk I.I. Homoclinic points for a singularly perturbed system of differential equations with delay // Ukrainian Mathematical Journal -- 2002. -- **54**, No. 4. -- P. 693--699. https://doi.org/10.1023/A:1021047730635
6. Klevchuk I.I. Existence of countably many cycles in hyperbolic systems of differential equations with transformed argument // Journal of Mathematical Sciences – 2016. **215**, No. 3. – P. 341 – 349. https://doi.org/ 10.1007/s10958-016-2842-x
7. Klevchuk I.I. Bifurcation of self-excited vibrations for parabolic systems

with retarded argument and weak diffusion // Journal of Mathematical Sciences – 2017. **226**, No. 3. – P. 285 – 295. https://doi.org/10.1007/s10958-017-3534-x

BIFURCATION OF PERIODIC SOLUTIONS IN PARABOLIC SYSTEMS WITH WEAK DIFFUSION

Ivan Klevchuk, Mykola Hrytchuk

ABSTRACT. We prove the existence of periodic solutions in autonomous parabolic system of differential equations with weak diffusion on the circle. We consider the problem of existence and stability of traveling waves. We study the existence and stability of an arbitrarily large finite number of cycles for a parabolic system with weak diffusion.

KEYWORDS: parabolic system, bifurcation, integral manifold, stability, traveling waves.