

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
Кафедра математичних проблем управління і кібернетики

Філіпчук О.І., Кириченко О.Л., Антонюк С.В.

**МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ
ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ:
ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ**

У двох частинах

Частина 2



Чернівці
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича
2024

УДК 004(075.8)

*Друкується за ухвалою вченої ради
Навчально-наукового інституту фізико-технічних та комп'ютерних наук
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича
(протокол № 6 від 13.06.2024)*

Рецензенти:

Нестеренко В.В., д.ф.-м-н., доцент кафедри математичного аналізу ЧНУ імені Юрія Федьковича;
Мартинюк О.В., декан факультету математики та інформатики ЧНУ імені Юрія Федьковича,
д.ф.-м-н., професор кафедри математики та інформатики ЧНУ імені Юрія Федьковича

Філіпчук О.І., Кириченко О.Л., Антонюк С.В.

Ф 537 Математичні основи інформаційних технологій : лабораторний практикум у 2 ч., Ч. 2. Чернівці : Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2024. 80 с.

У навчальному виданні висвітлено питання розв'язування інженерних та прикладних задач, що стосуються інтегрального числення функції однієї змінної, диференціальних рівнянь та теорії рядів засобами комп'ютерної математики, зокрема із використанням пакета MathCad. Наведено приклади розв'язування типових задач і варіанти завдань для самостійного виконання під час лабораторних робіт із цієї дисципліни.

Для студентів галузі 12 - Інформаційні технології, зокрема, спеціальностей 121 – Інженерія програмного забезпечення (дисципліна “Математичні основи ІТ”), 122 – Комп'ютерні науки (дисципліна “Теоретичні основи кібернетики”), 123 – Комп'ютерна інженерія (дисципліна “Вища математика”).

УДК 004(075.8)

Зміст

Вступ.....	4
1. <i>Комплексні числа, дії над ними та їх зображення на комплексній площині.</i>	5
2. <i>Первісна. Невизначений інтеграл.....</i>	21
3. <i>Визначений інтеграл та його застосування. Невласні інтеграли</i>	34
4. <i>Диференціальні рівняння.....</i>	44
5. <i>Числові та функціональні ряди.....</i>	63
Список літератури.....	80

Вступ

Прикладна підготовка майбутніх фахівців для ІТ-галузі передбачає формування компетентностей розв'язання прикладних математичних задач, зокрема, з використанням сучасних математичних пакетів та систем комп'ютерної математики. У технічних ЗВО України при вивченні математичних дисциплін найбільш популярними системами комп'ютерної математики є: Mathematica, Mathcad, Maple, Matlab, R. Кожна з них має свої особливості та прикладні задачі, до розв'язання яких система є найбільш придатною. Mathcad поєднує у собі простоту, візуальність та широкий спектр прикладних задач, які можна розв'язувати з допомогою цієї системи.

Навчальний посібник побудований таким чином, щоби студенти ознайомились з основними можливостями Mathcad та їх прикладними аспектами, набули компетентностей аналізу та розв'язування із використанням цього пакета основних типів прикладних математичних задач інтегрального числення, диференціальних рівнянь та теорії рядів.

Пропонований посібник (друга частина) містить п'ять лабораторних робіт, які охоплюють розділи “Комплексні числа”, “Інтеграли функції однієї змінної та їх застосування”, “Основи теорії рядів”. У кожній лабораторній роботі наявні варіанти завдань для самостійного виконання, наведено основні математичні факти та теоретичні положення, необхідні для розв'язання типових задач та опис особливостей реалізації конкретної задачі у Mathcad.

При виконанні лабораторних робіт студентам рекомендується дотримуватися таких правил:

- 1) номер варіанта індивідуального завдання на лабораторну роботу – це порядковий номер студента у списку академічної групи;
- 2) для успішного виконання роботи потрібно попередньо ознайомитися з наведеним теоретичним матеріалом до лабораторної роботи;
- 3) ознайомитись із прикладами розв'язування типових задач, наведених в описі роботи;
- 4) виконати лабораторну роботу відповідно до свого варіанта і вчасно здати на перевірку викладачу.

Лабораторна робота №1

Тема: Комплексні числа, дії над ними та їх зображення на комплексній площині

Мета: ознайомлення студентів із поняттям комплексної площини, основними поняттями теорії комплексних чисел та правилами дій над комплексними числами; набуття практичних навичок зображення чисел на комплексній площині та виконання різних дій над комплексними числами у пакеті MathCad.

Завдання для самостійного виконання (лабораторна робота №1)

1. Дано комплексні числа z_1 , z_2 та натуральне число m (див. таблицю).

Зобразити ці числа у вигляді векторів на комплексній площині. Знайти:

а) $z_1 - z_2$ (непарні варіанти), $z_2 - z_1$ (парні варіанти);

б) $z_1 + z_2$;

в) $\bar{z}_1 \cdot z_2$ (непарні варіанти), $z_1 \cdot \bar{z}_2$ (парні варіанти);

г) $\frac{z_1}{z_2}$ (непарні варіанти), $\frac{z_2}{z_1}$ (парні варіанти);

г) z_1^m (непарні варіанти), z_2^m (парні варіанти);

д) записати в тригонометричній та показниковій формі число z_1 (непарні варіанти), z_2 (парні варіанти).

№	вхідні дані			№	вхідні дані		
	z_1	z_2	m		z_1	z_2	m
1	-2	$-2 + 2i$	28	11	$-3 + i\sqrt{3}$	$3 - i\sqrt{3}$	18
2	$-1 + i$	$1 - i$	26	12	$3 + 2i$	$3 - 2i$	24
3	$8i$	$2 - 8i$	10	13	$5 - i\sqrt{2}$	$1 + i\sqrt{2}$	11
4	$-\sqrt{3} + i$	$-i$	23	14	$-4 - 4i$	$3 + 4i$	25
5	i	$-1 - i$	12	15	$-\sqrt{3} - i$	$\sqrt{3} + i$	30
6	$-(5\sqrt{3})i$	$5 - (5\sqrt{3})i$	17	16	$-3i$	$6 + 3i$	22
7	-10	$3 - 3i$	20	17	$-2\sqrt{3} + 6i$	$\sqrt{3} - i$	16
8	$5i$	$7 + 7i$	14	18	$-2 + 2i$	$6 - 8i$	27
9	$-\sqrt{3} + 3i$	$\sqrt{3} - i$	19	19	$7 - i$	$7 + i$	35
10	$-7i$	$5 - 5i$	13	20	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3} - 3i$	15

2. Задано комплексне число z та натуральне число n . Знайти всі значення $\omega_k = \sqrt[n]{z}$ та зобразити їх у вигляді точок на відповідному колі.

№	вхідні дані		№	вхідні дані	
	z	n		z	n
1	-169	4	11	$-4 + 3i$	4
2	$2\sqrt{12} - 4i$	3	12	$\sqrt{3} - i$	3
3	$-16i$	4	13	$-3 - 3i$	4
4	$9 - (3\sqrt{3})i$	3	14	$8 + 6i$	3
5	-144	4	15	$3 - 4i$	4
6	$6 - 8i$	3	16	$1 + (\sqrt{3})i$	3
7	$-2 + 2i$	4	17	-256	4
8	$-(3\sqrt{3})i$	3	18	$27i$	3
9	$12 - (4\sqrt{3})i$	4	19	$-\sqrt{2} - (\sqrt{2})i$	4
10	$-2\sqrt{3} + 6i$	3	20	$\sqrt{5} - 2i$	3

3. Знайти усі корені рівнянь, використовуючи дві різні MathCad-функції (*solve* та *polyroots*).

№	Рівняння	
	а)	б)
1	$(-1+i)z^2 + (3+2i)z + 2 - i = 0$	$z^2 + 6z + 10 = 0$
2	$2z^2 - 6z + 7 = 0$	$z^2 + (3-2i)z - (4-2i) = 0$
3	$z^2 + (1-3i)z - (3-3i) = 0$	$3z^2 - 2z + 1 = 0$
4	$5z^2 + 2z + 2 = 0$	$z^2 + (1+3i)z - (3+3i) = 0$
5	$z^2 + (1+3i)z + 3i = 0$	$3z^2 - 2z + 8 = 0$
6	$3z^2 - 2z + 4 = 0$	$z^2 + (1-2i)z - (3-2i) = 0$
7	$z^2 - (1+2i)z + 2i = 0$	$4z^2 - 2z + 5 = 0$
8	$5z^2 - 4z + 8 = 0$	$z^2 + (2-3i)z - (4-3i) = 0$
9	$z^2 + (1-3i)z - 3i = 0$	$3z^2 - 6z + 4 = 0$
10	$3z^2 - 2z + 3 = 0$	$z^2 - (1-2i)z - 2i = 0$
11	$z^2 + (4-2i)z - (6-2i) = 0$	$2z^2 - z + 1 = 0$
12	$3z^2 - 2z + 6 = 0$	$z^2 + (2+3i)z - (4+3i) = 0$
13	$z^2 - (2+3i)z + (1-3i) = 0$	$-3z^2 + 12z - 16 = 0$
14	$3z^2 - 8z + 9 = 0$	$z^2 + (5-2i)z + 5(1-i) = 0$
15	$z^2 + (1-2i)z - 2i = 0$	$2z^2 + 4z + 7 = 0$
16	$z^2 - 2z + 5 = 0$	$(2+i)z^2 - (5-i)z + 2 - 2i = 0$

17	$z^2 - (2 + 4i)z - (7 - 4i) = 0$	$3z^2 + z + 1 = 0$
18	$z^2 + 4z + 12 = 0$	$(-1 + i)z^2 + (3 + 2i)z + 2 - i = 0$
19	$z^2 + (2 - 2i)z - (4 - 2i) = 0$	$5z^2 - 4z + 2 = 0$
20	$z^2 - 4z + 8 = 0$	$(2 - 3i)z^2 - 2\sqrt{5} \cdot z + 1 + i = 0$

 **Методичні вказівки
та приклади виконання завдань у MathCad**

До завдання 1. *Комплексне число* – це число вигляду $z = a + bi$, де $a, b \in \mathbf{R}$, $i^2 = -1$. Така форма запису називається **алгебраїчною формою** комплексного числа. При цьому $a = \operatorname{Re} z$ – дійсна частина числа z , $b = \operatorname{Im} z$ – уявна частина числа z , i – уявна одиниця.

Для запису комплексного числа в алгебраїчній формі в *MathCad 15* уявна одиниця i записується як $1i$ або $1j$ (без знака множення). Наприклад, для введення числа $z_1 = 2 + 3i$ на робочому листі *MathCad* слід зробити запис

$$z1 := 2 + 3 \cdot 1i$$

(між 3 та $1i$ ставиться знак множення з панелі **Калькулятор (Calculator)** або Shift 8), який після виходу з формули набуває вигляду

$$z1 := 2 + 3 \cdot i$$

Можна також записати

$$z1 := 2 + 3 \cdot 1j$$

У *MathCad Prime* уявна одиниця i записується як i або j (на відміну від *MathCad 15*, у *MathCad Prime* перед i або j не записується одиниця). Тобто для введення числа $z_1 = 2 + 3i$ на робочому листі *MathCad Prime* слід зробити запис

$$z1 := 2 + 3i$$

або

$$z1 := 2 + 3j$$

Звертаємо увагу, що *між уявною частиною числа та i або j знак множення не ставиться* "3i" або "3j" (без знака множення) – для *Mathcad Prime* це дійсно 3i, що визначає i (або j) як уявну одиницю, а не $3*i$ ($3*j$), що сприйметься як число 3, помножене на змінну i (або j).

Спряженням до числа $z = a + bi$ називається число $\bar{z} = a - bi$, тобто у спряжених чисел дійсні частини однакові, а уявні – протилежні. Для знаходження спряженого числа $\bar{z}$ до заданого числа z , у *Mathcad 15* треба ввести $z := a + bi$, а нижче або правіше записати z , а після нього набрати символ " (подвійна лапка, Shift Э на англійській розкладці) та натиснути =. Наприклад,

$$z1 := 2 + 3i \quad \bar{z1} = 2 - 3i$$

У *Mathcad Prime* для знаходження комплексного спряженого передбачено спеціальний оператор (рис. 1.1).

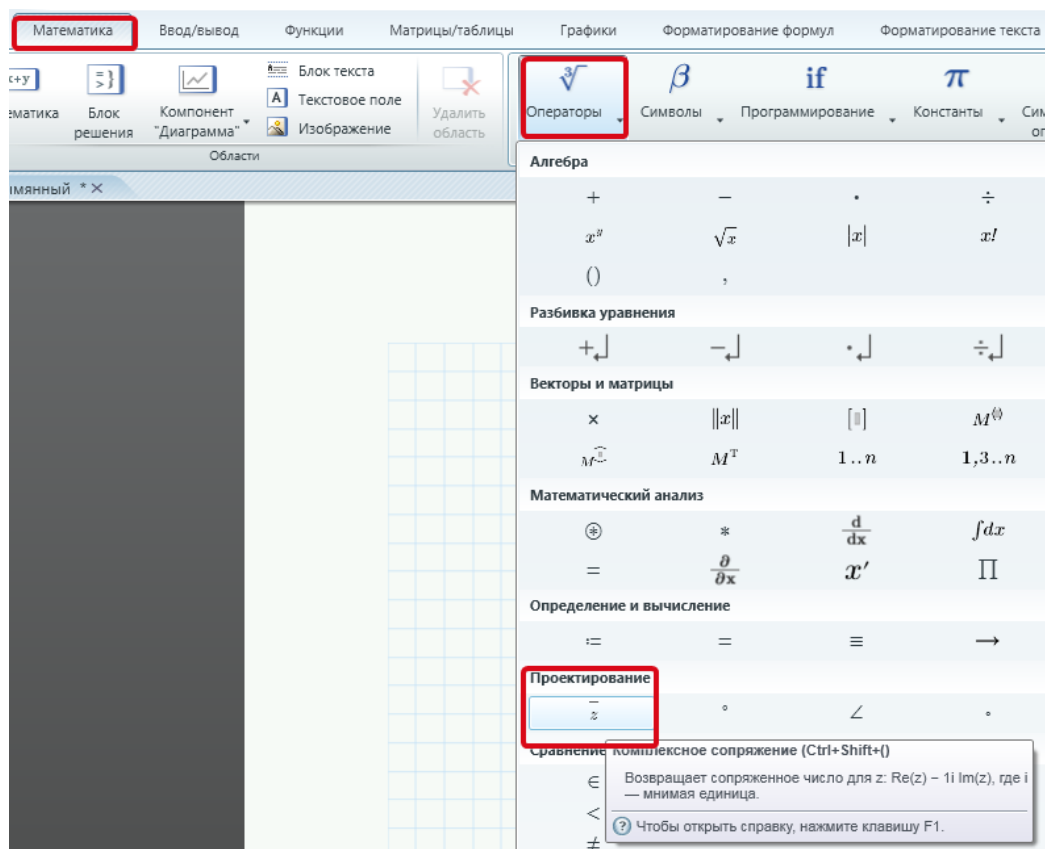


Рис. 1.1. Оператор для нахождения комплексного сопряженного у MathCad Prime

Для знаходження спряженого числа у *Mathcad Prime* спочатку треба задати число, для якого потрібно знайти спряжене, далі вставити шаблон оператора комплексного спряженого (рис. 1.1) та під рискою, яка з'явиться



, записати число і натиснути знак рівності:

$$z1 := 2 + 3i \quad \overline{z1} = 2 - 3i$$

Комплексні числа зображаються на комплексній площині у вигляді точок або векторів, зокрема, число $z = a + bi$ можна мислити як точку $(a; b)$ або вектор з координатами $(a; b)$, тобто вектор, початок якого знаходиться у початку координат, а кінець – у точці з координатами $(a; b)$ (рис. 1.2). На осі Ox відкладаються дійсні частини комплексних чисел, а на осі Oy – уявні.

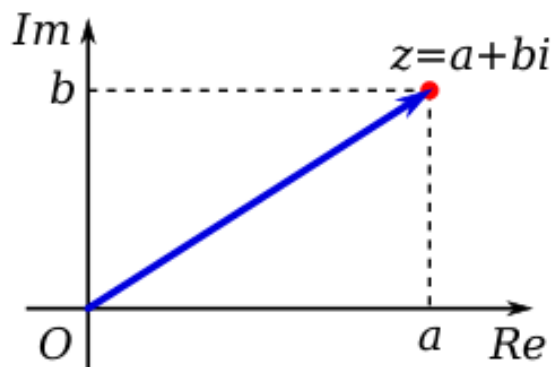


Рис. 1.2. Зображення комплексного числа у вигляді вектора на комплексній площині

З метою зображення у *MathCad* комплексного числа $z = a + bi$ вектором на комплексній площині слід задати два масиви

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ \text{Re}(z) \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad Y := \begin{pmatrix} 0 \\ \text{Im}(z) \end{pmatrix},$$

де першими координатами є нулі, а другими $\text{Re}(z) = a$ та $\text{Im}(z) = b$.

Зобразимо, наприклад, число $z = 2 + 3i$. Задаємо число та вводимо масиви X, Y :

$$z := 2 + 3i$$

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ \text{Re}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 0 \\ \text{Im}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Далі у *MathCad 15* поміщаємо на робочий лист графік (**Графік X-Y/ X-Y Plot**) (рис. 1.3). Після цього з'являється область графіка (рис. 1.4), де у місцепозначенні під віссю Ox (у центрі) запишемо X , а у місцепозначенні зліва від Oy (у центрі) – Y .

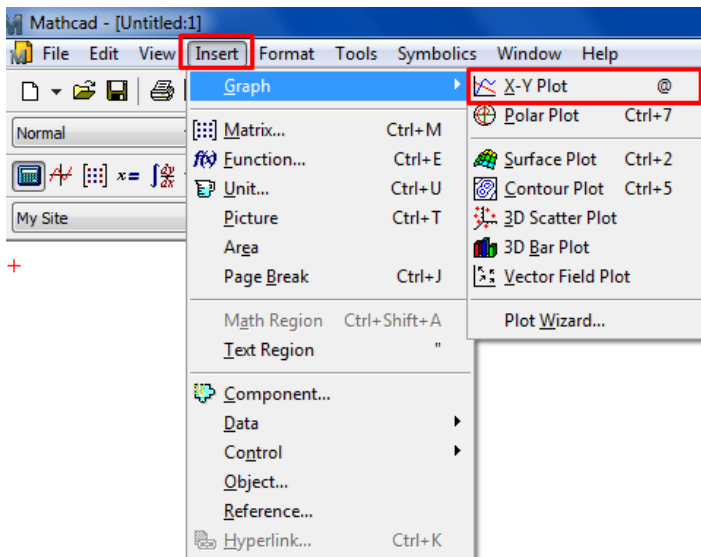


Рис. 1.3. Вставка 2D-графіка у *MathCad 15*

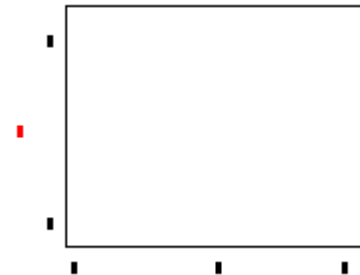


Рис. 1.4. Область 2D-графіка у *MathCad 15*

При цьому в області графіка з'явиться відрізок прямої, що з'єднує точки $(0;0)$ та $(a;b)$, який і є зображенням комплексного числа $z = a + bi$ (рис. 1.5). У нашому прикладі $a = \text{Re}(z) = 2$, $b = \text{Im}(z) = 3$.

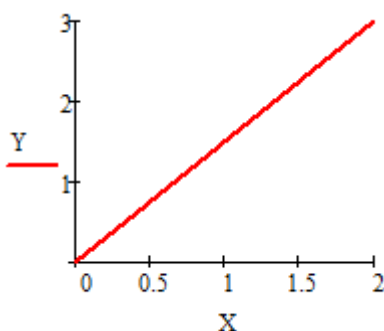


Рис. 1.5. Зображення комплексного числа вектором на площині у *MathCad 15*

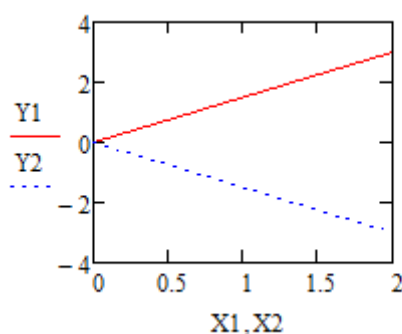


Рис. 1.6. *MathCad*-реалізація зображення двох комплексних чисел на комплексній площині

Якщо на одному графіку (комплексній площині) потрібно зобразити два комплексні числа одночасно, то ми подібним способом уводимо дві пари масивів $X1, Y1$ та $X2, Y2$ і після вставки поля графіка (рис. 1.4) у

місцезаповнювачі під віссю Ox записуємо через кому $X1, X2$, а у місцезаповнювачі зліва від Oy запишемо (через кому) $Y1, Y2$ (кома, поставлена після $Y1$, переводить курсор на наступний рядок).

Далі клацаємо двічі лівою кнопкою миші по полю графіка, і з'являється вікно форматування та налаштувань графіка (рис. 1.7).

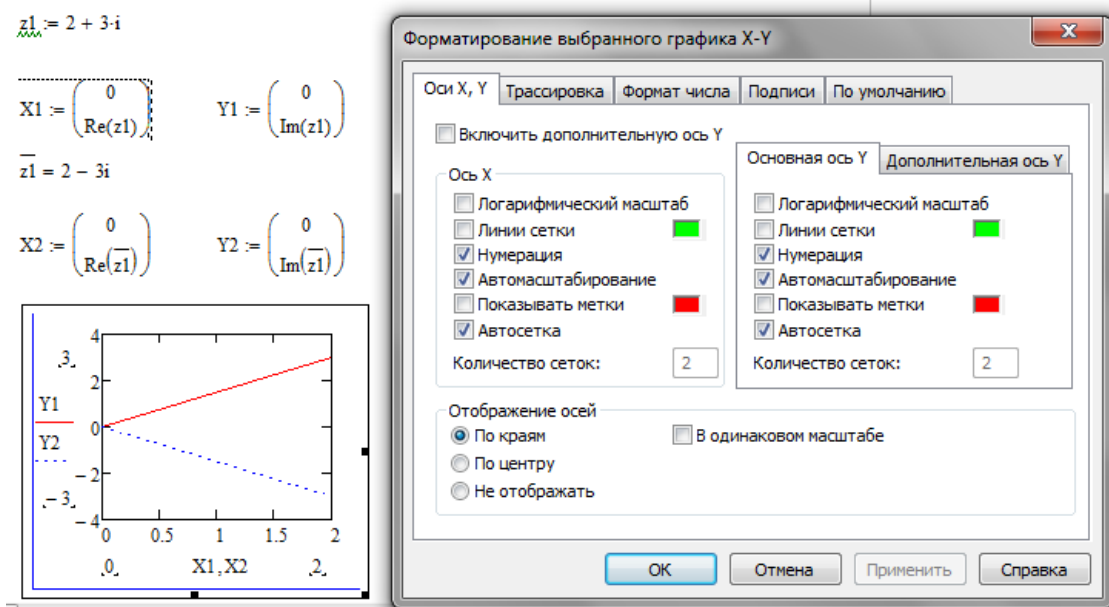


Рис. 1.7. Вікно форматування та налаштувань графіка у MathCad 15

Обираємо, наприклад, звичне для нас відображення осей по центру (рис. 1.8.1).

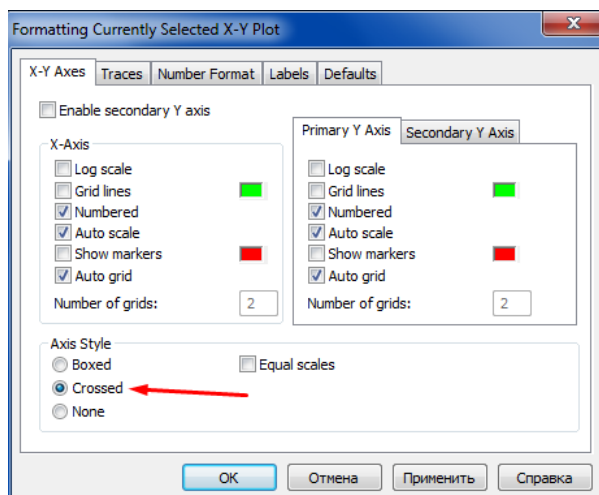


Рис. 1.8.1. Налаштування відображення координатних осей у MathCad 15

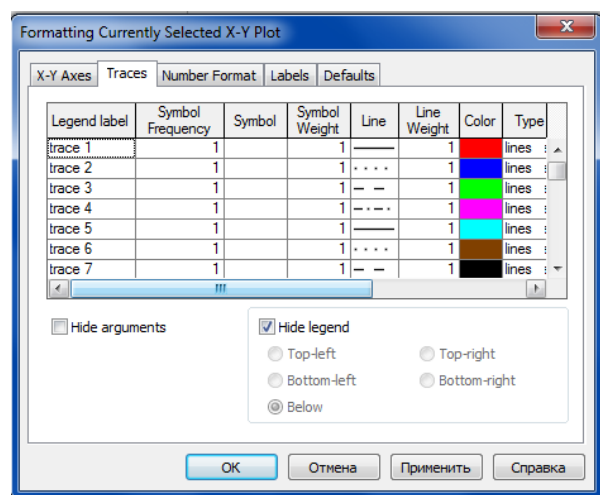


Рис. 1.8.2. Налаштування відображення ліній графіків у MathCad 15

Далі переходимо на вкладку **Трасування (Traces)**, де налаштовуємо вигляд, товщину та колір кожної лінії (рис. 1.8.2).

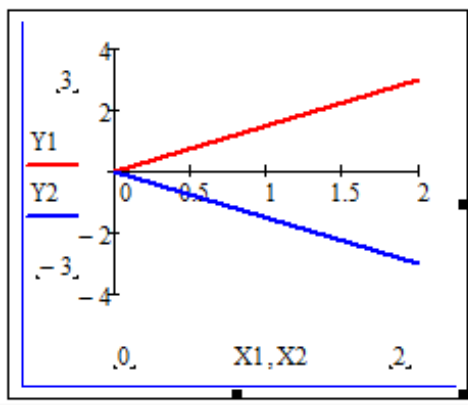


Рис. 1.9. Зображення двох комплексних чисел векторами на комплексній площині у MathCad 15 після зміни налаштувань графіка

$$z_1 := 2 + 3i$$

$$X1 := \begin{bmatrix} 0 \\ \text{Re}(z_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad Y1 := \begin{bmatrix} 0 \\ \text{Im}(z_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\overline{z_1} := z_2 = 2 - 3i$$

$$X2 := \begin{bmatrix} 0 \\ \text{Re}(z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad Y2 := \begin{bmatrix} 0 \\ \text{Im}(z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Рис. 1.10. Задання комплексних чисел у MathCad Prime та формування масивів, необхідних для зображення даних чисел на комплексній площині

У MathCad Prime все виконується аналогічно, лише з врахуванням особливостей вставки та налаштування графіків.

Наприклад, як і вище, зобразимо числа $z_1 = 2 + 3i$ та $z_2 = \overline{z_1} = 2 - 3i$:

- 1) задаємо числа та формуємо відповідні масиви (рис. 1.10);
- 2) вставляємо область графіка (рис. 1.11)

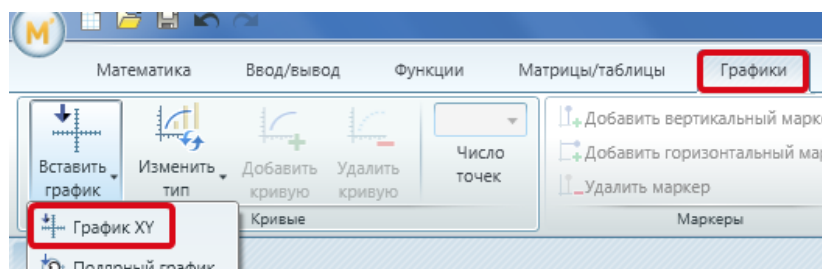


Рис. 1.11. Вставка області графіка у MathCad Prime

та зображаємо на ньому число z_1 (рис. 12 а)):

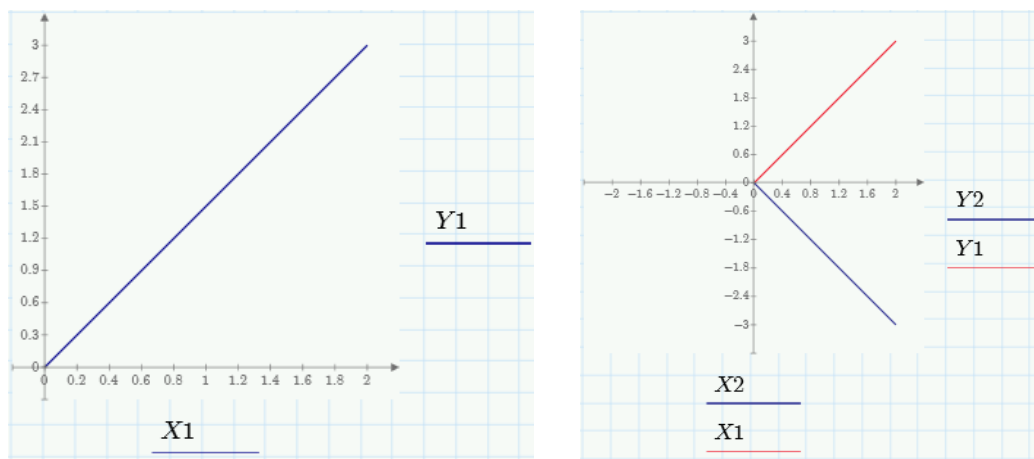


Рис. 1.12. Зображення комплексних чисел векторами на площині у MathCad Prime
а) б)

3) встановлюємо курсор у нижню область графіка (лівіше вже вставленого X1) та натискаємо **Додати криву** на панелі графіків (рис. 1.13), у місцепоповнювач, що з'явився, вводимо X2; аналогічно встановлюємо курсор у праву область графіка (лівіше вже вставленого Y1) та натискаємо **Додати криву** на панелі графіків і у місцепоповнювач, що з'явився, вводимо Y2;

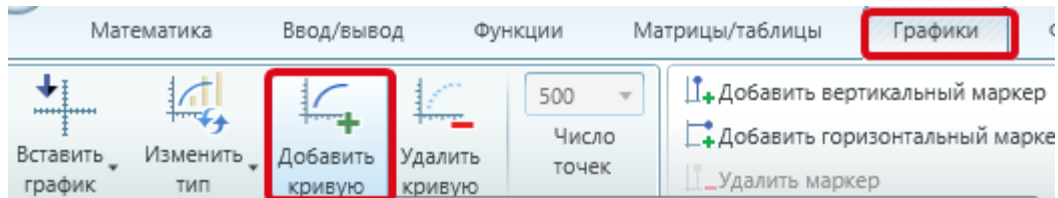


Рис. 1.13. Додавання графіка у MathCad Prime

4) налаштовуємо для кожного графіка тип ліній та кольори, можна також налаштувати фон графіка та відображення осей (рис. 1.14).

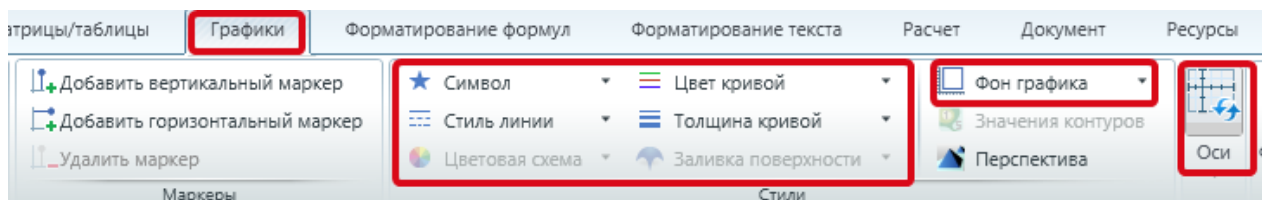


Рис. 1.14. Налаштування графіка у MathCad Prime

Результат наведено на рис. 1.12 б).

Якщо задано два комплексні числа $z_1 = a_1 + b_1i$ та $z_2 = a_2 + b_2i$, то

$$|z_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \quad z_1 \cdot \overline{z_1} = |z_1|^2,$$

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i)(a_2 - b_2i)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + (b_1a_2 - a_1b_2)i}{a_2^2 + b_2^2},$$

$$z_1^n = (a_1 + b_1i)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a_1^{n-k} b_1^k i^k.$$

Для виконання завдань 1а)-г) виконуємо задані дії над уже введенними комплексними числами (в нашому прикладі це $z_1 = 2 + 3i$ та $z_2 = \overline{z_1} = 2 - 3i$):

$$\begin{array}{lll}
z1 - \overline{z1} = 6i & z1 \cdot \overline{z1} = 13 & \underline{\underline{m}} := 4 \\
z1 + \overline{z1} = 4 & \frac{z1}{\overline{z1}} = -0.385 + 0.923i & z1^{\underline{\underline{m}}} = -119 - 120i
\end{array}$$

Якщо замість звичайного знака рівності у формулах використати знак символної рівності (стрілку), то отримаємо результати в алгебраїчній формі зі звичайними дробами, наприклад:

$$\frac{z1}{\overline{z1}} \rightarrow -\frac{5}{13} + \frac{12}{13} \cdot i$$

Комплексне число $z = a + bi$ можна записати у **тригонометричній формі**

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

та у **показниковій формі**

$$z = |z| e^{i\varphi},$$

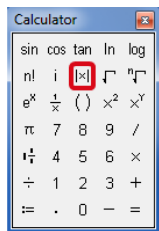
де $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль числа z , а $\varphi = \arg(z)$ – аргумент числа z ($-\pi < \varphi \leq \pi$), який обчислюється за формулою

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctg \frac{b}{a}, & \text{якщо } a > 0, \\ \pi + \arctg \frac{b}{a}, & \text{якщо } a < 0, b \geq 0, \\ -\pi + \arctg \frac{b}{a}, & \text{якщо } a < 0, b < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{якщо } a > 0, b = 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{якщо } a < 0, b = 0. \end{cases}$$

Для знаходження модуля комплексного числа у *Mathcad* використовується звичайний знак модуля з панелі **Калькулятор** у *Mathcad 15* та з панелі **Оператори** вкладки **Математика** у *Mathcad Prime*. Аргумент комплексного числа в обох версіях *Mathcad* знаходиться з допомогою функції $\arg(z)$.

$$z := 1 - i$$

$$|z| \rightarrow \sqrt{2} \quad \arg(z) \rightarrow -\frac{\pi}{4}$$



$$z := 1 - 1i$$

$$|z| \rightarrow \sqrt{2} \quad \arg(z) \rightarrow \frac{-\pi}{4}$$

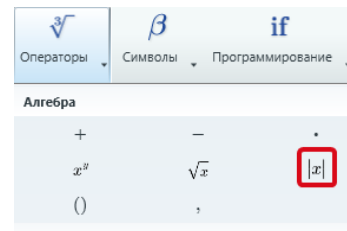


Рис. 1.15. Знаходження модуля та аргументу комплексного числа

а) у MathCad 15

б) у MathCad Prime

Для виконання завдання 1д), тобто для запису числа у тригонометричній $z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ та показниковій $z = |z| e^{i\varphi}$ формах, вводимо змінні, наприклад, mz та az , які позначатимуть відповідно модуль та аргумент даного числа (рис. 1.16.1, 1.16.2). Після цього записуємо відповідні формули і використовуємо ключове слово **explicit** з панелі **Символьні (Symbolic)** (після неї ставимо кому і пишемо **ALL**).

Функція перетворення з ключовим словом **explicit** підставляє у формулу обрані числові значення параметрів, не виконуючи арифметичних дій; модифікатор **ALL** означає, що ми підставляємо числові значення замість **усіх** параметрів у формулі. Для перевірки можна після отриманого тригонометричного/показникового вигляду написати знак рівності або символічної рівності (стрілку) й отримати алгебраїчну форму даного числа.

$$z1 := 2 + 3 \cdot i$$

$$mz := |z1| \rightarrow \sqrt{13} \quad az := \arg(z1) \rightarrow \operatorname{atan}\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$trz1 := mz \cdot (\cos(az) + i \cdot \sin(az))$$

$$trz1 \text{ explicit, ALL} \rightarrow \sqrt{13} \cdot \left(\cos\left(\operatorname{atan}\left(\frac{3}{2}\right)\right) + i \cdot \sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{3}{2}\right)\right) \right) = 2 + 3i$$

$$pz1 := mz \cdot \exp(i \cdot az) \quad pz1 \text{ explicit, ALL} \rightarrow \sqrt{13} \cdot e^{i \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{3}{2}\right)} = 2 + 3i$$

Рис. 1.16.1. Запис комплексних чисел у тригонометричній та показниковій формах у MathCad 15

$$\begin{aligned}
 z1 &:= 2 + 3i \\
 mz &:= |z1| \rightarrow \sqrt{13} & az &:= \arg(z1) \rightarrow \operatorname{atan}\left(\frac{3}{2}\right) \\
 trz1 &:= mz \cdot (\cos(az) + 1i \cdot \sin(az)) \\
 trz1 &\xrightarrow{\text{explicit}, ALL} \sqrt{13} \cdot \left(\cos\left(\operatorname{atan}\left(\frac{3}{2}\right)\right) + 1i \cdot \sin\left(\operatorname{atan}\left(\frac{3}{2}\right)\right) \right) = 2 + 3i \\
 pz1 &:= mz \cdot \exp(1i \cdot (az)) & pz1 &\xrightarrow{\text{explicit}, ALL} \sqrt{13} \cdot \exp\left(1i \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{3}{2}\right)\right) = 2 + 3i
 \end{aligned}$$

Рис. 1.16.2. Запис комплексних чисел у тригонометричній та показниковій формах у MathCad Prime

У MathCad Prime ключове слово **explicit** та модифікатор **ALL** знаходяться на панелі **Символьні операції** вкладки **Математика** (рис. 1.17).

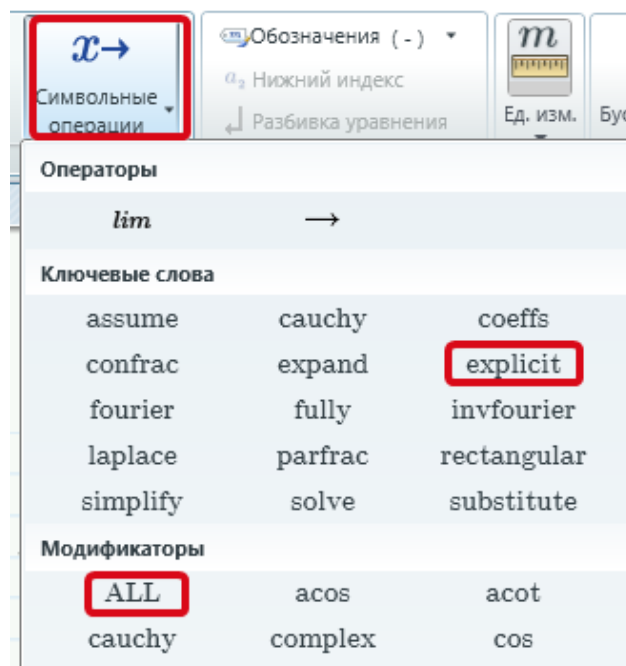


Рис. 1.17. Розташування панелей ключових слів та модифікаторів у MathCad Prime

До завдання 2. Добування кореня натурального степеня з комплексного числа $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ здійснюється за формулою

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) = \omega_k,$$

де $\rho = |z|$, $\varphi = \arg z$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, тобто $\sqrt[n]{z}$ має n різних значень $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$.

Для реалізації цього в *MathCad* задаємо z (в алгебраїчній формі), n (показник степеня кореня), діапазон зміни k , записуємо формулу усіх значень ω_k кореня $\sqrt[n]{z}$ та виводимо усі значення кореня як масив ω (рис. 1.18.1, 1.18.2):

$$\begin{aligned}
 n &:= 3 & z &:= 1 + i & k &:= 0..n-1 \\
 \sqrt[n]{|z|} &= 1.122 \\
 \omega_k &:= \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\arg(z) + 2\pi \cdot k}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\arg(z) + 2\pi \cdot k}{n}\right) \right) \\
 \omega &= \begin{pmatrix} 1.084 + 0.291i \\ -0.794 + 0.794i \\ -0.291 - 1.084i \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Рис. 1.18.1. Приклад знаходження всіх значень кореня з комплексного числа у *MathCad 15*

$$\begin{aligned}
 n &:= 3 & k &:= 0..n-1 \\
 z &:= 1 + 1i \\
 \sqrt[n]{|z|} &\rightarrow \sqrt[3]{\sqrt{2}} = 1.122 \\
 \omega_k &:= \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\arg(z) + 2 \cdot \pi \cdot k}{n}\right) + 1i \cdot \sin\left(\frac{\arg(z) + 2 \cdot \pi \cdot k}{n}\right) \right) \\
 \omega_k &= \begin{bmatrix} 1.084 + 0.291i \\ -0.794 + 0.794i \\ -0.291 - 1.084i \end{bmatrix} \quad \text{або} \quad \omega_k \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{(1i \cdot \sqrt{6} + \sqrt{2}) \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2}}}{2 + 2i} \\ \frac{-(\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2}})}{1 + 1i} \\ \frac{-(1i \cdot \sqrt{6}) + \sqrt{2}}{2 + 2i} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{2}} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Рис. 1.18.2. Приклад знаходження всіх значень кореня з комплексного числа у *MathCad Prime*

Зауваження. Якщо $z \neq 0$ і $n > 2$ – натуральне число, то числа $\omega_k = \sqrt[n]{z}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) розташовані у вершинах правильного n -кутника, вписаного в коло радіуса $R = \sqrt[n]{|z|} = \sqrt[n]{\rho}$ із центром у початку координат, причому одна з вершин цього n -кутника розташована на промені, що утворює з додатним напрямком осі Ox кут $\frac{1}{n} \arg z$.

Враховуючи вищенаведене зауваження, для зображення усіх значень кореня з числа z на комплексній площині, слід у системі координат зобразити коло з центром у початку координат радіуса $R = \sqrt[n]{|z|} = \sqrt[n]{\rho}$ та точки $(\operatorname{Re}(\omega_k); \operatorname{Im}(\omega_k))$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) на ньому (рис. 1.19).

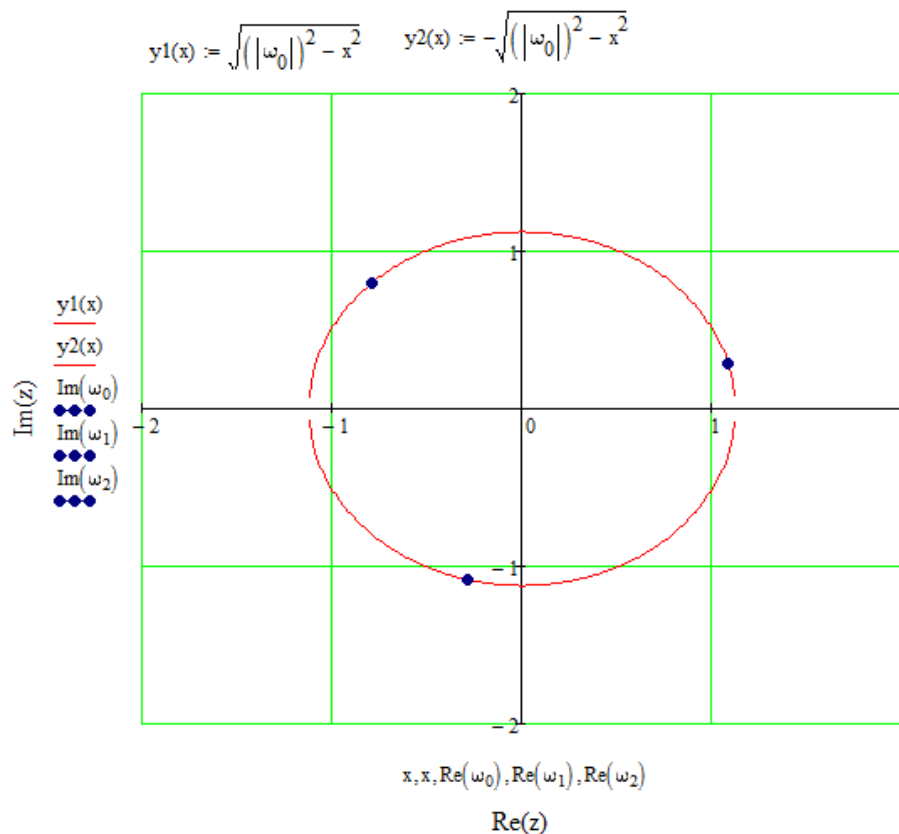
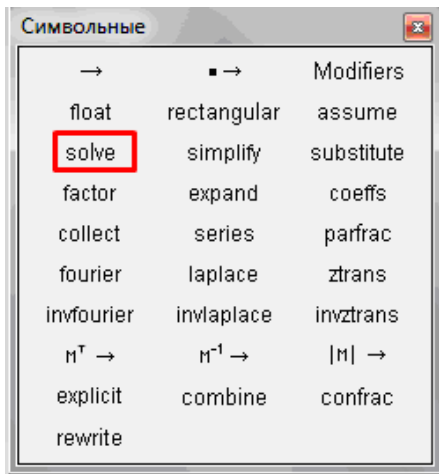


Рис.1.19. Приклад зображення усіх значень кореня з комплексного числа у *MathCad 15*

До завдання 3. Для знаходження коренів алгебраїчних рівнянь (рівнянь вигляду $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$) у *MathCad* є принаймні дві функції ***solve*** (з панелі **Символьні (Symbolic)**) та ***polyroots*** (вводиться з клавіатури).

Використання функції ***solve*** у *MathCad 15* здійснюється так: на панелі **Символьні (Symbolic)** натискається ***solve***, у місцезаповнювач, який з'явиться перед ***solve***, вводиться ліва частина $f(x)$ рівняння $f(x) = 0$, а через кому після ***solve*** записується змінна чи функція, відносно якої треба розв'язати рівняння (рис. 20.1). У *MathCad Prime* функція ***solve*** знаходиться на панелі **Символьні операції** вкладки **Математика** (рис. 1.20.2).

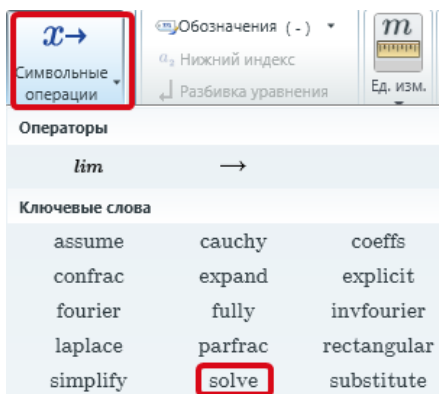


$$x_1 = \frac{12 + 6i}{10} = 1.2 + 0.6i$$

$$x_2 = \frac{12 - 6i}{10} = 1.2 - 0.6i$$

$$\begin{pmatrix} \frac{6}{5} + \frac{3}{5}i \\ \frac{6}{5} - \frac{3}{5}i \end{pmatrix}$$

Рис. 1.20.1. Схема використання функції *solve* у MathCad 15



$$5 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 9 = 0 \xrightarrow{\text{solve, } x} \begin{pmatrix} \frac{6 + 3i}{5} \\ \frac{-3i + 6}{5} \end{pmatrix}$$

Рис. 1.20.2. Схема використання функції *solve* у MathCad Prime

Функція ***polyroots*** призначена для знаходження усіх коренів рівняння вигляду $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$. Для її використання слід попередньо сформувати вектор-стовпець, наприклад, v коефіцієнтів лівої частини рівняння (починаючи від a_0 , завершуючи a_n):

$$v = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

а далі ввести з клавіатури ***polyroots(v)*** і отримати вектор-стовпець, який складається з усіх коренів заданого рівняння (рис. 1.21).

Подібним способом (з допомогою ***solve*** або ***polyroots***) у MathCad можна знаходити корені алгебраїчних рівнянь з комплексними коефіцієнтами (рис. 1.22).

Знаходження коренів з допомогою функції **polyroots**

$$v := \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$5x^2 - 12x + 9 = 0.$$

$$x_1 = \frac{12 + 6i}{10} = 1,2 + 0,6i$$

$$x_2 = \frac{12 - 6i}{10} = 1,2 - 0,6i.$$

$$\text{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} 1.2 + 0.6i \\ 1.2 - 0.6i \end{pmatrix}$$

Рис. 1.21. Схема використання функції **polyroots** у MathCad 15 або MathCad Prime

**Алгебраїчні рівняння
з комплексними коефіцієнтами**

$$(-1 + 1i) \cdot x^2 + (3 + 2i) \cdot x + 2 - 1i = 0$$

$$v1 := \begin{bmatrix} 2 - 1i \\ 3 + 2i \\ -1 - 1i \end{bmatrix}$$

$$\text{polyroots}(v1) = \begin{bmatrix} -0.318 + 0.428i \\ 2.818 - 0.928i \end{bmatrix}$$

або

$$(-1 + 1i) \cdot x^2 + (3 + 2i) \cdot x + 2 - 1i = 0 \xrightarrow{\text{solve}, x} \begin{bmatrix} 1 + 2i \\ 1 \\ -\frac{1}{1 + 1i} \end{bmatrix}$$

Рис. 1.22. Розв'язування алгебраїчних рівнянь із комплексними коефіцієнтами у MathCad 15 або MathCad Prime

Лабораторна робота №2

Тема: Первісна. Невизначений інтеграл

Мета: ознайомлення студентів із поняттям первісної, геометричним змістом невизначеного інтеграла, особливостями обчислень невизначених інтегралів у пакеті MathCad. Формування практичних навичок інтегрування з допомогою пакета MathCad.

Завдання для самостійного виконання (лабораторна робота №2)

1. Для заданої функції знайти первісну, графік якої проходить через точку $A(x_0; y_0)$. Зобразити графік цієї первісної, позначити на графіку точку $A(x_0; y_0)$.

1	$f(x) = \sqrt{x^3} + \frac{2}{x}, A(1;3)$	11	$f(x) = \frac{\sin x}{e + \cos x}, A\left(\frac{\pi}{2}; 2\right)$
2	$f(x) = \sqrt{x+1} + e^{2x}, A(0;1)$	12	$f(x) = \frac{6x-7}{3x+1}, A\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$
3	$f(x) = 4x^2 + \frac{9}{x^2}, A(-1;1)$	13	$f(x) = \cos 3x \cos 2x, A\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$
4	$f(x) = x^2 - 2\sqrt{x} + 1, A(4;0)$	14	$f(x) = \frac{4x - 5\sqrt{x}}{\sqrt{x}}, A(3; 8\sqrt{3})$
5	$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}, A(0; -2)$	15	$f(x) = \frac{1}{x^2(x-1)}, A(2; -\ln 2)$
6	$f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{x}, A(1;3)$	16	$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4x + 3}, A\left(4; \frac{1 - \ln 3}{2}\right)$
7	$f(x) = (x+1)\sin 2x, A(0; -1)$	17	$f(x) = \sin 2x + \frac{1}{\cos^2 x}, A\left(\frac{\pi}{4}; 2\right)$
8	$f(x) = \frac{x^3 - x}{1 + x^4}, A(0;2)$	18	$f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}, A(0;1)$
9	$f(x) = \frac{18x}{1 + 9x^2}, A\left(\frac{1}{3}; 4\right)$	19	$f(x) = \cos 2x + \frac{4}{\sin^2 x}, A\left(\frac{\pi}{6}; 0\right)$
10	$f(x) = \frac{x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{x}, A(1;2)$	20	$f(x) = 5x^4 + 3x^2 - 7, A(1; -4)$

2. Знайти невизначений інтеграл та перевірити отриманий результат диференціюванням.

1	$\int \frac{e^{4x} dx}{(e^{4x} + 4)^2}$	11	$\int (6x^2 + 5) \ln x dx$
2	$\int \frac{\ln x + 5}{x} dx$	12	$\int \frac{\cos x dx}{\sin^4 x}$
3	$\int e^{4x^2 - 3x + 2} \cdot (8x - 3) dx$	13	$\int \sin^2 5x dx$
4	$\int (2x - 7) \cdot \cos 2x dx$	14	$\int (3x - 4) \cdot \sin 3x dx$
5	$\int x \sin(x + 3) dx$	15	$\int e^{7x} \cdot (x + 1) dx$
6	$\int \frac{\sqrt{x^3 + 5} - x^4}{x^2} dx$	16	$\int (6 - 5x) \cdot \cos 2x dx$
7	$\int \arctg x dx$	17	$\int \frac{x dx}{(x^2 + 9)^6}$
8	$\int \ln(x^2 - 4) dx$	18	$\int \arcsin 3x dx$
9	$\int (x^2 + 5) \cdot e^x dx$	19	$\int \frac{x + 2}{9x^2 - 6x + 10} dx$
10	$\int \frac{5x}{3x + 1} dx$	20	$\int x \arccos 2x dx$

3. Обчислити невизначений інтеграл:

а) розкладаючи підінтегральну функцію у суму простих дробів;

б) безпосереднім використанням оператора невизначеного інтеграла;

виконати перевірку.

1	$\int \frac{x^2 + 12x - 4}{x^3 - 4x} dx$	11	$\int \frac{9x^4 - 4x + 1}{(x^2 - 1)(x + 2)} dx$
2	$\int \frac{x - 1}{4x^3 + x} dx$	12	$\int \frac{2x + 1}{x(x + 1)^2} dx$
3	$\int \frac{x^2 - 3}{x^3 + 3x} dx$	13	$\int \frac{x - 2}{x^3 + x^2 + 2x + 2} dx$
4	$\int \frac{50 - 9x}{x(x - 5)^2} dx$	14	$\int \frac{9x - 2x^2 + 14}{x^2(x + 7)} dx$

5	$\int \frac{4x^2 - 11x + 4}{x \cdot (x-2)^2} dx$	15	$\int \frac{x^2 - 8x - 12}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8} dx$
6	$\int \frac{3x^2 - x + 15}{x^3 + 5x} dx$	16	$\int \frac{9x - 3x^2 - 2}{2x^2 - x^3} dx$
7	$\int \frac{3x + 13}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)} dx$	17	$\int \frac{10x - 9x^2 - 9}{(x^2 + 1)(x^2 - 9)} dx$
8	$\int \frac{x^2 - 6x + 8}{x^4 + 8x} dx$	18	$\int \frac{12 - 6x}{(x+1)(x-2)(x^2 - 4x + 13)} dx.$
9	$\int \frac{4x^2 + 7x + 5}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 5)} dx$	19	$\int \frac{x^2 + 2x + 20}{x(x-1)(x^2 + 2x + 5)} dx$
10	$\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x-2)(x^3 - 8)} dx$	20	$\int \frac{x^2 + 3x - 6}{(x+1)(x^2 + 6x + 13)} dx$

 Методичні вказівки
та приклади виконання завдань у MathCad

До завдання 1. Графік первісної $y = F(x)$ функції $f(x)$ називають **інтегральною кривою**. Тому геометрично невизначений інтеграл $\int f(x)dx$ є сім'єю інтегральних кривих $y = F(x) + C$ (C – довільна стала), кожна з яких може бути отримана з кривої $y = F(x)$ паралельним перенесенням на C одиниць уздовж осі Oy : вгору, якщо $C > 0$, вниз – при $C < 0$. За рахунок підбору сталої C із сім'ї інтегральних кривих можна вибрати ту, яка проходить через задану точку $(x_0; y_0)$ (якщо $F(x)$ визначена у точці x_0). Отже, якщо ставиться задача знаходження первісної функції $f(x)$, яка проходить через точку $(x_0; y_0)$, то спочатку потрібно знайти невизначений інтеграл $\int f(x)dx$, тобто визначити сім'ю інтегральних кривих $y = F(x) + C$, а далі знайти сталу C з умови $y_0 = F(x_0) + C$ (умова того, що шукана первісна проходить через точку $(x_0; y_0)$).

Розв'язування такої задачі у *MathCad* складається з двох кроків:

Крок 1. Задати функцію $f(x)$ та знайти невизначений інтеграл $\int f(x)dx$.

Крок 2. Задати x_0 та y_0 і з допомогою ключового слова **solve** розв'язати рівняння $y_0 = F(x_0) + C$ для знаходження сталої C .

Зауваження 1. Згідно з означенням $\int f(x)dx = F(x) + C$, де $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, а C – довільна стала. MathCad видає результат у вигляді $\int f(x)dx = F(x)$, тобто довільна стала C у MathCad-відповіді не записується. Її можна приєднувати у вираз для відповіді самостійно.

Для знаходження невизначеного інтеграла у MathCad 15 потрібно перейти на панель **Calculus** (рис. 2.1.1) і вибрати відповідний шаблон.

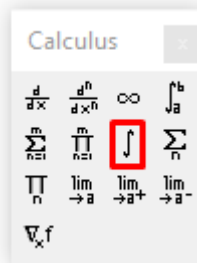


Рис. 2.1.1. Вставка шаблону невизначеного інтеграла в MathCad 15

У MathCad Prime шаблон інтеграла знаходиться на вкладці **Математика** → **Оператори** → **Математичний аналіз** (рис. 2.1.2).

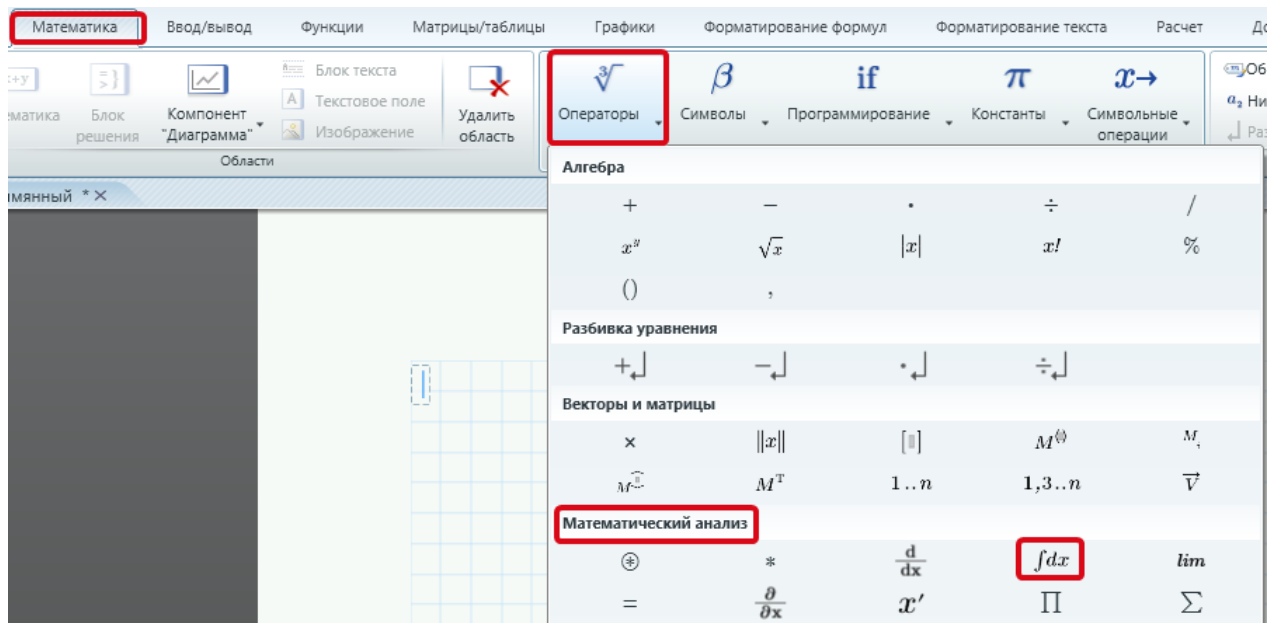


Рис. 2.1.2. Вставка шаблону невизначеного інтеграла в MathCad Prime

В обох версіях *MathCad* шаблон (невизначеного) інтеграла має вигляд, наведений на рис. 2.2, де у перший місцезаповнювач потрібно ввести підінтегральну функцію, а у другий – змінну інтегрування.

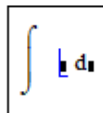


Рис. 2.2. Шаблон (невизначеного) інтеграла в *MathCad*

Натиснувши на символ  з панелі **Symbolic** у *MathCad 15* або **Математика** → **Оператори** → **Символьні операції** у *MathCad Prime*, ми одержимо відповідь (якщо обчислювальні алгоритми *MathCad* дозволяють отримати результат в аналітичному вигляді, тобто у вигляді формули). На рис. 2.3 наведено приклади знаходження невизначеного інтеграла.

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \int x \sqrt{x^2 + 32} \, dx \rightarrow \frac{(x^2 + 32)^{\frac{3}{2}}}{3} \\
 2. \quad & \int x^2 \exp(x - 2) \, dx \rightarrow e^{x-2} \cdot (x^2 - 2x + 2) \\
 3. \quad & f(x) := \frac{2^{x+2} - 3^{x-1}}{6^x} \quad \int f(x) \, dx \rightarrow \frac{3^x}{3 \cdot \ln(2) \cdot 6^x} - \frac{4 \cdot 2^x}{\ln(3) \cdot 6^x}
 \end{aligned}$$

Рис. 2.3. Приклади знаходження невизначених інтегралів у *MathCad 15* та *MathCad Prime*

Приклад 2.1. Знайти первісну функції $f(x) = 4x^3 + x - 2$, графік якої проходить через точку $A(1; -1)$.

Зобразити графік знайденої первісної в системі координат та відмітити на ньому точку A .

► Реалізуємо алгоритм, описаний вище, враховуючи, що $x_0 = 1$, $y_0 = -1$. До цього алгоритму додається ще третій крок – зображення графіка.

Крок 1. Вводимо задану функцію та знаходимо невизначений інтеграл від неї:

$$f(x) := 4 \cdot x^3 + x - 2 \quad \underline{\underline{F(x)}} := \int f(x) \, dx \rightarrow x^4 + \frac{x^2}{2} - 2 \cdot x$$

Крок 2. Вводимо задані x_0 , y_0 та знаходимо сталу C :

$$x_0 := 1 \quad y_0 := -1$$

$$\underline{\underline{C}} := F(x_0) + C = y_0 \text{ solve, } C \rightarrow -\frac{1}{2}$$

Крок 3. Записуємо рівняння знайденої первісної та зображаємо її на графіку:

$$y(x) := F(x) + C \rightarrow x^4 + \frac{x^2}{2} - 2 \cdot x - \frac{1}{2}$$

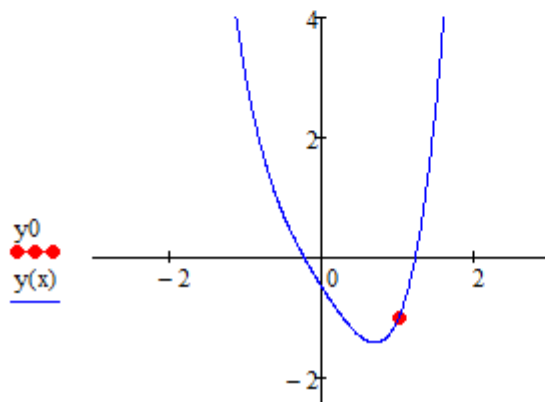


Рис. 2.4. Знаходження у MathCad первісної, графік якої проходить через задану точку

$$\underline{\underline{y(x)}} := F(x) + C \rightarrow x^4 + \frac{x^2}{2} - 2 \cdot x - \frac{1}{2}$$

$$C1 := 0 \quad y1(x) := F(x) + C1 \rightarrow x^4 + \frac{x^2}{2} - 2 \cdot x$$

$$C2 := \frac{1}{2}$$

$$y2(x) := F(x) + C2 \rightarrow x^4 + \frac{x^2}{2} - 2 \cdot x + \frac{1}{2}$$

$$C3 := 1$$

$$y3(x) := F(x) + C3 \rightarrow x^4 + \frac{x^2}{2} - 2 \cdot x + 1$$

$$C4 := -1$$

$$y4(x) := F(x) + C4 \rightarrow x^4 + \frac{x^2}{2} - 2 \cdot x - 1$$

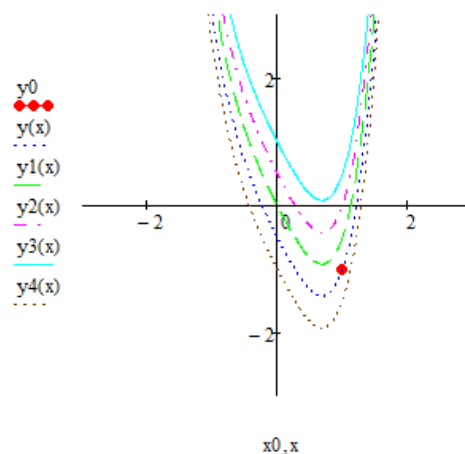


Рис. 2.5. Інтегральні криві для прикладу 2.1 (при $C = -1/2, 0, 1/2, -1, 1$)

На рис 2.5 проілюстровано геометричний зміст невизначеного інтеграла: зображено інтегральні криві $F(x) + C$ при $C = -1/2, 0, 1/2, -1, 1$. ◀

До завдання 2. У *MathCad 15* інтегрування можна виконувати й іншим способом: використовуючи меню. Для цього потрібно ввести функцію $f(x)$ (формулу), виділити змінну інтегрування у виразі та виконати команду **Symbolic** → **Variable** → **Integrate** (рис. 2.6). У *MathCad Prime* такої можливості не передбачено.

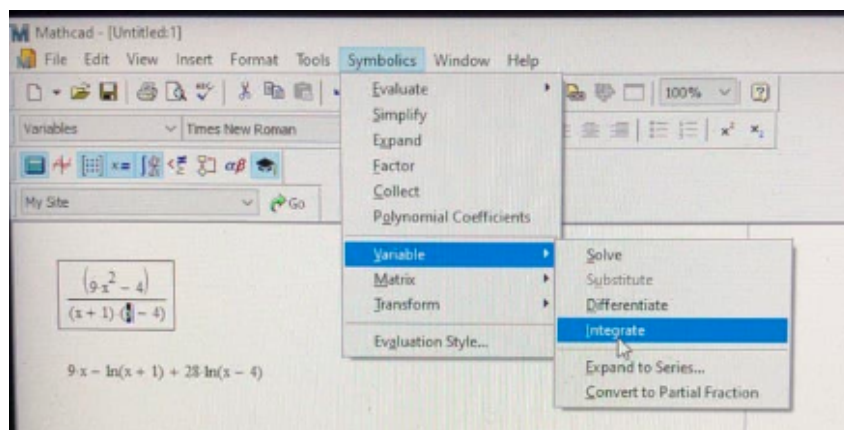


Рис. 2.6. Інтегрування функції за вказаною змінною за допомогою меню у *MathCad 15*

Перевірка результату інтегрування здійснюється за допомогою диференціювання (рис. 2.7). Шаблон диференціювання $\frac{d}{dx}$ знаходиться на тих самих панелях, де знаходиться шаблон інтеграла у кожній із версій *MathCad*.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x - 5}} dx \rightarrow \ln(x + \sqrt{x^2 + 2x - 5} + 1)$$

Перевірка

$$\frac{d}{dx} \ln(x + \sqrt{x^2 + 2x - 5} + 1) \rightarrow \frac{\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x-5}} + 1}{x + \sqrt{x^2+2x-5} + 1} + \frac{-1}{2}$$

$$\frac{d}{dx} \ln(x + \sqrt{x^2 + 2x - 5} + 1) \text{ simplify } \rightarrow \left(\frac{x^2 + 2x - 5}{x^2 + 2x - 5} \right)^{\frac{-1}{2}}$$

Рис. 2.7. Перевірка результату інтегрування за допомогою диференціювання у *MathCad*

Зауваження 2. При виконанні перевірки диференціюванням рівність отриманого виразу підінтегральній функції може бути не очевидною. Тоді потрібно задіяти оператори спрощення. Спрощення символічних виразів здійснюється за допомогою команд із панелі **Symbolic** у *MathCad 15* або **Математика** → **Оператори** → **Символьні операції** у *MathCad Prime*:

- **Evaluate** – обчислити;
- **Simplify** – спростити;
- **Expand** – розкласти;
- **Factor** – розкласти на множники;
- **Collect** – звести подібні;
- **Polynomial Coefficients** – коефіцієнти полінома.

Отже, для спрощення символічних виразів потрібно виконати такі дії:

1. Ввести вираз, який потрібно спростити.
2. Виділити вираз.
3. Вибрати відповідну команду з панелі **Symbolic** у *MathCad 15* або **Математика** → **Оператори** → **Символьні операції** у *MathCad Prime*.

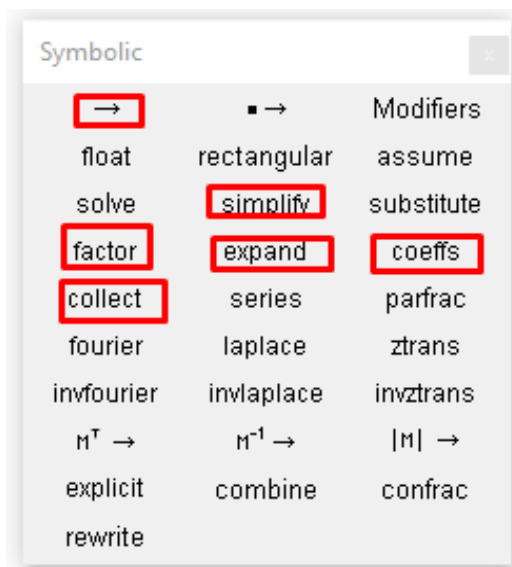


Рис. 2.8. Команди для спрощення виразів у *MathCad*

До завдання 3. Проілюструємо можливості інтегрування дробово-раціональної функції у *MathCad* на нижченаведеному прикладі.

Приклад 2.2. Знайти інтеграл $\int \frac{x^2+1}{x^2-4x+3} dx$ двома способами:

- а) розклавши підінтегральну функцію у суму простих дробів;
- б) безпосереднім інтегруванням (не розкладаючи на прості дроби).

► а) Для розкладу дробово-раціональної функції на прості дроби слід виділити у функції змінну (у нашому випадку це x) і виконати команду **Symbolic** → **Variable** → **Convert to Partial Fraction** (рис. 2.9.1).

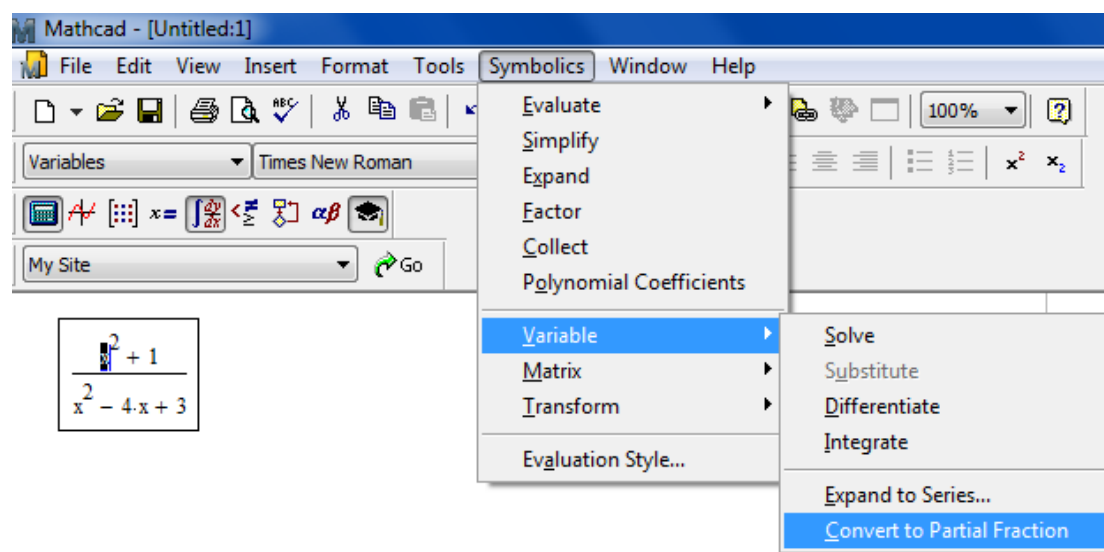


Рис. 2.9.1. Розклад дробово-раціональної функції на прості дроби з допомогою символного блоку у MathCad 15

Результат розкладу на прості дроби буде виведено під заданою функцією.

$$\frac{x^2+1}{x^2-4x+3}$$

$$\frac{5}{x-3} - \frac{1}{x-1} + 1$$

Рис. 2.9.2. Результат розкладу на прості дроби у MathCad 15

У MathCad 15 передбачено також інший спосіб розкладу дробово-раціональної функції на прості дроби, а саме з використанням функції **parfrac** з панелі **Symbolic** (рис. 2.9.3).

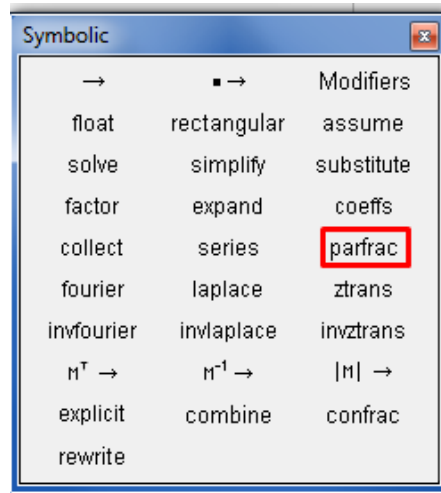


Рис. 2.9.3. Команда для розкладу дробово-раціональної функції на прості дроби у MathCad 15

При натисканні **parfrac** з'являється шаблон вигляду

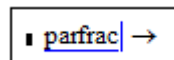


Рис. 2.9.4. Шаблон команди parfrac у MathCad 15

Далі потрібно у місцезаповнювач перед **parfrac** ввести функцію, яку треба розкласти на прості дроби:

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 3} \text{ parfrac} \rightarrow \frac{5}{x - 3} - \frac{1}{x - 1} + 1$$

Іноді ще можна зустріти такий варіант:

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 3} \text{ convert, parfrac, x} \rightarrow \frac{5}{x - 3} - \frac{1}{x - 1} + 1$$

В останньому з описаних варіантів також спочатку натискається **parfrac** з панелі **Symbolic**, далі перед ним із клавіатури вводиться **convert**, а після нього через кому вводять змінну, відносно якої мають отримати розклад (у нашому випадку це x). Такий варіант синтаксису більш притаманний версіям MathCad, нижчим за MathCad 15, але і у MathCad 15 він працює коректно (хоча у MathCad 15 цілком можна обійтись і без **convert**).

У Mathcad Prime розклад на прості дроби реалізується лише одним способом – з використанням символічного перетворення з ключовим словом **parfrac** (рис. 2.9.5). Для цього потрібно ввести дробово-раціональну функцію,

помістити курсор у кінець виразу, перейти на панель **Символьні операції** з вкладки **Математика** та обрати ключове слово **parfrac** у блоці ключових слів. Після цього на робочому листі після дробово-раціональної функції з'явиться стрілка зі словом **parfrac** над нею і за деякий час правіше від стрілки відобразиться результат (рис. 2.9.5).

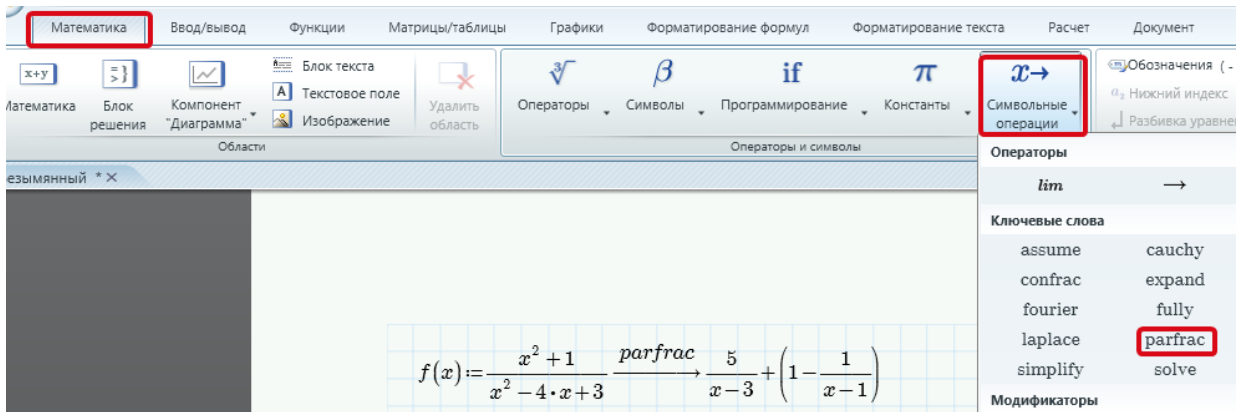


Рис. 2.9.5. Розклад дробово-раціональної функції на прості дроби у MathCad Prime

Далі отриманий розклад на прості дроби слід проінтегрувати. У **MathCad 15** це можна зробити двом способами: з використанням блоку символічного інтегрування або копіюванням розкладу на прості дроби та вставкою його у шаблон невизначеного інтеграла. Для використання блоку символічного інтегрування потрібно виділити змінну x в розкладі на прості дроби та виконати команду **Symbolic** → **Variable** → **Integrate** (рис. 2.10.1), після чого результат інтегрування з'явиться під функцією, яку потрібно було проінтегрувати.

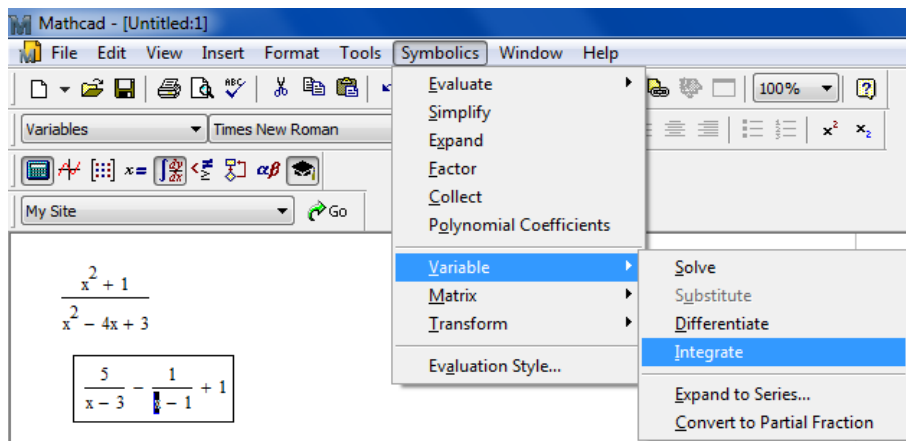


Рис. 2.10.1. Інтегрування розкладу на прості дроби у MathCad 15 з використанням блоку символічного інтегрування

У *MathCad Prime* інтегрування отриманого розкладу на прості дробі можливе лише копіюванням розкладу на прості дробі та вставкою його у шаблон невизначеного інтеграла (рис. 2.10.2).

$$f(x) := \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4 \cdot x + 3} \xrightarrow{\text{parfrac}} \frac{5}{x-3} + \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)$$

$$\int \left(\frac{5}{x-3} + \left(1 - \frac{1}{x-1}\right) \right) dx \rightarrow -\ln(x-1) + 5 \cdot \ln(x-3) + x$$

Рис. 2.10.2. Інтегрування розкладу на прості дробі у *MathCad Prime* (розклад скопійовано та вставлено у шаблон інтеграла)

б) Знаходження інтеграла від дробово-раціональної функції безпосереднім інтегруванням (не розкладаючи на прості дробі).

Як було описано вище, у *MathCad 15* знаходити невизначений інтеграл можна одним із двох способів: з допомогою блоку символного інтегрування або з використанням шаблону невизначеного інтеграла.

1. З допомогою блоку символного інтегрування: виділити у заданій функції (не розкладеній у суму простих дробів) змінну, по якій буде проводитись інтегрування, і натиснути ***Symbolic* → *Variable* → *Integrate*** (рис. 2.11.1).

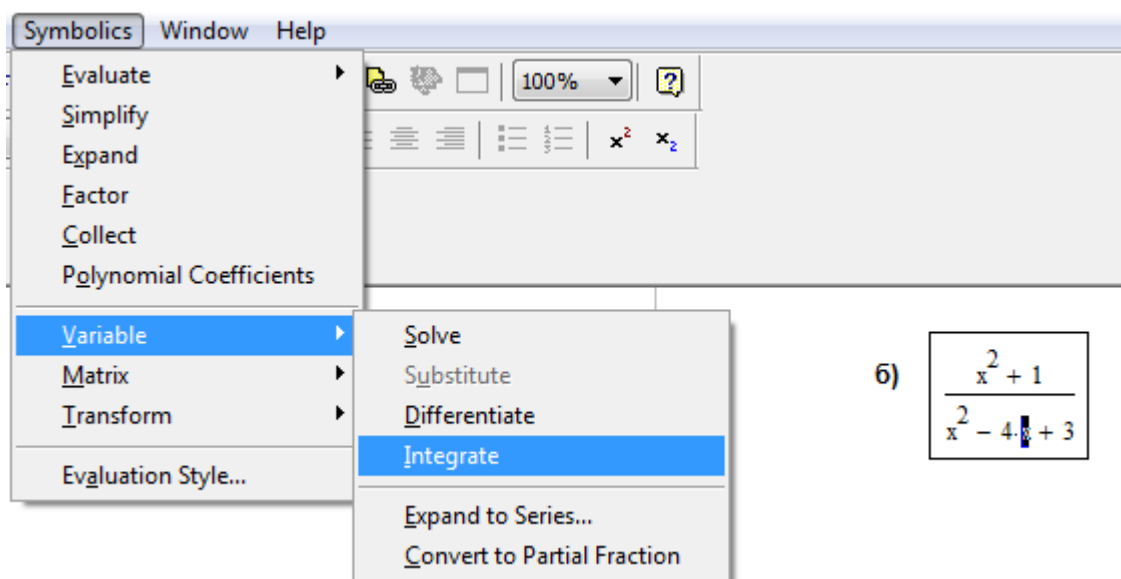


Рис. 2.11.1. Інтегрування дробово-раціональної функції без розкладу на прості дробі у *MathCad 15* з використанням блоку символного інтегрування

Результат інтегрування з'явиться під функцією, яку потрібно проінтегрувати (рис. 2.11.2).

б)
$$\frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 3}$$

$+ x - \ln(x - 1) + 5 \cdot \ln(x - 3)$ результат інтегрування

Рис. 2.11.2. Результат знаходження невизначеного інтеграла з допомогою блоку символьного інтегрування у MathCad 15

2. З використанням шаблону інтеграла: вставити на робочий лист MathCad шаблон невизначеного інтеграла, ввести у місцезаповнювач підінтегральної функції задану дробово-раціональну функцію і активувати стрілку символної рівності:

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4x + 3} dx \rightarrow x - \ln(x - 1) + 5 \cdot \ln(x - 3)$$

Або можна задати функцію заздалегідь, а у шаблон інтеграла вставити не аналітичний вираз функції, а лише її назву ($f(x)$):

$$f(x) := \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4 \cdot x + 3}$$

$$\int f(x) dx \rightarrow -\ln(x - 1) + 5 \cdot \ln(x - 3) + x$$

У MathCad Prime передбачено лише другий спосіб (із використанням шаблону інтеграла). ◀

Лабораторна робота №3

Тема: *Визначений інтеграл та його застосування. Невласні інтеграли*

Мета: *ознайомлення студентів із геометричними застосуваннями визначеного інтеграла, поняттям збіжності/розбіжності невластних інтегралів, особливостями знаходження визначених інтегралів та дослідження невластних інтегралів на збіжність у пакеті MathCad. Формування практичних навичок розв'язування прикладних задач інтегрального числення з допомогою пакета MathCad.*

Завдання для самостійного виконання (лабораторна робота №3)

1. *Обчислити площу фігури, обмеженої заданими лініями. Зобразити область (фігуру) в системі координат.*

1	$y = 4 - (x - 1)^2, y = \frac{3x}{2}, x = 0$	11	$y = 4 - x^2, 3x - 2y = 6$
2	$y = x^2, y = 2 - x$	12	$y = x^3, y = 1, x = 0$
3	$xy = 6, x + y - 7 = 0$	13	$x^2 = 4y, y = \frac{8}{x^2 + 4}$
4	$y = \sqrt{x}, y = x^3$	14	$y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x$
5	$y = \frac{1}{x}, y = 4 - x$	15	$y = \sqrt{4 - x^2}, y = 0, x = 0, x = 1$
6	$y = x^2, y = 3 - 2x$	16	$y = (x - 2)^3, y = 4x - 8$
7	$y = 2x - x^2, y = -x$	17	$xy = -9, y - x + 10 = 0$
8	$y = 2x + x^2, y = x + 2$	18	$y = (x - 1)^2, y^2 = x - 1$
9	$y = 2 - x^2, y = x^2$	19	$y = e^x, y = e^{-x}, x = 1$
10	$y = \frac{x^2}{4}, y = 3x - \frac{x^2}{2}$	20	$y = \frac{16}{x^2}, y = 17 - x^2 (x > 0)$

2. *Обчислити довжину дуги кривої, заданої в полярних координатах. Зобразити дану дугу у полярній системі координат.*

1	$r = 2\sin^2 \varphi, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$	11	$r = \sqrt{2}\varphi^2, \pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$
2	$r = 3(1 - \sin \varphi), \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6}$	12	$r = 5\cos^2 \varphi, \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{6}$

3	$r = \sqrt{5}(1 - \cos \varphi), \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$	13	$r = 3(1 + 2 \cos \varphi), \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$
4	$r = 2\varphi, \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$	14	$r = \sqrt{3}e^{2\varphi}, \frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
5	$r = 2(1 + 3 \sin \varphi), \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6}$	15	$r = 6 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$
6	$r = 4 \cos^2 \varphi, \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{6}$	16	$r = 6 \sin^2 \frac{\varphi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \pi$
7	$r = 2(1 + \sin \varphi), \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \pi$	17	$r = 2(1 + \cos \varphi), \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$
8	$r = 3\sqrt{\varphi}, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{9\pi}{4}$	18	$r = 7e^{\frac{3\varphi}{7}}, 0 \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{3}$
9	$r = 3(1 + \cos \varphi), \pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$	19	$r = 4\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$
10	$r = 3 - 2 \sin^2 \varphi, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}$	20	$r = 3 + \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$

3. Дослідити на збіжність невластні інтеграли

№	а)	б)
1	$\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^4}}$	$\int_3^\infty \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$
2	$\int_1^\infty \frac{x^2 dx}{1+x^6}$	$\int_0^{1/2} \frac{dx}{(2x-1)^2}$
3	$\int_{-2}^1 \frac{dx}{(x+2)^2}$	$\int_1^\infty \frac{dx}{9x^2 - 9x + 2}$
4	$\int_2^\infty \frac{dx}{x^3 \sqrt{\ln x}}$	$\int_0^4 \frac{10x dx}{16 - x^2}$
5	$\int_{-1}^\infty \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$	$\int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$
6	$\int_0^\infty \frac{(x+1) dx}{10 - 2x + x^2}$	$\int_1^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{31(x^3 - 1)}}$
7	$\int_5^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-5)^2}}$	$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(x+1)}$

8	$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$	$\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{(1-2x)^{10}}}$
9	$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{2x+1}$
10	$\int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx$	$\int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt[4]{64-x^6}} dx$
11	$\int_1^{\infty} \frac{xdx}{x^4+9}$	$\int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$
12	$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^5 x}$	$\int_0^1 \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$
13	$\int_{1/2}^3 \frac{dx}{(2x-1)^3}$	$\int_0^{\infty} e^{-3x} dx$
14	$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$	$\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$
15	$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$	$\int_1^{\infty} \frac{(2x+1)dx}{x^2(1+x)}$
16	$\int_8^{\infty} \frac{xdx}{3x^2+1}$	$\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt[7]{9-x^2}}$
17	$\int_0^e \frac{\frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx$	$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx$
18	$\int_1^{\infty} \frac{5x+7}{\sqrt{x^5}} dx$	$\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$
19	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$	$\int_1^e \frac{dx}{x \cdot \sqrt{\ln x}}$
20	$\int_3^5 \frac{dx}{x^2-7x+10}$	$\int_4^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

💡 **Методичні вказівки**
та приклади виконання завдань у MathCad

Приклад 3.1 (до завдання 1). Знайдемо площу фігури, обмеженої лініями

$$y = 4 - (x - 1)^2 \text{ та } y = x^2 - 4x + 3$$

► Для знаходження площі нам, очевидно, слід скористатися формулою (рис. 3.1).

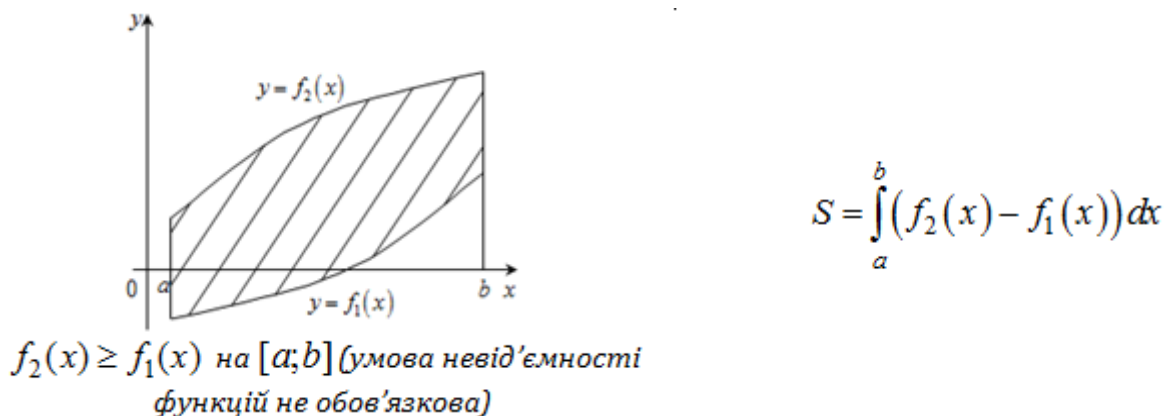


Рис. 3.1. Криволінійна трапеція, обмежена двома графіками, та формула знаходження її площі

Знайдемо абсциси точок перетину даних графіків із допомогою блоку Given-Find:

$$\begin{aligned} f1(x) &:= 4 - (x - 1)^2 & f2(x) &:= x^2 - 4x + 3 \\ \text{Given} \quad f1(x) &= f2(x) \\ X &:= \text{Find}(x) \rightarrow (0 \ 3) \end{aligned}$$

Рис. 3.2.1. Розв'язування рівнянь вигляду $f_1(x) = f_2(x)$ у MathCad 15 з допомогою блоку Given-Find

$$\begin{aligned} f1(x) &:= 4 - (x - 1)^2 & f2(x) &:= x^2 - 4x + 3 \\ f1(x) &= f2(x) \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Рис. 3.2.2. Розв'язування рівнянь вигляду $f_1(x) = f_2(x)$ у MathCad 15 із допомогою функції solve

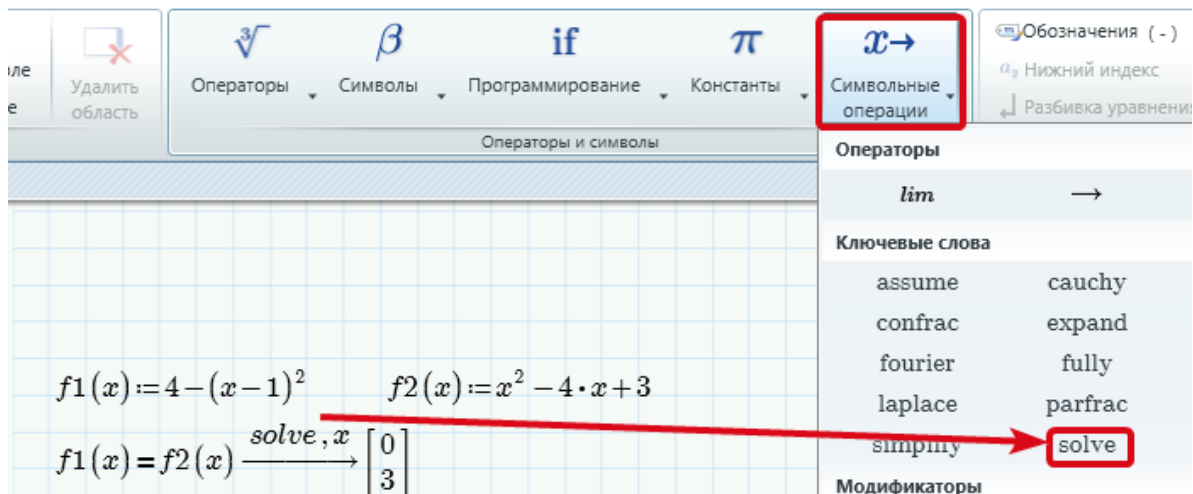


Рис. 3.2.3. Розв'язування рівнянь вигляду $f_1(x) = f_2(x)$ у MathCad Prime

Отже, у даному прикладі абсциси точок перетину графіків $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, тобто $a = x_1 = 0$, $b = x_2 = 3$.

Зауваження: для розв'язування рівнянь вигляду $f_1(x) = f_2(x)$ у MathCad Prime з допомогою блоку рішень Given-Find, у блоці обов'язково потрібно задавати початкові наближення – значення, починаючи з яких система реалізує наближені методи знаходження розв'язків; причому при різних початкових значеннях можуть знаходитися різні корені рівняння. Це спричиняє певні незручності у використанні (адже потрібно перевіряти різні початкові наближення, щоби переконатися, що всі корені знайдено).

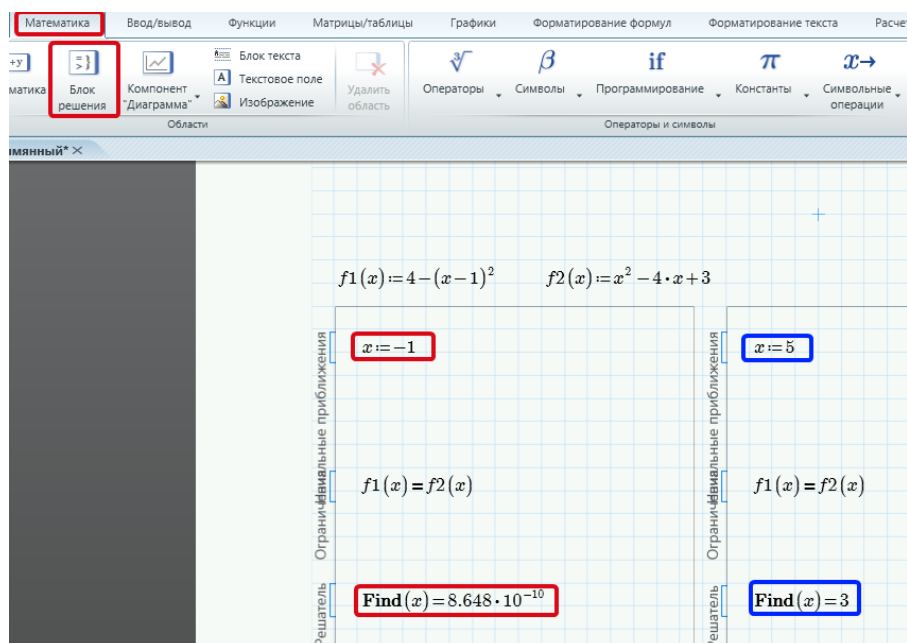


Рис. 3.2.4. Розв'язування рівнянь вигляду $f_1(x) = f_2(x)$ у MathCad Prime з допомогою блоку рішень Given-Find

Зобразимо два графіки в одній системі координат і заштрихуємо область, яка обмежується цими двома графіками водночас, тобто область, площу якої ми маємо знайти.

Фарбування (штриховка) області, обмеженої двома графіками (між точками з абсцисами $x_1 = 0$, $x_2 = 3$) реалізується, наприклад, у наступний спосіб (із використанням панелі програмування):

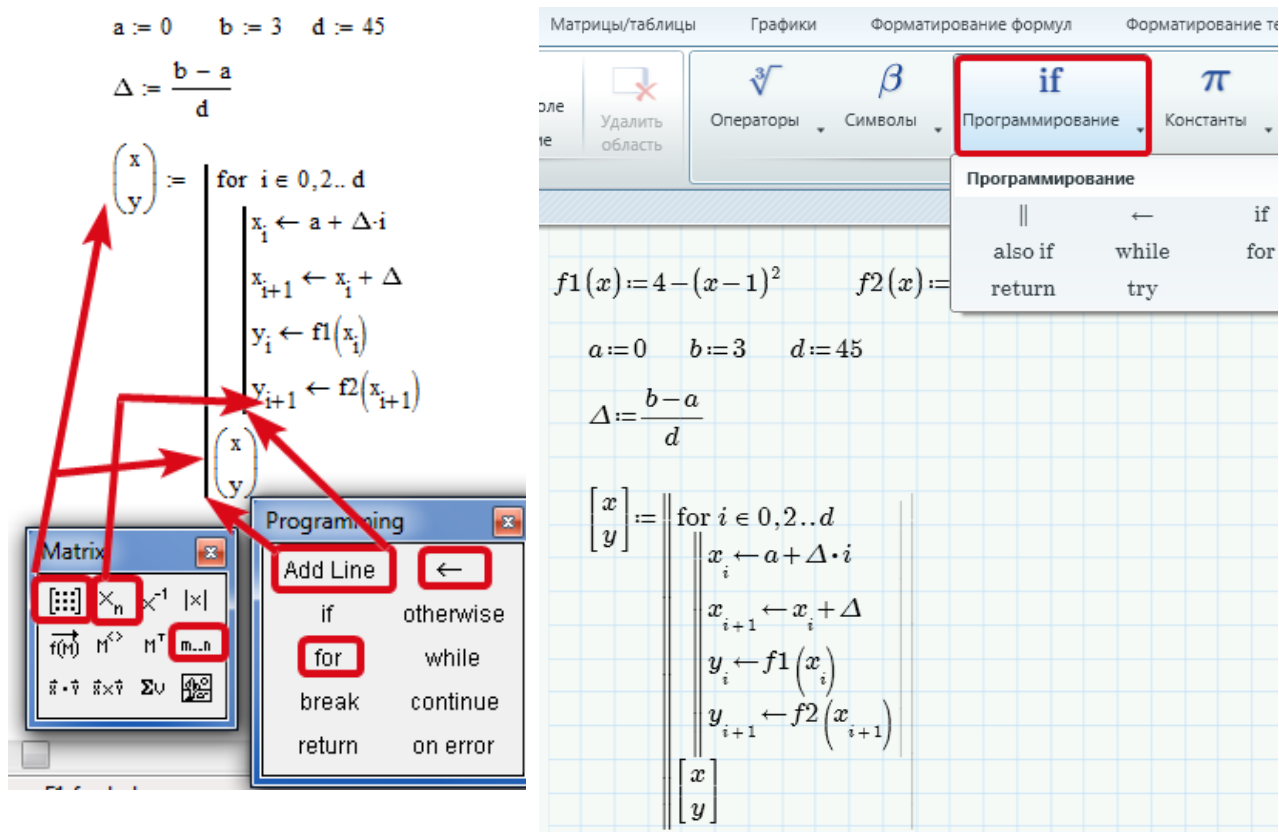


Рис.3.3.1. Програмна реалізація фарбування/штриховки області між графіками $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ ($a \leq x \leq b$)

а) у MathCad 15

б) у MathCad Prime

У результаті, коли ми нижче зобразимо графіки двох кривих в одній системі координат, то між двома графіками (між точками з абсцисами $x_1 = 0$, $x_2 = 3$) буде розміщуватися зигзагоподібна ламана, частота ланок якої залежить від параметра d . При достатньо великому значенні d ланки ламаної зливаються й утворюють ефект заливки області суцільним кольором (поекспериментуйте, змінюючи значення d).

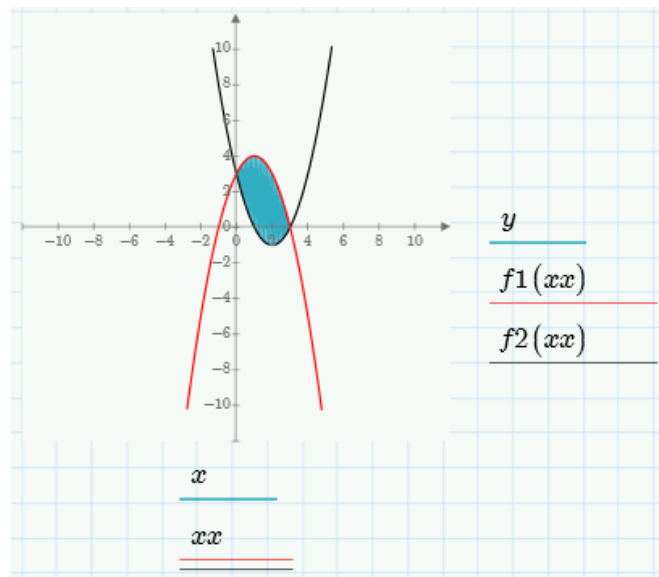
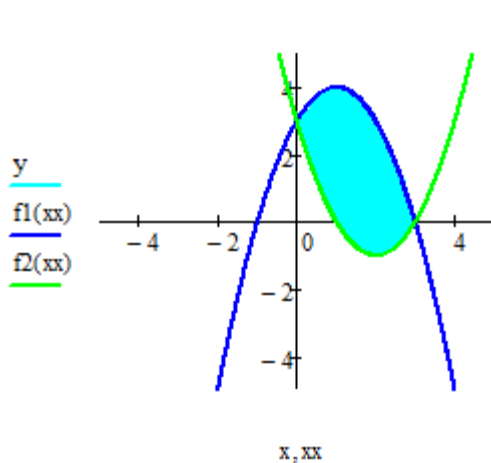


Рис.3.4. Зображення зафарбованої/заштрихованої області на графіку

Далі знаходимо площу зафарбованої області:

$$S := \int_0^3 (f1(x) - f2(x)) dx = 9$$

а) у MathCad 15

$$S := \int_a^b (f1(x) - f2(x)) dx \rightarrow 9$$

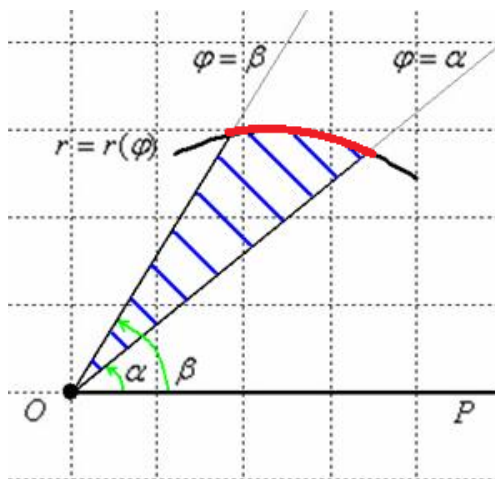
б) у MathCad Prime

Отже, площа фігури, обмеженої заданими кривими, дорівнює 9 (кв.од.)

Звернемо увагу, що у формулі на рис. 3.1 формула для знаходження площі криволінійної трапеції має вигляд $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$, а при реалізації ми в інтеграл підставляли різницю $f1(x) - f2(x)$, а не $f2(x) - f1(x)$, оскільки при зображенні графіка побачили, що графік $f1(x)$ обмежує трапецію зверху, а $f2(x)$ – знизу. ◀

Приклад 3.2 (до завдання 2). Знайти довжину дуги кривої $r = 1 + \cos \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$), заданої в полярних координатах і зобразити цю криву в полярній системі координат.

► Для знаходження довжини дуги кривої, яка задана в полярній системі координат, скористаємося формулою, наведеною на рис. 3.5.



$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi$$

Рис. 3.5. Дуга кривої, заданої у полярній системі координат та формула для обчислення довжини дуги

Зобразимо графік усієї кривої в полярній системі координат, відобразимо шукану дугу синім кольором та знайдемо її довжину (рис. 3.6.1).

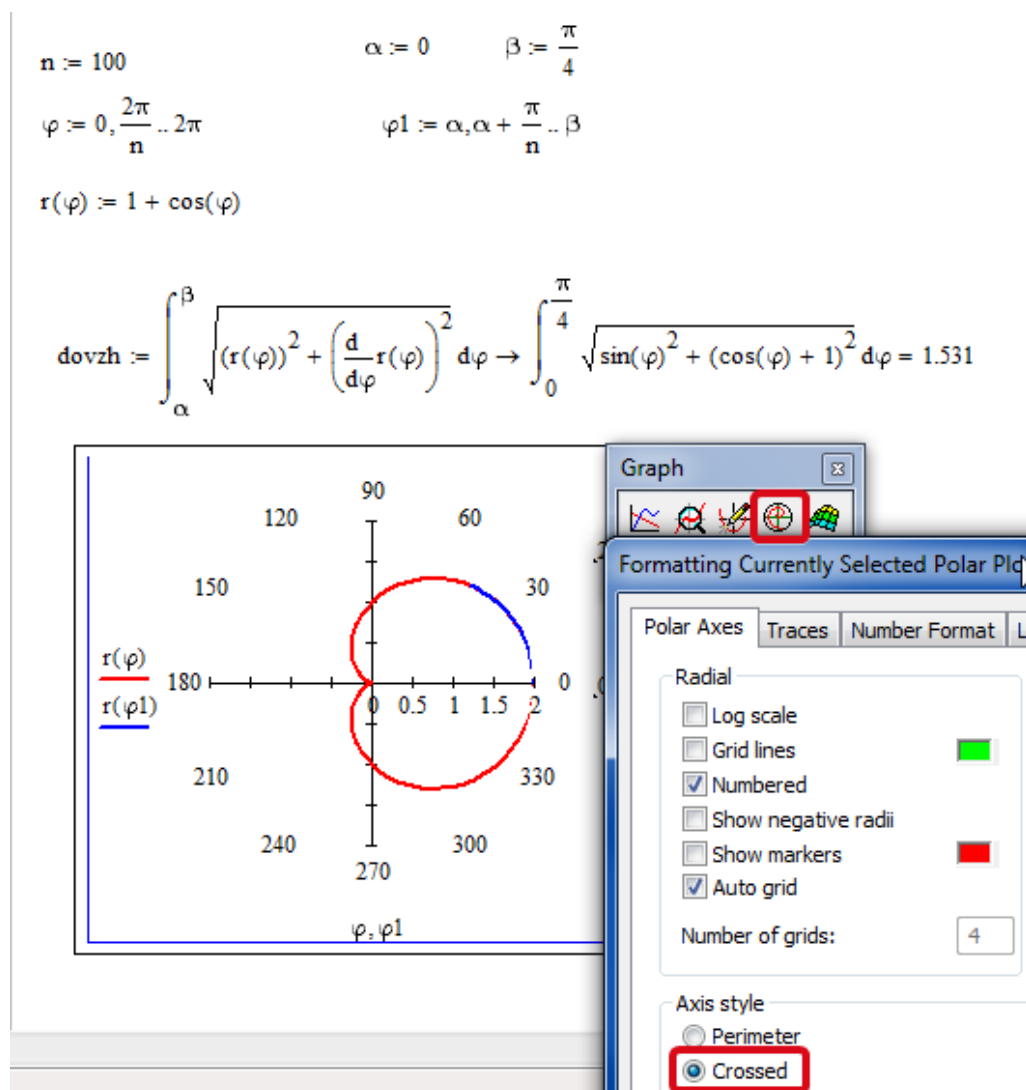


Рис. 3.6.1. Зображення кривої та її дуги в полярній системі координат і обчислення довжини дуги у MathCad 15

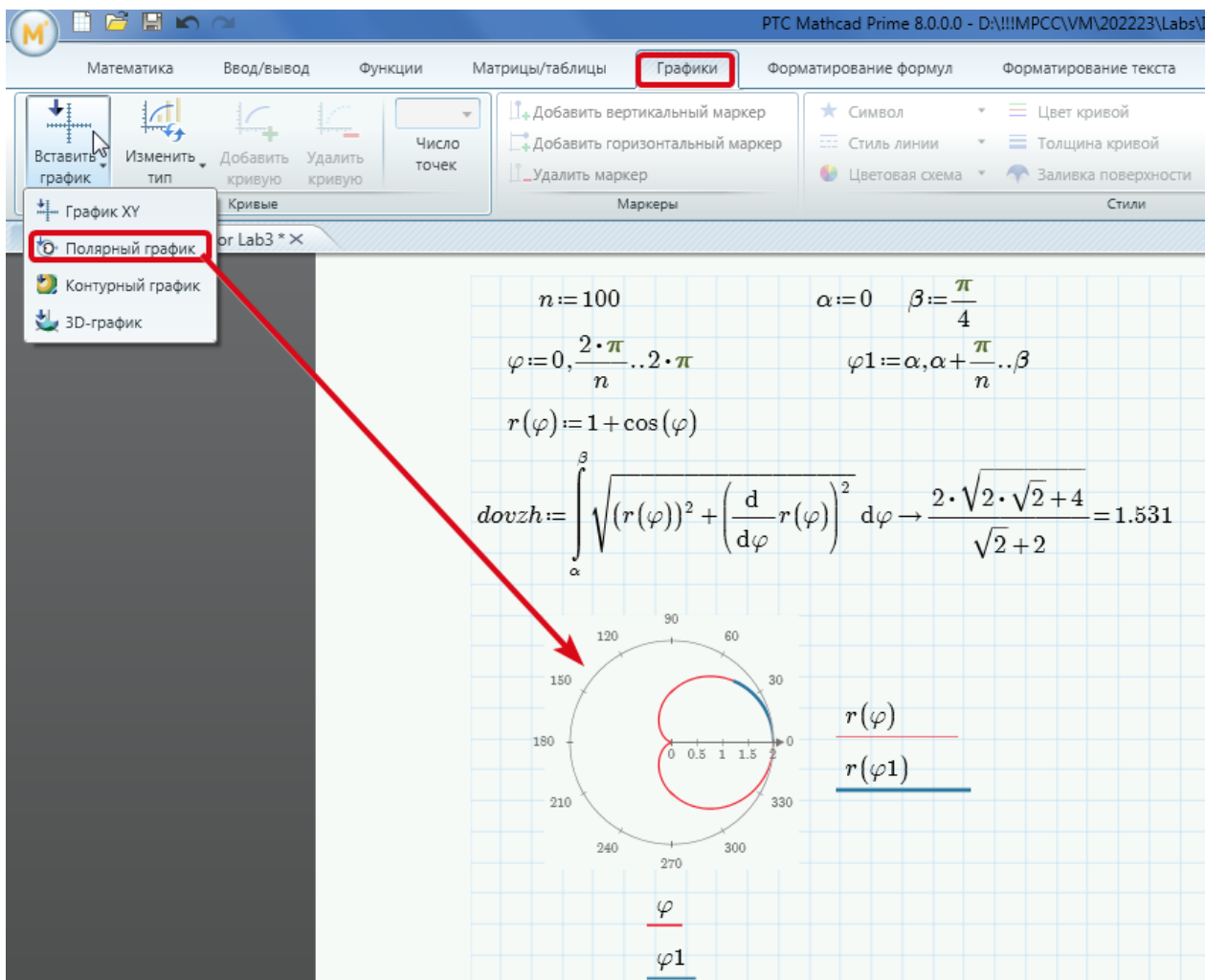


Рис. 3.6.2. Зображення кривої та її дуги в полярній системі координат і обчислення довжини дуги у MathCad Prime

Приклад 3.3 (до завдання 3). Дослідити на збіжність невласні інтеграли:

$$\text{а) } I_1 = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx; \quad \text{б) } I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$$

а) Виконаємо безпосереднє обчислення з використанням оператора визначеного інтеграла з панелі **Calculus** (знак безмежності у верхню межу підставляємо з цієї ж панелі) у *MathCad 15*; у *MathCad Prime* – знак визначеного інтеграла на панелі **Оператори** → **Математичний аналіз** (вкладка **Математика**), а знак безмежності на панелі **Константи**:

$$I_1 := \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \rightarrow \infty$$

Оскільки в результаті отримали безмежність, то цей невластний інтеграл I_1 (першого роду з $\omega = \infty$) **розбіжний**.

б) Обчислимо невластний інтеграл I_2 за означенням. Особливою точкою тут є $\omega = 1$, адже $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \infty$, тому це невластний інтеграл другого роду.

Відступимо від особливої точки вліво і розглянемо інтеграл

$$I(\varepsilon) := \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$$

Тоді вихідний інтеграл I_2 отримується як границя $I(\varepsilon)$ при ε , прямуючому до нуля (справа):

$$I_2 := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\varepsilon) \rightarrow 2$$

Оскільки границя існує та є скінченною, то невластний інтеграл I_2 збіжний і його значення дорівнює 2.

Зауваження: Можна досліджувати обидва інтеграли на збіжність безпосереднім обчисленням, не використовуючи границь. ◀

Лабораторна робота №4

Тема: Диференціальні рівняння

Мета: ознайомлення студентів із особливостями розв'язування у пакеті MathCad деяких диференціальних рівнянь, задачі Коші, геометричним змістом розв'язків диференціальних рівнянь - інтегральними кривими.

Завдання для самостійного виконання (лабораторна робота №4)

1. Знайти загальний інтеграл або загальний розв'язок диференціальних рівнянь із відокремлюваними змінними.

1	$(x^2 + 1)dy = 2xydx$	11	$\sqrt{x} \cdot y' = y$
2	$(1 + x^2)dy - y\sqrt{1 + x^2}dx = 0$	12	$(3 + x)ydy + xy^2dx = 0$
3	$\frac{xy'}{y} = 1 + x$	13	$x^2y' + y = 0$
4	$xy' = 2y$	14	$x(y^2 - y)dx - dy = 0$
5	$xy' = 2y - 3$	15	$x^3y' = 2y$
6	$dy - (2x + 2xy)dx = 0$	16	$\frac{1}{y}dy + \operatorname{ctg} x dx = 0$
7	$2xydx - (1 + x^2)dy = 0$	17	$y' = 2y$
8	$y' = 2x(1 - y)$	18	$(1 + e^x)ydy - e^x dx = 0$
9	$(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0$	19	$yy' + x = 0$
10	$y' = \frac{3\sqrt{x} \cdot y}{2}$	20	$x(y^2 + 1)dx + (y + xy)dy = 0$

2. Знайти загальний інтеграл однорідного (відносно змінних) ДР:

1	$y' = 1 + \frac{2y}{x}$	11	$y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$
2	$x^2y' = 2xy - y^2$	12	$y' = \frac{y}{x} - 1$

3	$y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$	13	$y' = -\frac{x+y}{x}$
4	$y' = -\frac{x+2y}{x}$	14	$y' = \frac{y}{x} \left(1 - \ln \frac{y}{x} \right)$
5	$y' = \frac{y}{x} - e^{\frac{y}{x}}$	15	$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$
6	$xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$	16	$y' = \frac{x+y}{x-y}$
7	$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \left(\frac{y}{x} \right)$	17	$y' = -\frac{x^2 + y^2}{2xy}$
8	$y' = \frac{y^2}{xy - x^2}$	18	$(x-2y)y' = 2x - y$
9	$2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$	19	$y' = \frac{y-2x}{x}$
10	$y' = \frac{y-2x}{x+y}$	20	$y' = \frac{y}{x} + \cos \left(\frac{y}{x} \right)$

3. Знайти загальний розв'язок лінійного ДР першого порядку:

1	$y' + y \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} = 0$	11	$y' \sin x + y \cos x = 2x$
2	$y' + 2xy = 2x$	12	$y' - e^{\frac{x^2}{2}} = xy$
3	$xy' + y = e^x$	13	$(3+x)y' + y = 3x^2$
4	$xy' + y = \sin 2x$	14	$y' - 2x = y$
5	$x^2 y' = y - 3$	15	$y' - y - e^x = 0$
6	$y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x}$	16	$y' = 2x(x^2 + y)$
7	$xy' - x = y$	17	$(x+1)^3 y' - 2(x+1)^2 y = (x+1)^6$
8	$xy' + y = 2x$	18	$y' + 2xy = xe^{-x^2}$
9	$y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$	19	$y' - 2xe^{3x} = 3y$
10	$y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x$	20	$xy' = y + 2x \ln x$

4. Знайти розв'язок задачі Коші, використовуючи розрахунковий блок та функцію Odesolve. Зобразити відповідну інтегральну криву та порівняти її з графіком точного розв'язку:

№	завдання	точний розв'язок (для графічного порівняння)
1	$\frac{y'}{\sqrt{y}} = \cos \frac{x}{2}, y(0) = 1; x \in [0; 6]$	$y = \left(\sin \frac{x}{2} + 1 \right)^2$
2	$2xy' + y = 0, y(1) = 1; x \in [1; 5, 5]$	$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$
3	$(1+x)y' + 2y^3 = 0, y(1) = 0,5; x \in [1; 5]$	$y = \frac{1}{\sqrt{\ln x + 4}}$
4	$y' = y + 2x, y(0) = -1; x \in [0; 4]$	$y = e^x - 2x - 2$
5	$y' = e^x + y, y(0) = 1; x \in [0; 3]$	$y = e^x(x+1)$
6	$y' + 2xy = xe^{-x^2}, y(0) = 2; x \in [0; 6]$	$y = e^{-x^2} \left(\frac{x^2}{2} + 2 \right)$
7	$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, y(0) = 0,5; x \in [0; 3]$	$y = \frac{(x+1)^4}{2}$
8	$y' = 2x(x^2 + y), y(0) = 2; x \in [0; 3, 5]$	$y = 3e^{x^2} - x^2 - 1$
9	$y' = \frac{y}{2+x}, y(1) = 3; x \in [1; 8]$	$y = x + 2$
10	$y' = \frac{1+y^2}{y} \cdot x, y(0) = 2; x \in [0; 3]$	$y = \sqrt{5e^{x^2} - 1}$
11	$y' = 2\sqrt{y}, y(0) = 1; x \in [0; 6, 5]$	$y = (x+1)^2$
12	$y' = 4x\sqrt{y+1}, y(0) = 3; x \in [0; 4, 5]$	$y = (x^2 + 2)^2 - 1$
13	$y' = \frac{1+y}{1+x}, y(1) = 3; x \in [1; 4, 5]$	$y = 2x - 1$
14	$y' = \frac{y}{\cos^2 x}, y(0) = 1; x \in [0; 1, 5]$	$y = e^{\operatorname{tg} x}$
15	$y' = \frac{y-x}{x}, y(1) = 0; x \in [1; 5]$	$y = x \ln \frac{1}{x}$
16	$y' - y = x - 1, y(0) = 1; x \in [0; 4, 5]$	$y = e^x - x$
17	$y' = x^3 - xy, y(0) = -2; x \in [0; 4]$	$y = x^2 - 2$

18	$xy' + y = y^2 \ln x, y(1)=1; x \in [1;5]$	$y = \frac{1}{\ln x + 1}$
19	$y' + \frac{y}{x} = -xy^2, y(1)=0,5; x \in [1;5]$	$y = \frac{1}{x^2 + x}$
20	$y' = \frac{2xy \ln y}{x^2 - 1}, y(2)=e^{-3}; x \in [2;6]$	$y = e^{1-x^2}$

Методичні вказівки

та приклади виконання завдань у MathCad

До завдання 1. Загальний інтеграл $F(x, y, C) = 0$ ДР із відокремлюваними змінними, записаного у вигляді

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \quad (1)$$

можна знайти за формулою

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0. \quad (2)$$

Для реалізації цього маємо виконати такий алгоритм 1:

1) вводимо задане у вигляді (1) ДР (знак рівності – логічне “дорівнює”, яке можна набрати комбінацією клавіш Ctrl та = або з використанням панелей: у *MathCad 15* логічна рівність знаходиться на панелі  **Булева алгебра/Boolean Toolbar**, а у *MathCad Prime* – на вкладці **Математика** → **Оператори** → **Порівняння**);

2) визначаємо функції $M_1(x), N_1(y), M_2(x), N_2(y)$;

3) знаходимо інтеграли з лівої частини рівності (2) і записуємо загальний інтеграл $F(x, y, C) = 0$ вихідного ДР у вигляді $I_1(x) + I_2(y) + C = 0$, де

$$I_1(x) = \int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx, I_2(y) = \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy, \text{ а стала інтегрування може мати різні}$$

вигляди – залежно від конкретного ДР;

4) знаходимо загальний розв’язок, тобто виражаємо шукану функцію $y = y(x)$ з отриманого загального інтеграла, використовуючи функцію **solve**

(у *MathCad 15* вона знаходиться на панелі  **Символьні перетворення з ключовими словами/Symbolic**, у *MathCad Prime* – на вкладці **Математика** → **Символьні операції** → **Ключові слова**).

Приклад 4.1. Знайдемо у *MathCad* загальний інтеграл і загальний розв'язок диференціального рівняння з відокремлюваними змінними

$$\sin x \cos y dx - \cos x \sin y dy = 0.$$

► Реалізуємо алгоритм 1, описаний вище (рис. 4.1.1, 4.1.2):

$$\sin(x) \cdot \cos(y) dx - \cos(x) \cdot \sin(y) dy = 0 \quad (\text{введення заданого ДР})$$

$$M1(x) := \sin(x) \quad N1(y) := \cos(y) \quad (\text{визначення функцій } M1(x), N1(y), M2(x), N2(y))$$

$$M2(x) := -\cos(x) \quad N2(y) := \sin(y)$$

$$I1(x) := \int \frac{M1(x)}{M2(x)} dx \rightarrow \ln(\cos(x)) \quad I2(y) := \int \frac{N2(y)}{N1(y)} dy \rightarrow -\ln(\cos(y))$$

(знаходження інтегралів з лівої частини рівності (2))

$$I1(x) + I2(y) + \ln(\text{const}) = 0 \rightarrow \ln(\text{const}) + \ln(\cos(x)) - \ln(\cos(y)) = 0$$

(знаходження загального інтегралу заданого ДР; сталу C записано у вигляді $\ln(\text{const})$)

$$I1(x) + I2(y) + \ln(\text{const}) = 0 \text{ solve, } y \rightarrow \begin{pmatrix} \arccos\left(e^{\ln(\text{const}) + \ln(\cos(x))}\right) \\ -\arccos\left(e^{\ln(\text{const}) + \ln(\cos(x))}\right) \end{pmatrix}$$

(знаходження загального розв'язку заданого ДР із використанням функції **solve**)

$$y1(x) := \arccos\left(e^{\ln(\text{const}) + \ln(\cos(x))}\right) \text{ simplify} \rightarrow \arccos(\text{const} \cdot \cos(x))$$

- загальні розв'язки заданого ДР

$$y2(x) := -\arccos\left(e^{\ln(\text{const}) + \ln(\cos(x))}\right) \text{ simplify} \rightarrow -\arccos(\text{const} \cdot \cos(x))$$

Рис. 4.1.1. Знаходження у *MathCad 15* загального розв'язку ДР із відокремлюваними змінними вигляду $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$

Як видно з рис. 4.1.1, загальний розв'язок заданого ДР записується формулою

$$y = \pm \arccos\left(e^{\ln C + \ln(\cos x)}\right) = \pm \arccos(C \cdot \ln(\cos x)), \quad C = \text{const}.$$

$\sin(x) \cdot \cos(y) \cdot dx - \cos(x) \cdot \sin(y) \cdot dy = 0$ *запис заданого рівняння
(використовується знак логічної рівності Ctrl =)*

$M1(x) := \sin(x) \quad N1(y) := \cos(y)$ *задання функцій*

$M2(x) := -\cos(x) \quad N2(y) := \sin(y)$ *$M1(x), N1(y), M2(x), N2(y)$*

$I1(x) := \int \frac{M1(x)}{M2(x)} dx \rightarrow \frac{\ln(\cos(x)^2)}{2} \quad I2(y) := \int \frac{N2(y)}{N1(y)} dy \rightarrow \frac{-\ln(\cos(y)^2)}{2}$ *знаходження інтегралів із лівої частини рівності (2)*

$I1(x) + I2(y) + \ln(C) = 0 \rightarrow -\frac{\ln(\cos(y)^2)}{2} + \frac{\ln(\cos(x)^2)}{2} + \ln(C) = 0$ *визначення загального інтегралу ДР*

$I1(x) + I2(y) + \ln(C) = 0 \xrightarrow{\text{solve}, y} \left[\begin{array}{l} \arccos\left(\sqrt{e^{\ln(\cos(x)^2) + 2 \cdot \ln(C)}}\right) \\ -\arccos\left(\sqrt{e^{\ln(\cos(x)^2) + 2 \cdot \ln(C)}}\right) + \pi \end{array} \right]$ *знаходження загального розв'язку заданого ДР*

$y1(x) := \arccos\left(\sqrt{e^{\ln(\cos(x)^2) + 2 \cdot \ln(C)}}\right) \xrightarrow{\text{simplify}} \arccos\left(C \cdot \sqrt{\cos(x)^2}\right)$

$y2(x) := -\arccos\left(\sqrt{e^{\ln(\cos(x)^2) + 2 \cdot \ln(C)}}\right) + \pi \xrightarrow{\text{simplify}} -\arccos\left(C \cdot \sqrt{\cos(x)^2}\right) + \pi$

clear(I1) clear(I2) clear(y1) clear(y2) clear(C) *"очищення" змінних для можливості їх подальшого використання*

Рис. 4.1.2. Знаходження у MathCad Prime загального розв'язку ДР з відокремлюваними змінними вигляду $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$

Оскільки загальний розв'язок (результат використання функції **solve**) у цьому конкретному випадку задається двома рівностями, то далі записано дві окремі функції $y_1(x)$ та $y_2(x)$, кожна з яких визначає загальний розв'язок вихідного ДР. При визначенні функцій $y_1(x)$ та $y_2(x)$ використано функцію **simplify**, яка дозволяє спростити вираз. У MathCad 15 вона знаходиться на панелі  **Символьні перетворення з ключовими словами/Symbolic**, у MathCad Prime – на вкладці **Математика** → **Символьні операції** → **Ключові слова**. ■

Загальний інтеграл $F(x, y, C) = 0$ ДР з відокремлюваними змінними, записаного у вигляді

$$y' = f(x)g(y), \quad (3)$$

можна знайти за формулою

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx. \quad (4)$$

Для реалізації цього у MathCad маємо виконати такий алгоритм 2:

1) уводимо задане у вигляді (3) ДР (знак рівності – логічне “дорівнює”, яке можна набрати комбінацією клавіш Ctrl та = або з використанням панелей: у MathCad 15 логічна рівність знаходиться на панелі  **Булева алгебра/Boolean Toolbar**, а у MathCad Prime – на вкладці **Математика** → **Оператори** → **Порівняння**);

2) визначаємо функції $f(x)$, $g(y)$;

3) знаходимо інтеграли з лівої та правої частин рівності (4) і записуємо загальний інтеграл $F(x, y, C) = 0$ вихідного ДР у вигляді $I_1(x) - I_2(y) + C = 0$,

де $I_1(x) = \int f(x)dx$, $I_2(y) = \int \frac{1}{g(y)} dy$, а стала інтегрування може мати різні

вигляди – залежно від конкретного ДР;

4) знаходимо загальний розв’язок, тобто виражаємо шукану функцію $y = y(x)$ з отриманого загального інтеграла, використовуючи функцію *solve* (у MathCad 15 вона знаходиться на панелі  **Символьні перетворення з ключовими словами/Symbolic**, у MathCad Prime – на вкладці **Математика** → **Символьні операції** → **Ключові слова**).

Приклад 4.2. Знайдемо у MathCad загальний інтеграл та загальний розв’язок диференціального рівняння з відокремлюваними змінними $y' = \frac{x}{y}$.

► Очевидно, задане ДР має вигляд (3), де $f(x) = x$, $g(y) = \frac{1}{y}$. Реалізуємо у MathCad алгоритм 2.

Як видно з рис. 4.2, загальний розв’язок заданого ДР дається формулою

$$y = \pm \sqrt{x^2 + C}, \quad C = \text{const}.$$

У загальному інтегралі довільну сталу записуємо у вигляді $\frac{C}{2}$ для симетрії запису, оскільки кожен із виразів у загальному інтегралі має

знаменник 2 і множенням отриманої рівності на 2 можна позбутись усіх дробів.

$$\frac{d}{dx}y(x) = \frac{x}{y} \quad (\text{введення заданого ДР})$$

$$f(x) := x \quad g(y) := \frac{1}{y} \quad (\text{визначення функцій } f(x), g(y))$$

$$\Pi(x) := \int f(x) dx \rightarrow \frac{x^2}{2} \quad \Omega(y) := \int \frac{1}{g(y)} dy \rightarrow \frac{y^2}{2}$$

(знаходження інтегралів з лівої та правої частин рівності (4))

$$\Pi(x) - \Omega(y) + \frac{C}{2} = 0 \rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{C}{2} = 0$$

(знаходження загального інтегралу заданого ДР; стала C записано у вигляді const/2)

$$\Pi(x) - \Omega(y) + \frac{C}{2} = 0 \text{ solve, } y \rightarrow \left(\begin{array}{l} \sqrt{x^2 + C} \\ -\sqrt{x^2 + C} \end{array} \right)$$

(знаходження загального розв'язку заданого ДР із використанням функції solve)

$$y1(x) := \sqrt{x^2 + C} \quad y2(x) := -\sqrt{x^2 + C} \quad \text{- загальні розв'язки заданого ДР}$$

Рис. 4.2. Знаходження у MathCad загального розв'язку ДР з відокремлюваними змінними вигляду $y' = f(x)g(y)dy$

Якщо знайдено загальний розв'язок ДР, то можна виконати перевірку. Для цього слід підставити вираз загального розв'язку у вихідне рівняння і переконатися, що отримається тотожність (рис. 4.3 а)).

$$y1(x) := \sqrt{x^2 + C} \quad y2(x) := -\sqrt{x^2 + C} \quad \text{- загальні розв'язки заданого ДР} \quad \frac{d}{dx}y(x) = \frac{x}{y}$$

Перевірка: $\frac{d}{dx}y(x) = \frac{x}{y(x)}$? Підставляємо $y(x)=y1(x)$:

$$\frac{d}{dx}y1(x) \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + C}} \quad \frac{x}{y1(x)} \rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + C}}$$

отримали однакові вирази у лівій і правій частині, отже, розв'язок знайдено вірно

Перевірка рівності $\frac{d}{dx}y(x) = \frac{x}{y(x)}$ рівносильна перевірці рівності $\frac{d}{dx}(y(x)) - \frac{x}{y(x)} = 0$

Підставляємо $y(x)=y2(x)$:

$$\frac{d}{dx}(y2(x)) - \frac{x}{y2(x)} \rightarrow 0 \quad \text{отримали тотожність, отже, розв'язок знайдено вірно}$$

Рис. 4.3а). Виконання у MathCad перевірки для ДР $y' = \frac{x}{y}$

Аналогічно можна було виконати перевірку для першого розглянутого ДР $\sin x \cos y dx - \cos x \sin y dy = 0$ (рис. 4.3 б)).

$$y1(x) := \text{acos}\left(e^{\ln(\text{const}) + \ln(\cos(x))}\right) \text{ simplify } \rightarrow \text{acos}(\text{const} \cdot \cos(x))$$

$$y2(x) := -\text{acos}\left(e^{\ln(\text{const}) + \ln(\cos(x))}\right) \text{ simplify } \rightarrow -\text{acos}(\text{const} \cdot \cos(x))$$

- загальні розв'язки заданого ДР

$$\sin(x) \cdot \cos(y) dx - \cos(x) \cdot \sin(y) dy = 0$$

Перевірка: $\sin(x) \cdot \cos(y) dx - \cos(x) \cdot \sin(y) dy = 0$?

Підставляємо $y(x)=y1(x)$: $dy1(x) := \left(\frac{d}{dx} y1(x)\right) \cdot dx$

$$\sin(x) \cdot \cos(y1(x)) dx - \cos(x) \cdot \sin(y1(x)) dy1(x) \rightarrow 0$$

отримали тотожність ($0=0$), отже, розв'язок знайдено вірно

$$dy2(x) := \left(\frac{d}{dx} y2(x)\right) \cdot dx$$

Підставляємо $y(x)=y2(x)$:

$$\sin(x) \cdot \cos(y2(x)) dx - \cos(x) \cdot \sin(y2(x)) dy2(x) \rightarrow 0$$

отримали тотожність ($0=0$), отже, розв'язок знайдено вірно

Рис. 4.3б). Виконання у MathCad перевірки для ДР $\sin x \cos y dx - \cos x \sin y dy = 0$

■

До завдання 2. Нагадаємо, що однорідним (відносно змінних) називається ДР вигляду

$$y' = f(x, y), \quad (5)$$

де функція $f(x, y)$ – однорідна нульового степеня, тобто для довільного $t \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(tx, ty) = f(x, y)$. Кожна однорідна нульового степеня

функція $f(x, y)$ може бути зведена до вигляду $f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$. У такому

разі вихідне ДР (5) заміною $\frac{y}{x} = u$ зводиться до ДР із відокремлюваними

змінними, загальний інтеграл якого дається рівністю

$$x - C e^{\int \frac{du}{f(1,u)-u}} = 0. \quad (6)$$

При цьому також потрібно перевірити, чи не втрачено розв'язок при $f(1, u) - u = 0$.

Для реалізації цього у MathCad маємо виконати такий алгоритм 3:

1) вводимо задане ДР та визначаємо функцію $f(x, y)$;

2) перевіряємо, що функція $f(x, y)$ – однорідна нульового степеня, тобто перевіряємо виконання рівності $f(tx, ty) = f(x, y)$ (або $f(tx, ty) - f(x, y) = 0$);

3) визначаємо вираз $F_1(u, C) = x - Ce^{\int \frac{du}{f(1,u)-u}}$ (ліву частину формули (6));

4) записуємо загальний інтеграл $F(x, y, C) = 0$ вихідного ДР у вигляді $F_1\left(\frac{y}{x}, C\right) = 0$;

5) перевіряємо, чи не втрачено розв'язок при $f(1, u) - u = 0$, де $u = \frac{y}{x}$: для цього треба розв'язати рівняння $f\left(1, \frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} = 0$ відносно y (використовуючи функцію *solve*) і подивитись, чи отримується знайдений вираз $y = y(x)$ із загального інтегралу при певному значенні сталої C ; якщо не отримується, то $y = y(x)$ – особливий розв'язок.

Приклад 4.3. Знайдемо у MathCad загальний інтеграл однорідного (відносно змінних) диференціального рівняння $y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$.

► Реалізуємо алгоритм 3.

1) вводимо задане ДР та визначаємо функцію $f(x, y)$;

$$\frac{d}{dx}y = \frac{x^2 + y^2}{2x^2} \quad (\text{введення заданого ДР})$$

$$f(x, y) := \frac{x^2 + y^2}{2x^2} \quad (\text{визначення функції } f(x, y))$$

2) перевіряємо, що функція $f(x, y)$ – однорідна нульового степеня, тобто перевіряємо виконання рівності $f(tx, ty) = f(x, y)$ (або $f(tx, ty) - f(x, y) = 0$);

перевірка того, що $f(x,y)$ - однорідна нульового степеня

$$f(t \cdot x, t \cdot y) \rightarrow \frac{t^2 \cdot x^2 + t^2 \cdot y^2}{2 \cdot t^2 \cdot x^2}$$

(обчислення виразу $f(tx, ty)$)

$$f(t \cdot x, t \cdot y) \text{ factor} \rightarrow \frac{x^2 + y^2}{2 \cdot x^2}$$

(функція **factor** з панелі символічних перетворень дає розклад на множники виразу, до якого вона застосована)

$$f(x, y) - f(t \cdot x, t \cdot y) \text{ simplify} \rightarrow 0$$

(перевірка умови $f(x,y)=f(tx,ty)$, тобто $f(x,y)-f(tx,ty)=0$; умова виконується, отже, $f(x,y)$ - однорідна нульового степеня, а задане ДР - однорідне (відносно змінних))

Зауваження: функції **factor** та **simplify** у *MathCad 15* беруться з панелі



Символьні перетворення з ключовими словами/Symbolic, а у *MathCad Prime* – на вкладці **Математика** → **Символьні операції** → **Ключові слова**).

3) визначаємо вираз $F_1(u, C) = x - C e^{\int \frac{du}{f(1,u)-u}}$ (ліву частину формули (6));

$$F1(u, \text{const}) := x - \text{const} \cdot e^{\int \frac{1}{f(1,u)-u} du} \rightarrow x - \text{const} \cdot e^{\frac{u}{2} - \frac{1}{2}}$$

(визначення лівої частини формули (6); при цьому вираз $F1(u, C)=0$ - це загальний інтеграл ДР з відокремлюваними змінними, яке отримується після заміни $u/x=u$ у вихідному ДР)

4) записуємо загальний інтеграл $F(x, y, C) = 0$ вихідного ДР у вигляді

$$F_1\left(\frac{y}{x}, C\right) = 0;$$

$$F(x, y, \text{const}) := F1\left(\frac{y}{x}, \text{const}\right) \text{ simplify} \rightarrow x - \text{const} \cdot e^{\frac{2 \cdot x}{x-y}}$$

(визначення лівої загального інтегралу вихідного ДР, тобто виконання зворотної заміни $u=y/x$)

$$F(x, y, \text{const}) = 0 \rightarrow x - \text{const} \cdot e^{\frac{2 \cdot x}{x-y}} = 0 \quad \text{- загальний інтеграл вихідного ДР}$$

5) перевіряємо, чи не втрачено розв'язок при $f(1,u) - u = 0$, де $u = \frac{y}{x}$: для

цього треба розв'язати рівняння $f\left(1, \frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} = 0$ відносно y (використовуючи

функцію **solve**) і подивитись, чи отримується знайдений вираз $y = y(x)$ із загального інтегралу при певному значенні сталої C ; якщо не отримується, то $y = y(x)$ – особливий розв'язок.

Перевірка наявності особливих розв'язків

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} = 0 \text{ solve, } y \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

отже, особливим розв'язком може бути функція $y=x$, якщо вона не отримується у загальному інтегралі при жодному значенні сталої

$$F(x, y, \text{const}) = 0 \rightarrow x - \text{const} \cdot e^{\frac{2 \cdot x}{x-y}} = 0 \quad \text{- загальний інтеграл вихідного ДР}$$

очевидно, загальний інтеграл не має змісту при $y=x$, а значить, $y=x$ - особливий розв'язок

■

До завдання 3. Загальний розв'язок лінійного ДР першого порядку

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (7)$$

можна знайти за формулою

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left(\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C \right), \quad (8)$$

що може бути записана у вигляді

$$y = \underbrace{C e^{-\int p(x)dx}}_{y_{з.о.}} + \underbrace{e^{-\int p(x)dx} \cdot \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx}_{y_{ч.н.}} = C \cdot \frac{1}{w(x)} + \frac{1}{w(x)} \int w(x)q(x)dx, \quad (9)$$

де $w(x) = e^{\int p(x)dx}$.

Для реалізації цього у MathCad маємо виконати такий алгоритм 4:

1) вводимо задане у вигляді (7) ДР;

2) визначаємо функції $p(x)$, $q(x)$ та $w(x) = e^{\int p(x)dx}$;

3) визначаємо складові формули (9): загальний розв'язок $y_0(x) = C \cdot \frac{1}{w(x)}$

відповідного однорідного рівняння та частинний розв'язок

$$y_1(x) = \frac{1}{w(x)} \int w(x)q(x)dx \text{ вихідного неоднорідного рівняння ;}$$

4) знаходимо загальний розв'язок $y(x) = y_0(x) + y_1(x)$.

Приклад 4.4. Знайдемо у *MathCad* загальний розв'язок диференціального рівняння $y' - \operatorname{tg} x \cdot y = \sin x$.

► Задане диференціальне рівняння є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку з $p(x) = -\operatorname{tg} x$, $q(x) = \sin x$. Реалізуємо у *MathCad* алгоритм 4 (рис. 4.4):

$$\frac{d}{dx}y(x) - \tan(x) \cdot y(x) = \sin(x) \quad (\text{введення заданого ДР})$$

$$p(x) := -\tan(x) \quad q(x) := \sin(x) \quad w(x) := \exp\left(\int p(x) dx\right) \rightarrow \cos(x) \quad (\text{визначення функцій } p(x), q(x), w(x))$$

$$y_0(x) := \frac{C}{w(x)} \rightarrow \frac{C}{\cos(x)} \quad - \text{загальний розв'язок відповідного однорідного ДР}$$

$$y_1(x) := \frac{1}{w(x)} \cdot \int w(x) q(x) dx \rightarrow \frac{\sin(x)^2}{2 \cdot \cos(x)} \quad - \text{частинний розв'язок неоднорідного ДР}$$

$$y(x) := y_0(x) + y_1(x) \rightarrow \frac{C}{\cos(x)} + \frac{\sin(x)^2}{2 \cdot \cos(x)} \quad \text{загальний розв'язок неоднорідного ДР}$$

Рис. 4.4.1. Розв'язування лінійного ДР першого порядку у *MathCad* 15

Приклад 4.4.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} y(x) - \tan(x) \cdot y(x) = \sin(x) \\ & p(x) := -\tan(x) \quad q(x) := \sin(x) \quad w(x) := \exp\left(\int p(x) dx\right) \xrightarrow{\text{simplify}} |\cos(x)| \\ & y_0(x) := \frac{C}{w(x)} \rightarrow \frac{C}{|\cos(x)|} \\ & y_1(x) := \frac{1}{w(x)} \cdot \int w(x) \cdot q(x) dx \rightarrow \frac{-\cos(x)}{2} \\ & y(x) := y_0(x) + y_1(x) \rightarrow \frac{C}{|\cos(x)|} - \frac{\cos(x)}{2} \end{aligned}$$

Рис. 4.4.2. Розв'язування лінійного ДР першого порядку у MathCad Prime

■

До завдання 4. Пакет *Mathcad* призначений для розв'язання практичних задач, тому в ньому реалізовані вбудовані чисельні методи, що дозволяють розв'язувати звичайні диференціальні рівняння, задачу Коші та крайові задачі. Аналітично (у вигляді формули) розв'язок таких задач за допомогою пакета *Mathcad* одержати неможливо, але можна з допомогою вбудованих чисельних методів отримати таблицю значень або графік функції-розв'язку на певному проміжку. Для більшості прикладних задач цього достатньо.

Звичайні диференціальні рівняння та їх системи у пакеті *Mathcad* можна розв'язувати із застосуванням вбудованих функцій або розрахункового блоку **Given/Odesolve** (“блоку рішень”).

Розглянемо задачу Коші для ДР першого порядку

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Її розв'язком є функція $y = y(x)$, яка в залежності від способу розв'язування може мати табличний вигляд (як у випадку використання чисельного методу Рунге-Кутти) або явне задання (формулу).

Найбільш зручним для розв'язування задачі Коші є спосіб з використанням розрахункового блоку **Given/Odesolve**. Тут ключове слово **Given** вказує на початок блоку обчислень. Треба звернути увагу на запис диференціального рівняння, яке має бути записано в нормальному

(стандартному) вигляді. При записі рівняння можна застосовувати символи диференціювання $\frac{d}{dx}y(x)$ або позначення похідної штрихом. Для задання штриха використовується комбінація клавіш Ctrl+F7. При записі рівняння й умов варто використовувати знак логічної рівності й у правій частині обов'язково вказувати аргумент функції (x).

У *MathCad 15* функцію **Odesolve**(x , b , $step$) задають із трьома параметрами: x – незалежна змінна, b – точка, до якої обчислювач проводить розрахунки (розв'язок знаходиться на відрізку $[x_0; b]$), $step$ – параметр, який визначає кількість кроків розбиття; чим більший $step$, тим вища точність отриманого результату.

Алгоритм знаходження частинного розв'язку (розв'язку задачі Коші) звичайного диференціального рівняння з використанням розрахункового блоку *Given/Odesolve* у *MathCad 15* (алгоритм 5.1):

1. Ввести ключове слово **Given**, з якого почнеться блок розв'язків.
2. Записати диференціальне рівняння (використати знак логічної рівності з панелі **Boolean**).
3. Задати початкові умови.
4. Присвоїти функції, відносно якої розв'язуємо рівняння, значення **Odesolve** з параметрами інтервалу інтегрування.
5. Побудувати графік знайденої функції в точках відрізка $[x_0; b]$.
6. За потреби визначити значення знайденої функції $y(x)$ в точках відрізка $[x_0; b]$ (отримати таблицю значень).

Наведемо приклад розв'язування задачі Коші у *MathCad 15* за допомогою розрахункового блоку **Given/Odesolve**.

Приклад 4.5.1. Розв'язати у *MathCad 15* задачу Коші $y' = \frac{x}{y}$, $y(0) = 1$ на інтервалі $[0; 5]$ з використанням розрахункового блоку *Given/Odesolve*. Побудувати графік шуканої функції $y(x)$.

► Легко перевірити, що точним (аналітичним) розв'язком даної задачі Коші є функція $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

Використання блоку **Given/Odesolve** не дасть нам явно формули розв'язку задачі Коші, але дозволить побудувати графік (який ми зможемо порівняти із графіком відомого нам для цього конкретного прикладу точного розв'язку) та отримати таблицю значень функції, яка є наближеним розв'язком цієї задачі.

Реалізуємо алгоритм 5.1 (рис. 4.5).

Given		
$\frac{d}{dx}y(x) = \frac{x}{y(x)}$	$y(0) = 1$	Після слова Given задається ДР і початкова(-ві) умова(-ви)
$x := 0, 0.15 \dots 5$		задається діапазон зміни незалежної змінної x (відрізок $[a;b]$)
$y := \text{Odesolve}(x, 5, 25)$		
$x0 := 0$	$y0 := 1$	початкова умова (для відображення на графіку точки $(x0; y0)$, через яку проходить інтегральна крива
		$y2(x) := \sqrt{x^2 + 1}$ точний розв'язок задачі Коші

Рис. 4.5. Розв'язування задачі Коші для ДР першого порядку у MathCad 15 із використанням блоку **Given/Odesolve**

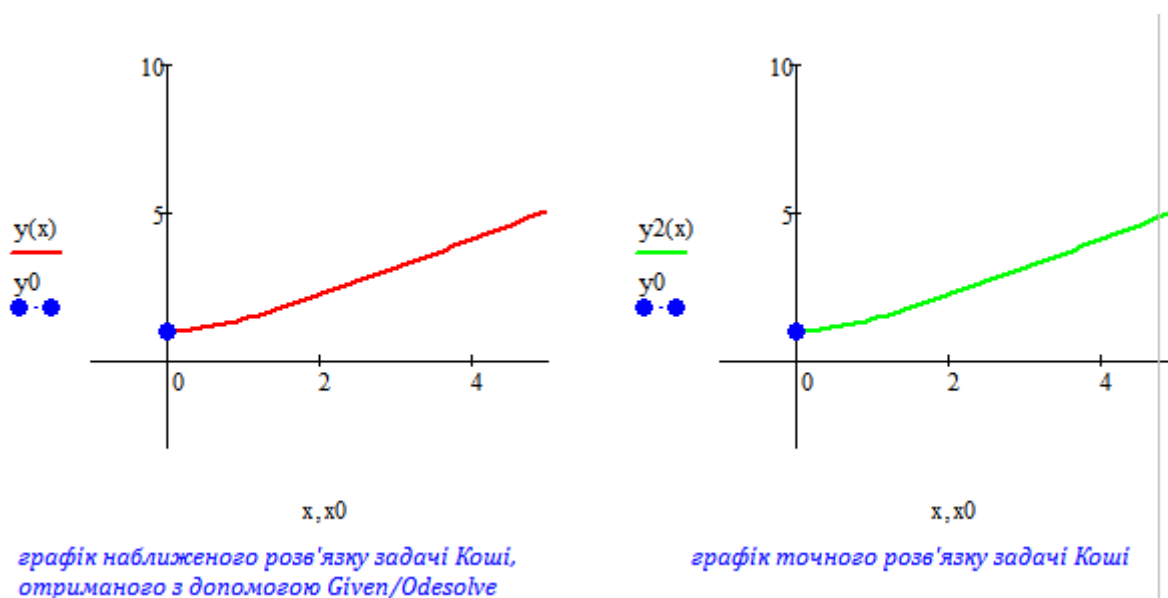


Рис. 4.5.1. Графічне порівняння наближеного (отриманого з використанням блоку **Given/Odesolve** у MathCad 15) і точного розв'язків задачі Коші для ДР першого порядку

Якщо нижче блоку **Given/Odesolve** написати $x =$ та $y =$, то отримаємо таблицю значень функції, що є наближеним розв'язком задачі Коші (рис. 4.6; тут таблиця будується з кроком $h=0,15$ на відрізку $[0;5]$ – відповідно до діапазону зміни незалежної змінної).

$x =$	$y(x) =$
0	1
0.15	1.012
0.3	1.044
0.45	1.097
0.6	1.166
0.75	1.25
0.9	1.345
1.05	1.45
1.2	1.562
1.35	1.68
1.5	1.803
1.65	1.929
1.8	2.059
1.95	2.191
2.1	2.326
...	...

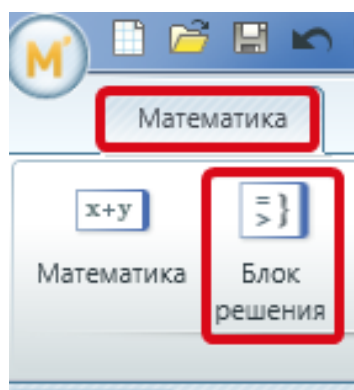
Рис. 4.6. Таблиця значень наближеного розв'язку задачі Коші

■

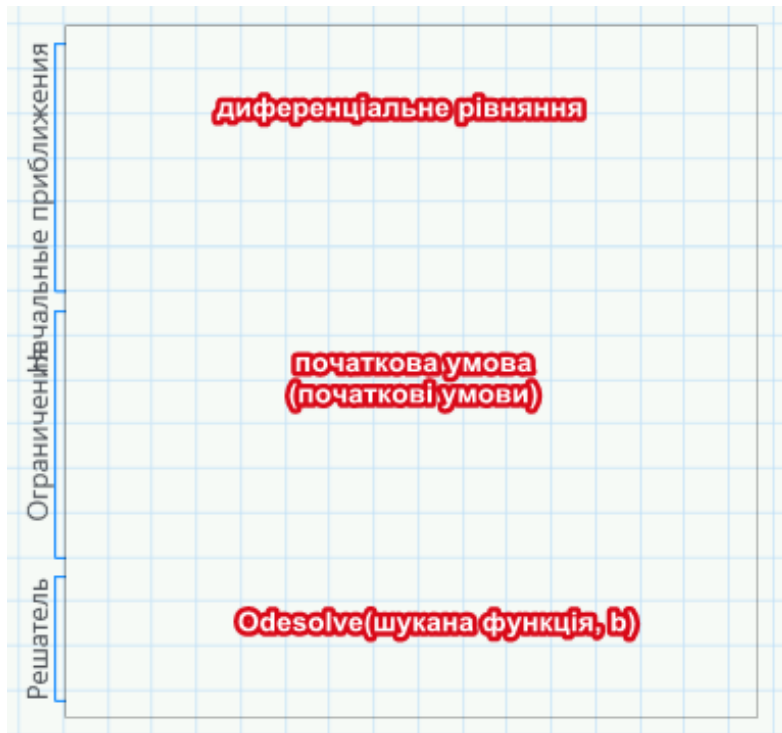
У *MathCad Prime* функцію **Odesolve(y(x), b)** задають із двома параметрами: де $y(x)$ – шукана функція, b – точка, до якої обчислювач проводить розрахунки (розв'язок знаходиться на відрізку $[x_0; b]$).

Алгоритм знаходження частинного розв'язку (розв'язку задачі Коші) звичайного диференціального рівняння з використанням розрахункового блоку Given/Odesolve у MathCad Prime (алгоритм 5.2):

1. Активувати блок розв'язків (**Математика** → **Блок розв'язків**).



- Заповнити три частини блоку (для запису диференціального рівняння використати шаблони похідних потрібного порядку з вкладки *Математика* → *Оператори* → *Математичний аналіз* та знак логічної рівності).



- Побудувати графік знайденої функції в точках відрізка $[x_0; b]$.
- За потреби визначити значення знайденої функції $y(x)$ в точках відрізка $[x_0; b]$ (отримати таблицю значень).

Приклад 4.5.2. Розв'язати у MathCad Prime задачу Коші $y' = \frac{x}{y}$,

$y(0)=1$ на інтервалі $[0; 5]$ з використанням розрахункового блоку та функції *Odesolve*. Побудувати графік шуканої функції $y(x)$.

► Реалізуємо алгоритм 5.2 (рис. 4.7) та порівняємо графік отриманого результату із графіком функції $y = \sqrt{x^2 + 1}$, яка є точним (аналітичним) розв'язком даної задачі Коші.

Порівняння графіків точного розв'язку $y = \sqrt{x^2 + 1}$ задачі Коші та знайденого наближеного розв'язку $OD(x)$ на відрізку $[0; 5]$ (рис. 4.7) показує, що функція *Odesolve* дає добре наближення точного розв'язку задачі Коші.

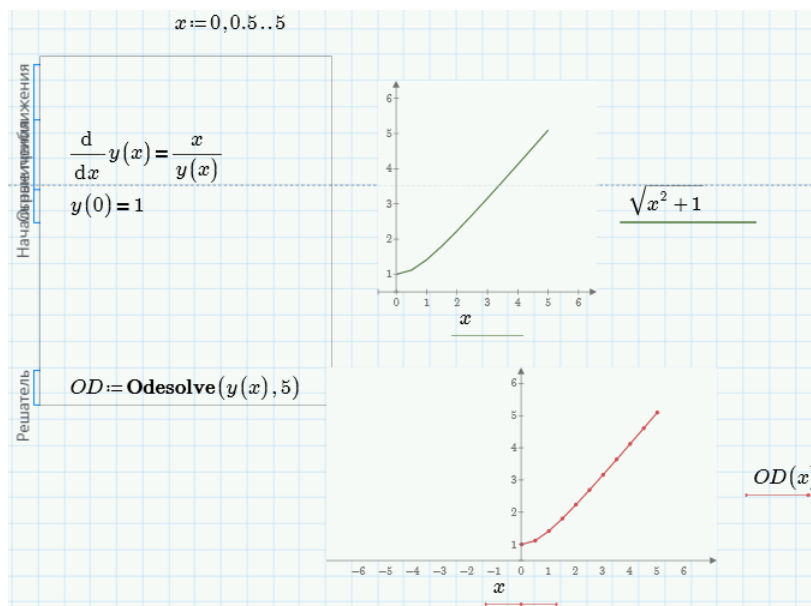


Рис. 4.7. Розв'язування задачі Коші для ДР першого порядку у MathCad Prime із використанням блоку розв'язків та функції *Odesolve*

Для відображення вузлових точок на графіку наближеного розв'язку $OD(x)$ (червона крива на рис. 4.7) потрібно зайти на область потрібного графіка та на вкладці **Графіки** → **Символ** обрати символ, яким будуть відзначатися точки знайденого наближеного розв'язку (рис. 4.8).

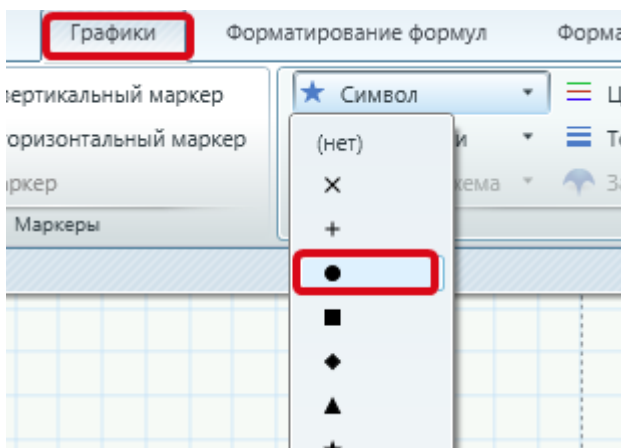


Рис. 4.8. Зображення символу на графіку у MathCad Prime

$x =$	$OD(x) =$
0	1
0.5	1.118
1	1.414
1.5	1.803
2	2.236
2.5	2.693
3	3.162
3.5	3.64
4	4.123
4.5	4.61
5	5.099

Рис. 4.9. Таблиця значень наближеного розв'язку задачі Коші

Якщо нижче блоку розв'язків написати $x =$ та $OD(x) =$, то отримаємо таблицю значень функції, що є наближеним розв'язком задачі Коші (рис. 4.8; тут таблиця будується з кроком $h = 0,5$ на відрізку $[0;5]$ – відповідно до діапазону зміни незалежної змінної). ■

Лабораторна робота №5

Тема: Числові та функціональні ряди

Мета: ознайомлення студентів з особливостями розв'язування у пакеті MathCad задач дослідження числових рядів на збіжність, знаходження області збіжності функціональних рядів, розкладу функцій у степеневі ряди та ряди Фур'є.

Завдання для самостійного виконання (лабораторна робота №5)

1. Для заданого числового ряду:

а) перевірити необхідну умову збіжності (НУЗ);

б) знайти послідовність частинних сум і дослідити ряд на збіжність за означенням.

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2 - 5n - 6}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 5n + 6}{n^2 + 5n + 4}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n + 3}$
7	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{72}{n^2 + 6n + 8}$	17	$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{2n+3}{2n+1}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{54}{n^2 + 5n + 4}$	18	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{9n^2 - 12n - 5}$	19	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 - 1}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+2}{n+3}$	20	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 2n^2 + n}$

2. Дослідити числовий ряд на збіжність за інтегральною ознакою Коші-Маклорена.

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n+10}}}{\sqrt{n+10}}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{n^2 + 1}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^4(n+1)}$
3	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$	13	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[7]{\ln n}}$
4	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}$	14	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 - 1}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg^2 n}{n^2 + 1}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln(n+2)}$
6	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\ln n}}$	16	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n+2}}}{\sqrt{n+2}}$	17	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{2n+1}}}{\sqrt{2n+1}}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg^4 n}{n^2 + 1}$	18	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{\arctg n}}{n^2 + 1}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{2n+5}}}{\sqrt{2n+5}}$	19	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot \sqrt[6]{\ln(n+1)}}$
10	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt[3]{\ln n}}$	20	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\arctg n}}{n^2 + 1}$

3. Дослідити ряд на збіжність за ознакою Лейбніца.

№	Завдання	№	Завдання
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{3^n}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right)$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n+2}}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2 + 1}}$
3	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^3 - 1}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+5}{3n^2 + 4}$

4	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n-1}}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{7n-1}{4n^2+5}$
5	$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+5}}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{3}{n} \right)$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right)$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$	17	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{2n+3}}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$	18	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+9}}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+10}}$	19	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^3+5}{9n^4+1}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 8^n}{9^n}$	20	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5^n}$

4. Знайти область збіжності функціональних рядів.

№	а)	б)
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3^n n}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n+1} \cdot \frac{1}{(27x^2+12x+2)^n}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \sqrt{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{(3x^2+4x+2)^n}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{3^n n^2}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} \cdot (x^2-4x+6)^n$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{3^n \sqrt{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-2)^3 (x+3)^{2n}}{2n+3}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt[7]{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt{n+1}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^n$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n n^3}$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{2n}$

9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \sqrt{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+1)^5 x^{2n}}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt[5]{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n (n^2+1)} \cdot (25x^2+1)^n$
11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n \cdot \sqrt[5]{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{3^n (x-2)^n}$
12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^n \cdot \sqrt[7]{n^2}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{4^n (2n-1)}$
13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{5^n \cdot \sqrt{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{n+1} \cdot \frac{1}{(3x^2+8x+6)^n}$
14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{2^n \cdot \sqrt[5]{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3+1}{2^n (x+1)^n}$
15	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+6)^n}{n \sqrt{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{6^n} \cdot (x^2-4x+6)^n$
16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-7)^n}{2^n \cdot \sqrt[5]{n^3}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n+1}}{3^n \cdot 2n}$
17	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{3^n \cdot \sqrt[4]{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n (x+3)^n}$
18	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{3^n \cdot n \sqrt{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+1} \cdot (4x^2+1)^n$
19	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n n^2 \cdot \sqrt{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{(n+1)^2 x^{2n}}$
20	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3^n n^3 \cdot \sqrt{n}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n-1}}{n^2 \cdot 9^n}$

5. Розкласти у ряд Маклорена задану функцію. Побудувати в одній системі координат графік даної функції та частинних сум ряду Маклорена при $n=1, 2, 3, 4$.

№	Завдання	№	Завдання
1	$y = x \ln(1+x)$	11	$y = \frac{1}{4x^2+1}$
2	$y = x \sin 3x$	12	$y = x e^{x^3}$
3	$y = x^3 \ln(1-2x)$	13	$y = x^3 \ln(1+4x)$

4	$y = x^2 e^{-2x}$	14	$y = x \sin 2x$
5	$y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	15	$y = x^2 e^{3x}$
6	$y = x^3 e^{-\sqrt{x}}$	16	$y = x^2 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$
7	$y = x^3 \sin 5x$	17	$y = \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}$
8	$y = x \cos 2x$	18	$y = x^2 \ln(1+\sqrt{x})$
9	$y = x^5 \sin(-2x)$	19	$y = \sqrt[3]{1+2x}$
10	$y = x^4 \cos \sqrt{x}$	20	$y = \frac{x}{x^2 - 4x + 5}$

6. Розкласти у ряд Фур'є функцію, яка є періодичним продовженням на всю числову пряму функції, заданої на вказаному проміжку. Побудувати в одній системі координат графік даної функції та частинних сум ряду Фур'є при $n=5, 10, 15$.

№	Завдання	№	Завдання
1	$f(x) = x + 1, x \in (-\pi; \pi)$	11	$f(x) = 2x^2, x \in (-1; 1)$
2	$f(x) = 2x - 1, x \in (-2; 2)$	12	$f(x) = \cos 2x, x \in (-2; 2)$
3	$f(x) = x^2, x \in (-\pi; \pi)$	13	$f(x) = x^2 + 1, x \in (-\pi; \pi)$
4	$f(x) = -x, x \in (-3; 3)$	14	$f(x) = 2x + 1, x \in (-2; 2)$
5	$f(x) = x^2, x \in (-1; 1)$	15	$f(x) = \cos \frac{x}{2}, x \in (-\pi; \pi)$
6	$f(x) = x, x \in (-\pi; \pi)$	16	$f(x) = 2x, x \in (-1; 1)$
7	$f(x) = x - 2, x \in (-2; 2)$	17	$f(x) = x^2 - 1, x \in (-3; 3)$
8	$f(x) = 2x - \frac{1}{2}, x \in (-4; 4)$	18	$f(x) = \cos x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
9	$f(x) = x + 3, x \in (-3; 3)$	19	$f(x) = x, x \in (-2\pi; 2\pi)$
10	$f(x) = \sin x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	20	$f(x) = x + 2, x \in (-2; 2)$



Методичні вказівки та приклади виконання завдань у MathCad

До завдання 1. а) Необхідна умова збіжності ряду: Якщо ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ збігається, то } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Таким чином, для розв'язання завдання 1а) слід ввести загальний член ряду, який у *MathCad* записується як $u(n)$ (n – не індекс, а аргумент), знайти його границю та зробити висновок про виконання чи невиконання необхідної умови збіжності (НУЗ) (рис. 5.1.1).

Знак суми та границі у *MathCad 15* знаходяться на панелі аналізу  а у *MathCad Prime* на панелі **Математика** → **Оператори** → **Математичний аналіз**.

Завдання 1. Для числового ряду $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1) \cdot (n-2)}$

- а) перевірити НУЗ;
- б) знайти послідовність частинних сум та дослідити ряд на збіжність за означенням.

Розв'язання

а)
$$u(n) := \frac{1}{(n-1) \cdot (n-2)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(n) \rightarrow 0 \quad \text{отже, НУЗ виконується}$$

Рис. 5.1.1. Перевірка виконання НУЗ ряду у MathCad

б) Якщо існує скінченна границя послідовності частинних сум ряду

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n u_i, \quad (1)$$

то кажуть, що **ряд збігається**, а число S при цьому називається **сумою ряду**. Якщо ж границя послідовності частинних сум не існує або дорівнює безмежності, то кажуть, що ряд **розбіжний**.

Для перевірки ряду на збіжність за означенням записуємо загальний вигляд частинної суми $S(n)$ та шукаємо границю отриманого виразу: якщо границя існує та скінченна, то ряд збіжний і його сума дорівнює знайденому числу, якщо ж границя не існує (undefined) або дорівнює безмежності, то ряд розбіжний (рис. 5.1.2).

$$\text{б)} \quad S(n) := \sum_{k=3}^n u(k) \quad S(n) \rightarrow \frac{n-2}{n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(n) \rightarrow 1 \quad \text{ряд збіжний і його сума дорівнює 1}$$

Рис. 5.1.2. Дослідження ряду на збіжність за означенням

Крім цього, можна зробити перевірку, знайшовши суму ряду з допомогою оператора символічної рівності $\rightarrow$ з панелі **Обчислення (Evaluation)** (рис. 5.1.3). Але не для всіх рядів *MathCad* може обчислити суму, в такому разі після стрілки символічної рівності він повторює заданий ряд.

Перевірка:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-1) \cdot (n-2)} \rightarrow 1$$

Рис. 5.1.3. Знаходження суми числового ряду у *MathCad*

До завдання 2. Інтегральна ознака Коші-Маклорена застосовується до рядів з додатними членами і формулюється у вигляді наступної теореми.

Теорема 1 (інтегральна ознака Коші-Маклорена). Якщо існує функція $y=f(x)$ неперервна і монотонно спадає при $x \geq n_0$, така, що $f(n)=u_n$, то невласний інтеграл

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx \quad (2)$$

і ряд

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n \quad (3)$$

поводять себе однаково в плані збіжності (обидва або збігаються, або розбігаються).

Для розв'язання завдання 2 вводимо функцію $f(x)$, яка отримується із загального члену ряду заміною натурального аргумента n на дійсний аргумент x (рис. 5.2.1). Це гарантує виконання умови $f(n) = u_n$.

Завдання 2. Дослідити числовий ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$ на збіжність за інтегральною ознакою Коші-Маклорена.

Розв'язання

$$f(x) := \frac{1}{x \cdot \ln(x)}$$

Рис. 5.2.1. Введення функції для застосування інтегральної ознаки Коші-Маклорена

Перевірку виконання умов неперервності та монотонного спадання функції $f(x)$ при $x \geq n_0$ можна перевірити графічно: графік неперервної функції є суцільною лінією, а значення монотонно спадної функції зменшуються при русі по графіку в напрямку осі Ox (рис. 5.2.2).

$$f(x) := \frac{1}{x \cdot \ln(x)}$$

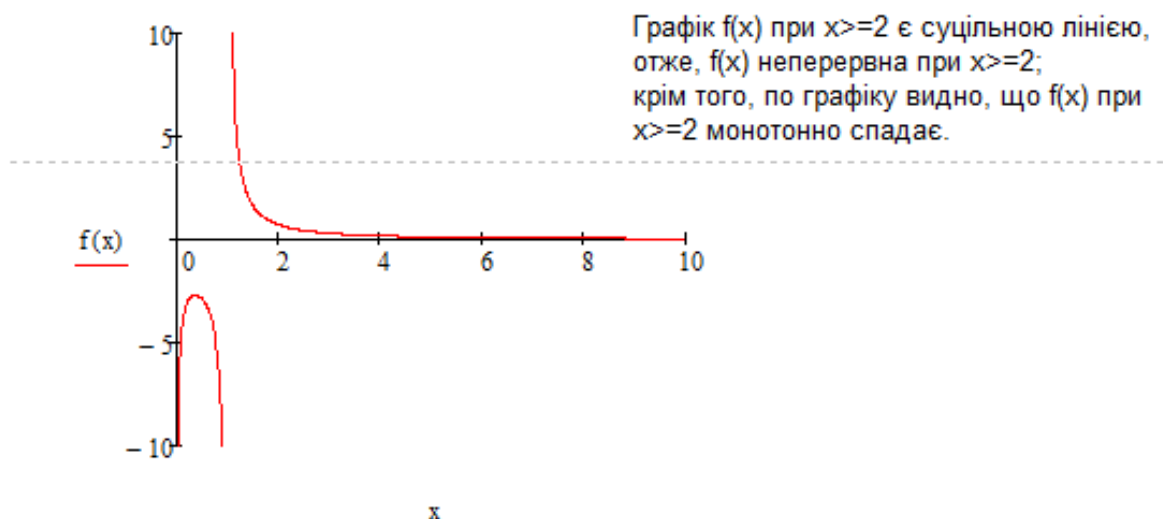


Рис. 5.2.2. Графічна перевірка неперервності та монотонності

І наостанок обчислюється невластний інтеграл від функції $f(x)$ (у межах від n_0 до ∞) та робиться висновок про збіжність/розбіжність ряду (рис. 5.2.3).

$$\int_2^{\infty} f(x) dx \rightarrow \infty$$

Висновок: інтеграл розбіжний, отже, і ряд розбіжний

Рис. 5.2.3. Дослідження на збіжність невласного інтеграла і висновок ознаки Коші-Маклорена

До завдання 3. Ознака Лейбніца застосовується до знакопозначених рядів вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots + (-1)^{n-1} c_n + \dots, \quad (4)$$

де $c_n \geq 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Лейбніц указав достатню умову збіжності ряду (4), яка і формулюється у вигляді наступної теореми.

Теорема 2 (Ознака Лейбніца). Нехай у знакопозначеному ряду (4):

1) послідовність $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ монотонно спадає (тобто $c_{n+1} \leq c_n$ для будь-якого

$$n \geq n_0 \geq 1);$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0.$$

Тоді ряд (4) збігається і його сума не перевищує c_1 .

Для розв'язання завдання 3 у *MathCad* слід ввести $c(n)$ та перевірити 2 умови теореми Лейбніца.

Завдання 3. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^3}{(n+1)!}$ за ознакою Лейбніца.

Розв'язання

$$c(n) := \frac{n^3}{(n+1)!}$$

Рис. 5.3.1. Введення загального члена послідовності $c(n)$

Умову монотонного спадання $c(n)$ можна перевірити, обчисливши, наприклад, перших 10 членів даної послідовності. Якщо кожен наступний

член не більший за попередній, то послідовність монотонно спадає (рис. 5.3.2).

Інший варіант перевірки послідовності $c(n)$ на монотонність – зображення графіка функції $c(x)$ (замінивши у $c(n)$ натуральний аргумент n на дійсний $x \geq 1$) і зробивши висновок про монотонність по графіку: якщо $c(x)$ монотонно спадає, то і $c(n)$ монотонно спадає. У розглядуваному прикладі такий варіант неможливий, оскільки $c(n)$ містить факторіал, який визначений для натурального аргументу і не визначений для дійсного, тому графік $c(x) = \frac{x^3}{(x+1)!}$ у модельному прикладі побудувати неможливо.

1) для перевірки монотонності $c(n)$ випишемо перших 10 членів даної послідовності:

$$c(1) = 0.5 \quad c(2) = 1.333 \quad c(3) = 1.125 \quad c(4) = 0.533 \quad c(5) = 0.174$$

$$c(6) = 0.043 \quad c(7) = 8.507 \times 10^{-3} \quad c(8) = 1.411 \times 10^{-3} \quad c(9) = 2.009 \times 10^{-4}$$

$$c(10) = 2.505 \times 10^{-5}$$

отже, $c(n)$ монотонно спадає при $n \geq 2$

Рис. 5.3.2. Найпростіша перевірка умови монотонного спадання послідовності $c(n)$

Як видно з рис. 5.3.2, $c(n)$ монотонно спадає при $n \geq 2$, тобто ознаку Лейбніца можна застосовувати до ряду, де сума починається не з $n=1$, а з $n=2$. Тому доданок, який відповідає значенню $n=1$ ми відокремлюємо, а у згорнутому вигляді записуємо ряд, де сума починається з $n=2$ (рис. 5.3.3).

Перепишемо вихідний ряд у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^3}{(n+1)!} = -0,5 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^3}{(n+1)!}$$

Рис. 5.3.3. Відокремлення доданка, що відповідає $n=1$

Інший варіант перевірки того, що $c(n)$ монотонно спадає - замінити n на x і побудувати графік $c(x)$ та встановити монотонність за графіком. Якщо $c(x)$ монотонно спадає, то й $c(n)$ також монотонно спадає.

Перевіряємо другу умову ознаки Лейбніца і робимо висновок (рис. 3.4), користуючись властивістю, що додавання/відкидання скінченної кількості доданків не впливає на збіжність ряду.

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c(n) \rightarrow 0$$

Таким чином, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^3}{(n+1)!}$ збігається за ознакою Лейбніца, а значить, і ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^3}{(n+1)!} = -0,5 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n^3}{(n+1)!} \quad \text{також збігається}$$

Рис. 5.3.4. Перевірка другої умови ознаки Лейбніца та висновок

До завдання 4а). Ряди, де членами ряду є не числа, а функції, називаються **функціональними рядами**. Це ряди вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), x \in X.$$

Найбільш важливі для прикладних задач **степеневі ряди**, які мають вигляд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots, \quad (5)$$

де $a_n, x, x_0 \in \mathbb{R}$. Підстановкою у (5) замість x конкретного числа отримується числовий ряд, який може бути як збіжним, так і розбіжним. При $x_0 = 0$ ряд (5) набуває вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (6)$$

Для степеневих рядів існує число R , таке, що при $|x - x_0| < R$ степеневий ряд збігається, а при $|x - x_0| > R$ — розбігається. Величина R називається **радіусом збіжності** степеневого ряду, а інтервал

$$(x_0 - R, x_0 + R) \quad (7)$$

— **інтервалом збіжності ряду**. При $|x - x_0| = R$ степеневий ряд може збігатися або розбігатися. **Областю збіжності степеневого ряду** називається множина усіх $x \in X \subseteq \mathbb{R}$, підстановкою яких у (5) отримується збіжний

числовий ряд. Враховуючи вищевикладене, областю збіжності степеневому ряду (5) може бути інтервал $(x_0 - R; x_0 + R)$, відрізок $[x_0 - R; x_0 + R]$ або один із напівінтервалів $(x_0 - R; x_0 + R]$, $[x_0 - R; x_0 + R)$.

Для пошуку радіуса збіжності можна використовувати формулу

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad (8)$$

Вона придатна для випадку, коли границя існує. В залежності від конкретного ряду значення R може знаходитися в межах

$$0 \leq R \leq +\infty,$$

при цьому

☑ якщо $R = 0$, то ряд (5) збігається лише в одній точці $x = x_0$;

☑ якщо $R = +\infty$, то ряд (5) збігається на всій числовій прямій (при $x \in \mathbb{R}$).

Отже, для розв'язання завдання 4а) слід визначити x_0 та знайти радіус збіжності R за формулою (8) і побудувати інтервал збіжності $IЗ = (x_0 - R; x_0 + R)$ (рис. 5.4.1).

Завдання 4. Знайти ОЗ рядів:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{2n-1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^3 \cdot (x^2 - 4x + 7)^n}$$

Розв'язання

$$\text{а) } \underline{\underline{S(x)}} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{2n-1} \quad \text{це степеневий ряд}$$

$$a1(n) := \frac{2^n}{2n-1} \quad a1(n+1) \rightarrow \frac{2^{n+1}}{2 \cdot n + 1}$$

1) Шукаємо радіус збіжності:

$$\underline{\underline{R}} := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a1(n)}{a1(n+1)} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$x0 := 0$$

$$x0 - R = -0.5$$

$$x0 + R = 0.5$$

$$IЗ := \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Рис. 5.4.1. Визначення радіуса та інтервалу збіжності степеневому ряду

Далі потрібно перевірити, чи збігається ряд у точках $x_0 - R$ та $x_0 + R$. Якщо в якійсь із цих двох точок ряд збігається, то її треба долучити до інтервалу збіжності, щоб отримати область збіжності (ОЗ) (рис. 5.4.2). Функція *substitute* у *MathCad 15* береться з панелі  **Symbolic/Символьні обчислення з ключовими словами**, а у *MathCad Prime* з панелі **Математика** → **Символьні операції** → **Ключові слова**; вона виконує підстановку у заданий зліва від неї вираз числове значення змінної, вказаної справа.

2) Перевіряємо поведінку ряду на кінцях ІЗ:

2.1) $x = -\frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{2n-1} \text{ substitute, } x = -\frac{1}{2} \rightarrow -\frac{\pi}{4}$$

АБО

$$s\left(-\frac{1}{2}\right) \rightarrow -\frac{\pi}{4} \quad \text{отже, при } x = -\frac{1}{2} \quad \text{ряд збіжний}$$

2.2) $x = \frac{1}{2}$

$$s\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow$$

в такому разі підставляємо конкретне значення x вручну і обчислюємо символічно суму отриманого числового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \rightarrow \infty \quad \text{отже, при } x = \frac{1}{2} \quad \text{ряд розбіжний}$$

При вычислении выражения обнаружена сингулярность.

Рис. 5.4.2. Дослідження поведінки степеневого ряду на кінцях ІЗ та визначення ОЗ

Якщо при дослідженні поведінки ряду на кінцях інтервалу збіжності після стрілки символічної рівності або в результаті виконання функції *substitute* виводиться ряд, а не число, яке є сумою ряду (не безмежність чи *undefined*, що свідчить про розбіжність ряду), то потрібно самостійно дослідити такий ряд на збіжність (це може бути узагальнений гармонійний ряд або ряд, що досліджується на збіжність з допомогою ознаки Лейбніца).

До завдання 4б). Для знаходження області збіжності функціональних рядів

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), x \in X$$

складається ряд із модулів і отриманий ряд із додатними членами досліджується на збіжність в залежності від змінної x .

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^3 \cdot (x^2 - 4x + 7)^n}$ це функціональний ряд

Скористаємось ознакою Даламбера:

$$u(n, x) := \frac{4^n}{n^3 \cdot (x^2 - 4x + 7)^n} \quad u(n+1, x) \rightarrow \frac{4^{n+1}}{(n+1)^3 \cdot (x^2 - 4x + 7)^{n+1}}$$

$$D(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u(n+1, x)}{u(n, x)} \right| \rightarrow \frac{4}{|x^2 - 4x + 7|}$$

Ряд збігається при $D < 1$

$$D(x) < 1 \text{ solve, } x \rightarrow x < 1 \vee 3 < x$$

$$D(x) < 1 \text{ solve, } x \rightarrow x < 1 \vee 3 < x$$

Перевіримо точки $x = 1$ та $x = 3$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^3 \cdot (x^2 - 4x + 7)^n} \text{ substitute, } x = 1 \rightarrow \text{polylog}(3, 1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^3 \cdot (x^2 - 4x + 7)^n} \text{ substitute, } x = 3 \rightarrow \text{polylog}(3, 1)$$

$$\text{polylog}(n, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^n} \quad - \text{ вбудована функція MathCad}$$

$$\text{polylog}(3, 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \quad \text{збіжний як УГР з } p=3>1$$

Таким чином, ряд збігається при $x \leq 1$ або $x \geq 3$

Рис. 5.4.3. Знаходження області збіжності функціонального ряду

До завдання 5. Для розкладу функції у степеневий ряд (ряд Маклорена) у *MathCad* використовується вбудована функція **series**. Синтаксис функції у *MathCad 15* такий:

$$f(x) \text{ series } x, n,$$

де $f(x)$ – функція, яку треба розкласти у ряд; x – змінна, за якою записується розклад; n – степінь, до якого записується розклад (у розклад входять доданки степеня строго меншого за n) (рис. 5.5.1a)). У *MathCad Prime* вставляється ключове слово **series**, у місцезаповнювач зліва вводиться функція, над стрілкою після **series** через кому вказується змінна, за якою здійснюється розклад, та степінь, до якого розкладається функція (рис. 5.5.1б)).

Завдання 5. Розкласти у ряд Маклорена функцію

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Побудувати графік функції $f(x)$ та графіки частинних сум ряду Маклорена до 4-х доданків включно в одній системі координат

Розв'язання

1) розкладаємо функцію в ряд з допомогою вбудованої функції:

$$f(x) := e^{-x^2}$$

$$f(x) \text{ series } x, 20 \rightarrow 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} - \frac{x^{10}}{120} + \frac{x^{12}}{720} - \frac{x^{14}}{5040} + \frac{x^{16}}{40320} - \frac{x^{18}}{362880}$$

Рис. 5.5.1a). Розклад функції у степеневий ряд до степеня не вище 20 (*MathCad 15*)

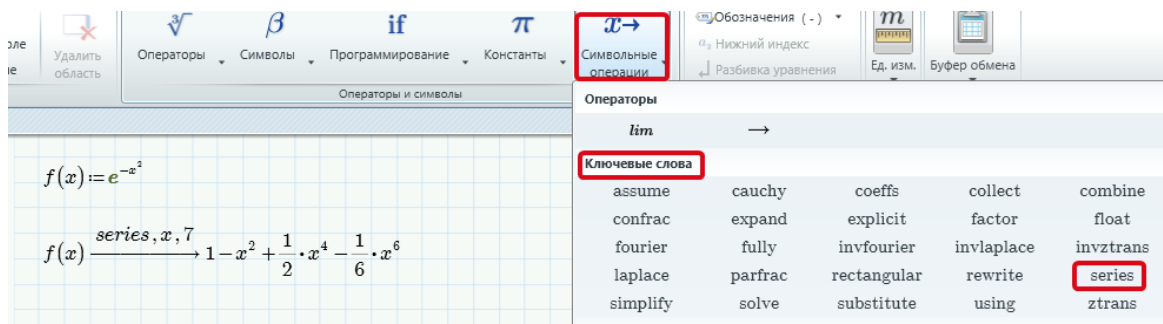


Рис. 5.5.1б). Розклад функції у степеневий ряд до степеня не вище 7 (*MathCad Prime*)

Далі зображаємо в одній системі координат графік функції $f(x)$ та частинних сум ряду Маклорена до 4-х доданків (рис. 5.5.2).

З рис. 5.5.2 видно, що частинні суми степеневого ряду добре наближають задану функцію $f(x)$ (червоний графік), причому з ростом кількості доданків наближення стає кращим (графіки $f(x)$ та відповідної частинної суми мають більше спільних точок).

2) будемо графік функції $f(x)$ та графіки частинних сум ряду Маклорена до 4-х доданків включно

$$f_1(x) := f(x) \text{ series, } x, 1 \rightarrow 1$$

$$f_2(x) := f(x) \text{ series, } x, 3 \rightarrow 1 - x^2$$

$$f_3(x) := f(x) \text{ series, } x, 5 \rightarrow 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}$$

$$f_4(x) := f(x) \text{ series, } x, 7 \rightarrow 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6}$$

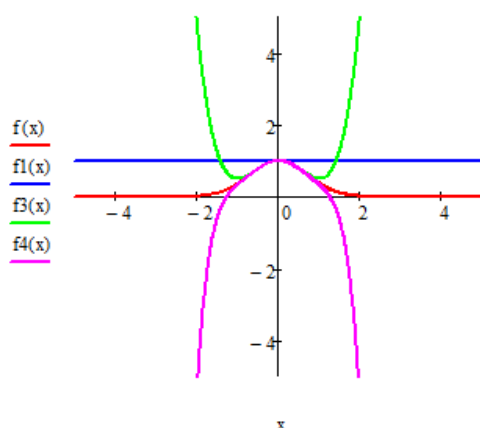


Рис. 5.5.2. Зображення графіка функції та частинних сум ряду Маклорена

До завдання 6. Означення. Функція $f(x)$ називається такою, що задовольняє **умови Діріхле** на відрізку $[a; b]$, якщо на цьому відрізку виконуються такі умови:

1. $f(x)$ має скінчену кількість розривів першого роду;
2. $f(x)$ має скінчену кількість екстремумів;
3. $f(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$ для $x \in (a; b)$.

Теорема 3. Функція $f(x)$, що задовольняє умови Діріхле на відрізку $[-l; l]$ на інтервалі $(-l; l)$, може бути визначена тригонометричним рядом Фур'є:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (9)$$

де коефіцієнти Фур'є a_n та b_n обчислюються за такими формулами:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (10)$$

Для розкладу функції в ряд Фур'є визначимо параметр l , обчислимо коефіцієнти Фур'є за формулами (10) (рис. 5.6.1).

Завдання 6. Розкласти у ряд Фур'є функцію, яка є продовженням на всю числову пряму функції, заданої на $(-2;2)$:

$$f(x) = x$$

Побудувати графік функції $f(x)$ та графіки частинних сум ряду Фур'є при $n=5, 10, 15$ в одній системі координат

Розв'язання

1) Шукаємо коефіцієнти розкладу:

$$f(x) := x \quad l := 2$$

$$a_0 := \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx \rightarrow 0$$

$$a(n) := \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{l}\right) dx \rightarrow 0$$

$$b(n) := \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{l}\right) dx \rightarrow \frac{4 \cdot \sin(\pi \cdot n) - 4 \cdot \pi \cdot n \cdot \cos(\pi \cdot n)}{\pi^2 \cdot n^2}$$

Рис. 5.6.1. Знаходження коефіцієнтів ряду Фур'є

Далі записуємо частинні суми ряду Фур'є для $n = 5, 10, 15$ та зображаємо в одній системі координат на відрізку $(-l; l)$ графік функції $f(x)$ та побудованих частинних сум ряду Фур'є (рис. 5.6.2).

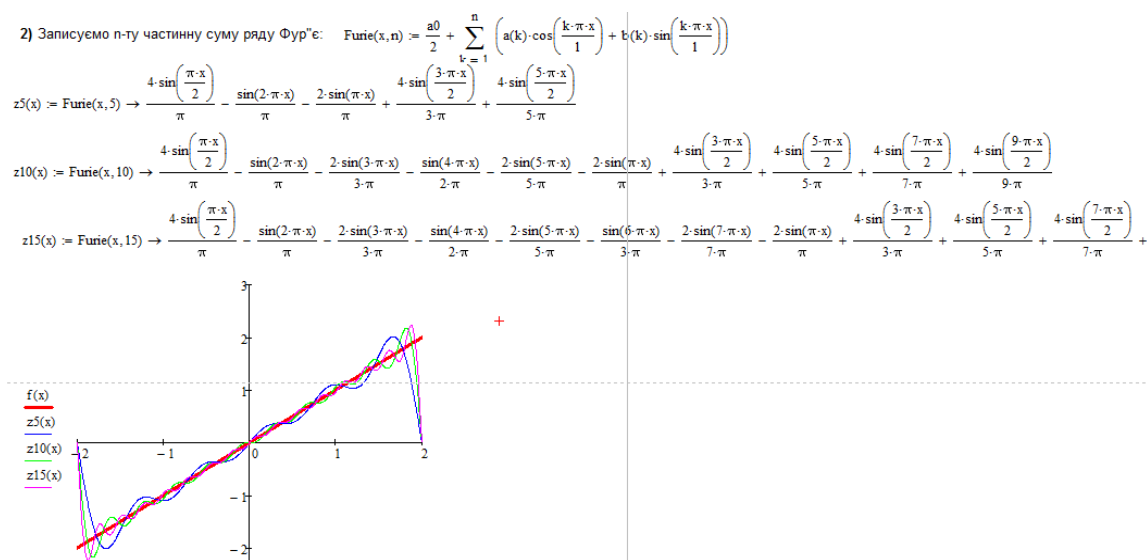


Рис. 5.6.2. Графік заданої функції та частинних сум ряду Фур'є

З рис. 5.6.2 видно, що частинні суми ряду Фур'є з ростом кількості доданків добре наближають задану функцію $f(x)$ (червоний графік).

Список літератури

1. Кравченко І.В., Микитенко В.І. Інформаційні технології: Системи комп'ютерної математики : навч. посіб. для студ. спеціальності “Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології”. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. 243с.
2. Вища математика (застосування MathCAD) : підручник / Медведєв М.Г., Романенко В.М., Мулява О.М., Гузенко С.В. Київ : НУХТ, 2018. 219 с.
3. Вища математика із застосуванням інформаційних технологій: підручник / Іващенко В.П., Швачич Г.Г., Коноваленков В.С. та ін. Дніпропетровськ, 2013. 425 с.
4. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики : у 2 ч. – Ч. 1 / Чікіна Н.О., Антонова І.В., Балака Л.О. та ін. ; за ред. Н.О. Чікіної. Харків : Підручник НТУ “ХП”, 2012. 224 с.
5. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики : у 2 ч. – Ч. 2 / Чікіна Н.О., Гайдаш А.М., Крупка В.Д. та ін. ; за ред. Н.О. Чікіної. Харків : Підручник НТУ “ХП”, 2013. 216 с.

Навчальне видання

Філіпчук Ольга Ігорівна

Кириченко Оксана Леонідівна

Антонюк Світлана Володимирівна

**МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ
ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ:
ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ**

У двох частинах

Частина 2

Відповідальна за випуск О.І. Філіпчук

Літературний редактор О.В. Колодій

Дизайн обкладинки О.І. Філіпчук

Підписано до друку 26.12.2024. Формат 60x84/16

Електронне видання. Ум.-друк. арк. 4,4.

Обл.-вид. арк. 4.7. Зам. Н-111.

Видавництво Чернівецького національного
університету імені Юрія Федьковича

58002, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2

e-mail: ruta@chnu.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №891 від 08.04.2002 р.