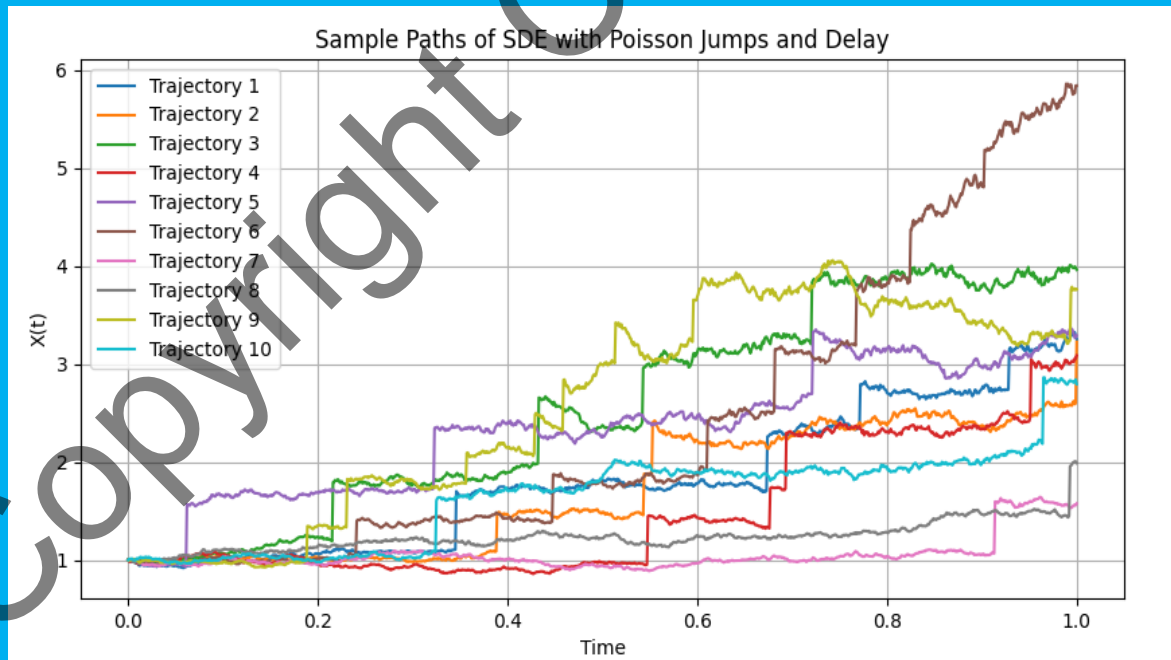


СТІЙКІСТЬ ТА ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ У СТОХАСТИЧНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ

ЧАСТИНА ДРУГА

Ясинський В.К., Юрченко І.В.



Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Ясинський В.К., Юрченко І.В.

**СТІЙКІСТЬ ТА ОПТИМАЛЬНЕ
КЕРУВАННЯ У СТОХАСТИЧНИХ
ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ**

Частина друга

Монографія

ЧЕРНІВЦІ
2025

Рецензенти:

Доктор фіз.-мат наук, професор, чл.-кор. НАН України
Кнопов Павло Соломонович

Доктор фіз.-мат наук, професор
Мішура Юлія Степанівна

Друкується за ухвалою редакційно-видавничої ради
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

MSC 34K50; 60H30

Стійкість та оптимальне керування у стохастичних динамічних системах.
Частина 2 // Монографія / Ясинський В.К., Юрченко І.В. – Чернівці:
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 2025.– 170 с.

Дана монографія присвячена дослідженню питань стійкості стохастичних динамічних систем спеціального вигляду. Проведено комплексне дослідження задач існування, єдиності, моментів, стабілізації та оптимального керування для широкого класу стохастичних диференціально-функціональних рівнянь, у тому числі рівнянь з частинними похідними, нейтрального типу, з інтегральними доданками (типу Іто-Вольтерри) та із зовнішніми збуреннями різної природи. У роботі розглядаються випадкові збурення, що моделюються випадковими величинами, броунівським рухом, пуассоновими та іншими випадковими процесами. Значна увага приділяється аналізу асимптотичної поведінки розв'язків у середньому квадратичному, питанням стійкості та побудові ефективних методів наближених обчислень.

Для наукових співробітників, аспірантів, студентів спеціальностей "Комп'ютерні науки", "Системний аналіз", "Прикладна математика" вищих навчальних закладів, студентів інших спеціальностей, що вивчають моделювання та поведінку стохастичних динамічних систем.

© Ясинський В.К.
Юрченко І.В.
ЧНУ, 2017-2025

*Світлій пам'яті Вчителів та Вчених
Королюка Володимира Семеновича
Козаченка Юрія Васильовича
Царкова Євгена Федоровича
присвячується*

Copyright ChNU 2025

ВСТУП

Сучасні динамічні системи, що моделюють реальні процеси у фізиці, біології, інженерії, економіці та інших галузях науки, все частіше описуються складними математичними моделями, в яких враховуються як внутрішні властивості об'єктів, так і зовнішні впливи, включаючи випадкові. Однією з таких моделей є стохастичні диференціально-функціональні рівняння (СДФР), які поєднують у собі стохастичну компоненту з ефектами пам'яті та запізнення, а також нерідко містять частинні похідні, що дозволяє описувати просторово-розподілені системи з випадковими збуреннями.

Актуальність дослідження стохастичних диференціально-функціональних рівнянь зумовлена потребою у більш точному й адекватному описі складних динамічних процесів, у яких важливу роль відіграють як історія розвитку системи (через запізнення), так і вплив випадкових зовнішніх факторів. Такі рівняння природним чином виникають при математичному моделюванні біомеханічних, фінансових, технічних і природничих систем, де випадкові впливи, як-от “білий шум”, пуассонівські імпульси або випадкові параметри, є невід'ємною частиною досліджуваних явищ.

Метою даної роботи є комплексне дослідження задач існування, єдиності, моментів, стабілізації та оптимального керування для широкого класу стохастичних диференціально-функціональних рівнянь, у тому числі рівнянь з частинними похідними, нейтрального типу, з інтегральними членами (типу Іто-Вольтерри) та із зовнішніми збуреннями різної природи. У роботі розглядаються як детерміновані, так і випадкові збурення, що моделюються випадковими величинами, броунівським рухом, пуассонівськими потоками та іншими випадковими процесами. Значна увага приділяється аналізу асимптотичної поведінки розв'язків у середньому квадратичному, питанням стійкості та побудові ефективних методів наближеного чисельного моделювання.

У першому розділі роботи досліджується існування та єдиність сильного розв'язку СДФР із зовнішніми випадковими збуреннями. Розглянуто умови, що

гарантують існування парних моментів розв'язку та застосування методів простору Скорохода. У другому розділі досліджується нелінійне дифузійне СДФР нейтрального типу з випадковими збуреннями та доводиться існування його розв'язку. У третьому розділі аналізується задача стабілізації автономних стохастичних рівнянь Іто-Скрохода в частинних похідних із випадковими параметрами. Розглянуто також фізичну модель втрати стійкості стрижня під впливом шуму. Четвертий розділ присвячений встановленню необхідних і достатніх умов стійкості в середньому квадратичному для лінійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь з частинними похідними. У розділах 5, 6 досліджуються нелінійні СДФР нейтрального типу, стохастичні інтегро-диференціальні рівняння Іто-Вольтерри, а також критерії стійкості та нестійкості систем Гіхмана-Іто. У сьомому розділі, окрім теоретичних результатів, представлено модель задачі стабілізації руху океанського лайнера під дією випадкових впливів. У восьмому розділі розглянуто умови існування оптимального керування для стохастичних функціональних систем із зовнішніми збуреннями. Останній, дев'ятий розділ має прикладний характер і містить результати побудови наближених розв'язків для стохастичних диференціально-функціональних рівнянь у частинних похідних спеціального вигляду з використанням алгоритмів наближених обчислень. Додатки А і В ілюструють процес візуалізації та моделювання траєкторій розв'язків на основі реалізації відповідних алгоритмів на мові програмування Python.

Викладений у монографії матеріал базується на серії статей, опублікованих авторами у 2013-2025 рр. (див. перелік публікацій на с.151-152 даної монографії) та є продовженням досліджень, опублікованих у першій частині монографії (див. [16] вищезгаданого переліку).

Автори висловлюють подяку Антонюк С.В., Березі В.Ю., Дарійчуку І.В., Довгуню А.Я., Донець Н.П., Дорошенко І.В., Лукашіву Т.О., Малику І.В., Мусурівському В.І., Перун Г.М., Ясинській Л.І., Ясинському Є.В. за плідну участь в обговоренні поставлених задач та отриманих результатів.

§ 1. ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ СИЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ІЗ ЗОВНІШНІМИ ВИПАДКОВИМИ ЗБУРЕННЯМИ

1.1. Постановка задачі

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ задано стохастичне диференціально-функціональне рівняння Іто (дифузійне) під дією зовнішніх випадкових збурень (СДФРЗЗ)

$$dx(t) = f_1(t, \omega) a(t, x_t) dt + f_2(t, \omega) b(t, x_t) dw(t, \omega) \quad (1)$$

$$x_t|_{t=0} \equiv x(t + \theta)|_{t=0} = \varphi(\theta) \in \mathbb{R}^1; \quad -\tau \leq \theta \leq 0. \quad (2)$$

де $f_j(t, \omega)$, $j = 1, 2$ є одновимірним випадковим процесом із заданим законом розподілу

$$F_{jt}(f_j(t, \omega)) \equiv \mathbb{P}\{\omega: f_j(t, \omega) < x\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^1. \quad (3)$$

Коефіцієнт зносу $a: [0, T] \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^1$, де $\mathbb{D} \equiv \mathbb{D}([-\tau, 0])$ – простір функцій, які не мають розривів другого роду.

Коефіцієнт дифузії $b: [0, T] \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$, a, b – вимірні за сукупністю змінних; $x_t \equiv \{x(t + \theta)\}, \theta \in [-\tau, 0], \quad -\infty \leq -\tau \leq 0$.

Означення 1. Випадковий процес $x(t) \equiv x(t, \omega) \in \mathbb{D}$ назвемо сильним розв'язком СДФРЗЗ (1), (2), якщо $x(t) \in \mathcal{F}_t$ -вимірним випадковим процесом $\forall t \in [0, T]$ і задовольняє стохастичне інтегральне рівняння

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t f_1(s) a(s, x_s) ds + \int_0^t f_2(s) b(s, x_s) dw(s) \quad (4)$$

за початковою умовою (2), де $f_j(s) \equiv f_j(s, \omega)$.

У просторі $\mathbb{D}$ для $\varphi \in \mathbb{D}$ визначимо норму $\|\varphi\| = \sup_{\theta \in [-r, 0]} |\varphi(\theta)|$.

Зауважимо, що у рівномірній нормі (4.1) простір Скорохода $\mathbb{D} [1]$ є неповним простором. Тому всі результати будуть мати місце в розширеному просторі $\overline{\mathbb{D}}$ який надалі будемо позначати $\mathbb{D}$.

1.2. Про єдиність сильного розв'язку СДФРЗЗ

Доведемо спочатку єдиність з точністю до стохастичної еквівалентності розв'язку задачі Коші (1), (2).

Теорема 1. Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ задано СДФРЗЗ (1), (2), коефіцієнти якого задовольняють умови:

- 1) функції $a(t, x)$ та $b(t, x)$ визначені для $t \in [0, T]$ та $x \in (-\infty, +\infty)$, причому вимірні за сукупністю змінних;
- 2) існує така стала $0 < K < \infty$, що $\forall t \in [0, T], x, y \in (-\infty, +\infty)$ справедлива умова Ліпшица та умова обмеженості

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K_1 |x - y|, \quad (5)$$

$$|a(t, x)|^2 + |b(t, x)|^2 \leq K_2 (1 + |x|^2); \quad (6)$$

$f_j(t) \equiv f_j(t, \omega)$, $j = 1, 2$ – випадкові процеси зі своїми законами розподілу (3);

- 3) виконуються $\mathbb{E}\{f_1^2(t) \leq K_3\}$; $\mathbb{E}\{f_2^4(t) \leq K_4\}$; $\mathbb{E}\{\cdot\}$ – операція математичного сподівання;

- 4) попарно незалежні випадкові процеси $f_j(t)$, $j = 1, 2$ не залежать від вінерівського процесу $w(t) \equiv w(t, \omega) \in \mathbb{R}^n$, при цьому $\mathbb{E}\{\|x_0(\theta)\|\} < K < \infty$.

- 5) інтеграли у (4) є неперервні по t майже напевно.

Тоді існує єдиний розв'язок задачі Коші (1), (2) з точністю до стохастичної еквівалентності.

Зауваження 1. Існування єдиного розв'язку задачі Коші (1), (2) з точністю до стохастичної еквівалентності означає [4] наступне:

якщо $x_1(t) \equiv x_1(t, \omega)$ та $x_2(t) \equiv x_2(t, \omega)$ – два сильних розв'язки задачі Коші (1), (2), то

$$\mathbb{P}\left\{\omega: \sup_{0 \leq t \leq T} |x_1(t) - x_2(t)| = 0\right\} = 1. \quad (7)$$

Доведення. Якщо $x_i(t) \equiv x_i(t, \omega) \in \mathbb{R}^1$ два розв'язки (1), (2), то для $i = 1, 2$ матимемо інтегральні рівняння:

$$x_i(t) = x_i(0) + \int_0^t f_1(s) a(s, x_s) ds + \int_0^t f_2(s) b(s, x_s) dw(s). \quad (8)$$

Відніmemo вираз (8), для $x_1(t)$, вираз (8), для $x_2(t)$, піднесемо до квадрату ліву та праву частину виразу для $x_1(t)$ - $x_2(t)$, обчислимо вірно математичне сподівання $\mathbb{E}\{|x_1(t) - x_2(t)|^2\}$, в результаті матимемо:

$$\mathbb{E}\{|x_1(t) - x_2(t)|^2\} = \mathbb{E}\left[\int_0^t f_1(s, \omega)(a(s, x_{1_s}) - a(s, x_{2_s}))ds + \int_0^t f_2(s, \omega)(b(s, x_{1_s}) - b(s, x_{2_s}))dw(s)\right]^2 \quad (9)$$

Введемо позначення $a_i(s) \equiv a(s, x_{i_s}), b_i(s) \equiv b(s, x_{i_s}), i = 1, 2$. Очевидна нерівність $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$. Властивість математичного сподівання від квадрату інтегралу Іто, як функції верхньої межі [3], [4] дає рівність

$$\mathbb{E}\left\{\left(\int_0^t l(s)dw(s)\right)^2\right\} = \int_0^t \mathbb{E}\{l^2(s)\}ds,$$

де $l(s) \equiv l(s, \omega)$.

Враховуючи вище згадане зауваження, матимемо:

$$\mathbb{E}\{|x_1(t) - x_2(t)|^2\} \leq 2\mathbb{E}\left[\int_0^t f_1(s, \omega)(a_{1_s} - a_{2_s})ds\right]^2 + 2\int_0^t \mathbb{E}[f_2(s)(b_{1_s} - b_{2_s})]^2 ds. \quad (10)$$

Для доданку під знаком $\mathbb{E}\{\circ\}$ виразу (10) використаємо нерівність Коші-Буняковського ([9] стор. 150)

$$\left(\int_0^t \xi \eta\right)^2 \leq \int_0^t \xi^2 ds \int_0^t \eta^2 ds,$$

де $\xi \equiv \xi(\omega) \in \mathbb{R}^1; \eta \equiv \eta(\omega) \in \mathbb{R}^1$;

Для другого доданку нерівність Гельдера [9]

$$\mathbb{E}\{f_1 f_2\} \leq (\mathbb{E}\{f_1^p\})^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}\{f_2^q\})^{\frac{1}{q}}$$

при $p = q = 2$, тобто

$$\begin{aligned}\mathbb{E}f_2^2(s)[b(s, x_{1_s}) - b(s, x_{2_s})]^2 &\leq (\mathbb{E}\{(f_2^2(s))^2\})^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}\{(b_1(s) - b_2(s))^4\}\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= (\mathbb{E}\{f_2^4(s)\})^{\frac{1}{2}} \cdot (\mathbb{E}\{(b_1(s) - b_2(s))^4\})^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

В результаті одержимо нерівність

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{|x_1(t) - x_2(t)|^2\} &\leq 2\mathbb{E}\left\{\int_0^t f_1^2(s)ds \cdot \int_0^t (a_1(s) - a_2(s))^2ds + \right. \\ &\quad \left. + 2\int_0^t (\mathbb{E}\{f_2^4(s)\})^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}\{(b_1(s) - b_2(s))^4\}\right)^{\frac{1}{2}} ds \leq \right. \\ &\leq 2T \cdot K_3 \cdot K_1^2 \int_0^t \mathbb{E}\{|x_1(s) - x_2(s)|^2\}ds + 2 \cdot K_4^{\frac{1}{2}} \cdot K_1^4 \cdot \int_0^t \mathbb{E}\{|x_1(s) - x_2(s)|^2\}ds \leq \\ &\leq L \int_0^t \mathbb{E}\{|x_1(s) - x_2(s)|^2\}ds\end{aligned}\quad (11)$$

де $L \equiv 2K_1^2(TK_3 + \sqrt{K_4} \cdot K_1^2)$. Має місце ([2] стор.41) наступне твердження

Лема. Нехай $\varphi(t)$ та $\alpha(t)$ вимірні обмежені функції та при деякому $L > 0$ виконується нерівність $\varphi(t) \leq \alpha(t) + L \int_0^t \varphi(s)ds$.

Тоді

$$\varphi(t) \leq \alpha(t) + L \int_0^t \varphi(s) \exp(-L(t-s)) ds \quad (12)$$

Доведення. Позначимо праву частину у (12) через

$$\psi(t) \equiv \alpha(t) + L \int_0^t \varphi(s) \exp(-L(t-s)) ds. \quad (13)$$

Тоді зрозуміло, що $\psi(t)$ задовольняє задачу Коші

$$\psi(t) = \alpha(t) + L \int_0^t \psi(s)ds; \quad \psi(0) = \alpha(0) \quad (14)$$

Позначаючи $\Delta(t) \equiv \psi(t) - \alpha(t)$, можемо записати:

$$\Delta(t) \geq L \int_0^T \Delta(s)ds \geq L^2 \int_0^t \int_0^s \Delta(u)du =$$

$$\begin{aligned}
&= L^2 \int_0^t (t-u) \Delta(u) du \geq L^3 \int_0^t (t-u) \int_0^u \Delta(s) ds du = \\
&= L^3 \int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} \Delta(s) ds \geq \dots \geq \frac{L^n}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} \Delta(s) ds
\end{aligned}$$

Оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L^n}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} \Delta(s) ds = 0,$$

тоді $\Delta(t) \geq 0$, тобто $\psi(t) - \alpha(t) \geq 0$, а значить виконується (12). Лему 3 доведено.

Продовжимо доведення теореми.

Використаємо нерівність (11), тобто

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\{|x_1(t) - x_2(t)|^2\} &\leq L \int_0^t \mathbb{E}\{|x_1(s) - x_2(s)|^2\} ds, \\
\varphi(t) &\equiv \mathbb{E}\{|x_1(t) - x_2(t)|^2\}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Якщо взяти $\alpha(t) \equiv 0$ в Лемі 1 з $L > 0$ одержимо:

$$0 \leq \mathbb{E}\{|x_1(t) - x_2(t)|^2\} \leq L \int_0^t \exp(-L(t-s)) \mathbb{E}\{|x_1(t) - x_2(t)|\} ds$$

Остання нерівність має місце при

$$\mathbb{E}\{|x_1(t) - x_2(t)|^2\} = 0. \tag{16}$$

Оскільки $x_1(t) - x_2(t)$ є мартингалом [6], то з (16) випливає:
 $\mathbb{P}\{\omega \in x_1(t) - x_2(t) | = 0\}, \forall t \in [0, T] \mathbb{P}\{\omega: |x_1(t) - x_2(t)|\} = 1.$

А значить для довільної зліченної підмножини N відрізка $[0, T]$ виконується рівність

$$\mathbb{P}\left\{\omega: \sup_{t \in N} |x_1(t) - x_2(t)| = 0\right\} = 1.$$

Якщо N всюди щільне на $[0, T]$, то з неперервності майже напевно $x_1(t)$ та $x_2(t)$ випливає

$$\mathbb{P}\left\{\omega: \sup_{0 \leq t \leq T} |x_1(t) - x_2(t)| = 0\right\} = \mathbb{P}\left\{\omega: \sup_{t \in N} |x_1(t) - x_2(t)| = 0\right\} = 1, \text{ що}$$

доводить теорему 1.

Зауваження 1. Майже напевно неперервність $x_1(t)$ та $x_2(t)$, як сильних розв'язків задачі Коші (1), (2), наведемо нижче у теоремі 14.

1.3. Про існування сильного розв'язку задачі Коші з простору Скорохода

Покладемо виконання умов задачі (1), (2) (теорема 1).

Теорема 2. Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ задана задача Коші (1), (2), для якої виконуються умови (1)-(6) теореми 1.

Тоді:

A) розв'язок задачі (1), (2) $x(t)$ майже напевно неперервний для довільного $t \in [0, T]$ та $x(t)|_{t=0} = x(0)$.

B) $\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}\{|x(t)|^2\} < \infty$.

Доведення. А) Покладемо $x_0(t) = x(0)$, тоді $(n + 1)$ -е та n -е наближення для розв'язку (4) задачі (1), (2) приймуть вигляд

$$x_{n+1}(t) = x(0) + \int_0^t f_1(s) a(s, x_n(s)) ds + \int_0^t f_2(s) b(s, x_n(s)) dw(s), \quad (17)$$

$$x_n(t) = x(0) + \int_0^t f_1(s) a(s, x_{n-1}(s)) ds + \int_0^t f_2(s) b(s, x_{n-1}(s)) dw(s). \quad (18)$$

Віднімемо від $x_{n+1}(t)$ за рівністю (17) $x_n(t)$ за рівністю (18), піднесемо до квадрату та, обчислюючи математичне сподівання, одержимо

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{|x_{n+1}(t) - x_n(t)|^2\} &= \mathbb{E}\left\{\int_0^t f_1(s) (a(s, x_n(s)) - a(s, x_{n-1}(s))) ds + \right. \\ &+ \left. \int_0^t f_2(s) [b(s, x_n(s)) - b(s, x_{n-1}(s))] dw(s)\right\}^2 \leq L \int_0^t \mathbb{E}\{|x_n(s) - x_{n-1}(s)|^2\} ds, \end{aligned} \quad (19)$$

де $L = 2K_1^2(TK_3 + \sqrt{K_1} \cdot K_1^2)$.

Інтеруючи нерівність (19) $n - 1$ разів, одержимо оцінку з L вигляду (19.1):

$$\mathbb{E}\{|x_{n+1}(t) - x_n(t)|^2\} \leq L \int_0^t \frac{(t-s)}{(n-1)!} \mathbb{E}\{|x_1(s) - x_0(s)|^2\} ds, \quad (19.1)$$

де

$$\mathbb{E}\{|x_1(s) - x_0(s)|^2\} = \mathbb{E}\left[\int_0^t f_1(s)a(s, x(0)) ds\right]^2 + \mathbb{E}\int_0^t f_2^2(s)b^2(s, x(0)) ds.$$

Враховуючи умову (6) теореми 1, одержимо з вище записаної рівності

$$\mathbb{E}\{|x_1(s) - x_0(s)|^2\} \leq LTK_2^2(1 + \mathbb{E}\{|x(0)|^2\})$$

Тому існує постійна C така, що

$$\mathbb{E}\{|x_{n+1}(t) - x_n(t)|^2\} \leq C \frac{(LT)^n}{n!}, \quad (20)$$

де $C = LTK_2^2(1 + \mathbb{E}\{|x(0)|^2\})$.

Введемо простір $\mathbb{H}_2[0, T]$, як простір випадкових функції $f(t, \omega)$, визначений для $\forall t \in [0, T]$ та при кожному $t \in [0, T]$ вимірних відносно $\mathcal{F}_t$ з ймовірнісного базису $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$, для яких

$$\mathbb{P}\left\{\omega: \int_0^T f^2(t)dt < C_1 < \infty\right\} = 1.$$

Лема 4. Нехай

$$f(t) \in \mathbb{H}_2[0, T] \text{ та } \int_0^T \mathbb{E}\{|f(t)|^2\} ds < \infty$$

Тоді майже напевно сепарабельний процес

$$\mathbb{I}(t, \omega) = \int_0^t f(s)dw(s)$$

неперервний за $t \in [0, T]$, а також виконуються нерівності

$$\mathbb{P}\left\{\omega: \sup_{0 \leq t \leq T} \left|\int_0^t f(s)dw(s)\right| > a\right\} \leq \frac{1}{a^2} \int_0^T \mathbb{E}\{|f(t)|^2 dt\};$$

$$\mathbb{E} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t f(s) dw(s) \right|^2 \right\} \leq 4 \int_0^T \mathbb{E} \{ |f(t)|^2 \} dt \quad [4].$$

Продовжимо доведення теореми 2. Зауважимо, що

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} |x_{n+1}(t) - x_n(t)| &\leq \int_0^T |a(s, x_n(s)) - a(s, x_{n-1}(s))| ds + \\ &+ \sup_{t \in [0, T]} \left| \int_0^t (b(s, x_n(s)) - b(s, x_{n-1}(s))) dw(s) \right| \end{aligned}$$

Тоді слід використати нерівність Коші-Буняковського, лему 4, а також умову Ліпшица, в результаті одержимо нерівність

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \sup_{t \in [0, T]} |x_{n+1}(t) - x_n(t)|^2 \right\} &\leq 2T \int_0^T K_1^2 \mathbb{E} \{ |x_n(s) - x_{n-1}(s)|^2 \} ds + \\ 8K_1^2 \int_0^T \mathbb{E} \{ |x_n(t) - x_{n-1}(t)|^2 \} ds &\leq \frac{C_1 L^{n-1} T^{n-1}}{(n-1)!}, \end{aligned}$$

де $C_1 = K_1^2(2T + 8)$.

Якщо зауважити, що збігається ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P} \{ \omega : \sup_{t \in [0, T]} |x_{n-1}(t) - x_n(t)| > \frac{1}{n^2} \} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_1 L^{n-1} T^{n-1}}{(n-1)!} n^4,$$

то з цього факту випливає майже напевно рівномірна збіжність ряду

$$x_0 + \sum_{n=0}^{\infty} [x_{n+1}(t) - x_n(t)].$$

Сума цього ряду є майже напевно рівномірною границею $x_n(t)$, а це означає, що $x_n(t)$ збігається до деякого процесу $x(t)$ з ймовірністю 1.

Якщо перейти до границі у рівності (18) при $n \rightarrow \infty$, то можна стверджувати, що $x(t)$ є розв'язком рівняння (1), при цьому $x(t)$ є вимірний відносно σ – алгебри $\mathcal{F}_{t_0}$, $\mathcal{F}_t$ є мінімальною σ – алгеброю, відносно якої вимірні $x(0)$, $w(s)$, $f(t)$, $j = 1, 2$, при $s \leq t$. Відносно цієї σ – алгебри вимірні усі $x_n(t)$, $f_j(t)$, $j = 1, 2$, а значить вимірна границя $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t)$.

Належність $x(t)$ простору $\mathbb{D}$ впливає з того, що $x(t)$ майже напевно є границею процесів з $\mathbb{D}$. Доведення твердження А завершено.

В) Очевидна нерівність

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{x_n^2(t)\} &\leq 3\mathbb{E}\{x^2(0)\} + \mathbb{E}\left\{\left[\int_0^t f_1(s)a(s, x_{n-1}(s))ds\right]^2\right\} + \\ &+ \mathbb{E}\left\{[f_2(t)b(s, x_{n-1}(s))dw(s)]^2\right\} \leq 3\mathbb{E}\{x^2(0)\} + 3L \int_0^t \mathbb{E}\{x_{n-1}^2(s)\}ds \quad (21) \end{aligned}$$

Застосовуючи оцінку (21) у x_{n-1} (5), x_{n-2} (6), тощо одержимо

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{x_n^2(t)\} &\leq 3\mathbb{E}\{x^2(0)\} + 3\mathbb{E}\{x^2(0)3LT + (3L)^2 \int_0^t (t-s)\mathbb{E}\{x_{n-2}^2(s)\}ds \\ &\leq 3\mathbb{E}\{x^2(0)\} + 3L + 3\mathbb{E}\{x^2(t)\} + 3\mathbb{E}\{x^2(0)\}\frac{(3Lt)^2}{2} + \dots \leq 3\mathbb{E}\{x^2(0)\}e^{3Lt}. \end{aligned}$$

Якщо перейти до границі при $n \rightarrow \infty$, а потім обчислити $\sup$ по $t \in [0, T]$, то переконаємося в справедливості нерівності

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}\{x^2(t)\} \leq 3\mathbb{E}\{x^2(0)\}e^{3LT}$$

Теорема 2 повністю доведена.

1.4. Про існування парного моменту розв'язку задачі

Два вище доведених твердження дають достатні умови існування та єдиності сильного розв'язку СДФРЗЗ (1), (2) за заданими початковими умовами.

Теорема 3. Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ задана задача (1), (2), для якої виконуються умови:

- 1) коефіцієнти (1) визначені та вимірні для $\forall t \in [0, T], \forall x \in (-\infty, \infty)$;
- 2) для деякого $K_1 > 0$ виконана нерівність $|a(t, x_t)|^2 + |b(t, x_t)|^2 \leq K_1(1 + \|x_t\|)$;
- 3) випадкові процеси $f_j(t), j = 1, 2$ визначені та неперервні відносно $\forall t \in [0, T]$;

4) існують $\mathbb{E}\{f_2^4(t)\} < K_3 < \infty$; $\mathbb{E}\{f_1^2(t)\} < K_2 < \infty$.

5) для довільного $N > 0$ існує стала $L_N > 0$, що для $\|x_t\| \leq N$; $\|y_t\| \leq N$ виконується нерівність Ліпшица $|a(t, x_t) - a(t, y_t)| + \|b(t, x_t) - b(t, y_t)\| \leq L_N \|x_t - y_t\|$.

6) $\mathbb{E}\{x(0)^{2m}\} < \infty$ ($m > 0$ та ціле).

Тоді знайдеться стала C , яка залежить лише від $m, K_j, j = \overline{1,3}$ та $T > 0$, для якої справедлива нерівність

$$\mathbb{E}\{|x(t)|^{2m}\} \leq \mathbb{E}\left\{\left[1 + (x(0))^{2m}\right] e^{ct}\right\}. \quad (22)$$

Доведення. Покладемо $x_N(0) = x(0)$ для $\|x_0(0)\| \leq N$; $x_N(0) = N \operatorname{sign} x(0)$ для $\|x(0)\| > N$; $a_n(t, x_t) = a(t, x_t)$ для $\|x_t\| \leq N$; $a_N(t, x_t) = a(t, N \operatorname{sign} x_t)$ при $\|x_t\| > N$, $b_N(t, x_t) = b(t, x_t)$ для $\|x_t\| \leq N$; $b_N(t, x_t) = b(t, N \operatorname{sign} x_t)$ для $\|x_t\| > N$; $|f_j(t, w)| \leq N$.

Позначимо $x_N(t)$ через розв'язок рівняння

$$dx_N(t) = x_N(0) + a_N(t, x_{tN})dt + b_N(t, x_{tN})dN(t) \quad (23)$$

за початковою умовою $x_{Nt}|_{t=0} = \varphi(\theta)$, $-2 \leq \theta \leq 2$.

Для задачі Коші рівняння (23) виконуються умови теорем 1, 2, тому існує єдиний розв'язок майже напевно рівняння (23) за умовами А), В) теореми 2.

За формулою Іто [2] маємо для цілого $m > 0$:

$$\begin{aligned} |x_N(t)|^{2m} = & |x_N(0)|^{2m} + \int_0^t [f_1(s) 2m(x_N(s))^{2m-1} a_N(s, x_{sN}) + \\ & + m(2m-1)(x_N(s))^{2m-2} b_N^2(s, x_{sN})] ds + \int_0^t 2m(x_N(s))^{2m-1} b_N(s, x_{sN}) dw(s) \end{aligned} \quad (24)$$

Зауважимо, що має місце інтегральне рівняння Іто (23), для якого $\mathbb{E}\{[x_N(0)]^{2m}\} < \infty$, де $a_N(t, x_t)$, $b_N(t, x_t)$ обмежені, тоді $\mathbb{E}\{[x_N(t)]^{2m}\} < \infty$.

Обчислимо математичне сподівання від (24) то враховуючи рівність математичного сподівання від інтегралу Іто (четвертий доданок), в результаті одержимо

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{[x_N(t)]^{2m}\} &= \mathbb{E}\{[x_N(0)]^{2m}\} + \\ &+ \int_0^t \mathbb{E}\{[2mf_1(t)a_N(s, x_{sN})x_N^{2m-1}(s) + m(2m-1)f_2(t)b_N^2(s, x_{tN}(s))]\} \cdot \\ &\cdot x_{sN}^{2m-1} ds \leq \mathbb{E}\{[x(0)]^{2m}\} + (2m+1)mK^2 \int_0^t \mathbb{E}\{(1+x_n^2(s))[x_N(s)]^{2m-2}\} ds. \end{aligned}$$

Врахувавши нерівність $[x_N(s)]^{2m-2} \leq 1 + [x_N(s)]^{2m-1}$ матимемо нерівність

$$\mathbb{E}\{[x_N(t)]^{2m}\} \leq \mathbb{E}\{[x(0)]^{2m}\} + (2m+1)mK^2 \int_0^t \{1 + 2\mathbb{E}\{[x_N(s)]^{2m}\}\} ds.$$

З леми 4 та останньої нерівності випливає нерівність

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[x_N(t)]^{2m} &\leq \mathbb{E}[x(0)]^{2m} + m(2m+1)K^2 t + 2m + \\ &+ K^2 \int_0^t e^{2m(2m+1)K^2(t-s)} \left[\mathbb{E}(x(0))^{2m} + sm(2m+1)K^2 \right] ds. \end{aligned} \quad (25)$$

Якщо вибрати $c = 2m(m+1)K^2$, то нерівність (22) випливає з (25).

Теорему 3 доведено.

Теорема 4. Нехай $f(t) \in H_2[0, T]$ та при m натуральному

$$\int_0^t \mathbb{E}\{f^{2m}(t)\} dt < \infty$$

Тоді

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, \omega) dw(t, \omega)\right]^{2m} \leq [m(2m-1)]^{m-1} T^{m-1} \int_0^T \mathbb{E}\{f^{2m}(t)\} dt. \quad (26)$$

Доведення. Якщо застосувати формулу Іто ([3] теорема 16, стор. 25-26) до функції $\varphi(x) = x^{2m}$ (m - ціле невід'ємне число) та $\xi(t, \omega) \equiv \xi(t)$ має стохастичний диференціал $d\xi(t) = \xi(0) + f(t)dw(t)$, то

$$\begin{aligned} \left[\int_0^t f(s)dw(s) \right]^{2m} &= 2m \int_0^t \left(\int_0^s f(z)dw(z) \right)^{2m-1} f(s)dw(s) + \frac{2m(2m-1)}{2} \cdot \\ &\cdot \int_0^t \left[\int_0^s f(z)dw(z) \right]^{2m-2} f^2(s)ds. \end{aligned}$$

Нехай $f(s) = f_n(s)$ - обмежена постійною та є простою функцією. Тоді легко бачити, що

$$\int_0^T \mathbb{E} \left(\int_0^s f_n(z)dw(z) \right)^2 f_n^2(s)ds < \infty.$$

Значить

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t f_n(s)dw(s) \right]^{2m} = \frac{2m(2m-1)}{2} \int_0^t \mathbb{E} \left[\int_0^s f_n(z)dw(z) \right]^{2m-1} f_n^2(s)ds. \quad (27)$$

Застосувавши до (27) нерівність Гельдера, матимемо

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^T f_n(s)dw(s) \right]^{2m} &\leq \frac{2m(m-1)}{2} \left\{ \int_0^T \mathbb{E} \left[\int_0^t f_n(z)dw(z) \right]^{2m} dt \right\}^{\frac{2m-1}{2}} \cdot \\ &\cdot \left\{ \int_0^T \mathbb{E} f_n^{2m}(s)ds \right\}^{\frac{2}{2m}}. \end{aligned}$$

Оскільки зростає із зростанням t , що випливає з (27), то

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t f_n(s)dw(s) \right]^{2m}$$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T f_n(t)dw(t)\right]^{2m} \leq \frac{2m(m-1)}{2} \left\{ \int_0^T \mathbb{E} \left[\int_0^T f_n(s)dw(s) \right]^{2m} dt \right\}^{\frac{1}{m}} \cdot \left\{ \int_0^T \mathbb{E} f_n^{2m}(t) dt \right\}^{\frac{1}{m}}. \quad (28)$$

Далі піднесемо до степеня m нерівність (28) та, скорочуючи дві частини одержаної нерівності на

$$\left\{ \mathbb{E} \left[\int_0^T f_n(s)dw(s) \right]^{2m} \right\}^m$$

одержимо нерівність

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T f_n(t, \omega) dw(t, \omega) \right]^{2m} \leq [m(2m-1)]^{m-1} \int_0^T \mathbb{E} \{ f_n^{2m}(t, \omega) \} dt.$$

Залишиться перейти до границі при $n \rightarrow \infty$ в останній нерівності, що дає нерівність (26) теореми 4. Доведення завершено.

Теорема 5. Нехай виконуються умови теореми 15. Тоді існує стала $\bar{K} \equiv \bar{K}(m, K_1, K_2, K_3, T)$, для якої $\mathbb{E}[x(t) - x(0)]^{2m} \leq \bar{K}[\mathbb{E}[x(0)]^{2m}]e^{ct}t^m$.

Доведення. З інтегральної нерівності матимемо

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[x(t) - x(0)]^{2m} &= \mathbb{E} \left[\int_0^t f_1(s, \omega) a(s, x(s)) ds + \int_0^t f_2(s, \omega) b(s, x(s)) dw(s) \right]^{2m} \leq \\ &\leq 2^{2m-1} \left\{ \mathbb{E} \left[\int_0^t f_1(s, \omega) a(s, x(s)) ds \right]^{2m} + \mathbb{E} \left[\int_0^t f_2(s, \omega) b(s, x(s)) dw(s) \right]^{2m} \right\} \end{aligned}$$

Використаємо нерівність Гельдера та теорему 16. В результаті матимемо

$$\mathbb{E}[x(t) - x(0)]^{2m} \leq 2^{2m-1} \left[t^{2m-1} \int_0^t \mathbb{E}[f_1(s, \omega) a(s, x(s))] \right]^{2m} ds +$$

$$+ t^{m-1} [m(2m-1)]^m \mathbb{E} \int_0^t f_2^{2m}(s, \omega) b^{2m}(s, x(s)) ds$$

Значить, існує стала $\bar{K}$, що

$$\mathbb{E}[x(t) - x(0)]^{2m} \leq \bar{K} t^{m-1} \int_0^t \mathbb{E}(1 + x^2(s))^m ds \leq$$

$$\leq \bar{K} t^{m-1} \int_0^t [2^{m-1} + 2^{m-1} \mathbb{E} x^{2m}(s)] ds \leq 2^{m-1} \bar{K} t^{m-1} \cdot$$

$$\int_0^t [1 + (1 + \mathbb{E}[x(0)]^{2m}) e^{cs}] ds = 2^m \bar{K} t^m + 2^{m-1} t^m \bar{K} \mathbb{E}[x(0)]^{2m} \frac{e^{ct} + 1}{ct} \leq$$

$$\leq 2^m \bar{K} t^m [1 + \mathbb{E}[x(0)]^{2m}] e^{ct},$$

В останній нерівності застосували очевидне співвідношення $\frac{e^x - 1}{x} \leq e^x$ для $x > 0$. Теорема 5 доведена.

Отже, нами одержано достатні умови існування майже напевно сильного розв'язку дифузійного стохастичного рівняння зі скінченною післядією під дією зовнішніх випадкових процесів довільної природи, а також знайдені достатні умови існування парних моментів таких рівнянь.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ до §1

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применения. – Киев: Наукова думка, 1982. – 612 с.
2. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применения. – Киев: Наукова думка, 1982. – 354 с.
3. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – Киев: Наукова думка, 1978. – 583 с.

4. Ито К., Нисио М. Стационарные решения стохастического дифференциального уравнения // Математика: Сб перев. иностр. ст. – 1967.– Т.11, № 5.– С.117–170.
5. Королук В.С., Королук В.В. Стохастические модели систем.– Киев: Наук. думка, 1989.– 208 с.
6. Свердан М.Л., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Стохастичні динамічні системи Іто-Скорохода зі скінченною післядією.– Чернівці: Зелена Буковина, 2000.– 560 с.
7. Скороход А.В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений.– Киев: Наук.думка, 1987.– 328 с.
8. Скороход А.В. Исследования по теории случайных процессов.– К.:Изд-во Киевского ун-та, 1961. –216 с.
9. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений.– Рига: Зинатне, 1989.– 421 с.
10. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения.– Рига: Ориентир, 1992.–328 с.
11. Ясинський В.К. Сучасна теорія випадкових процесів.– Чернівці: Видавничий дім «Родовід». 2014. – 292 с.
12. Ясинський В.К., Ясинський Є.В. Задачі стійкості та стабілізації динамічних систем зі скінченною післядією. – Київ: Вид-во «ТВіМС», 2005. – 580 с.
13. Ясинський В.К., Комар А.В. Стійкість диференціально – функціональних рівнянь з марковськими параметрами // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. Сб.научн.тр.- Киев: Ин-т матем. НАН Украины, 1995. – С.296-299.
14. Ясинський В.К., Юрченко І.В., Кисілюк У.М. Про існування сильного розв'язку дифузійного стохастичного диференціально-функціонального рівняння із зовнішніми випадковими збуреннями-процесами. (СДФР ЗВЗ). – Кам'янець-Подільський: КПНУ ім. І. Огієнка, 2016. – с. 254.

15. Ito K. Nagaya Math. I.1951, Vol.- P.55-65 (Об одной формуле, касающейся стохастических дифференциалов. Математика (сб. переводов) .-1959.- Т.3, В.5.-С.131-141.
16. Koroljuk V.S. Stability of Stochastic systems in diffusion approximation Scheme// Укр. мат. журн.,1998.-50,№1.-С.36-47.
- 17.Tsarkov Ye., Yasinski V. The second Lyapunov Method for Stochastic Functional Differential Equations with Poisson Disturbance // Random Operators and Stochastic Equations.-1997.-Vol.4.-P.47.-58
- 18.Ясинський В.К., Юрченко І.В., Кисілюк У.М. Про існування сильного розв'язку дифузійного стохастичного диференціально-функціонального рівняння із зовнішніми випадковими збуреннями-процесами // VII Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації” (Кам'янець-Подільський, 21-22 квітня 2016).– Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2016.– С.254-255.

§2. ПРО ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ДИФУЗІЙНОГО СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ З УРАХУВАННЯМ ВИПАДКОВИХ ЗОВНІШНИХ ЗБУРЕНЬ

2.1. Постановка задачі

Питання існування та єдиності розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь з деякими початковими та граничними умовами в різних функціональних просторах, зокрема і рівнянь у частинних похідних, досліджувалося багатьма авторами [3, 4, 6, 7, 8, 11, 12]. У працях [9, 10] А.Н. Станжицький та А.О. Цуканова одержали теорему існування та єдиності розв'язку задачі Коші для стохастичного диференціального рівняння реакції-дифузії нейтрального типу. Дана робота розглядає питання існування розв'язку задачі Коші в класі нелінійних дифузійних стохастичних диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішніх збурень, незалежних від вінерівського процесу. Одержано достатні умови на коефіцієнти нелінійного дифузійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу (НДСДРРНТ), які гарантують існування з імовірністю одиниця його розв'язку.

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, F, \{F_t, t \geq t_0, 0\}, \mathbf{P})$ задано нелінійне дифузійне стохастичне диференціально-різницеве рівняння нейтрального типу (НДСДРРНТ) в частинних похідних під дією випадкових зовнішніх збурень, незалежних від вінерівського процесу

$$\begin{aligned} d \left(u(t, x) + \int_{\mathbf{R}^r} b(t, x, y) u(t - \tau, y) dy \right) = \\ = \sum_{j=1}^r \varphi_j(\gamma_j) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_j^2} dt + \varphi_{r+1}(\gamma_{r+1}) \sigma(t, u(t - \tau, x)) dw(t, x), \end{aligned} \quad (1)$$

для $t \in (0, T]$, $x \in \mathbf{R}^r$ за початковими даними

$$u(t, x) = \psi(t, x), \quad \forall t \in [-\tau, 0], \quad (2)$$

де $\gamma_j \equiv \gamma_j(\omega) \in \mathbf{R}^1$, $j = \overline{1, r+1}$, незалежні попарно та незалежні від вінерівського процесу $w(t, x)$ випадкові величини; зовнішні збурення $\varphi_j(\gamma_j)$, $j = \overline{1, r+1}$, – берівські функції, додатні, попарно незалежні та незалежні від вінерівського процесу і початкової функції; $T \in (0, \infty)$ – фіксований дійсний час, $\tau > 0$, випадковий r -вимірний оператор Лапласа [1, 4]

$$\Delta_x(\omega) \equiv \sum_{j=1}^r \varphi_j(x_j) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_j^2}, \quad (3)$$

$w(t, x)$ – $L_2(\mathbf{R}^r)$ -вимірний Q -вінерівський процес [2]; $\sigma: [0, T] \times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^1$ і $b: [0, T] \times \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^1$ – деякі конкретні функції, які будуть визначені під час дослідження; $\psi: [-\tau, 0] \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^1$ – функція початкових даних.

2.2. Обговорення попередніх результатів та означення

Наведемо декілька тверджень з праць [9, 10, 11, 12].

Лема 1. [12, с.188]. *Оператор*

$$S(t): L_2(\mathbf{R}^r) \rightarrow L_2(\mathbf{R}^r) \quad (4)$$

генерує розв'язок однорідної задачі Коші для рівняння тепла (лема 1, [9]) за початковими даними (2) з імовірністю 1

$$\begin{aligned} d(u(t, x)) + \int_{\mathbf{R}^r} b(t, x, z) u(t - \tau, z) dz = \\ = \Delta_x u(t, x) dt, \end{aligned} \quad (5)$$

за правилом

$$u(t, x) = (s(t)g(\cdot))(x) = \int_{\mathbf{R}^r} K(t, x - y) g(\cdot) dy, \quad (6)$$

та утворює C_{0+} напівгрупу операторів, інфінітезимальним оператором якої є випадковий лапласіан $\Delta_x(\omega)$ (3). А ця напівгрупа $S(t)$ є стискаючою, тобто

$$\|(S(t)g(\cdot))(x)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \leq \|g(x)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2. \quad (7)$$

Уведемо потік (фільтрацію) σ -алгебр $\{F_t, t \geq t_0 \geq 0\}$, який породжений $L_2(\mathbf{R}^r)$ -значним Q -вінерівським процесом

$$w(t, x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} e_n(x) \beta_n(t), \quad (8)$$

де $\{\beta_n(t) \equiv \beta_n(t, \omega)\} \subset \mathbf{R}^1$ – незалежні стандартні одновимірні вінерівські (броунівські) процеси, а

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \equiv \lambda < \infty. \quad (9)$$

При цьому система векторів $e_n(x) \equiv \bar{e}_n(x)$ утворюють ортонормований базис у $L_2(\mathbf{R}^r)$ такий, що

$$\sup_{n \in \{1, 2, \dots\}} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbf{R}^r} |e_n(x)| \leq 1. \quad (10)$$

Уведемо простір Банаха $\mathfrak{B}_{2,T}$ всіх $L_2(\mathbf{R}^r)$ -значних F_t -вимірних та неперервних з імовірністю одиниця випадкових процесів $\Phi(\cdot) \equiv \Phi(t, \omega): [0, T] \times \Omega \rightarrow L_2(\mathbf{R}^r)$ з нормою

$$\|\Phi(\cdot)\|_{\mathfrak{B}_{2,T}} \equiv \sqrt{\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbf{E} \|\Phi(t, \omega)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2}. \quad (11)$$

Означення 1. Неперервну випадкову функцію $u \equiv u(t, x, \omega): [-\tau, T] \times \mathbf{R}^r \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ назвемо м'яким розв'язком задачі (1), (2), якщо виконуються умови:

- 1) $u \in F_t$ -вимірною для майже всіх $t \in [-\tau, T]$ та фіксованих $x \in \mathbf{R}^r, \omega \in \Omega$;
- 2) u задовольняє умову (інтегральне рівняння)

$$\begin{aligned} u(t, x, \omega) = & \int_{\mathbf{R}^r} K(t, x - y) \left(\psi(0) + \int_{\mathbf{R}^r} b(0, y, z) \psi(-\tau, z) dz \right) dy - \\ & - \int_{\mathbf{R}^r} b(0, x, y) u(t - \tau, y) dy - \\ & - \int_0^t \left(\sum_{j=1}^r \varphi_j(\gamma_j) \Delta_x(\omega) \int_{\mathbf{R}^r} K(t - s, x - y) \times \int_{\mathbf{R}^r} b(s, y, z) u(s - \tau, z) dz dy \right) ds + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \left(\int_{\mathbf{R}^r} K(t-s, x-y) \varphi_{r+1}(\gamma_{r+1}) \times \right. \\
& \quad \left. \times \sigma(s, u(s-\tau), y) e_n(y) dy \right) d\beta_n(s)
\end{aligned} \tag{12}$$

для $t \in [0, T]$, $x \in \mathbf{R}^r$ за початковою умовою (2);

3) існує норма

$$E \left\{ \int_0^T \|u(t, x, \omega)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 dt \right\} < \infty. \tag{13}$$

Лема 2 [10]. Вираз (13) для випадкової функції $u(t, x, \omega)$ є нормою.

2.3. Основний результат

Будемо надалі вважати, що ймовірнісний базис $(\Omega, F, \{F_t, t \geq t_0\}, \mathbf{P})$ побудований [1–5] для задачі (1), (2), яка є предметом дослідження цієї статті.

Основне твердження

Нехай для задачі (1), (2) виконано умови:

1) коефіцієнт $\sigma \equiv \sigma(t, u, x)$ є:

1а) вимірним за всіма аргументами;

1б) задовольняє умову Ліпшиця за другим аргументом

$$|\sigma(t, u, x) - \sigma(t, v, x)| \leq L|u - v| \text{ для } \forall t \in [0, T], u, v \in \mathbf{R}^1, x \in \mathbf{R}^r;$$

2) початкова функція $\psi(t, x, \omega)$ є:

2а) F_0 -вимірною відносно аргумента $t \in [0, T]$;

2б) незалежною від вінерівського процесу $w(t) \equiv w(t, \omega) \in \mathbf{R}^1$ для $\forall t \in [0, T]$;

2в) незалежною від зовнішніх збурень $\varphi_j(\gamma_j)$, $j = \overline{1, r+1}$;

2г) має норму

$$\sup_{-\tau \leq t \leq 0} E \|\psi(t, x, \omega)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 < \infty; \tag{14}$$

3) функція $b \equiv b(t, x, y)$ задовольняє умови:

3а)

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbf{R}^r} \sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} b^2(t, x, y) dy} dx = K_1; \quad (15)$$

3б)

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(t, x, y) dy dx = K_2; \quad (16)$$

3в) для кожної точки $x \in \mathbf{R}^r$ існують частинні похідні $\partial_{x_i} b$, $\partial_{x_i x_j} b$, де

$$\{i, j\} \subset \{1, 2, \dots, r\};$$

3г) матриця Гессе $D_x^2 b$ задовольняє умову

$$|\nabla_x b(t, x, y)| + \|D_x^2 b(t, x, y)\| \leq Z(t, x, y), \quad (17)$$

для $\forall t \in [0, T] \subset [0, \infty)$, $\{x, y\} \subset \mathbf{R}^r$, де функція

$Z: [0, T] \times \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^r \rightarrow [0, \infty)$ задовольняє умову обмеженості подвійного просторового інтегралу

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} Z(t, x, y) dx dy = K_3 < \infty; \quad (18)$$

4) для функції $Z(t, x, y)$ виконується аналог умови Ліпшиця за другим аргументом

$$|Z(t, x, z) - Z(t, x_0, z)| \leq \zeta(t, z, x_0, \delta) |x - x_0|, \quad (19_1)$$

де для кожної точки $x_0 \in \mathbf{R}^r$ існує її оточення $B_\delta(x_0)$ та невід'ємна функція

$\zeta \equiv \zeta(t, z, x_0, \delta)$ для $\forall t \in [0, T]$, $|x - x_0| < \delta$; $z \in \mathbf{R}^r$, де

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \zeta(t, \cdot, x_0, \delta) \in L_2(\mathbf{R}^r), \quad \delta \in \mathbf{R}_+; \quad (19_2)$$

5) зовнішні збурення $\varphi_j(\gamma_j)$, $j = \overline{1, r+1}$,

5а) попарно незалежні;

5б) незалежні від вінерівського процесу та від початкової функції

$$\psi(t, x) \equiv \psi(t, x, \omega) \in \mathbf{R}^1;$$

5в) виконується умова обмеженості математичних сподівань квадратів зовнішних збурень $\mathbf{E}\{\varphi_{r+1}^2\} \leq K_4 < \infty$.

Тоді задача (1), (2) для НДСДРНТ має єдиний м'який розв'язок $u \equiv u(t, x, \omega) \in \mathfrak{B}_{2,T}$ з імовірністю одиниця для $\forall t \in [0, T]$, якщо

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(t, x, y) dx dy \equiv K_5 < \frac{1}{4}. \quad (20)$$

2.4. Доведення основного твердження

Доведення розіб'ємо на етапи, що містяться в теоремі Банаха [1, 2], яка застосована для встановлення з імовірністю одиниця єдиного розв'язку задачі (1), (2) (задачі Коші). Будемо використовувати методику, викладену в [9, 10].

Розглянемо оператор $S : \mathfrak{B}_{2,T} \rightarrow \mathfrak{B}_{2,T}$, який діє за правилом для $t \in [0, T]$, $x, y \in \mathbf{R}^r$

$$\begin{aligned} (Su)(t) = & \int_{\mathbf{R}^r} K(t, x - y) \left[\psi(0) + \int_{\mathbf{R}^r} b(0, y, z) \psi(-\tau, z) dz \right] dy - \\ & - \int_{\mathbf{R}^r} b(t, y, z) u(t - \tau, y) dy - \\ & - \int_0^t \left[\sum_{j=1}^r \varphi_j(\gamma_j) \Delta_x(\omega) \int_{\mathbf{R}^r} K(t - s, x - y) \int_{\mathbf{R}^r} b(s, y, z) u(s - \tau, z) dz \right] dy ds + \\ & + \int_0^t \varphi_{r+1}(\gamma_{r+1}) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \left[\int_{\mathbf{R}^r} K(t - s, s - y) \sigma(s, u(s - \tau), y) e_n(y) dy \right] d\rho_n(s) \equiv \\ & \equiv \sum_{j=0}^3 I_j(t) \end{aligned} \quad (21)$$

за початковими даними (2).

Доведемо, що цей оператор є стискаючим.

По-перше, треба довести, що $Su \in \mathfrak{B}_{2,T}$ для $\forall u \in \mathfrak{B}_{2,T}$. Для цього потрібно оцінити чотири норми $\|I_j(s)\|_{\mathfrak{B}_{2,T}}^2 \equiv \sup \mathbf{E} \|I_j(s)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2$, $j = 0, 1, 2, 3$.

Використаємо нерівність (7) леми 1, нерівність Коші-Шварца [4] та умови (14), (20) і одержимо оцінку для супремума математичного сподівання $I_0(s)$ з оператора $(Su)(t)$ (див. (21)), а саме:

$$\begin{aligned}
& \|I_0(s)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 \equiv \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \|I_0(s)\|_{L_2(\mathbf{R}^d)}^2 \equiv \\
& = \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \left\| \int_{\mathbf{R}^r} K(s, x-y) (\psi(0) + \int_{\mathbf{R}^r} b(0, y, z) \psi(-\tau, z) dz) dy \right\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \leq \\
& \leq 2 \mathbf{E} \|\psi(0)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + 2 \mathbf{E} \left\| \int_{\mathbf{R}^r} b(0, x, z) \psi(-\tau, z) dz \right\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 = \\
& = 2 \mathbf{E} \|\psi(0)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + 2 \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \left(\int_{\mathbf{R}^r} b(0, x, z) \psi(-\tau, z) dz \right)^2 dx \leq \\
& \leq 2 \mathbf{E} \|\psi(0)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + 2 \left(\int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(0, x, z) dz dx \right) \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \psi^2(-\tau, z) dz = \\
& = 2 \mathbf{E} \|\psi(0)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \psi^2(-\tau, z) dz = 2 \mathbf{E} \|\psi(0)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + \\
& + 2 \left(\int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(0, x, z) dz dx \right) \mathbf{E} \|\psi(-\tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 = C < \infty.
\end{aligned}$$

Застосуємо нерівність Коші-Шварца [4] та припущення (14), (20) при оцінюванні супремума математичного сподівання $I_1(s)$, а саме:

$$\begin{aligned}
& \|I_1(s)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 \equiv \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \|I_1(s)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \equiv \\
& = \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \left(\int_{\mathbf{R}^r} b(s, x, y) u(s-\tau, y) dy \right)^2 dx \leq \\
& \leq \sup_{0 \leq s \leq t} \left(\int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s, x, y) dy dx \right) \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} u^2(s-\tau, y) dy \leq \\
& \leq \sup_{0 \leq s \leq t} \left(\int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s, x, y) dy dx \right) \mathbf{E} \|u(s-\tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \leq \\
& \leq \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \|u(s-\tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \cdot \sup_{0 \leq s \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s, x, y) dy dx.
\end{aligned}$$

Далі спрацює очевидна нерівність на першому кроці відрізка $[0, \tau]$ для розв'язку $u(t)$ рівняння (1) для $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|u(s - \tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 &\leq \sup_{0 \leq s \leq \tau} \mathbb{E} \|u(s - \tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + \sup_{\tau \leq s \leq t} \mathbb{E} \|u(s - \tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 = \\ &= \sup_{-\tau \leq s - \tau \leq 0} \mathbb{E} \|u(s - \tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + \sup_{0 \leq s - \tau \leq t - \tau} \mathbb{E} \|u(s - \tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2. \end{aligned} \quad (22)$$

З урахуванням (22) попередня нерівність дасть оцінку

$$\begin{aligned} \|I_1(s)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 &\leq \\ &\leq \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s, x, y) dy dx \right) \left(\sup_{-\tau \leq s - \tau \leq 0} \mathbb{E} \|u(s - \tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sup_{0 \leq s - \tau \leq t - \tau} \mathbb{E} \|u(s - \tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \right) = \\ &= \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s, x, y) dy dx \right) \left(\sup_{-\tau \leq s \leq 0} \mathbb{E} \|\psi(s)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + \sup_{0 \leq s \leq t - \tau} \mathbb{E} \|u(s)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \right) \leq \\ &\leq \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s, x, y) dy dx \right) \left(\sup_{-\tau \leq s \leq 0} \mathbb{E} \|\psi(s)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{E} \|u(s)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \right) = C_1 < \infty. \end{aligned}$$

Аналогічно слід оцінити супремум математичного сподівання квадрату інтеграла $I_2(s)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,t}$ з відповідними нормами

$$\begin{aligned} \|I_2(s)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 &\equiv \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{E} \|I_2(s)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \equiv \\ &= \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{E} \int_0^s \left(\sum_{j=1}^r \varphi_j(\omega) \int_{\mathbf{R}^r} K(s - \tau, x - y) \left(\int_{\mathbf{R}^r} b(l, y, z) u(l - \tau, z) dz \right) dl \right) d\tau \Big|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \leq \\ &\leq t \left(\sum_{j=1}^r \mathbb{E} \{\varphi_j(\gamma_j)\} \right)^2 \cdot \varepsilon(s), \end{aligned} \quad (23)$$

де

$$\varepsilon(s) \equiv \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{E} \int_{\mathbf{R}^r} \left(\int_0^s \left(\int_{\mathbf{R}^r} K(s - \tau, x - y) \left(\int_{\mathbf{R}^r} b(l, y, z) u(l - \tau, z) dz \right) dy \right) dl \right) dx. \quad (24)$$

Змінюючи порядок інтегрування у $\varepsilon(s)$ (див. (24)), матимемо оцінку для $I_2(s)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,T}$:

$$\begin{aligned} \|I_2(s)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 &\leq t \left(\sum_{j=1}^r \mathbf{E} \{ \varphi_j(\gamma_j) \} \right)^2 \cdot \varepsilon(s) = t \left(\sum_{j=1}^r \mathbf{E} \{ \varphi_j(\gamma_j) \} \right)^2 \times \\ &\times \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \int_0^s \left(\int_{\mathbf{R}^r} \Delta_x \int_{\mathbf{R}^r} K(s-\tau, x-y) \left(\int_{\mathbf{R}^r} b(l, y, z) u(l-\tau, z) dz \right) dy \right)^2 dx dl \leq \\ &\leq Ct \mathbf{E} \left\{ \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} \left\| D_x^2 \int_{\mathbf{R}^r} b(l, x, z) u(l-\tau, z) dz \right\|^2 dx dl \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

У попередній оцінці

$$\nabla_x \equiv (\partial_{x_1} \dots \partial_{x_r})^T; \quad D_x^2 = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}^2 & \dots & \partial_{x_1 x_r}^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_{x_r x_1}^2 & \dots & \partial_{x_r}^2 \end{pmatrix}; \quad (26)$$

$\|\cdot\|$ – відповідна матрична норма.

Далі слід використати лему 1 [9, лема 4]. Якщо умови цієї леми для

$$\begin{aligned} u(l, x) &= \int_{\mathbf{R}^r} K(s-l, x-y) \left(\int_{\mathbf{R}^r} b(l, y, z) u(l-\tau, z) dz \right) dy, \\ g(l, x) &\equiv \int_{\mathbf{R}^r} b(l, y, z) u(l-\tau, z) dz \end{aligned} \quad (27)$$

виконуються, то оператор $S(\cdot)$ є стискаючим (див. (7)).

Перевіримо умови леми 1, тобто доведемо, що:

1) з імовірністю одиниця для кожного $l \in [0, t]$

$$\int_{\mathbf{R}^r} b(l, \cdot, z) u(l-\tau, z) dz \in L_1(\mathbf{R}^r); \quad (28)$$

2)

$$\|\nabla_x g\| \in L_2(\mathbf{R}^r), \quad \|D_x^2 g\| \in L_2(\mathbf{R}^r). \quad (29)$$

Перевіримо умову 1). Доведення (28) випливає з використання умов Коші-Шварца та умов 2а), 2б) основного твердження та (20) зі сталою K_5 .

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} \left\{ \sum_{j=1}^r \varphi_j^2(\gamma_j) \right\} \mathbf{E} \left\{ \int_{\mathbf{R}^r} \left| \int_{\mathbf{R}^r} b(l, x, z) u(l - \tau, z) dz \right| dx \right\} \leq \\
& \leq \mathbf{E} \left\{ \sum_{j=1}^r \varphi_j^2(\gamma_j) \right\} \left(\sup_{0 \leq l \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} b^2(l, x, z) dz} dx \right) \left(\sqrt{\sup_{-\tau \leq l \leq 0} \mathbf{E} \|\psi(l)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2} + \right. \\
& \quad \left. + \sup_{0 \leq l \leq t} \mathbf{E} \|u(l)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Звідки з імовірністю одиниця умова 1 виконується

$$\int_{\mathbf{R}^r} \left| \int_{\mathbf{R}^r} b(l, x, z) u(l - \tau, z) dz \right| dx = C_1 < \infty.$$

Перевіримо умову 2) леми 1. Умову (29) доведемо для $|\nabla_x g|$. Для $\|D_x^2 g\|$ міркуватимемо аналогічно. Спочатку доведемо диференційовність $g(l, x)$ (дивись (27)) у точці $x = x_0 \in \mathbf{R}^r$.

Нехай $B_\delta(x_0)$ є околом точки $x_0 \in \mathbf{R}^r$. Використовуючи умови (17) та умову (19), матимемо

$$\begin{aligned}
& |\nabla_x b(t, x, z) u(t - \tau, z)| \leq \psi(t, x, z) |u(t - \tau, z)| = \\
& = (\psi(t, x, z) - \psi(t, x_0, z) + \psi(t, x_0, z)) |u(t - \tau, z)| \leq \\
& \leq (\delta \varphi(t, z, x_0, \delta) + \psi(t, x_0, z)) |u(t - \tau, z)|.
\end{aligned}$$

Перевіримо включення

$$(\delta \varphi(t, \cdot, x_0, \delta) + \psi(t, x_0, \cdot)) |u(t - \tau, \cdot)| \in L_1(\mathbf{R}^r). \quad (30)$$

Використовуючи нерівність Коші-Шварца та умови (17), (18), (20) очевидно матимемо

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} (\delta \varphi(t_1, z, x_0, \delta) + \psi(t_1, x_0, z)) |u(t_1 - \tau, z)| dz = \\
& = \delta \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \varphi(t_1, z, x_0, \delta) |u(t_1 - \tau, z)| dz + \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \psi(t_1, x_0, z) |u(t_1 - \tau, z)| dz \leq \\
& \leq \left(\delta \sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} \varphi^2(t_1, z, x_0, \delta) dz} + \sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} \psi^2(t_1, x_0, z) dz} \right) \left(\sup_{-\tau \leq t_1 \leq 0} \mathbf{E} \|\psi(t_1)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \sup_{0 \leq t_1 \leq t} \mathbf{E} \| u(t_1) \|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Звідки з імовірністю одиниця одержимо

$$\int_{\mathbf{R}^r} (\delta \varphi(t_1, z, x_0, \delta) + \psi(t_1, x_0, \zeta)) |u(t_1 - \tau, z)| dz < \infty.$$

Звідси, згідно з локальною теоремою про диференційовність інтеграла за параметром, для функції (27) існує градієнт $\nabla_x g$ [4] та

$$\nabla_x \int_{\mathbf{R}^r} b(t, x, z) u(t - \tau, z) dz = \int_{\mathbf{R}^r} \nabla_x b(t, x, z) u(t - \tau, z) dz. \quad (31)$$

Залишилось довести, що

$$\nabla_x \int_{\mathbf{R}^r} b(t, \cdot, z) u(t - \tau, z) dz \in L_2(\mathbf{R}^r). \quad (32)$$

З урахуванням (31), (17), нерівності Коши-Шварца, умов (18) та (14), виконуються співвідношення

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \left| \nabla_x \int_{\mathbf{R}^r} b(t, x, z) u(t - \tau, z) dz \right|^2 dx = \\ &= \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \left(\int_{\mathbf{R}^r} \nabla_x b(t, x, z) u(t - \tau, z) dz \right)^2 dx \leq \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \left(\int_{\mathbf{R}^r} |\nabla_x b(t, x, z) u(t - \tau, z)| dz \right)^2 dx \leq \\ &\leq \sup_{0 \leq t_1 \leq t} \left(\int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} Z^2(t_1, x, z) dz dx \right) \left(\sup_{-\tau \leq t_1 \leq 0} \mathbf{E} \| \psi(t_1) \|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + \sup_{0 \leq t_1 \leq t} \mathbf{E} \| u(t_1) \|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \right) < \infty. \end{aligned}$$

Звідки отримуємо

$$\int_{\mathbf{R}^r} \left| \nabla_x \int_{\mathbf{R}^r} b(t_1, x, z) u(t_1 - \tau, z) dz \right|^2 dx < \infty.$$

Остаточно з (25) матимемо оцінку

$$\begin{aligned} \| I_2(s) \|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 &\leq Ct \mathbf{E} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} \| D_x^2 \int_{\mathbf{R}^r} b(t_1, x, z) u(t_1 - \tau, z) dz \|^2 dx dt_1 \leq \\ &\leq Ct^2 \sup_{0 \leq t_1 \leq t} \left(\int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} Z^2(t_1, x, z) dz dx \right) \left(\sup_{-\tau \leq t_1 \leq 0} \mathbf{E} \| \psi(t_1) \|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + \right. \end{aligned}$$

$$+ \sup_{0 \leq t_1 \leq t} \mathbf{E} \|u(t_1)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \leq C_2 < \infty. \quad (33)$$

Отримаємо оцінку для $I_3(s)$. Надалі під $\|\cdot\|$ будемо розуміти $\|\cdot\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2$. З урахуванням нерівності Коші-Шварца, теореми Фубіні [4] та умов (7), (14) отримуємо для норми $I_3(s)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,t}$ оцінку

$$\begin{aligned} \|I_3(s)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 &\equiv \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \|I_3(s)\|^2 \equiv \\ &= \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \left\| \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \left(\int_{\mathbf{R}^r} K(t-s, x-y) \varphi_{r+1}(\gamma_{r+1}) \sigma(s, u(s-\tau), y) e_n(y) dy \right) d\beta_n(s) \right\|^2 \leq \\ &\leq 2L^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \right) \left(t + \tau \sup_{-\tau \leq y \leq 0} \mathbf{E} \|\psi(y)\|^2 + \mathbf{E} \int_0^t \|u(y)\|^2 dy \right) = C_3 < \infty. \end{aligned} \quad (34)$$

Об'єднавши чотири вищевикладені оцінки $I_0(s) - I_3(s)$, одержимо для $u \in \mathfrak{B}_{2,t}$ нерівність

$$\|(\Psi u)(t)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 \equiv \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \left\| \sum_{j=0}^3 I_j(t) \right\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \leq 4 \sum_{j=0}^3 \|I_j(t)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2. \quad (35)$$

Оскільки F_t -вимірність $(\Psi u)(t)$ очевидна, робимо висновок, що Ψ задано.

Доведемо, що оператор Ψ має єдину стискаючу фіксовану точку.

Дійсно, слід взяти до уваги чотири вищенаведені нерівності та властивість лінійності r -вимірного інтеграла, в результаті отримаємо для різниці $I_1(s)(u) - I_1(s)(v)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,t}$ оцінку

$$\begin{aligned} \|I_1(s)(u) - I_1(s)(v)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 &\equiv \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \|I_1(s)(u) - I_1(s)(v)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \leq \\ &\leq \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s, x, y) dy dx \right) \|u - v\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2. \end{aligned} \quad (36)$$

Аналогічно, одержимо оцінку для різниці $I_2(s)(u) - I_2(s)(v)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,t}$, а саме:

$$\|I_2(s)(u) - I_2(s)(v)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 \leq$$

$$\leq Ct^2 \sup_{0 \leq \tau \leq t} \left(\int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} Z^2(\tau, x, y) dy dx \right) \sup_{0 \leq \tau \leq t} \mathbf{E} \|u(\tau) - v(\tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2. \quad (37)$$

Попередні міркування слід провести для оцінки різниці $I_3(s)(u) - I_3(s)(v)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,t}$, тоді одержимо

$$\|I_3(s)(u) - I_3(s)(v)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 \leq L^2 C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \right) t \|u - v\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2. \quad (38)$$

Врахувавши оцінки (35)-(38), одержимо

$$\begin{aligned} \|\Psi u - \Psi v\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 &\equiv \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \left\| \sum_{j=0}^3 (I_j(s)(u) - I_j(s)(v)) \right\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \leq \\ &\leq 4 \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s, x, y) dy dx + Ct^2 \sup_{0 \leq \tau \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} Z^2(\tau, x, y) dy dx + \right. \\ &\quad \left. + L^2 ct^2 + L^2 c \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \right) t \right) \|u - v\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 = \gamma(t) \|u - v\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\gamma(t) \equiv 4 \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s, x, y) dy dx + Ct^2 \sup_{0 \leq \tau \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} Z^2(\tau, x, y) dy dx + L^2 ct^2 + L^2 c \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \right) t \right), \quad (40)$$

для $\{u, v\} \subset \mathfrak{B}_{2,t}$.

Згідно з (20), $K_5 < \frac{1}{4}$, тобто перший доданок у $\gamma(t)$ (див. (40)) менший за

1. Для наступних трьох доданків можна зауважити наступне: за рахунок вибору $t_1 \in [0, T]$ їх сума може бути зроблена рівною $\frac{3}{16}$. Отже, $\gamma(t_1) \in (0, 1)$. Це означає, що оператор Ψ , визначений у просторі Банаха $\mathfrak{B}_{2,t_1}$, є стискаючим. А значить, згідно з теоремою Банаха [4] про стискаюче відображення, оператор Ψ має єдину фіксовану точку – м'який розв'язок $u \in \mathfrak{B}_{2,t_1}$ задачі (1), (2) на відрізку $[0, t_1]$. Цю процедуру повторимо скінченну кількість разів на додатних малих інтервалах $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$, ..., $[t_{n-2}, t_{n-1}]$, $[t_{n-1}, T]$, які в сумі дають відрізок $[0, T]$, де розв'язується задача (1), (2). В результаті розв'язок отримується як об'єднання розв'язків на цих малих інтервалах. Отже, основне твердження доведено.

Дані результати мають теоретичне значення, оскільки вони доводять існування "м'якого розв'язку" НДСДРРНТ. В окремих випадках подібні рівняння є математичними моделями реальних процесів, розгляд яких планується у подальших роботах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ до §2

1. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последствием.— М.: Наука, 1992.— 333 с.
2. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер.— М.: Наука, 1977.— 352 с.
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение.— К.: Наук. думка, 1980.— 612 с.
4. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными. Сб. научн. тр.— К.: Ин-т математики АН УССР.— 1981.— С.25–59.
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1976.—541 с.
6. Перун Г.М., Ясинский В.К. О стабилизации решений задачи Дирихле с разрывными траекториями и оператором Бесселя // Кибернетика и вычисл. математика.— 1991.— № 83.— С.19–25.
7. Перун Г.М., Ясинский В.К. Исследование задачи Коши для стохастических уравнений в частных производных // Укр. мат. журн.— 1993.— Т.45, № 9.— С.1773–1781.
8. Свердан М.Л., Ясинская Л.И., Ясинский В.К. Стабилизация решений стохастических линейных уравнений в частных производных при наличии пуассоновских возмущений // Кибернетика и вычислительная техника.— 1988.— №81.— С.7-12.
9. Станжицкий А.Н., Цуканова А.О. Существование и единственность решения задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения

реакции-диффузии нейтрального типа // Нелінійні коливання.— 2016.— 3, № 3.— С.408–430.

10.Tsukanova A.O. On existence and uniqueness of mild solution to the Cauchy problem for one neutral stochastic differential equation of reaction-diffusion type in hilbert space // Буковинський математичний журнал.— 2016. — Т.4, № 3–4.— С.179–189.

11.Tessitore G., Zabczyk J. Invariant Measures for Stochastic Heat Equations // Probability and Mathematical Statistics.— 1998.— 18.— P.271–287.

12.Zabczyk J., Da Prato G. Ergodicity for Infinite Dimensional Systems // Dynamic Systems and Applications.— Cambridge University Press.— 1996.— 449 p.

§3. ПРО ІСНУВАННЯ ТА СТАБІЛІЗАЦІЮ СИЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ АВТОНОМНИХ СТОХАСТИЧНИХ РІВНЯНЬ ІТО-СКОРОХОДА В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ІЗ ВИПАДКОВИМИ ПАРАМЕТРАМИ

3.1. Постановка задачі

Дослідженню детермінованих рівнянь у частинних похідних присвячено велику кількість робіт, які вказані в монографіях [1–3], і не менша кількість робіт вітчизняних і закордонних вчених була опублікована в кінці XX – на поч. XXI ст.

Після введення поняття стохастичного диференціала та інтеграла, заміни змінних для стохастичного диференціала, визначення сильного розв'язку стохастичного диференціального рівняння (СДР) у відомих монографіях [4–6] та їх подальше поширення на класи стохастичних диференціально-функціональних рівнянь [7–9] (див. наведену велику бібліографію в цих роботах) стало можливим дослідження асимптотично сильного розв'язку для СДРІСЗЧП (див., наприклад, роботи [5,10–12] та ін.)

Подальше дослідження СДРІСЗЧП йшло шляхом створення математичних моделей складних реальних систем, які вимагають враховувати випадкові параметри в цих рівняннях (див. [6,7,12,13] та ін.).

Дана робота присвячена дослідженню асимптотичної поведінки сильного розв'язку ЛСДРІСЗЧП з урахуванням випадкових параметрів [10,12].

Розглянемо стохастичний експеримент з базовим імовірнісним простором [1, 4, 5, 7] $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $F \equiv \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ – фільтрація, де задана функція $u(t, x, \omega) \in \mathbb{R}^1$, яка є вимірною з імовірністю одиниця за t і x відносно мінімальної σ -алгебри $\mathcal{B}([0, T], \mathbb{R}^1)$ борельових множин на площині [13, 15] та для якої

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E} \left\{ |u(t, x, \omega)|^2 \right\} dx < \infty \quad (1)$$

для всіх $t \in [0, T]$, $\mathbb{E}\{\cdot\}$ – математичне сподівання [14], $T \subset [0, \infty)$. Позначимо через $\mathfrak{M}_T$ простір функцій $\{u(t, x, \omega)\}$, що мають властивість інтегровності (1).

Уведемо норми [6, 15]:

$$\|u(t, x, \omega)\|_{L_{2R^1}}^2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx; \quad (2)$$

$$\|u(t, x, \omega)\|_{L_{2T}}^2 \equiv \int_0^T |u(t, x, \omega)|^2 dt; \quad (3)$$

$$\mathbb{E}_u(t) \equiv \mathbb{E} \left\{ \|u(t, x, \omega)\|_{L_{2R^1}}^2 \right\}, \quad (4)$$

де через L_{2R^1} і L_{2T} позначені простори функцій $\{u(t, x, \omega)\}$, які мають відповідні норми (2)–(4).

У просторі $\mathfrak{M}_T$ треба ввести норму вигляду

$$\|u(t, x, \omega)\|^2 \equiv \int_0^T \mathbb{E}_u(t) dt = \int_0^T \mathbb{E} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx \right] dt. \quad (5)$$

Позначимо через

$$Q(A(\xi(\omega)), q, p) \equiv \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{kj}(\xi(\omega)) q^k p^j, \quad (6)$$

де $A \equiv \{a_{kj}\}$ матриця розмірності $n \times m$, складена з елементів $a_{kj} \in \mathbb{R}^1$.

У просторі $\mathfrak{M}_T$ з (5) розглянемо підпростір $\mathfrak{M}_{IT} \subset \mathfrak{M}_T$, для елементів якого має місце включення

$$Q\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega) \in \mathfrak{M}_T. \quad (7)$$

У $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ розглянемо задачу Коші для ЛСДРІСЗЧП

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[Q\left(A(\xi_1(\omega)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega) \right] + Q\left(B(\xi_2(\omega)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega) = \\ = Q\left(C(\xi_3(\omega)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega) \frac{dw(t, \omega)}{dt} + \end{aligned}$$

$$+\int_{\mathbf{V}} Q\left(D(\xi_4(\omega)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, v\right) u(t, x, \omega) \tilde{\nu}(dt, dv), \quad (8)$$

$$Q\left(A(\xi_1(\omega)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega) \Big|_{t=0} = [Qu]_0, \quad (9)$$

де Q визначено у (6), (7) матриці $B \equiv \{b_{ij}(\xi_2(\omega))\}_{i,j=1}^{k,n}$, $b_{ij}(\xi_2(\omega)) \in \mathbb{R}^1$;
 $C \equiv \{c_{ij}(\xi_3(\omega))\}_{i,j=1}^{k,n}$, $c_{ij}(\xi_3(\omega)) \in \mathbb{R}^1$, $D \equiv \{d_{ij}(\xi_4(\omega), v)\}_{i,j=1}^{k,n}$, $d_{ij}(\xi_4(\omega), v) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbf{V}$,
де $\xi_i(\omega)$, $i=1,2,3,4$, випадкові величини, які задані щільністю $p_{\xi_i}(x)$, $i=1,2,3,4$,
(або функцією розподілу $F_{\xi_i}(x) \equiv \mathbb{P}\{\omega: \xi_i(\omega) < x \forall x \in \mathbb{R}^1\}$, $i=1,2,3,4$ [14]), $w(t, \omega)$
– одновимірний вінерів процес [11], та $\xi_i(\omega)$, $i=1,2,3,4$, не залежать від $w(t, \omega)$.
 $\tilde{\nu}(dt, A) \equiv \nu(dt, A) - \Pi(A)dt$ – центрована пуассонова міра.

Під сильним розв’язком задачі Коші (8), (9) будемо розуміти неперервну з імовірністю одиниця за $t \in [0, T]$ функцію $u(t, x, \omega)$, узгоджену з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$, і таку, що з імовірністю одиниця для кожної пари (t, x) задовольняє інтегральне стохастичне рівняння [1, 4, 11]

$$\begin{aligned} Q\left(A(\xi_1(\omega)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega) = & [Qu]_0 + \int_0^t Q\left(B(\xi_2(\omega)), \frac{\partial}{\partial x}\right) u(s, x, \omega) ds + \\ & + \int_0^t Q\left(C(\xi_3(\omega)), \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(s, x, \omega) dw(s, \omega) ds + \\ & + \int_0^t \int_{\mathbf{V}} Q\left(D(\xi_4(\omega)), \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x}, v\right) u(s, x, \omega) \tilde{\nu}(ds, dv) \end{aligned} \quad (10)$$

з початковими невинпадковими умовами (9).

3.2. Існування розв’язку задачі Коші для ЛСДРІСзЧП (8)–(9) у просторі $\mathfrak{M}_{1T}$

Для встановлення факту існування сильного розв’язку задачі Коші для (8)–(9) доведемо спочатку допоміжний результат.

Лема 1. Перетворення Фур’є за x для функції $u(t, x, \omega)$

$$v(t, \sigma, \omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x} u(t, x, \omega) dx \quad (11)$$

не виводить її з простору $\mathfrak{M}_T$ для довільного скінченного $T \subset \mathbb{R}^1$.

Доведення. Існування перетворення Фур'є випливає з того, що $u(t, x, \omega)$ з імовірністю одиниця належить $L_{2\mathbb{R}^1}$ для довільного $t \in [0, T]$ та

$$\mathbb{P} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx > N \right\} \leq \frac{E_u(t)}{N} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow +\infty. \quad \text{Згідно з теоремою}$$

Планшереля [16] маємо, що $\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t, \sigma, \omega)|^2 d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx$, тобто

$$\|v\|_{L_{2\mathbb{R}^1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|u\|_{L_{2\mathbb{R}^1}}; \quad \text{тому} \quad E_v(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E_u(t). \quad \text{Тоді, згідно з означенням норми в}$$

просторі $\mathfrak{M}_T$, будемо мати $\|v\|_{\mathfrak{M}_T} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|u\|_{\mathfrak{M}_T}$, що й доводить лему 1.

Теорема 1. Нехай для задачі Коші (8), (9) виконуються умови:

(i) корені полінома $P(\lambda(x), i\sigma) \equiv \lambda Q(A(x), \lambda, i\sigma) + Q(B(x), \lambda, i\sigma)$ при кожному фіксованому $x \in \mathbb{R}^1$ та $\sigma \neq 0$ задовольняють нерівність $\operatorname{Re} \lambda(x) \leq \psi(\sigma) < 0$, $\psi(0) = 0$;

(ii) $\forall t \in [0, T]$ та $C(x) \equiv 0_{k \times n}$, $D(x) \equiv 0_{k \times n}$ детерміноване рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[Q \left(A(x), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{u}(t, x) \right] + Q \left(B(x), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{u}(t, x) = 0 \quad (12)$$

має розв'язок $\tilde{u}(t, x)$ задачі Коші в $L_{2\mathbb{R}^1}$ з початковими умовами

$$Q \left(A(x), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{u}(t, x) = [Q\tilde{u}]_0; \quad (13)$$

(iii) випадкові величини $\xi_i(\omega)$, $i=1, 2, 3, 4$, не залежать від $w(t, \omega)$ та $\tilde{v}(dt, A)$.

Тоді стохастична задача Коші (8), (9) при $C(x) \neq 0_{k \times n}$ має розв'язок у просторі $\mathfrak{M}_T$.

Доведення. Оскільки перетворення Фур'є [1] зберігає норму в $\mathfrak{M}_{IT}$ за лемою 1, то достатньо довести існування сильного розв'язку задачі Коші лінійного ЛСДРІСЗЧП для $v(t, \sigma, \omega)$, заданого формулою (11), а саме

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[Q \left(A(\xi_1(\omega)), \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) \right] + Q \left(B(\xi_2(\omega)), \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) = \\ & = Q \left(C(\xi_3(\omega)), \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) \frac{dw(t, \omega)}{dt} + \\ & + \int_{\mathbf{v}} Q \left(D(\xi_4(\omega)), \frac{d}{dt}, i\sigma, v \right) v(t, \sigma, \omega) \tilde{v}(ds, dv). \end{aligned} \quad (14)$$

Зауважимо, що для довільної дійснозначної матриці $D(x) \equiv \{d_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{k,n}$ та для довільного $x \in \mathbb{R}^1$ маємо включення $Q \left(D(x), \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) \in \mathfrak{M}_{IT}$ і розв'язок $v(t, \sigma, \omega)$ ЛСДРІСЗЧП (14) при кожному $\sigma \neq 0$ існує та єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності [3, 5, 8]. ЛСДРІСЗЧП (14) слід тлумачити як інтегральне стохастичне рівняння

$$\begin{aligned} Q \left(A(\xi_1(\omega)), \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) &= [Qv]_0 + \int_0^t Q \left(B(\xi_2(\omega)), ds, i\sigma \right) v(s, \sigma, \omega) = \\ &= \int_0^t Q \left(C(\xi_3(\omega)), ds, i\sigma \right) v(s, \sigma, \omega) dw(s, \omega) + \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbf{v}} Q \left(D(\xi_4(\omega)), \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x}, v \right) v(s, \sigma, \omega) \tilde{v}(ds, dv), \end{aligned}$$

для якого виконуються умови, що гарантують існування та єдиність сильного розв'язку з точністю до стохастичної еквівалентності [7, с. 266–270, теорема 4.1].

Позначимо через $H(t, \sigma)$ фундаментальний розв'язок детермінованої однорідної незбуреної задачі Коші (12), (13) для ЛСДРІСЗЧП (8), (9) при $C(x) \neq 0_{k \times n}$, тоді сильний розв'язок ЛСДРІСЗЧП (14), (13) можна записати у вигляді інтегрального рівняння [9, 19]

$$v(t, \sigma, \omega) = v_0(t, \sigma) + \int_0^t H(t-s) Q(C(\xi_3(\omega)), ds, i\sigma) v(t, \sigma, \omega) dw(s, \omega) + \\ + \int_0^t \int_V y(t-s) Q(D(\xi_4(\omega), i\sigma)) \tilde{v}(ds, dv), \quad (15)$$

де $v_0(t, \sigma)$ розв'язок однорідної незбуреної задачі Коші

$$\frac{d}{dt} \left[Q \left(A(\xi_1(\omega)), \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) + Q \left(B(\xi_2(\omega)), \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) \right] = 0.$$

Згідно з [1], фундаментальний розв'язок $H(t, \sigma)$ має вигляд

$$H(t, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oint_{\Gamma} \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{P(\lambda(x), i\sigma)}, \quad (16)$$

де Γ контур, що охоплює всі нулі многочлена $P(\lambda(x), i\sigma)$.

Застосувавши випадковий оператор $Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma)$ до обох частин (15), отримаємо

$$Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma) v(t, \sigma, \omega) = Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma) v_0(t, \sigma) + \\ + \int_0^t Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma) H(t-s, \sigma) Q \left(C(\xi_3(\omega)), \frac{\partial}{\partial s}, i\sigma \right) v(s, \sigma, \omega) dw(s, \omega) + \\ + \int_0^t Q \left(D(\xi_4(\omega)), \frac{\partial}{\partial s}, i\sigma, v \right) v(s, \sigma, \omega) \tilde{v}(ds, dv). \quad (17)$$

Розглянувши квадрат модуля величини лівої та правої частини рівняння (17) та використавши нерівність $|a + b + c|^2 \leq 3(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2)$ в результаті одержимо

$$\left| Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma) v(t, \sigma, \omega) \right|^2 \leq 3 \left| Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma) v_0(t, \sigma) \right|^2 + \\ + 3 \left| \int_0^t Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma) H(t-s, \sigma) Q \left(C(\xi_3(\omega)), \frac{\partial}{\partial s}, i\sigma \right) v(s, \sigma, \omega) dw(s, \omega) \right|^2 + \\ + 3 \left| \int_0^t \int_V Q(D(\xi_4(\omega)), dt, i\sigma, v) H(t-s, \sigma) Q \left(D(\xi_4(\omega)), \frac{\partial}{\partial s}, i\sigma, v \right) v(s, \sigma, \omega) \tilde{v}(ds, dv) \right|^2. \quad (18)$$

Позначимо через

$$z_1(t, \sigma) \equiv \mathbb{E} \left\{ \left| Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma) v(t, \sigma, \omega) \right|^2 \right\},$$

$$z_2(t, \sigma, v) \equiv \mathbb{E} \left\{ \left| Q(D(\xi_4(\omega)), dt, i\sigma, v) v(t, \sigma, \omega) \right|^2 \right\}$$

де $\mathbb{E}\{\cdot\}$ – операція математичного сподівання [14]. Далі, застосувавши операцію $\mathbb{E}\{\cdot\}$ до лівої та правої частини нерівності (18), враховуючи властивість інтеграла Іто стосовно обчислення $\mathbb{E}\{\cdot\}$ від квадрату інтеграла Іто [7, с.245–249] та враховуючи умову III) теореми 1, одержимо таку нерівність:

$$\begin{aligned} z(t, \sigma) \leq & 3\mathbb{E} \left| Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma) v_0(t, \sigma) \right|^2 + \\ & + 3 \int_0^t \mathbb{E} \left| Q \left(C(\xi_3(\omega)), \frac{\partial}{\partial s}, i\sigma \right) H(t-s, \sigma) \right|^2 z_1(s, \sigma) ds + \\ & + 3 \int_0^t \int_V \mathbb{E} \left| Q \left(D(\xi_4(\omega), \frac{\partial}{\partial s}, i\sigma, v) \right) H(t-s, \sigma) \right|^2 z_2(s, \sigma, v) ds. \end{aligned} \quad (19)$$

Умова I) теореми 1 дає можливість одержати нерівність [1] $\mathbb{E} \left| Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma) H(t-s, \sigma) \right|^2 \leq L$, а умова II) визначає рівномірну обмеженість

$$\mathbb{E} \left| Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma) v_0(t, \sigma) \right|^2 \leq \frac{K}{2}, \quad \mathbb{E} \left| Q(D(\xi_4(\omega)), dt, i\sigma, v) v_0(t, \sigma) \right|^2 \leq \frac{K}{2}.$$

Отримані вище нерівності дають оцінку $z_i(t, \sigma) \leq \frac{K}{2} + L \int_0^t z_i(s, \sigma) ds$, $i = 1, 2$, звідки, згідно з нерівністю Гронуолла [1], будемо мати експоненціальну оцінку

$$z_i(t, \sigma) \leq K e^{Lt} \quad \forall t \in [0, T] \subset [0, \infty), i = 1, 2. \quad (20)$$

Таким чином, гарантується включення

$$Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma) v(t, \sigma, \omega) \in \mathfrak{M}_T, \quad Q(D(\xi_4(\omega)), dt, i\sigma, v) v(t, \sigma, \omega) \in \mathfrak{M}_T \quad (21)$$

Застосувавши випадковий оператор $Q(D(\xi(\omega)), dt, i\sigma)$ до (16), аналогічно вищевикладеним міркуванням, можна записати відповідну нерівність для

довільної дійсної матриці $D(x) \equiv \{d_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{k,n}$. Отже, враховуючи оцінку (20) та умову I), отримаємо твердження теореми 1. ■

3.3. Асимптотична поведінка в середньому квадратичному сильного розв'язку ЛСДРІСЗЧП

Спочатку доведемо допоміжне твердження.

Лема 2. Нехай для ЛСДРЗЧП (8), (9) виконуються умови теореми 1. Тоді:

(i) для довільної матриці $C(x) \neq 0_{k \times n}$ має місце включення

$$\mathbb{E} \left\| Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma) \right\|^2 H(t, \sigma) \in L_{2,(0,+\infty)}, \quad (22)$$

(ii) для відповідної норми цього простору справджується рівність

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\| Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma) H(t, \sigma) \right\|_{L_{2T}}^2 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbb{E} \left\| Q(C(\xi_3(\omega)), i\lambda, i\sigma) \right\|^2}{|P(i\lambda, i\sigma)|^2} d\lambda \equiv S(\sigma), \end{aligned} \quad (23)$$

(iii) для довільної матриці $D(x) \neq 0_{k \times n}$ має місце включення

$$\int_{\mathbf{v}} \mathbb{E} \left\| Q(D(\xi_4(\omega)), dt, i\sigma, \mathbf{v}) \right\|^2 H(t, \sigma) \Pi(d\sigma) \in L_{2,(0,+\infty)}, \quad (24)$$

(iv) для відповідної норми цього простору справджується рівність

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{v}} \mathbb{E} \left\{ Q(D(\xi_4(\omega)), dt, i\sigma, \mathbf{v}) H(t, \sigma) \right\} \Pi(d\mathbf{v}) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{v}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbb{E} \left\| Q(D(\xi_4(\omega)), i\lambda, i\sigma, \mathbf{v}) \right\|^2}{|P(i\lambda, i\sigma)|^2} d\lambda \Pi(d\mathbf{v}) \equiv S_1(\sigma). \end{aligned} \quad (25)$$

Доведення. 1) Використовуючи умову I) та формулу (16), можна отримати рівність

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left[Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma) H(t, \sigma) e^{-i\lambda t} \right] = \frac{1}{2\pi} \frac{Q(C(\xi_3(\omega)), i\lambda, i\sigma)}{P(i\lambda, i\sigma)},$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_V \left[Q(D(\xi_4(\omega)), dt, i\sigma, v) H(t, \sigma) e^{-i\lambda t} \right] \Pi(dv) = \frac{1}{2\pi} \int_V \frac{Q(D(\xi_4(\omega)), i\lambda, i\sigma, v)}{P(i\lambda, i\sigma)} \Pi(dv)$$

та, взявши $\mathbb{E}\{|\cdot|^2\}$ від лівої та правої частини вищезгаданих рівностей, отримаємо твердження (22), (24).

Для доведення (23), (25) застосуємо теорему Планшереля [1]:

$$\begin{aligned} \|Q(C(\xi_3(\omega)), dt, i\sigma) H(t, \sigma)\|_{L_2(0, \infty)}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|Q(C(\xi_3(\omega)), i\lambda, i\sigma)|^2}{|P(i\lambda, i\sigma)|^2} d\lambda, \\ \int_V Q(D(\xi_4(\omega)), dt, i\sigma, v) H(t, \sigma) \Pi(dv) &= \frac{1}{2\pi} \int_V \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|Q(D(\xi_4(\omega)), i\lambda, i\sigma, v)|^2}{|P(i\lambda, i\sigma)|^2} d\lambda \Pi(dv). \end{aligned}$$

взявши $\mathbb{E}\{|\cdot|^2\}$ від лівої та правої частини вищезгаданих рівностей, отримаємо $S(\sigma), S_1(\sigma)$ у (23), (25). ■

Теорема 2. Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді:

(i) якщо $\sup_\sigma S(\sigma) < 1$, тоді $\lim_{t \rightarrow \infty} E_U(t) = 0$, де

$$U(t, x, \omega) \equiv Q\left(R(\xi(\omega)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega)$$

для довільної дійснозначної матриці R ;

(ii) якщо $S(\sigma) > 1$ на множині Λ міри Лебега, тоді $\lim_{t \rightarrow \infty} E_U(t) = +\infty$.

Доведення. Спочатку зауважимо, що з нерівності (18), внаслідок прямування до нуля додатного ядра при $t \rightarrow +\infty$, випливає, що $z(t, \sigma)$ прямує до нуля при $S(\sigma) < 1, \sigma \neq 0$.

Якщо в (24) виконується нерівність $S(\sigma) < 1$, тоді легко бачити прямування до нуля при $t \rightarrow +\infty$, модуля перетворення Фур'є $U(t, x, \omega)$ при довільній дійснозначній матриці $R(x), \forall x \in \mathbf{R}^1$ [19]. При цьому прямування є

рівномірним відносно σ , якщо $\sup_{\sigma} S(\sigma) < 1$. Залишилося перейти до границі під знаком інтеграла Лебега і перша частина теореми 2 доведена.

Для доведення другої частини теореми 2 достатньо довести, що $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} z(t, \sigma) d\sigma = \infty$, оскільки має місце (24).

Дійсно, нехай $S(\sigma) > 1$ на множині Λ додатної міри Лебега, тоді $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t, \sigma) = +\infty$, оскільки $z(t, \sigma) > 0$. Теорема 2 доведена. ■

3.4. Задача втрати стійкості стрижня

У праці [12] досліджується поведінка стрижня, на який діє “білий шум”. Математичною моделлю цього процесу будемо вважати стохастичне диференціальне рівняння в частинних похідних з похідною від вінерового процесу, яку тлумачимо як формальний запис, оскільки вона не існує в жодній точці з імовірністю одиниця, а в узагальненому розумінні похідна вінерового процесу – це нормальний “білий шум” (див. [20]), а саме

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - a(\xi_1(\omega)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(\xi_2(\omega)) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c(\xi_3(\omega)) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{dw(t, \omega)}{dt}, \quad (26)$$

з початковими умовами

$$u(0, x) = f_1(x), \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = f_2(x) \quad (27)$$

та крайовими умовами

$$u(t, 0) = u(t, l) = \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} = \frac{\partial u(t, l)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(t, 0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(t, l)}{\partial x^2} = 0. \quad (28)$$

Тут $a(\xi_1(\omega)) > 0, b(\xi_2(\omega)) > 0, c(\xi_3(\omega)) > 0$ з імовірністю 1. Під функцією $u(t, x, \omega)$ розуміємо випадкову функцію, що не має розривів 2-го роду, тобто інтегровна в розумінні пункту 1. Аналогічно до дискретного випадку [3] визначають статистичний запас стійкості S_a^2 за параметром $a(x), \forall x \in \mathbb{R}^1$, як

найбільш допустиму інтенсивність процесів з взаємно незалежними значеннями, при якій система стійка в l.i.m., тобто розв'язок стабілізується до нуля.

Тоді можна обчислити статистичний запас стійкості [17] $S_{k_1 k_2}$ системи (26)–(28)

$$S_{k_1 k_2} \equiv \sum_{k=0}^m a_{k_1 k_2}(\xi(\omega)) \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial t^{k_1} \partial x^{k_2}} \quad (29)$$

за параметрами $a_{k_1 k_2}(\xi_1(\omega))$, $k = k_1 + k_2$.

Якщо позначити $P(\lambda, \sigma, \omega) \equiv \sum_{k=0}^m a_{k_1 k_2}(\xi_1(\omega)) \lambda^{k_1} (i\sigma)^{k_2}$, тоді статистичний запас стійкості $S_{k_1 k_2}(x)$ системи обчислюється за формулою

$$S_{k_1 k_2}(x) \equiv \left[\sup_{\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda|^{k_1} |\sigma|^{k_2}}{|P(i\lambda, \sigma, x)|} d\lambda \right]^{-1}. \quad (30)$$

Використовуючи вищенаведене твердження (29), (30), знайдено [9] статистичний запас стійкості $S(x)$ за параметрами $a(x), b(x), c(x)$ системи (26)–(28):

$$S(x) \equiv \left[\sup_{\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma^2 d\lambda}{(\sigma^4 + a(x)\sigma^3 - b(x)\lambda^2)^2 + c(x)^2 \lambda^2} \right]^{-1} = 2a(x)c(x), \forall x \in \mathbb{R}^1.$$

Отже, система (26)–(28) є стійкою в середньому квадратичному, $S(x) > \varepsilon^2, \forall x \in \mathbb{R}^1$.

Нехай на систему (26)–(28) діють зовнішні випадкові “збурення” типу $\xi(\omega)$ на праву частину СДРЗЧП (26). Ця ситуація може виникнути, якщо система розташована на платформі, рух якої диктується зовнішніми збуреннями $\varphi_i(\xi(\omega)), i = 1, 2$. Тоді (26) буде мати вигляд

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c \frac{\partial u}{\partial t} = \varphi_1(\xi(\omega)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{dw(t, \omega)}{dt}. \quad (31)$$

Використовуючи означення статистичного запасу стійкості для системи (31), (27), (28), маємо

$$S(\varphi_i) \equiv \left[E \left\{ |\varphi_i(\xi)|^2 \right\} \sup_{\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma^2 d\lambda}{(\sigma^4 + a\sigma^2 - b\lambda^2)^2 + c^2 \lambda^2} \right]^{-1} = E \left\{ |\varphi_i(\xi)|^2 \right\} 2ac.$$

Застосовуючи достатні умови асимптотичної стійкості в л.і.м. теореми 2, приходимо до висновку, що система (31), (27), (28) є стійкою в л.і.м., якщо

$$E \left\{ \varphi_1^2(\xi(\omega)) \right\} 2ac < 1, \quad (32)$$

та нестійкою в л.і.м., якщо в (34) поміняти знак на протилежний.

4.1. Нехай $\varphi_2(\xi(\omega)) \equiv 0$, $\varphi_1(\xi(\omega)) \equiv \varphi(\xi(\omega))$; $\xi(\omega)$ має закон розподілу $P\{\omega: \xi \equiv 1\} = P\{\omega: \xi = -1\} = \frac{1}{2}$ та $\varphi(\xi(\omega)) \equiv \xi(\omega)$. Тоді $E\{\xi\} = 0$, $D\{\xi\} = 1$ й умова збігається з умовою (32).

4.2. Нехай $\varphi_2(\xi(\omega)) \equiv 0$, $\varphi_1(\xi(\omega)) \equiv \varphi(\xi(\omega))$. Якщо в якості закону розподілу $\xi(\omega)$ вибрати пуассоновий закон $P\{\omega: \xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ та $\varphi(\xi) = \xi$, тоді $E\xi = D\xi = \lambda$. Отже, умова стійкості в л.і.м. системи (31), (27), (28) буде мати вигляд $2ac\lambda < 1$, а нестійкості, відповідно, $2ac\lambda > 1$.

Запропонована в даній роботі стохастична модель складних систем, є спробою врахування в повному обсязі випадковостей при дослідженні реальних процесів, що описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних, у правій частині яких враховуються не тільки дифузійні збурення типу броунівського процесу [5,10,18,19], але й випадкові збурення інших типів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ до §3

1. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения.— М.: Мир, 1967.— 548 с.
2. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных.— М.: Наука, 1997.— 495 с.

3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.— 521 с.
4. Гулинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов.— М.: Физматлит, 2005.— 408 с.
5. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение.— К.: Наук. думка, 1980.— 612 с.
6. Гихман И.И., Скороход А.В. Управляемые случайные процессы.— К.: Наук. думка, 1977.— 251 с.
7. Корольок В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. В 3-х томах. Т.3: Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика.— Чернівці: Вид-во “Золоті литаври”, 2009.— 798 с.
8. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения.— Рига: Ориентир, 1992.— 301 с.
9. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений при случайных возмущениях их параметров.— Рига: Зинатне, 1989.— 421 с.
10. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными. Сб. научн. тр.— К.: Ин-т математики АН УССР.— 1981.— С.25–59.
11. Дороговцев А.Я., Ивасишен С.Д., Кукуш А.Г. Асимптотическое поведение решений уравнения теплопроводности с белым шумом в правой части // Укр. мат. журн.— 1985.— 37, №1.— С.13–20.
12. Перун Г.М., Ясинский В.К. Исследование задачи Коши для стохастических уравнений в частных производных // Укр. мат. журн.— 1993.— Т.45, № 9.— С.1773–1781.
13. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. — М.:Физматгиз, 1969. — 859 с.
14. Корольок В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. В 3-х томах. Т.1.:

Ймовірність. Теорія та комп'ютерна практика.— Чернівці: Золоті литаври, 2007.— 444 с.

15. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1976.— 541 с.
16. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.— М.: Наука, 1969.— 367 с.
17. Эйдельман С.Д. Параболические системы.— М.: Наука, 1964.— 445 с.
18. Donez N.P., Yurchenko I.V., Yasynsky V.K. Mean Square Behavior of the Strong Solution of a Linear non-Autonomous Stochastic Partial Differential Equation with Markov Parameters // Cybernetics and System Analysis.— 2014.— Vol.50, No.6.— P.930-939. doi:10.1007/s10559-014-9683-8
19. Koroliuk V.S., Yurchenko I.V., Yasynsky V.K. Behavior of the Second Moment of the Solution to the Autonomous Stochastic Linear Partial Differential Equation with Random Parameters in the Right-Hand Side // Cybernetics and Systems Analysis.— 2015.— Vol.51, No.1.— P.56-63. doi:10.1007/s10559-015-9697-x
20. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов.— Москва: Физматлит, 2005.— 402 с.

§4. ПРО НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ СТІЙКОСТІ В СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ПІД ДІЄЮ ЗОВНІШНИХ ЗБУРЕНЬ ТИПУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

4.1. Постановка задачі

Після введення поняття стохастичного диференціала та інтеграла, заміни змінних для стохастичного диференціала, визначення сильного розв'язку стохастичного диференціального рівняння та їх подальше поширення на класи стохастичних диференціально-функціональних рівнянь (див., наприклад, [1–5]) стало можливим дослідження асимптотично сильного розв'язку для стохастичних диференціальних рівнянь з частинними похідними.

У роботі [6] одержано умови існування сильного розв'язку задачі Коші для стохастичних диференціально-різницевих рівнянь з частинними похідними (СДРРЧП) із заданими зовнішніми випадковими збуреннями типу попарно незалежних випадкових величин, які незалежні від вінерових процесів, що входять у визначення стохастичних дифузійних рівнянь Іто. Подібні задачі розглядались у [7].

У даній статті одержано необхідні та достатні умови стійкості в середньому квадратичному сильних розв'язків СДРРЧП з попарно незалежними зовнішніми випадковими збуреннями типу випадкових величин.

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbf{P})$ визначена випадкова функція $u(t, x, \omega): [0, \infty) \times \mathbf{R}^1 \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$, яка є вимірною з імовірністю одиниця за t і x відносно мінімальної σ -алгебри $\mathcal{B}([0, T], \mathbf{R}^1)$ борельових множин на площині.

Розглянемо на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ задачу Коші для СДРРЧП вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[Q \left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) \right] + \sum_{k=0}^n \xi_{k1}(\omega) Q \left(B, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t - \tau_k, x, \omega) = \\ = \sum_{k=0}^n \xi_{k2}(\omega) Q \left(C, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t - \tau_k, x, \omega) \frac{dw_k(t, \omega)}{dt}, \end{aligned} \quad (1)$$

за початковою умовою

$$Q \left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t - \tau_k, x, \omega) \Big|_{t \in [0, \tau]} = [Q(u)]_0, \quad (2)$$

де $\tau \equiv \sup_k \tau_k$, $0 < \tau_k \leq \tau$,

$$Q(A, q, p) \equiv \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} q^i p^j; \quad (3)$$

$A \equiv \{a_{ij}\}$ – дійсна матриця розмірності $n \times m$ з $a_{ij} \in \mathbf{R}^1|_{\pm\infty}$. Оператори $Q(B, q, p)$, $Q(C, q, p)$ мають структуру (3) з відповідними дійсними матрицями $B \equiv \{b_{ij}\}$ з $b_{ij} \in \mathbf{R}^1$ та $C \equiv \{c_{ij}\}$ з $c_{ij} \in \mathbf{R}^1$. Також визначені зовнішні випадкові збурення $\xi_{kl}(\omega): \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$, $l=1,2$, які є попарно незалежними та незалежними від вінерових процесів $w_k(t, \omega): [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ [1] із заданими законами розподілу

$$F_{kl}(x) \equiv \mathbb{P}\{\omega: \xi_{kl}(\omega) < x\}, \quad x \in \mathbf{R}^1, \quad l=1,2; \quad k=0,1,\dots,n. \quad (4)$$

Під формальним записом (1), (2) будемо розуміти дифузійне рівняння Іто [4, 7]

$$\begin{aligned} Q \left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) + \sum_{k=0}^n \xi_{k1}(\omega) \int_0^t Q \left(B, \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(s - \tau_k, x, \omega) ds = \\ = \sum_{k=0}^n \xi_{k2}(\omega) \int_0^t Q \left(C, \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(s - \tau_k, x, \omega) dw_k(s, \omega) \end{aligned} \quad (5)$$

з початковими умовами (2).

4.2. Допоміжні твердження

Уведемо до розгляду простір $\mathfrak{M}_T$ [4, 5] для всіх $t \in [0, T]$, $T \in (0, \infty)$ математичного сподівання квадрату модуля випадкових функцій $u(t, x, \omega)$ таких, що існує невластний інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E} \left\{ |u(t, x, \omega)|^2 \right\} dx < \infty, \quad (6)$$

де $\mathbf{E}\{\cdot\}$ – операція математичного сподівання [1–3].

Також будемо використовувати такі норми:

$$\|u(t, x, \omega)\|_{L_{2\mathbf{R}^1}}^2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx < \infty; \quad (7)$$

$$\|u(t, x, \omega)\|_{L_{2T}}^2 \equiv \int_0^T |u(t, x, \omega)|^2 dt < \infty; \quad (8)$$

$$\mathbf{E}_u(t) \equiv \mathbf{E} \left\{ \|u(t, x, \omega)\|_{L_{2\mathbf{R}^1}}^2 \right\}, \quad (9)$$

де через $L_{2\mathbf{R}^1}$ і L_{2T} позначені простори випадкових функцій $\{u(t, x, \omega)\} \in \mathbf{R}^1$, для яких існують відповідні інтеграли (7), (8).

Надалі в просторі $\mathfrak{M}_T$ уведемо норму вигляду

$$\|u(t, x, \omega)\|^2 \equiv \int_0^T \mathbf{E}_u(t) dt = \int_0^T \mathbf{E} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx \right] dt. \quad (10)$$

З урахуванням конструкції операторів $Q(A, \cdot, \cdot)$, $Q(B, \cdot, \cdot)$, $Q(C, \cdot, \cdot)$ справджуються включення

$$Q\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega) \in \mathfrak{M}_T;$$

$$Q\left(B, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega) \in \mathfrak{M}_T;$$

$$Q\left(C, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega) \in \mathfrak{M}_T.$$

Доведемо допоміжне твердження у вигляді леми 1.

Лема 1. Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbf{P})$ визначена випадкова функція $u(t, x, \omega): [0, \infty) \times \mathbf{R}^1 \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$.

Тоді перетворення Фур'є за змінною x від цієї випадкової функції

$$z(t, \sigma, \omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x} u(t, x, \omega) dx \quad (11)$$

належить простору $\mathfrak{M}_{1T} \subset \mathfrak{M}_T$, $T \in (0, \infty)$ (тобто $z(t, \sigma, \omega) \in \mathfrak{M}_{1T}$).

Доведення. Застосуємо до $|u(t, x, \omega)|^2$ нерівність Чебишова [1]

$$\mathbf{P} \left\{ \omega : \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx > N \right\} \leq \frac{\mathbf{E}_u(t)}{N}.$$

При $N \rightarrow +\infty$ отримуємо, що $u(t, x, \omega) \in L_{2\mathbf{R}^1}$.

Згідно з теоремою Планшереля [3] матимемо рівність

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |z(t, \sigma, \omega)|^2 d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dt.$$

Це в позначеннях (9), (10) дає рівність $\|z(t, \sigma, \omega)\|_{L_{2\mathbf{R}^1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|u(t, x, \omega)\|_{L_{2\mathbf{R}^1}}$, або

$\mathbf{E}_z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{E}_u(t)$. Тоді, згідно з означенням норми в просторі $\mathfrak{M}_T$, будемо мати

$$\|z(t, \sigma, \omega)\|_{\mathfrak{M}_T} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|u(t, x, \omega)\|_{\mathfrak{M}_T}, \text{ що й доводить лему 1.}$$

Сформулюємо теорему про існування сильного розв'язку задачі Коші для СДРРЧП (1), (2) [6].

Теорема 1. Нехай для задачі Коші СДРРЧП (1), (2) виконуються умови:

(iv) для коренів $\lambda \equiv \lambda(\omega)$ характеристичного полінома

$$\mathbf{V}(\lambda, i\sigma, \omega) \equiv \frac{\partial}{\partial t} [Q(A, \lambda, i\sigma)] + \sum_{k=0}^n \xi_{k1} Q(B, \lambda, i\sigma) \cdot \exp(-\tau_k \lambda) = 0 \quad (12)$$

з імовірністю одиниця виконана умова $\mathbf{P}\{\omega : \operatorname{Re} \lambda(\omega) \leq \psi(\sigma) < 0\} = 1$,

при цьому $\mathbf{P}\{\omega : \psi(0) = 0\} = 1$;

(v) для кожного $t \in [0, T] \subset [0, \infty)$ та $C \equiv 0$ однорідне випадкове рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[Q \left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{u}(t, x, \omega) \right] + \sum_{k=0}^n \xi_{k1}(\omega) Q \left(B, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{u}(t - \tau_k, x, \omega) = 0 \quad (13)$$

має розв'язок $\tilde{u}(t, x, \omega)$ задачі Коші в $L_{2\mathbf{R}^1}$ з початковими умовами

$$Q\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \tilde{u}(t, x, \omega) \Big|_{t \in [0, \tau]} = [Q\tilde{u}]_0; \quad (14)$$

де $\tau \equiv \sup_k \tau_k > 0$, $\tau_k > 0$;

(vi) зовнішні випадкові збурення $\xi_{kl}(\omega)$, $k=0,1,\dots,n$; $l=1,2$ попарно незалежні та незалежні від вінерових процесів $w_k(t, \omega)$, $k=0,1,\dots,n$, при цьому існують дисперсії $D\{\xi_{kl}(\omega)\} \leq L_l < \infty$, $k=0,1,\dots,n$, $l=1,2$.

Тоді стохастична задача Коші (1), (2) для $C \neq 0$ має єдиний сильний розв'язок у просторі $\mathfrak{M}_T \subset \mathfrak{M}_T$ ($T \in (0, \infty)$).

Доведення теореми 1 проводиться аналогічно методиці, наведеній в роботі [6].

Зауваження 1. Якщо $\{\xi_{kl}(\omega)\}$, $k=0,1,\dots,n$, — сталі, наприклад, $P\{\omega: \xi_{kl}(\omega)=1\}=1$, тоді рівняння (13) набуде вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[Q\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \tilde{u}(t, x) \right] + (n+1) Q\left(B, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \tilde{u}(t, x) = 0.$$

4.3. Асимптотична стійкість у середньому квадратичному сильного розв'язку (1), (2)

Будемо вважати, що надалі виконується таке припущення: сильні розв'язки рівняння (13) є експоненціально стійкими, тобто

$$|\tilde{u}(t, x, \omega)| \leq K e^{-\mu t}, \quad K > 0, \mu > 0. \quad (15)$$

Перейдемо до інтегрального запису сильного розв'язку (1), (2) за допомогою фундаментального розв'язку $H(t, \omega)$ рівняння (13).

Означення 1. Фундаментальним розв'язком $H(t, \omega)$ задачі Коші для рівняння (13) назвемо розв'язок, який побудовано за одиничною початковою умовою

$$\varphi(\theta, \omega) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \theta=0, \\ 0, & \text{якщо } \theta \in [-\tau, 0), \end{cases} \quad (16)$$

і який задовольняє умови:

- 1) для $t \in [-\tau, 0)$ виконується рівність $H(t, \omega) = 0$ з імовірністю одиниця;
- 2) $\mathbf{P}\{\omega: H(0, \omega) = 1\} = 1$ для $t = 0$;
- 3) при $t > 0$

$$H(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} \mathbf{V}^{-1}(\lambda, i\sigma, \omega) d\lambda, \quad (17)$$

де $\mathbf{V}(\lambda, i\sigma, \omega)$ задано виразом (12).

Означення 2. Сильним розв'язком задачі (1), (2) назовемо випадкову функцію $u(t, x, \omega): [0, \infty) \times \mathbf{R}^1 \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$, яка є $\mathcal{F}_t$ -вимірною при фіксованому $x \in \mathbf{R}^1$ і задовольняє при кожному $\omega \in \Omega$ інтегральне рівняння Іто (5).

Сильний розв'язок лінійного СДРРЧП (1), (2) за допомогою фундаментального розв'язку $H(t, \omega)$ можна записати у вигляді [4]

$$u(t, x, \omega) = \tilde{u}(t, x, \omega) + \sum_{k=0}^n \xi_{k2}(\omega) \int_0^t Q\left(C, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \times \\ \times H(t-s, \omega) u(s-\tau_k, x, \omega) dw_k(s, \omega), \quad (18)$$

де $\tilde{u}(t, x, \omega)$ – деякий розв'язок задачі (13), (14).

Одержимо спочатку необхідні та достатні умови належності простору $\mathfrak{M}_T \subset \mathfrak{M}_\infty$ лінійного оператора $f(\xi_{k2}, G) \equiv \sum_{k=0}^n \xi_{k2}(\omega) Q\left(G, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, що діє на сильний розв'язок СДРРЧП (1), (2), де $C \equiv G$ з рівняння (1).

Теорема 2. Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbf{P})$ існує сильний розв'язок СДРРЧП (1), (2).

Тоді необхідною та достатньою умовою належності простору $\mathfrak{M}_\infty$ довільного лінійного оператора

$$f(\xi_{k2}, G) \equiv \sum_{k=0}^n \xi_{k2}(\omega) Q\left(G, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right), \quad (19)$$

що діє на $u(t, x, \omega): (0, T] \times \mathbf{D}([- \tau, 0], \mathbf{R}^1) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$, є виконання для всіх $x \in \mathbf{R}^1$ нерівності

$$S \equiv \sum_{k=0}^n \mathbf{E} \{ \xi_{k2}^2(\omega) \} \int_0^t Q \left(G^2, \frac{d}{dt}, \cdot \right) H(t - \tau_k) dt < 1, \quad (20)$$

де $G^2 \equiv \{g_{ij}^2\}$, $g_{ij} \in \mathbf{R}_{\pm\infty}^1$, $\mathbf{D}([-\tau, 0], \mathbf{R}^1)$ – простір Скорохода [2] неперервних справа функцій $u(t, x, \omega): [0, \infty) \times \mathbf{R}^1 \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$, що мають лівосторонні границі.

Доведення. Необхідність. Нехай довільний лінійний оператор $f(\xi_{k2}, G) \in \mathfrak{M}_T \subset \mathfrak{M}_\infty$, а, отже, за лемою 1 лінійний оператор $\sum_{k=0}^n \xi_{k2}(\omega) Q \left(G, \frac{d}{dt}, \cdot \right) z(t - \tau_k, \sigma, \omega)$ належить до простору $\mathfrak{M}_\infty$.

Якщо застосувати перетворення Фур'є за змінною $x \in \mathbf{R}^1$ до лівої та правої частини (5) за правилом (10), то одержимо СДРР без частинних похідних (СДРР Іто [4]) при $G = C$ вигляду

$$\begin{aligned} z(t, \sigma, \omega) \equiv \tilde{z}(t, \sigma, \omega) + \sum_{k=0}^n \xi_{k2}(\omega) \int_0^t H(t - \tau_k - s) \times \\ \times Q \left(C, \frac{d}{ds}, \cdot \right) u(s - \tau_k, \sigma, \omega) dw_k(s, \omega). \end{aligned} \quad (21)$$

У рівнянні (21)

$$\tilde{z}(t, \sigma, \omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x} \tilde{u}(t, x, \omega) dx \quad (22)$$

– перетворення Фур'є, що діє на $\tilde{u}(t, x, \omega)$ як розв'язок однорідного рівняння.

Застосовуючи лінійний оператор $\xi_{l2}(\omega) Q \left(C, \frac{d}{dt}, \cdot \right)$ до лівої та правої частини стохастичного диференціального рівняння Іто (21), одержимо

$$\begin{aligned} \xi_{l2}(\omega) Q \left(C, \frac{d}{dt}, \cdot \right) z(t - \tau_l, \sigma, \omega) = \xi_{l2}(\omega) Q \left(C, \frac{d}{dt}, \cdot \right) \tilde{y}(t, \sigma, \omega) + \\ + \xi_{l2}(\omega) Q \left(C, \frac{d}{dt}, \cdot \right) \sum_{k=0}^n \int_0^t Q \left(C, \frac{d}{dt}, \cdot \right) H(t - \tau_k - s) \times \\ \times Q \left(C, \frac{d}{ds}, \cdot \right) z(s - \tau_k, \sigma, \omega) dw_k(s, \omega), \end{aligned} \quad (23)$$

де $l = 0, 1, \dots, n$.

Піднесемо обидві частини кожного з рівнянь системи (23) до квадрату, застосуємо операцію математичного сподівання, додаючи їх та, позначаючи через

$$\mu_{l_2}(C, t) \equiv \sum_{k=0}^n \mathbf{E} \left\{ \xi_{k_2}^2(\omega) Q \left(C, \frac{d}{dt}, \cdot \right) z^2(t - \tau_k, \sigma, \omega) \right\}$$

одержимо, що

$$\begin{aligned} \mu_{l_2}(C, t) &\equiv \mathbf{E} \left\{ \xi_{l_2}^2(\omega) Q \left(C^2, \frac{d}{dt}, \cdot \right) y(t, \sigma, \omega) \right\} + \\ &+ \mathbf{E} \left\{ \xi_{l_2}^2(\omega) \int_0^t Q \left(C, \frac{d}{dt}, \cdot \right) H^2(t - \tau_l - s) \mu_{l_2}(C, s) ds \right\}, \quad l = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (24)$$

Інтегруючи одержане рівняння (24) по t від 0 до ∞ , змінюючи порядок інтегрування та додаючи одержані рівняння, матимемо, що

$$\sum_{l=0}^n \int_0^\infty \mu_{l_2}(C, t) dt > S \sum_{l=0}^n \int_0^\infty \mu_{l_2}(C, t) dt. \quad (25)$$

Нерівність (25) можлива тільки при $S < 1$. Це означає, що $\mu_{l_2}(C, t) \in \mathfrak{M}_T \subset \mathfrak{M}_\infty$.

А з урахуванням леми 1 одержимо включення $f(\xi_{k_2}, C) \in \mathfrak{M}_{1T} \subset \mathfrak{M}_T \subset \mathfrak{M}_\infty$. Це доводить необхідність.

Достатність. Після інтегрування системи рівнянь (24) за змінною t від 0 до ∞ та додавання одержаних рівнянь отримуємо, що

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^n \int_0^\infty \mu_{l_2}(C, t) dt &= \frac{1}{1-S} \left[\int_0^\infty \sum_{k=0}^n \mathbf{E} \left\{ \xi_{k_2}^2(\omega) Q \left(C, \frac{d}{dt}, \cdot \right) y^2(t, \omega) \right\} dt + \right. \\ &\left. + \int_0^\infty \sum_{l=0}^n \mathbf{E} \left\{ \xi_{l_2}^2(\omega) Q \left(C, \frac{d}{dt}, \cdot \right) H^2(t - \tau_l - \tau) \right\} dt \right], \end{aligned} \quad (26)$$

де S визначено в (20).

Нехай виконується умова $S < 1$, тоді з (26) випливає, що

$$f(\xi_k, C) z(t - \tau_k, \sigma, \omega) \equiv \sum_{l=0}^n \xi_{l_2}(\omega) Q \left(C, \frac{d}{dt}, \cdot \right) z(t - \tau_k, \sigma, \omega) \in \mathfrak{M}_\infty,$$

а, отже, за лемою 1

$$f(\xi_k, C)u(t - \tau_k, \sigma, \omega) \in \mathfrak{M}_\infty. \quad (27)$$

За умовою теореми 2, включення (27) виконано для довільного $f(\xi_k, G)$, тому при $G = C$ маємо

$$f(\xi_k, C) \equiv \sum_{l=0}^n \xi_{l2}(\omega) Q\left(C, \frac{d}{dt}, \cdot\right) u(t - \tau_l, \sigma, \omega) \in \mathfrak{M}_\infty.$$

Аналогічно співвідношенню (24) матимемо, що

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sum_{l=0}^n \mu_{l2}(C, t) dt &= \int_0^\infty \sum_{l=0}^n \mathbf{E} \left\{ \xi_{l2}^2(\omega) Q\left(C^2, \frac{d}{dt}, \cdot\right) y(t, \sigma, \omega) \right\} dt + \\ &+ \int_0^\infty \sum_{l=0}^n Q\left(C^2, \frac{d}{dt}, \cdot\right) H^2(t - \tau - \tau_l) dt. \end{aligned} \quad (28)$$

За умов достатності всі інтеграли в (28) існують, а це означає, що

$$\sum_{l=0}^n \mu_{l2}(C, t) \in L_1(0, \infty), \quad \text{тобто } f(\xi_k, C) \equiv \sum_{l=0}^n \xi_{l2}(\omega) Q\left(C, \frac{d}{dt}, \cdot\right) z(t - \tau_l, \sigma, \omega) \in \mathfrak{M}_\infty.$$

Тоді, за лемою 1, матимемо (28). Доведення теореми 2 завершено.

Теорема 3. Нехай виконуються умови теореми 2. Тоді нульовий розв'язок $u(t, x, \omega) \equiv 0$ рівняння (1), (2) асимптотично стійкий в середньому квадратичному.

Доведення. За умов теореми 2 для кожного розв'язку $\tilde{u}(t, x, \omega)$ рівняння має місце оцінка

$$|\tilde{u}(t, x, \omega)| \leq N e^{-\beta t} \|[Q\tilde{u}]_0\|. \quad (29)$$

Тоді легко бачити виконання нерівності

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \sum_{l=0}^n \mu_{l2}(C, t) dt &\leq \frac{N \|C\| \cdot \|[Q\tilde{u}]_0\|}{2\beta(1-S)} \times \\ &\times \left[1 - \int_0^\infty \sum_{l=0}^n \mathbf{E} \{ \xi_{l2}^2(\omega) \} Q\left(C^2, \frac{d}{dt}, \cdot\right) H^2(t - \tau - \tau_l) dt \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

А, отже, інтегральна рівність (18) дасть оцінку

$$\mathbf{E} \{ u^2(t, x, \omega) \} \leq N^2 e^{-2\beta t} \|[Q\tilde{u}]_0\| \cdot \|H(t)\|^2 \int_0^\infty \sum_{l=0}^n \mu_{l2}(C, t) dt.$$

Легко бачити, що з нерівності (30) випливає асимптотична стійкість в середньому квадратичному розв'язку стохастичного диференціального рівняння (21), а, отже, за лемою 1, і СДРРЧП (1), (2).

Зауваження 1. Слід підкреслити, що умова (20) виписана для СДРРЧП у випадку $x \in \mathbf{R}^1$.

Зауваження 2. Якщо в рівнянні (1) відсутні зовнішні випадкові збурення, тобто вони є стаціонарними, а саме, $\xi_k(\omega) \equiv 1$, $k = 0, 1, \dots, n$, тоді маємо СДРРЧП вигляду [6]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[Q \left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) \right] + \sum_{k=0}^n Q \left(B, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t - \tau_k, x, \omega) = \\ = \sum_{k=0}^n Q \left(C, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t - \tau_k, x, \omega) \frac{dw_k(t, \omega)}{dt}, \end{aligned} \quad (31)$$

тобто СДРРЧП без впливу зовнішніх випадкових збурень.

Зауваження 3. Необхідною та достатньою умовою асимптотичної стійкості в середньому квадратичному рівняння (31) за умови (2) є умова (20) при $E\{\xi_{k2}^2(\omega)\} = 1$, а саме

$$\bar{S} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\infty} Q \left(C^2, \frac{d}{dt}, \cdot \right) H^2(t - \tau_k) dt < 1. \quad (32)$$

Ця умова раніше була одержана в монографіях [4, 5] для стохастичних диференціальних рівнянь без частинних похідних.

4.4. Модельна задача про стійкість стрижня під дією “білого шуму”

У праці [8] досліджується поведінка стрижня, на який діє “білий шум”. Математичною моделлю цього процесу будемо вважати стохастичне диференціальне рівняння в частинних похідних з похідною від вінерового процесу, а саме

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - a(\xi_1(\omega)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(\xi_2(\omega)) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c(\xi_3(\omega)) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{dw(t, \omega)}{dt}, \quad (33)$$

з початковими умовами

$$u(0, x) = f_1(x), \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = f_2(x) \quad (34)$$

та крайовими умовами

$$u(t, 0) = u(t, l) = \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} = \frac{\partial u(t, l)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(t, 0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(t, l)}{\partial x^2} = 0. \quad (35)$$

Тут $a(\xi_1(\omega)) > 0, b(\xi_2(\omega)) > 0, c(\xi_3(\omega)) > 0$ з імовірністю 1. Аналогічно до дискретного випадку [8] визначають статистичний запас стійкості S_a^2 за параметром $a(x), \forall x \in \mathbb{R}^1$, як найбільш допустиму інтенсивність процесів з взаємно незалежними значеннями, при якій система стійка в середньому квадратичному, тобто розв'язок стабілізується до нуля.

Тоді можна обчислити статистичний запас стійкості [12] $S_{k_1 k_2}$ системи (33)–(35)

$$S_{k_1 k_2} \equiv \sum_{k=0}^m a_{k_1 k_2}(\xi(\omega)) \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial t^{k_1} \partial x^{k_2}}$$

за параметрами $a_{k_1 k_2}(\xi_1(\omega)), k = k_1 + k_2$.

Якщо позначити $P(\lambda, \sigma, \omega) \equiv \sum_{k=0}^m a_{k_1 k_2}(\xi_1(\omega)) \lambda^{k_1} (i\sigma)^{k_2}$, тоді статистичний запас стійкості $S_{k_1 k_2}(x)$ системи обчислюється за формулою

$$S_{k_1 k_2}(x) \equiv \left[\sup_{\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda|^{k_1} |\sigma|^{k_2}}{|P(i\lambda, \sigma, x)|} d\lambda \right]^{-1}. \quad (36)$$

Використовуючи твердження (36), знайдено статистичний запас стійкості $S(x)$ за параметрами $a(x), b(x), c(x)$ системи (33)–(35)

$$S(x) \equiv \left[\sup_{\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma^2 d\lambda}{(\sigma^4 + a(x)\sigma^2 - b(x)\lambda^2)^2 + c(x)^2 \lambda^2} \right]^{-1} = 2a(x)c(x), \forall x \in \mathbb{R}^1. \quad (37)$$

Таким чином, система (33)–(35) є стійкою в l.i.m., для якого $S(x) > \varepsilon^2, \forall x \in \mathbb{R}^1$.

Нехай на систему (33)–(35) діють зовнішні випадкові “збурення” типу $\xi(\omega)$ на праву частину СДРЧП (33). Ця ситуація може виникнути, якщо система розташована на платформі, рух якої диктується зовнішніми збуреннями $\varphi(\xi(\omega))$. Тоді (33) буде мати вигляд

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c \frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(\xi(\omega)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{dw(t, \omega)}{dt}.$$

Використовуючи означення статистичного запасу стійкості для системи (37), (34), (35), маємо

$$S(\varphi) \equiv \left[E \left\{ |\varphi(\xi)|^2 \right\} \sup_{\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma^2 d\lambda}{(\sigma^4 + a\sigma^2 - b\lambda^2)^2 + c^2 \lambda^2} \right]^{-1} = E \left\{ |\varphi(\xi)|^2 \right\} 2ac.$$

Застосовуючи достатні умови асимптотичної стійкості в середньому квадратичному теорема 2, приходимо до висновку, що система (37), (34), (35) є стійкою в середньому квадратичному, якщо

$$E \left\{ \varphi^2(\xi) \right\} 2ac < 1, \quad (38)$$

та нестійкою в середньому квадратичному, якщо в (38) поміняти знак на протилежний.

Запропонована в даній роботі стохастична модель складних систем, є спробою врахування в повному обсязі випадковостей при дослідженні реальних процесів, що описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних, у правій частині яких враховуються не тільки дифузійні збурення типу броунівського процесу, але й випадкові збурення інших типів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ до §4

1. Гулинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов.— М.: Физматлит, 2005.— 408 с.
2. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение.— К.: Наук. думка, 1980.— 612 с.

3. Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. В 3-х томах. Т.3: Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика.— Чернівці: Вид-во “Золоті литаври”, 2009.— 798 с.
4. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения.— Рига: Ориентир, 1992.— 301 с.
5. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений при случайных возмущениях их параметров.— Рига: Зинатне, 1989.— 421 с.
6. Koroliuk V.S., Yurchenko I.V., Yasynskyu V.K. Behavior of the Second Moment of the Solution to the Autonomous Stochastic Linear Partial Differential Equation with Random Parameters in the Right-Hand Side // Cybernetics and Systems Analysis.— 2015.— Vol.51, No. 1.— PP.56-63.
7. Свердан М.Л., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Стійкість у стохастичному моделюванні складних динамічних систем.— Снятин: Над Прутом, 1996.— 448с.
8. Lindsey William C. Synchronization Systems in Communication and Control.— Prentice Hall, 1972.— 704 p.

§5. ПРО ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

5.1. Постановка задачі

Питання існування та єдиності розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь з деякими початковими та граничними умовами в різних функціональних просторах, зокрема і рівнянь у частинних похідних, досліджувалося багатьма авторами [3, 4, 6, 7, 8, 11, 12]. У працях [9, 10] А.Н. Станжицький та А.О. Цуканова одержали теорему існування та єдиності розв'язку задачі Коші для стохастичного диференціального рівняння реакції-дифузії нейтрального типу. Дана робота розглядає питання існування розв'язку задачі Коші в класі нелінійних дифузійних стохастичних диференціально-різницевого рівнянь нейтрального типу в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішніх збурень, незалежних від вінерового процесу і продовжує дослідження, розпочаті в роботах [9, 10, 13].

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, F, \{F_t, t \geq t_0, 0\}, \mathbf{P})$ задано нелінійне дифузійне стохастичне диференціально-різницево рівняння нейтрального типу (НДСДРРНТ) в частинних похідних під дією випадкових зовнішніх збурень, незалежних від вінерового процесу

$$\begin{aligned} d \left(u(t, x) + \int_{\mathbf{R}^r} b(t, x, y) u(t - \tau, y) dy \right) = \\ = \sum_{j=1}^r \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_j^2} + \sigma(t, u(t - \tau, x)) dw(t, x) + \\ + \int_{\mathbf{Z}} c(t, u(t - \tau, x), z) \tilde{v}(dz, dt), \end{aligned} \quad (1)$$

для $t \in (0, T]$, $x \in \mathbf{R}^r$ за початковими даними

$$u(t, x) = \psi(t, x), \quad \forall t \in [-\tau, 0], \quad (2)$$

$u(t, x): [0, T] \times \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^1$ – розв’язок задачі (1), (2); $T \in (0, \infty)$ – фіксований дійсний час, $\tau > 0$, r -вимірний оператор Лапласа [1, 4]

$$\Delta_x \equiv \sum_{j=1}^r \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_j^2}, \quad (3)$$

$w(t, x) - L_2(\mathbf{R}^r)$ -вимірний Q -вінеровий процес [2];

$\tilde{\nu}(A, t) \equiv \nu(A, t) - \mathbf{E}\{\nu^2(A, t)\}$ – центрована пуассонова міра [3],

$\sigma: [0, T] \times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^1$ і $b: [0, T] \times \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^1$, $c: [0, T] \times \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^1$ – деякі конкретні функції, які будуть визначені під час дослідження;

$\psi: [-\tau, 0] \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^1$ – функція початкових даних.

5.2. Про попередні результати та основні означення

Наведемо декілька тверджень з праць [9, 10, 11, 12].

Лема 1. [12, с.188]. *Оператор*

$$S(t): L_2(\mathbf{R}^r) \rightarrow L_2(\mathbf{R}^r) \quad (4)$$

генерує розв’язок однорідної задачі Коші для рівняння тепла (лема 1, [9]) з імовірністю 1

$$\begin{aligned} d(u(t, x)) + \int_{\mathbf{R}^r} b(t, x, z) u(t - \tau, z) dz = \\ = \Delta_x u(t, x), \end{aligned} \quad (5)$$

за початковими даними (2) за правилом

$$u(t, x) = (s(t)g(\cdot))(x) = \int_{\mathbf{R}^r} K(t, x - y) g(\cdot) dy, \quad (6)$$

та утворює C_{0-} напівгрупу операторів, інфінітезимальним оператором якої є випадковий лапласіан $\Delta_x(\omega)$ (3). А ця напівгрупа $S(t)$ є стискаючою, тобто

$$\|(S(t)g(\cdot))(x)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \leq \|g(x)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2. \quad (7)$$

Побудуємо потік (фільтрацію) σ -алгебр $\{F_t, t \geq t_0 \geq 0\}$, який породжений $L_2(\mathbf{R}^r)$ -значним Q -вінеровим процесом

$$w(t, x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} e_n(x) \beta_n(t) \quad (8)$$

та центрованою пуассоновою мірою $\tilde{\nu}(A, t) \equiv \nu(A, t) - \mathbf{E}\{\nu(A, t)\}$, де $\{\beta_n(t) \equiv \beta_n(t, \omega)\} \subset \mathbf{R}^1$ – незалежні стандартні одновимірні вінерові процеси, а

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \equiv \lambda < \infty. \quad (9)$$

При цьому система векторів $e_n(x) \equiv \bar{e}_n(x)$ утворює ортонормований базис у $L_2(\mathbf{R}^r)$ такий, що

$$\sup_{n \in \{1, 2, \dots\}} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbf{R}^r} |e_n(x)| \leq 1. \quad (10)$$

Уведемо простір Банаха $\mathfrak{B}_{2,T}$ всіх $L_2(\mathbf{R}^r)$ -значних F_t -вимірних та неперервних з імовірністю одиниця випадкових процесів $\xi(\cdot) \equiv \xi(t, \omega): [0, T] \times \Omega \rightarrow L_2(\mathbf{R}^r)$ з нормою

$$\|\xi(\cdot)\|_{\mathfrak{B}_{2,T}} \equiv \sqrt{\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbf{E} \|\xi(t, \omega)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2}. \quad (11)$$

Означення 1. Неперервну випадкову функцію $u \equiv u(t, x, \omega): [-\tau, T] \times \mathbf{R}^r \times \Omega \rightarrow \mathbf{D}^1([-\tau, T])$ назвемо м'яким розв'язком задачі (1), (2), якщо виконуються умови:

4) $u \in F_T$ -вимірною для майже всіх $t \in [-\tau, T]$ та фіксованих $x \in \mathbf{R}^r$, $\omega \in \Omega$;

5) u задовольняє умову (інтегральне рівняння)

$$\begin{aligned} u(t, x, \omega) = & \int_{\mathbf{R}^r} K(t, x - y) \left(\psi(0) + \int_{\mathbf{R}^r} b(0, y, z) \psi(-\tau, z) dz \right) dy - \\ & - \int_{\mathbf{R}^r} b(0, x, y) u(t - \tau, y) dy + \\ & + \int_{\mathbf{Z}} \int_{\mathbf{R}^r} c(0, y, z, z_1) \psi(-\tau, z_1) \Pi(dz) dz_1 dy - \int_{\mathbf{Z}} \int_{\mathbf{R}^r} c(0, x, y, z) u(t - \tau, y) \Pi(dz) dy - \\ & - \int_0^t \left(\Delta_x \int_{\mathbf{R}^r} K(t - s, x - y) \times \int_{\mathbf{R}^r} b(s, y, z) u(s - \tau, z) dz dy \right) ds - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t \left(\int_Z \Delta_x \int_{\mathbf{R}^r} K(t-s, x-y) \times \int_{\mathbf{R}^r} c(s, y, z_1, z) u(s-\tau, z_1) \Pi(dz) dz_1 dy \right) ds + \\
& + \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \left(\int_{\mathbf{R}^r} K(t-s, x-y) \times \right. \\
& \quad \left. \times \sigma(s, u(s-\tau), y) e_n(y) dy \right) d\beta_n(s)
\end{aligned} \tag{12}$$

для $t \in [0, T]$, $x \in \mathbf{R}^r$ за початковою умовою (2);

б) існує норма

$$E \left\{ \int_0^T \|u(t, x, \omega)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 dt \right\} < \infty. \tag{13}$$

Лема 2 [10]. Математичне сподівання від квадрату $u(t, x, \omega)$ (див. (13)) є нормою.

5.3. Основне твердження

Будемо надалі вважати, що ймовірнісний базис $(\Omega, F, \{F_t, t \geq t_0\}, \mathbf{P})$ побудований [1–5] для задачі (1), (2), яка є предметом дослідження цієї статті.

Основне твердження

Нехай для задачі (1), (2) виконано умови:

б) коефіцієнти $\sigma \equiv \sigma(t, u, x)$ та $c(t, u, x, z)$ є:

1а) вимірними за всіма аргументами;

1б) задовольняють умову Ліпшиця за другим аргументом

$$|\sigma(t, u, x) - \sigma(t, v, x)| + \int_Z |c(t, u, x, z) - c(t, v, x, z)| \Pi(dz) \leq L |u - v|$$

для $\forall t \in [0, T]$, $u, v \in \mathbf{R}^1$, $x \in \mathbf{R}^r$;

7) початкова функція $\psi(t, x, \omega)$ є:

2а) F_0 -вимірною відносно аргумента $t \in [0, T]$;

- 2б) незалежною від вінерового процесу $w(t) \equiv w(t, \omega) \in \mathbf{R}^1$ для $\forall t \in [0, T]$ та центрованої пуассонової міри $\tilde{\nu}(t, x, z)$;
- 2в) має норму

$$\sup_{-\tau \leq t \leq 0} \mathbf{E} \|\psi(t, x, \omega)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 < \infty; \quad (14)$$

- 8) функції $b \equiv b(t, x, y)$ та $c(t, x, y, z)$ задовольняє умови:

3а)

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbf{R}^r} \sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} b^2(t, x, y) dy} dx + \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbf{Z}} \int_{\mathbf{R}^r} \sqrt{\int_{\mathbf{R}} c^2(t, x, y, z) \Pi(dz)} dy dx = K_1 < \infty; \quad (15)$$

3б)

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(t, x, y) dy dx + \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbf{Z}} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} c^2(t, x, y, z) \Pi(dz) dy dx = K_2 < \infty; \quad (16)$$

- 3в) для кожної точки $x \in \mathbf{R}^r$ існують частинні похідні $\partial_{x_i} b$, $\partial_{x_i x_j} b$, де $\{i, j\} \subset \{1, 2, \dots, r\}$;

- 3г) матриця Гессе $D_x^2 b$ задовольняє умову

$$\begin{aligned} & \left| \nabla_x b(t, x, y) \right| + \left| \nabla_x \int_{\mathbf{Z}} c(t, x, y, z) \Pi(dz) \right| + \\ & + \left\| D_x^2 b(t, x, y) \right\| + \left\| D_x^2 \left(\int_{\mathbf{Z}} c(t, x, y, z) \Pi(dz) \right) \right\| \leq \Phi(t, x, y), \end{aligned} \quad (17)$$

- для $\forall t \in [0, T] \subset [0, \infty)$, $\{x, y\} \subset \mathbf{R}^r$, де функція $\Phi: [0, T] \times \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^r \rightarrow [0, \infty)$ задовольняє умову обмеженості подвійного просторового інтегралу

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} \Phi(t, x, y) dx dy = K_3 < \infty; \quad (18)$$

- 9) для функції $\Phi(t, x, y)$ виконується аналог умови Ліпшиця за другим аргументом

$$|\Phi(t, x, z) - \Phi(t, x_0, z)| \leq \zeta(t, z, x_0, \delta) |x - x_0|, \quad (19_1)$$

де для кожної точки $x_0 \in \mathbf{R}^r$ існує її оточення $B_\delta(x_0)$ та невід'ємна функція $\zeta \equiv \zeta(t, z, x_0, \delta)$ для $\forall t \in [0, T]$, $|x - x_0| < \delta$; $z \in \mathbf{R}^r$, де

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \zeta(t, \cdot, x_0, \delta) \in L_2(\mathbf{R}^r), \quad \delta \in \mathbf{R}_+; \quad (19_2)$$

Тоді задача (1), (2) для НСДРНТ має єдиний м'який розв'язок $u \equiv u(t, x, \omega) \in \mathfrak{B}_{2,T}$ з імовірністю одиниця для $\forall t \in [0, T]$, якщо

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(t, x, y) dx dy \equiv K_5 < \frac{1}{4}. \quad (20)$$

5.4. Доведення основного твердження

Доведення розіб'ємо на етапи, що містяться в теоремі Банаха [1, 2], яка застосована для встановлення з імовірністю одиниця єдиного розв'язку задачі (1), (2) (задачі Коші). Будемо використовувати методику, викладену в працях [9, 10]. Проведемо доведення методом кроків. Спочатку одержимо невідому функцію на відрізку $[0, \tau]$. Одержану невідому функцію продовжимо – на першому відрізку за початкову функцію приймемо знайдену невідому функцію і повторюємо доведення для знаходження розв'язку на другому відрізку і т.д.

Розглянемо оператор $S : \mathfrak{B}_{2,T} \rightarrow \mathfrak{B}_{2,T}$, який діє за правилом для $t \in [0, T]$, $x, y \in \mathbf{R}^r$

$$\begin{aligned} (Su)(t) = & \int_{\mathbf{R}^r} K(t, x - y) \left[\psi(0) + \int_{\mathbf{R}^r} b(0, y, z) \psi(-\tau, z) dz \right] dy - \\ & - \int_{\mathbf{R}^r} b(t, y, z) u(t - \tau, y) dy - \\ & - \int_{\mathbf{Z}} \int_{\mathbf{R}^r} c(t, y, z, z_1) u(t - \tau, y) dy \Pi(dz) - \\ & - \int_{\mathbf{Z}} \int_0^t \left[\Delta_x \int_{\mathbf{R}^r} \left(K(t - s, x - y) \int_{\mathbf{R}^r} c(s, y, z, z_1) u(s - \tau, z_1) \Pi(dz) dz_1 \right) dy \right] ds + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t \left[\Delta_x \int_{\mathbf{R}^r} \left(K(t-s, x-y) \int_{\mathbf{R}^r} b(s, y, z) u(s-\tau, z) dz \right) dy \right] ds + \\
& + \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \left[\int_{\mathbf{R}^r} K(t-s, s-y) \sigma(s, u(s-\tau), y) e_n(y) dy \right] d\rho_n(s) \equiv \\
& \equiv \sum_{j=0}^4 I_j(t)
\end{aligned} \tag{21}$$

за початковими даними (2).

Доведемо, що цей оператор є стискаючим.

По-перше, треба довести, що $Su \in \mathfrak{B}_{2,T}$ для $\forall u \in \mathfrak{B}_{2,T}$. Для цього потрібно оцінити п'ять норм $\|I_j(s)\|_{\mathfrak{B}_{2,T}}^2 \equiv \sup \mathbf{E} \|I_j(s)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2$, $j=0,1,2,3,4$.

Використаємо нерівність (7) леми 1, нерівність Коші-Шварца [4] та умови (14), (20) і одержимо оцінку для супремума математичного сподівання $I_0(s)$ з оператора $(Su)(t)$ (див. (21)), а саме:

$$\begin{aligned}
& \|I_0(s)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 \equiv \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \|I_0(s)\|_{L_2(\mathbf{R}^d)}^2 \equiv \\
& = \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \left\| \int_{\mathbf{R}^r} K(s, x-y) \left(\psi(0) + \int_{\mathbf{R}^r} b(0, y, z) \psi(-\tau, z) dz \right) dy + \right. \\
& \quad \left. + \int_{\mathbf{Z} \mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} c(0, y, z_1, z) \psi(-\tau, z_1) dz_1 \right\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \leq \\
& \leq 3 \mathbf{E} \|\psi(0)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + 3 \mathbf{E} \left\| \int_{\mathbf{R}^r} b(0, x, z) \psi(-\tau, z) dz \right\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + \\
& \quad + 3 \mathbf{E} \left\| \int_{\mathbf{Z} \mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} c(0, x, z_1, z) \psi(-\tau, z_1) dz_1 \Pi(dz) \right\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 = \\
& = 3 \mathbf{E} \|\psi(0)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + 3 \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} (b(0, x, z) \psi(-\tau, z))^2 dx + \\
& \quad + 3 \mathbf{E} \int_{\mathbf{Z} \mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} (c(0, x, z_1, z) \psi(-\tau, z_1) \Pi(dz))^2 dx \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 3\mathbb{E}\|\psi(0)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + 3\left(\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r}b^2(0,x,z)dzdx\right)\mathbb{E}\int_{\mathbf{R}^r}\psi^2(-\tau,z)dz + \\
&+ 3\left(\int_{\mathbf{Z}}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r}c^2(0,x,z_1,z)dz_1dx\Pi(dz)\right)\mathbb{E}\int_{\mathbf{R}^r}\psi^2(-\tau,z)dz = \\
&= 3\mathbb{E}\|\psi(0)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + 3\left(\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r}b^2(0,x,z)dzdx\right)\mathbb{E}\|\psi(-\tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + \\
&+ 3\int_{\mathbf{Z}}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r}c^2(0,x,z_1,z)dz_1\Pi(dz)dx\mathbb{E}\|\psi(-\tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 = C < \infty.
\end{aligned}$$

Застосуємо нерівність Коші-Шварца [4] та припущення (14), (20) при оцінюванні супремума математичного сподівання $I_1(s)$, а саме:

$$\begin{aligned}
\|I_1(s)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 &\equiv \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{E}\|I_1(s)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \equiv \\
&= \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{E}\left\|\int_{\mathbf{R}^r}b(s,x,y)u(s-\tau)dy\right\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 = \\
&= \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{E}\int_{\mathbf{R}^r}\left(\int_{\mathbf{R}^r}b(s,x,y)u(s-\tau,y)dy\right)^2dx \leq \\
&\leq \sup_{0 \leq s \leq t} \left(\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r}b^2(s,x,y)dydx\right)\mathbb{E}\int_{\mathbf{R}^r}u^2(s-\tau,y)dy \leq \\
&\leq \sup_{0 \leq s \leq t} \left(\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r}b^2(s,x,y)dydx\right)\mathbb{E}\|u(s-\tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \leq \\
&\leq \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{E}\|u(s-\tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \cdot \sup_{0 \leq s \leq t} \int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r}b^2(s,x,y)dydx.
\end{aligned}$$

Далі спрацює очевидна нерівність на першому кроці відрізка $[0, \tau]$ для розв'язку $u(t)$ рівняння (1) для $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\|u(s-\tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 &\leq \sup_{0 \leq s \leq \tau} \mathbb{E}\|u(s-\tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + \sup_{\tau \leq s \leq t} \mathbb{E}\|u(s-\tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 = \\
&= \sup_{-\tau \leq s-\tau \leq 0} \mathbb{E}\|u(s-\tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + \sup_{0 \leq s-\tau \leq t-\tau} \mathbb{E}\|u(s-\tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2. \tag{22}
\end{aligned}$$

З урахуванням (22) попередня нерівність дасть оцінку

$$\|I_1(s)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s, x, y) dy dx \right) \left(\sup_{-\tau \leq s - \tau \leq 0} \mathbf{E} \| u(s - \tau) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + \right. \\
&\quad \left. + \sup_{0 \leq s - \tau \leq t - \tau} \mathbf{E} \| u(s - \tau) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \right) = \\
&= \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s, x, y) dy dx \right) \left(\sup_{-\tau \leq s \leq 0} \mathbf{E} \| u(s) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + \sup_{0 \leq s \leq t - \tau} \mathbf{E} \| u(s) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \right) = \\
&= \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s, x, y) dy dx \right) \left(\sup_{-\tau \leq s \leq 0} \mathbf{E} \| \psi(s) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + \sup_{0 \leq s \leq t - \tau} \mathbf{E} \| u(s) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \right) \leq \\
&\leq \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s, x, y) dy dx \right) \left(\sup_{-\tau \leq s \leq 0} \mathbf{E} \| \psi(s) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + \right. \\
&\quad \left. + \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \| u(s) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \right) = C_1 < \infty.
\end{aligned}$$

Аналогічно слід оцінити супремум математичного сподівання квадрату інтеграла $I_2(s)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,T}$ з відповідними нормами

$$\begin{aligned}
&\| I_2(s) \|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \equiv \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \| I_2(s) \|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \equiv \\
&= \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \left\| \int_0^s \left(\Delta_x \int_{\mathbf{R}^r} K(s - \tau, x - y) \left(\int_{\mathbf{R}^r} b(l, y, z) u(l - \tau, z) dz \right) dl \right) d\tau \right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \leq \\
&\leq \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \left(\int_0^s \left(\Delta_x \int_{\mathbf{R}^r} K(s - l, x - y) \left(\int_{\mathbf{R}^r} b(l, y, z) u(l - \tau, z) dz \right) dy \right) dl \right)^2 dx \leq \\
&\leq \sup_{0 \leq s \leq t} s \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \left(\int_0^s \left(\Delta_x \int_{\mathbf{R}^r} K(s - \tau, x - y) \left(\int_{\mathbf{R}^r} b(l, y, z) u(l - \tau, z) dz \right) dy \right) dl \right)^2 dx \leq \\
&\leq t \cdot \varepsilon(s), \tag{23}
\end{aligned}$$

де

$$\varepsilon(s) \equiv \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \left(\int_0^s \left(\Delta_x \int_{\mathbf{R}^r} K(s - \tau, x - y) \left(\int_{\mathbf{R}^r} b(l, y, z) u(l - \tau, z) dz \right) dy \right) dl \right)^2 dx. \tag{24}$$

Змінюючи порядок інтегрування у $\varepsilon(s)$ (див. (24)), матимемо оцінку для $I_2(s)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,T}$:

$$\begin{aligned}
& \|I_2(s)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 \leq t \cdot \varepsilon(s) = \\
& = t \cdot \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \int_0^s \left(\int_{\mathbf{R}^r} \left(\Delta_x \int_{\mathbf{R}^r} K(s-\tau, x-y) \left(\int_{\mathbf{R}^r} b(l, y, z) u(l-\tau, z) dz \right) dy \right)^2 dx \right) dl \leq \\
& \leq Ct \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \left\{ \int_0^s \int_{\mathbf{R}^r} \left\| D_x^2 \int_{\mathbf{R}^r} b(l, x, y) u(l-\tau, z) dz \right\|^2 dx dl \right\} = \\
& = Ct \mathbf{E} \left\{ \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} \left\| D_x^2 \int_{\mathbf{R}^r} b(l, x, z) u(l-\tau, z) dz \right\|^2 dx dl \right\}. \quad (25)
\end{aligned}$$

У попередній оцінці

$$\nabla_x \equiv (\partial_{x_1} \dots \partial_{x_r})^T; \quad D_x^2 = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}^2 & \dots & \partial_{x_1 x_r}^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_{x_r x_1}^2 & \dots & \partial_{x_r}^2 \end{pmatrix}; \quad (26)$$

$\|\cdot\|$ – відповідна матрична норма.

Далі слід використати лему 1 [9, лема 4]. Якщо умови цієї леми для

$$\begin{aligned}
u(l, x) &= \int_{\mathbf{R}^r} K(s-l, x-y) \left(\int_{\mathbf{R}^r} b(l, y, z) u(l-\tau, z) dz \right) dy, \\
g(l, x) &\equiv \int_{\mathbf{R}^r} b(l, y, z) u(l-\tau, z) dz \quad (27)
\end{aligned}$$

виконуються, то оператор $S(\cdot)$ є стискаючим (див. (7)).

Перевіримо умови леми 1, тобто доведемо, що:
з імовірністю одиниця для кожного $l \in [0, t]$

$$\int_{\mathbf{R}^r} b(l, \cdot, z) u(l-\tau, z) dz \in L_1(\mathbf{R}^r); \quad (28)$$

$$|\nabla_x g| \in L_2(\mathbf{R}^r), \quad \|D_x^2 g\| \in L_2(\mathbf{R}^r). \quad (29)$$

Перевіримо умову 1). Доведення (28) випливає з використання умов Коші-Шварца та умов 2а), 2б) основного твердження та (20) зі сталою K_5 .

$$\mathbf{E} \left\{ \int_{\mathbf{R}^r} \left| \int_{\mathbf{R}^r} b(l, x, z) u(l-\tau, z) dz \right| dx \right\} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_{\mathbf{R}^r} \sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} b^2(l, x, z) dz} dx \right) \sqrt{\mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} u^2(l - \tau, z) dz} \leq \\
&\leq \left(\sup_{0 \leq l \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} b^2(l, x, z) dz} dx \right) \sqrt{\sup_{0 \leq l \leq t} \mathbf{E} \|u(l - \tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2} \leq \\
&\leq \left(\sup_{0 \leq l \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} b^2(l, x, z) dz} dx \right) \left(\sqrt{\sup_{-\tau \leq l \leq 0} \mathbf{E} \|\psi(l)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2} + \right. \\
&\quad \left. + \sup_{0 \leq l \leq t} \mathbf{E} \|u(l)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Звідки з імовірністю одиниця умова 1 виконується

$$\int_{\mathbf{R}^r} \left| \int_{\mathbf{R}^r} b(l, x, z) u(l - \tau, z) dz \right| dx = C_1 < \infty.$$

Перевіримо умову 2) леми 1. Умову (29) доведемо для $|\nabla_x g|$. Для $\|D_x^2 g\|$ міркуватимемо аналогічно. Спочатку доведемо диференційовність $g(l, x)$ (дивись (27)) у точці $x = x_0 \in \mathbf{R}^r$.

Нехай $B_\delta(x_0)$ є околом точки $x_0 \in \mathbf{R}^r$. Використовуючи умови (17) та умову (19), матимемо

$$\begin{aligned}
&|\nabla_x b(t, x, z) u(t - \tau, z)| \leq \psi(t, x, z) |u(t - \tau, z)| = \\
&= (\psi(t, x, z) - \psi(t, x_0, z) + \psi(t, x_0, z)) |u(t - \tau, z)| \leq \\
&\leq (|\psi(t, x, z) - \psi(t, x_0, z)| + \psi(t, x_0, z)) |u(t - \tau, z)| \leq \\
&\leq (\varphi(t, z, x_0, \delta) |x - x_0| + \psi(t, x_0, z)) |u(t - \tau, z)| \leq \\
&\leq (\delta \varphi(t, z, x_0, \delta) + \psi(t, x_0, z)) |u(t - \tau, z)|.
\end{aligned}$$

Перевіримо включення

$$(\delta \varphi(t, \cdot, x_0, \delta) + \psi(t, x_0, \cdot)) |u(t - \tau, \cdot)| \in L_1(\mathbf{R}^r). \quad (30)$$

Використовуючи нерівність Коші-Шварца та умови (17), (18), (20) очевидно матимемо

$$\mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} (\delta \varphi(t_1, z, x_0, \delta) + \psi(t_1, x_0, z)) |u(t_1 - \tau, z)| dz =$$

$$\begin{aligned}
&= \delta \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \varphi(t_1, z, x_0, \delta) |u(t_1 - \tau, z)| dz + \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \psi(t_1, x_0, z) |u(t_1 - \tau, z)| dz \leq \\
&\leq \left(\delta \sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} \varphi^2(t_1, z, x_0, \delta) dz} + \sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} \psi^2(t_1, x_0, z) dz} \right) \sqrt{\sup_{0 \leq t_1 \leq t} \mathbf{E} \|u(t_1 - \tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2} \leq \\
&\leq \left(\delta \sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} \varphi^2(t_1, z, x_0, \delta) dz} + \sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} \psi^2(t_1, x_0, z) dz} \right) \left(\sup_{-\tau \leq t_1 \leq 0} \mathbf{E} \|\psi(t_1)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + \right. \\
&\quad \left. + \sup_{0 \leq t_1 \leq t} \mathbf{E} \|u(t_1)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.
\end{aligned}$$

Звідки з імовірністю одиниця одержимо

$$\int_{\mathbf{R}^r} (\delta \varphi(t_1, z, x_0, \delta) + \psi(t_1, x_0, \zeta)) |u(t_1 - \tau, z)| dz < \infty.$$

Звідси, згідно з локальною теоремою про диференційовність інтеграла за параметром, для функції (27) існує градієнт $\nabla_x g$ [4] та

$$\nabla_x \int_{\mathbf{R}^r} b(t, x, z) u(t - \tau, z) dz = \int_{\mathbf{R}^r} \nabla_x b(t, x, z) u(t - \tau, z) dz. \quad (31)$$

Залишилось довести, що

$$\nabla_x \int_{\mathbf{R}^r} b(t, \cdot, z) u(t - \tau, z) dz \in L_2(\mathbf{R}^r). \quad (32)$$

З урахуванням (31), (17), нерівності Коші-Шварца, умов (18) та (14), виконуються співвідношення

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \left| \nabla_x \int_{\mathbf{R}^r} b(t, x, z) u(t - \tau, z) dz \right|^2 dx = \\
&= \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \left(\int_{\mathbf{R}^r} \nabla_x b(t, x, z) u(t - \tau, z) dz \right)^2 dx \leq \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \left(\int_{\mathbf{R}^r} |\nabla_x b(t, x, z) u(t - \tau, z)| dz \right)^2 dx \leq \\
&\leq \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \left(\int_{\mathbf{R}^r} Z(t, x, z) |u(t - \tau, z)| dz \right)^2 dx \leq \left(\int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} Z^2(t, x, z) dz dx \right) \mathbf{E} \left\{ \int_{\mathbf{R}^r} u^2(t - \tau) dt \right\} \leq \\
&\leq \sup_{0 \leq t_1 \leq t} \left(\int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} Z^2(t, x, z) dz dx \right) \mathbf{E} \|u(t_1 - \tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \leq
\end{aligned}$$

$$\leq \sup_{0 \leq t_1 \leq t} \left(\int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} Z^2(t_1, x, z) dz dx \right) \left(\sup_{-\tau \leq t_1 \leq 0} \mathbb{E} \| \psi(t_1) \|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + \sup_{0 \leq t_1 \leq t} \mathbb{E} \| u(t_1) \|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \right) < \infty.$$

Звідки отримуємо

$$\int_{\mathbf{R}^r} \left| \nabla_x \int_{\mathbf{R}^r} b(t_1, x, z) u(t_1 - \tau, z) dz \right|^2 dx < \infty.$$

Остаточно з (25) матимемо оцінку

$$\begin{aligned} \| I_2(s) \|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 &\leq Ct \mathbb{E} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} \| D_x^2 \int_{\mathbf{R}^r} b(t_1, x, z) u(t_1 - \tau, z) dz \|^2 dx dt_1 \leq \\ &\leq Ct \mathbb{E} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} \left(\int_{\mathbf{R}^r} \| D_x^2 b(t_1, x, z) \| |u(t_1 - \tau, z)| dz \right)^2 dx dt_1 \leq \\ &\leq Ct \int_0^t \left(\int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} Z^2(t_1, x, z) dz dx \right) \mathbb{E} \| u(t_1 - \tau) \|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 dt_1 \leq \\ &\leq Ct^2 \sup_{0 \leq t_1 \leq t} \left(\int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} Z^2(t_1, x, z) dz dx \right) \left(\sup_{-\tau \leq t_1 \leq 0} \mathbb{E} \| \psi(t_1) \|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sup_{0 \leq t_1 \leq t} \mathbb{E} \| u(t_1) \|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \right) \leq C_2 < \infty. \end{aligned} \quad (33)$$

Отримаємо оцінку для $I_3(s)$. Надалі під $\| \cdot \|$ будемо розуміти $\| \cdot \|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2$. З урахуванням нерівності Коші-Шварца, теореми Фубіні [4] та умов (7), (14) отримуємо для норми $I_3(s)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,t}$ оцінку

$$\begin{aligned} \| I_3(s) \|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 &= \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{E} \| I_3(s) \|^2 = \\ &= \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{E} \left\| \int_0^s \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \left(\int_{\mathbf{R}^r} K(t-s, x-y) \sigma(s, u(s-\tau), y) e_n(y) dy \right) d\beta_n(s) \right\|^2 = \\ &= \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{E} \int_{\mathbf{R}^r} \left(\int_0^s \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \left(\int_{\mathbf{R}^r} K(s-y, x-z) \sigma(y, u(y-\tau, z), z) e_n(z) dz \right) d\beta_n(y) \right)^2 dy = \\ &= \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbb{E} \int_{\mathbf{R}^r} \int_0^s \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \left(\int_{\mathbf{R}^r} K(s-y, x-z) \sigma(y, u(y-\tau, z), z) e_n(z) dz \right)^2 dy dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \int_0^s \int_{\mathbf{R}^r} \left(\int_{\mathbf{R}^r} K(s-y, x-z) |\sigma(y, u(y-\tau, z), z)| e_n(z) dz \right)^2 dy dx \leq \\
&\leq L^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \int_0^s \int_{\mathbf{R}^r} \left(\int_{\mathbf{R}^r} K(s-y, x-z) (1 + |u(y-\tau, z)|) e_n(z) dz \right)^2 dx dy = \\
&= L^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \int_0^s \left\| \int_{\mathbf{R}^r} K(s-y, x-z) (1 + |u(y-\tau)|) e_n dx \right\|^2 dy \leq \\
&\leq L^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \int_0^s \left\| (1 + |u(y-\tau)|) e_n \right\|^2 dy \leq 2L^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mathbf{E} \int_0^t (\|e_n\|^2 + \|u(y-\tau)e_n\|^2) dy = \\
&= 2L^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mathbf{E} \int_0^t \left(1 + \int_{\mathbf{R}^r} u^2(y-\tau, x) e_n^2 dx \right) dy \leq 2L^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(t + \mathbf{E} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} u^2(y-\tau, x) dx dy \right) = \\
&\leq 2L^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(t + \mathbf{E} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} u^2(y-\tau, x) dx dy \right) \leq \\
&\leq 2L^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \right) \left(t + \tau \sup_{-\tau \leq y \leq 0} \mathbf{E} \|\psi(y)\|^2 + \mathbf{E} \int_0^t \|u(y)\|^2 dy \right) = C_3 < \infty. \quad (34)
\end{aligned}$$

Оцінка інтеграла $I_4(s)$, що містить інтеграл за пуассоновою мірою, проводиться аналогічно до $I_2(s)$, оскільки інтеграл Скорохода має аналогічні до інтеграла Вінера-Іто відповідні властивості. Тому $\|I_4(s)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 \leq C_4 < \infty$.

Об'єднавши п'ять вищевикладених оцінок для $I_i(s)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, одержимо для $u \in \mathfrak{B}_{2,t}$ нерівність

$$\|(\Psi u)(t)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 \equiv \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \left\| \sum_{j=0}^4 I_j(t) \right\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \leq 5 \sum_{j=0}^4 \|I_j(t)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2. \quad (35)$$

Оскільки F_t -вимірність $(\Psi u)(t)$ очевидна, робимо висновок, що Ψ задано.

Доведемо, що оператор Ψ має єдину стискаючу фіксовану точку.

Дійсно, слід взяти до уваги чотири вищенаведені нерівності та властивість лінійності r -вимірного інтеграла, в результаті отримаємо для різниці $I_1(s)(u) - I_1(s)(v)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,t}$ оцінку

$$\begin{aligned}
& \|I_1(s)(u) - I_1(s)(v)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 \equiv \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \|I_1(s)(u) - I_1(s)(v)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \equiv \\
& \equiv \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \left\| \int_{\mathbf{R}^r} b(s, x, y) (u(s - \tau) - v(s - \tau)) dy \right\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \leq \\
& \leq \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s, x, y) dy dx \right) \|u - v\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2. \tag{36}
\end{aligned}$$

Аналогічно, одержимо оцінку для різниці $I_2(s)(u) - I_2(s)(v)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,t}$, а саме:

$$\begin{aligned}
& \|I_2(s)(u) - I_2(s)(v)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 \leq \\
& \leq Ct^2 \sup_{0 \leq \tau \leq t} \left(\int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} Z^2(\tau, x, y) dy dx \right) \sup_{0 \leq \tau \leq t} \mathbf{E} \|u(\tau) - v(\tau)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2. \tag{37}
\end{aligned}$$

Попередні міркування слід провести для оцінки різниці $I_3(s)(u) - I_3(s)(v)$, $I_4(s)(u) - I_4(s)(v)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,t}$, тоді одержимо

$$\begin{aligned}
& \|I_3(s)(u) - I_3(s)(v)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 \leq L^2 C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \right) t \|u - v\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2, \\
& \|I_4(s)(u) - I_4(s)(v)\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 \leq L^2 C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \right) t \|u - v\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2. \tag{38}
\end{aligned}$$

Врахувавши оцінки (35)-(38), одержимо

$$\begin{aligned}
& \|\Psi u - \Psi v\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 \equiv \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \left\| \sum_{j=0}^4 (I_j(s)(u) - I_j(s)(v)) \right\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \leq \\
& \leq 5 \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \sum_{j=0}^4 \|I_j(s)(u) - I_j(s)(v)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \leq \\
& \leq 5 \sum_{j=0}^4 \sup_{0 \leq s \leq t} \mathbf{E} \|I_j(s)(u) - I_j(s)(v)\|_{L_2(\mathbf{R}^r)}^2 \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 5 \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s, x, y) dy dx + Ct^2 \sup_{0 \leq \tau \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} Z^2(\tau, x, y) dy dx + \right. \\
&\quad \left. + \sup_{0 \leq s \leq t} \int_{\mathbf{Z}} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} c^2(s, x, y, z) \Pi(dz) dy dx + \right. \\
&\quad \left. + L^2 Ct^2 + L^2 C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \right) t \right) \|u - v\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2 = \gamma(t) \|u - v\|_{\mathfrak{B}_{2,t}}^2, \tag{39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(t) \equiv & 4 \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(s, x, y) dy dx + Ct^2 \sup_{0 \leq \tau \leq t} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} Z^2(\tau, x, y) dy dx + \right. \\
& \left. + \sup_{0 \leq s \leq t} \int_{\mathbf{Z}} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} c^2(s, x, y, z) \Pi(dz) dy dx + L^2 Ct^2 + L^2 C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \right) t \right), \tag{40}
\end{aligned}$$

для $\{u, v\} \subset \mathfrak{B}_{2,t}$.

Згідно з (20), $K_5 < \frac{1}{4}$, тобто перший доданок у $\gamma(t)$ (див. (40)) менший за

1. Для наступних трьох доданків можна зауважити наступне: за рахунок вибору $t_1 \in [0, T]$ їх сума може бути зроблена рівною $\frac{3}{16}$. Отже, $\gamma(t_1) \in (0, 1)$. Це означає, що оператор Ψ , визначений у просторі Банаха $\mathfrak{B}_{2,t_1}$, є стискаючим. А значить, згідно з теоремою Банаха [4] про стискаюче відображення, оператор Ψ має єдину фіксовану точку – м'який розв'язок $u \in \mathfrak{B}_{2,t_1}$ задачі (1), (2) на відрізку $[0, t_1]$. Цю процедуру повторимо скінченну кількість разів на додатних малих інтервалах $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$, ..., $[t_{n-2}, t_{n-1}]$, $[t_{n-1}, T]$, які в сумі дають відрізок $[0, T]$, де розв'язується задача (1), (2). В результаті розв'язок отримується як об'єднання розв'язків на цих малих інтервалах. Отже, основне твердження доведено.

Дана робота є узагальненням праць [9,10,13], вона доводить існування "м'якого розв'язку" НСДРРНТ.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ до §5

1. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последствием.– М.: Наука, 1992.– 333 с.
2. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер.– М.: Наука, 1977.– 352 с.
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение.– К.: Наук. думка, 1980.– 612 с.
4. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными. Сб. научн. тр.– К.: Ин-т математики АН УССР.– 1981.– С.25–59.
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.– М.: Наука, 1976.–541 с.
6. Перун Г.М., Ясинский В.К. О стабилизации решений задачи Дирихле с разрывными траекториями и оператором Бесселя // Кибернетика и вычисл. математика.– 1991.– № 83.– С.19–25.
7. Перун Г.М., Ясинский В.К. Исследование задачи Коши для стохастических уравнений в частных производных // Укр. мат. журн.– 1993.– Т.45, № 9.– С.1773–1781.
8. Свердан М.Л., Ясинская Л.И., Ясинский В.К. Стабилизация решений стохастических линейных уравнений в частных производных при наличии пуассоновских возмущений // Кибернетика и вычислительная техника.– 1988.– №81.– С.7-12.
9. Станжицкий А.Н., Цуканова А.О. Существование и единственность решения задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения реакции-диффузии нейтрального типа // Нелінійні коливання.– 2016.– 3, № 3.– С.408–430.
10. Tsukanova A.O. On existence and uniqueness of mild solution to the Cauchy problem for one neutral stochastic differential equation of reaction-diffusion type in hilbert space // Буковинський математичний журнал.– 2016. – Т.4, № 3–4.– С.179–189.

11. Tessitore G., Zabczyk J. Invariant Measures for Stochastic Heat Equations // Probability and Mathematical Statistics.– 1998.– 18.– P.271–287.
12. Zabczyk J., Da Prato G. Ergodicity for Infinite Dimensional Systems // Dynamic Systems and Applications.– Cambridge University Press.– 1996.– 449 p.
13. Ясинський В.К., Юрченко І.В. Про існування розв'язку задачі Коші для нелінійного дифузійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішніх збурень // Системні дослідження та інформаційні технології.– 2017.– №2.– С.103-114.

§6. ІСНУВАННЯ l -ГО МОМЕНТУ СИЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНОГО ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ІТО- ВОЛЬТЕРРИ

6.1. Постановка задачі

Питанню існування та єдиності розв'язку детермінованих та стохастичних (у випадку наявності вінерівських збурень) інтегро-диференціальних рівнянь Іто-Вольтерри присвячена праця [1]. Там же доведено марківську властивість розв'язку та досліджено питання стійкості розв'язку таких рівнянь. У працях [2—4] розвинуто методику дослідження стохастичних рівнянь Іто-Вольтерри на випадок наявності пуассонівських перемикань. Матеріал даної роботи узагальнює результати щодо існування та єдиності розв'язку, що розглядалися в роботах [1—4, 7—9], на стохастичне інтегро-диференціальне рівняння Іто-Скорохода-Вольтерри спеціального вигляду (випадок l -го моменту, $l > 1$). Розглянемо на (Ω, F, P) з потоком σ -алгебр $\{F_t, t \geq t_0\}$ стохастичне інтегро-диференціальне рівняння Іто-Скорохода-Вольтерри

$$\begin{aligned} dx(t) = & [a_1(t, x^t) + \int_{t_0}^t a_2(t, s, x^s) ds + \int_{t_0}^t a_3(t, s, x^s) dw(s) + \int_{t_0}^t \int_U a_4(t, s, x^s, u) \times \\ & \times \tilde{v}(du, ds)] dt + [b_1(t, x^t) + \int_{t_0}^t b_2(t, s, x^s) ds + \int_{t_0}^t b_3(t, s, x^s) dw(s) + \\ & + \int_{t_0}^t \int_U b_4(t, s, x^s, u) \tilde{v}(du, ds)] dw(t) + \int_U [c_1(t, x^t, u) + \int_{t_0}^t c_2(t, s, x^s, u) ds + \\ & + \int_{t_0}^t c_3(t, s, x^s, u) dw(s) + \int_{t_0}^t \int_U c_4(t, s, x^s, u, u_1) \tilde{v}(du_1, ds)] \tilde{v}(du, dt); \end{aligned} \quad (1)$$

$$x^{t_0} = \varphi^{t_0}; \quad (2)$$

де $\{x(t) \equiv x(t, \omega)\} \subset R^n$, $t \geq t_0$, $\omega \in \Omega$; $\{a_1(t, \varphi)\}, \{b_1(t, \varphi)\}$ неперервні за $t \geq t_0$, $\varphi \in D_{R_+}$ відображення в R^n ; D_{R_+} — простір Скорохода [5, 6] локально обмежених функцій, які є неперервними справа та мають лівосторонні границі (НПЛГ), вигляду $\varphi: R_+ \rightarrow R^n$ з нормою

$$\|\varphi\|_{D^p} \equiv (|\varphi(0)|^p + \|\varphi\|_{\rho}^p)^{1/p} \equiv (|\varphi(0)|^p + \int_0^\infty |\varphi(s)|^p \rho(s) ds)^{1/p}, \quad (3)$$

де D^p — простір D_{R_+} з нормою (3), $1 \leq p < \infty$,

$$x^t(s) \equiv \begin{cases} x(t-s), & t_0 \leq s \leq t, \\ \varphi(s-t), & s > t. \end{cases} \quad (4)$$

$\rho: R_+ \rightarrow R_+$ — обмежена функція згладжуючої дії (див. п. 5.1.1 [2]);

$\{a_2(t, s, x^s)\}, \{b_2(t, s, x^s)\} - R^n$ -вимірні;

$\{a_3(t, s, x^s)\}, \{b_3(t, s, x^s)\} - R^n \otimes R^m \otimes R^m$ -вимірні;

$\{w(s)\} - R^m$ -вимірний стандартний вінерівський процес на ймовірнісному просторі (Ω, F, P) (ці функціонали визначені та вимірні за Борелем на $G \times D^p$, де $G \equiv \{(t, s) \in [t_0, T] \times [t_0, T] : s \leq t\}$);

$\{a_4(t, s, x^s, u)\}$ і $\{b_4(t, s, x^s, u)\}$, крім цього, вимірні за $u \in U \subset R^n$;

$\{c_1(t, x^s, u)\} - R^n \otimes U$ -вимірний,

$\{c_2(t, s, x^s, u)\}$ і $\{c_3(t, s, x^s, u)\} - R^n \otimes R^m \otimes U$ -вимірні,

$\{c_4(t, s, x^s, u, u_1)\} - R^n \otimes R^m \otimes U \otimes U$ -вимірний (ці функціонали визначені та вимірні за Борелем на $G \times D^p \times U$);

$\{\tilde{v}(du, dt)\} -$ центрована пуассонівська міра з параметром $\Pi(du)dt$, яка не залежить від $\{w(t)\}$.

Нехай $\{F_t, t \geq t_0\}$ — потік σ -алгебр множин з Ω такий, що $\{w(t)\}$ і $\{\tilde{v}(t, A)\}$, $A \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ — σ -алгебра множин U), F_t — вимірні $\forall t \geq t_0$. Позначимо через J^{t_0} , $t_0 \geq 0$ простір вимірних випадкових процесів $\{x(t), t \geq t_0\}$ таких, що $x^{t_0} \in D^p$ для кожного $\omega \in \Omega$ та $\{x(t)\}$ не залежить від приростів вінерівського процесу та пуассонівської міри $\{w(s) - w(t_0), s \geq t_0\}$ і $\{\tilde{v}(s, A) - \tilde{v}(t_0, A), s \geq t_0, A \in \mathcal{A}\}$.

Означення. Стохастичний процес $\{x(t), t \in (-\infty, T]\}$ є сильним розв'язком рівняння (1), (2) для $t \in [t_0, T]$, якщо: 1) $\{x(t)\}$ неупереджуючий [6] для $t \leq T$; 2) $x^t \in D^p$ при $t \in [t_0, T]$ майже скрізь; 3) $x^{t_0} = \varphi^{t_0}$ майже скрізь; 4) інтеграли від

модулів $a_i, b_i, c_i, i = \overline{1,4}$ скінченні. 5) для $t \geq t_0$ справджується відповідне інтегральне рівняння.

Далі позначимо для $x: R_+ \times \Omega \rightarrow R^n$ через $|x(\cdot)|_{t_0}^*(t) \equiv \sup_{t_0 \leq s \leq t} |x(s)|$. Надалі

будемо суттєво використовувати нерівності Буркгольдера [1] для довільного $l > 1$:

$$E \left| \int_{t_0}^t \psi_1(s) dw(s) \right|_{t_0}^{*l}(t) \leq c_{11} E \left(\int_{t_0}^t |\psi_1(s)|^2 ds \right)^{l/2}, \quad (5)$$

$$E \left| \int_{t_0}^t \int_U \psi_2(s, u) \tilde{v}(du, ds) \right|_{t_0}^{*l}(t) \leq c_{21} E \left(\int_{t_0}^t \int_U |\psi_2(s, u)|^2 \Pi(du) ds \right)^{l/2}, \quad (6)$$

для J^t -вимірного процесу $\{\psi_1(t, \omega)\}$ такого, що $\int_{t_0}^T \psi_1^2(t) dt < \infty$ майже скрізь та для

J^t -вимірного процесу $\{\psi_2(t, u, \omega), u \in U\}$ такого, що $\int_{0U}^T \psi_2^2(t, u) \Pi(du) dt < \infty$ майже

скрізь.

Позначимо

$$\begin{aligned} R(t, x) \equiv & \int_{t_0}^t a_1(s, x^s) ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s a_2(s, v, x^v) dv ds + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s a_3(s, v, x^v) dw(v) ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_U a_4(s, v, x^v, u) \tilde{v}(du, dv) ds + \\ & + \int_{t_0}^t b_1(s, x^s) dw(s) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s b_2(s, v, x^v) dv dw(s) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s b_3(s, v, x^v) dw(v) dw(s) + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_U b_4(s, v, x^v, u) \tilde{v}(du, dv) dw(s) + \int_{t_0}^t \int_U c_1(s, x^s, u) \tilde{v}(du, ds) + \\ & + \int_{t_0}^t \int_U \int_{t_0}^s c_2(s, v, x^v, u) dv \tilde{v}(du, ds) + \int_{t_0}^t \int_U \int_{t_0}^s c_3(s, v, x^v, u) dw(s) \tilde{v}(du, ds) + \\ & + \int_{t_0}^t \int_U \int_{t_0}^s \int_U c_4(s, v, x^v, u, u_1) \tilde{v}(du_1, dv) \tilde{v}(du, ds) \equiv \end{aligned}$$

$$\equiv \sum_{i=1}^4 R_i(t, x) + \sum_{i=1}^4 Q_i(t, x) + \sum_{i=1}^4 S_i(t, x), \quad (7)$$

де перша сума містить перші чотири доданки, друга — наступні чотири доданки з інтегралами за вінерівським процесом, третя — чотири доданки з інтегралами за пуассонівською мірою. Надалі будемо опускати індекс D^p у позначенні $\|\cdot\|_{D^p}$.

Лема. Нехай для функціоналів $\{a_i\}, \{b_i\}, \{c_i\}, i = \overline{1, 4}$ виконується відповідна умова Ліпшиця з константою $L > 0$, тоді для розв'язку $\{x(t)\} \subset R^n$ стохастичного диференціального рівняння (1), (2) справджується оцінка

$$E | R(\cdot, x) - R(\cdot, y) |_{t_0}^{*l} (t) \leq K_1 E \|\delta^{t_0}\|^l + \bar{M}_{t_0}^t E |\delta(\cdot)|_{t_0}^{*l} (t),$$

де $R(\cdot, \cdot)$ визначений за формулою (7), $\delta(t) \equiv x(t) - y(t)$, $K_1 = O((t - t_0)^{1/2})$, $\bar{M}_{t_0}^t$ залежить тільки від $t - t_0$ та $\bar{M}_{t_0}^t = o(1)$ при $t - t_0 \rightarrow 0$.

Доведення. Нехай $T > t_0$. Для $t \in [t_0, T]$ матимемо

$$E | R(\cdot, x) - R(\cdot, y) |_{t_0}^{*l} (t) \leq c_1 \sum_{i=1}^4 [E | R_i(t, x) - R_i(t, y) |_{t_0}^{*l} (t) + \\ + E | Q_i(t, x) - Q_i(t, y) |_{t_0}^{*l} (t) + E | S_i(t, x) - S_i(t, y) |_{t_0}^{*l} (t)],$$

де c_1 — деяка додатна стала.

З роботи [1] відомо, що:

$$E | R_1(\cdot, x) - R_1(\cdot, y) |_{t_0}^{*l} (t) \leq (t - t_0)^{l-1} L^l E \int_{t_0}^t \|\delta^s\|^l ds; E | R_2(\cdot, x) - R_2(\cdot, y) |_{t_0}^{*l} (t) \leq \\ \leq L^l (t - t_0)^{2l-1} E \int_{t_0}^t \|\delta^v\|^l dv; E | R_3(\cdot, x) - R_3(\cdot, y) |_{t_0}^{*l} (t) \leq L^l (t - t_0)^{2l-2} \times \\ \times E \left(\int_{t_0}^t \|\delta^v\|^2 dv \right)^{\frac{l}{2}}; E | Q_1(\cdot, x) - Q_1(\cdot, y) |_{t_0}^{*l} (t) \leq L^l E \left(\int_{t_0}^t \|\delta^v\|^2 dv \right)^{\frac{l}{2}}; \\ E | Q_2(\cdot, x) - Q_2(\cdot, y) |_{t_0}^{*l} (t) \leq L^l (t - t_0)^{2l-2} E \left(\int_{t_0}^t \|\delta^v\|^2 dv \right)^{\frac{l}{2}};$$

$$E | Q_3(\cdot, x) - Q_3(\cdot, y) |_{t_0}^{*l} (t) \leq L^l (t - t_0)^{l-1} E \left(\int_{t_0}^t \| \delta^v \|^2 dv \right)^{\frac{l}{2}}.$$

Використовуючи нерівності Гельдера і Буркгольдера (5), (6), а також лему 1.2.2 з роботи [2], можна стверджувати, що

$$E | R_4(\cdot, x) - R_4(\cdot, y) |_{t_0}^{*l} (t) \leq L^l (t - t_0)^{2l-2} E \left(\int_{t_0}^t \| \delta^v \|^2 dv \right)^{\frac{l}{2}}.$$

Аналогічно можна одержати оцінки

$$E | Q_4(\cdot, x) - Q_4(\cdot, y) |_{t_0}^{*l} (t) \leq L^l (t - t_0)^{l-1} E \left(\int_{t_0}^t \| \delta^v \|^2 dv \right)^{\frac{l}{2}}.$$

Випишемо тепер нерівності для доданків $S_i(t, x)$, $i = \overline{1, 4}$ із співвідношення (7)

$$E | S_1(\cdot, x) - S_1(\cdot, y) |_{t_0}^{*l} (t) \leq L^l E \left(\int_{t_0}^t \| \delta^v \|^2 dv \right)^{\frac{l}{2}};$$

$$E | S_2(\cdot, x) - S_2(\cdot, y) |_{t_0}^{*l} (t) \leq L^l (t - t_0)^{2l-2} E \left(\int_{t_0}^t \| \delta^v \|^2 dv \right)^{\frac{l}{2}};$$

$$E | S_3(\cdot, x) - S_3(\cdot, y) |_{t_0}^{*l} (t) \leq L^l (t - t_0)^{l-1} E \left(\int_{t_0}^t \| \delta^v \|^2 dv \right)^{\frac{l}{2}}.$$

$$E | S_4(\cdot, x) - S_4(\cdot, y) |_{t_0}^{*l} (t) \leq L^l (t - t_0)^{l-1} E \left(\int_{t_0}^t \| \delta^v \|^2 dv \right)^{\frac{l}{2}}.$$

Використовуючи наслідок 2В) з праці [1] та наслідок 5.2 з праці [2], доведену в праці [1, формула (2.7)] нерівність

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \| \delta^v \|^l du \leq \\ & \leq \tilde{k}_{l/p} [K_2(t - t_0) \| \delta^{t_0} \|_{\rho}^l + \int_{t_0}^t | \delta(u) |^l du + \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^u | \delta(v) |^p \rho(u - v) dv \right)^{\frac{l}{p}} du] \end{aligned}$$

і наслідок з неї:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{t_0}^t \| \delta^v \|^2 dv \right)^{l/2} \leq \tilde{k}_{l/2} \tilde{k}_{\tau}^{l/2} [\bar{K}^{\lambda} (t - t_0)^{l/2} \| \delta^{t_0} \| + \\ & + \left(\int_{t_0}^t | \delta(v) |^2 dv \right)^{l/2} + \left(\int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^v | \delta(s) |^2 \rho(v - s) ds \right)^{\tau} du \right)^{l/2}], \end{aligned}$$

де $\tilde{k}_{l/p}$, K_2 деякі додатні сталі, $\|\delta^u\|_p^p \equiv \int_0^\infty |\delta(u-v)|^p \rho(v) dv$, одержимо наступну оцінку

$$E \|R(\cdot, x) - R(\cdot, y)\|_{t_0}^{*l}(t) \leq K_1 E \|\delta^{t_0}\|^l + \bar{M}_{t_0}^t E \|\delta(\cdot)\|_{t_0}^{*l}(t), \quad (8)$$

де $\bar{M}_{t_0}^t = o(1)$ при $t - t_0 \rightarrow 0$. Лему доведено.

6.2. Основний результат

Теорема. Нехай

1) для коефіцієнтів стохастичного інтегро-диференціального рівняння (1), (2) виконується умова Ліпшица зі сталою $L > 0$ для довільних $(t, s) \in G$ та $x, y \in D^p$, $u \in U$;

2) для коефіцієнтів стохастичного інтегро-диференціального рівняння (1), (2) виконується умова рівномірної обмеженості по $t \in R$ з правою частиною вигляду $L(1 + \|x\|_{D^p})$;

3) існує початковий процес $x_- \in J^{t_0}$ такий, що

$$E \|x_-^{t_0}\|_{D^p}^l < \infty. \quad (9)$$

Тоді існує єдиний l -ий момент ($l > 1$) сильного розв'язку рівняння (1), (2) $\{x(t)\} \subset D^p$ та $E\{\|x(\cdot)\|_{t_0}^{*l}(T)\} < \infty$.

Доведення. Існування. Побудуємо x_n :

$$x_n(t) = x_-(t) \quad \forall t \leq t_0 \quad \forall n \geq 1; \quad x_0(t) = x_-(t_0) \quad \forall t \geq t_0.$$

Для $n \geq 1$, $\forall t > t_0$:

$$\begin{aligned} x_n(t) = & x_-(t_0) + \int_{t_0}^t a_1(s, x_{n-1}^s) ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s a_2(s, v, x_{n-1}^v) dv ds + \\ & + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s a_3(s, v, x_{n-1}^v) dw(v) ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_U a_4(s, v, x_{n-1}^v, u) \tilde{v}(du, dv) ds + \\ & + \int_{t_0}^t b_1(s, x_{n-1}^s) dw(s) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s b_2(s, v, x_{n-1}^v) dw(v) ds + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s b_3(s, v, x_{n-1}^v) dw(v) dw(s) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_U b_4(s, v, x_{n-1}^v, u) \tilde{v}(du, dv) dw(s) + \\
& + \int_{t_0}^t \int_U c_1(s, x_{n-1}^v, u) \tilde{v}(du, ds) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_U c_2(s, v, x_{n-1}^v, u) dv \tilde{v}(du, ds) + \\
& + \int_{t_0}^t \int_U \int_{t_0}^s c_3(s, v, x_{n-1}^v, u) dw(v) \tilde{v}(du, ds) + \\
& + \int_{t_0}^t \int_U \int_{t_0}^s \int_U c_4(s, v, x_{n-1}^v, u, u_1) \tilde{v}(dv, du_1) \tilde{v}(du, ds). \quad (10)
\end{aligned}$$

Тут x_{n-1}^s задається, як у (4).

З (10), умов 1)—2) теореми і леми 5.2.1 з роботи [2] випливає, що $\{x_n(t), t \geq 0\}$ — вимірний відносно σ -алгебри F_t , $x_n^t \in D^p \quad \forall t \geq t_0$.

Методом математичної індукції покажемо, що $E \|x_n\|_{t_0}^{*l}(t) < \infty \quad \forall t_0 \leq t \leq T$

. При $n = 0$ маємо $x_0^t \in D^p$ і з вище побудованого $\forall t \in [t_0, T]$:

$$\|x_0^t\| = \|T^{t-t_0} x_0^{t_0}\| \leq C \cdot \|x_0^{t_0}\| = C \|x_-^{t_0}\|,$$

де C — константа, яка залежить від K . Звідси $E \|x_0\|_{t_0}^{*l}(T) \leq C \cdot E \|x_-^{t_0}\|_{D^p}^l < \infty$.

Нехай виконується $E \|x_{n-1}\|_{t_0}^{*l}(t) < \infty, \quad t_0 \leq t \leq T$. Використовуючи нерівність Гельдера, одержимо $\forall t \in [t_0, T]$:

$$E \|x_n\|_{t_0}^{*l}(t) \leq k_l E [|x_-^{t_0}|^l + L^l (k_l (T - t_0)^l + c_l (T - t_0)^{l/2}) (1 + \|x_{n-1}\|_{t_0}^{*l}(T))] < \infty,$$

де k_l, c_l — деякі сталі.

Далі, одержимо:

$$E |x_n(\cdot) - x_{n-1}(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t) = E |R(\cdot, x_{n-1}) - R(\cdot, x_{n-2})|_{t_0}^{*l}(t) \leq \bar{M}_{t_0}^t E |x_{n-1}(\cdot) - x_{n-2}(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t).$$

Можемо вибрати $t_1 > 0$ так, щоб $M_{t_0}^t < \frac{1}{2}$ для $t \in [t_0, t_1 + t_0]$. Якщо позначимо

$d \equiv E |x_1(\cdot) - x_0(\cdot)|_{t_0}^{*l}(T) < \infty$, то одержимо, що

$E |x_n(\cdot) - x_{n-1}(\cdot)|_{t_0}^{*l} \leq \frac{d}{2^n}, \quad t \in [t_0, t_1 + t_0]$. Тоді, згідно з нерівністю Чебишова,

одержимо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|x_n(\cdot) - x_{n-1}(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t) > \frac{1}{n^2}\} \leq \\ \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{2l} E |x_n(\cdot) - x_{n-1}(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t) \leq d \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2l}}{2^n} < \infty,$$

звідки, за лемою Бореля-Кантеллі [6], випливає, що ряд

$$x_n(t) \equiv x_-(t_0) + \sum_{k=1}^{n-1} [x_k(t) - x_{k-1}(t)] \text{ майже скрізь монотонно збіжний на } [t_0, t_1]. \text{ Тобто, } \\ x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) \text{ існує, неупереджуючий та } F_t\text{-вимірний на } [t_0, t_1].$$

Залишилося показати [7-9], що $\{x(t), t \leq t_1\}$ є розв'язком рівняння (1), (2).

Використовуючи (8), проведемо наступні оцінки:

$$E |x(\cdot) - x_-(t_0) - \int_{t_0}^{\cdot} a_1(s, x^s) ds - \dots - \int_{t_0}^{\cdot} \int_{t_0}^s \int_{t_0}^u c_4(s, v, x^v, u, u_1) \times \\ \times \tilde{v}(dv, du_1) \tilde{v}(du, ds)|_{t_0}^{*l}(t) \leq k_l E |x(\cdot) - x_n(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t) + \\ + k_l \bar{M}_{t_0}^t E |x(\cdot) - x_{n-1}(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t).$$

Нагадаємо, що для $t \leq t_1$ маємо $\bar{M}_{t_0}^t \leq \frac{1}{2}$.

Якщо покажемо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} E |x(\cdot) - x_n(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t) = 0$, то твердження буде доведено.

Нехай $b_i \equiv i^{-2/l'}$, $l' = l/(l-1)$. Тоді, згідно з нерівністю Гельдера [7-9]

$$E |x_n(\cdot) - x_{n+k}(\cdot)|^{*l}(t) \leq (\sum_{i=n}^{\infty} \frac{db_i^{-l}}{2^i}) (\sum_{i=n}^{\infty} b_i^{l'})^{l-1}$$

та $|x(\cdot) - x_n(\cdot)|^{*l}(t) \leq \liminf_k |x_n(\cdot) - x_{n+k}(\cdot)|^{*l}(t)$, за лемою Фату [6] матимемо

$$E |x_n(\cdot) - x(\cdot)|^{*l}(t) \leq d (\sum_{i=n}^{\infty} \frac{b_i^{-l}}{2^i}) (\sum_{i=n}^{\infty} b_i^{l'})^{l-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Отже, доведено існування l -го моменту F_t -вимірного розв'язку $\{x(t)\}$ для $t_0 \leq t \leq t_0 + t_1$.

Цей розв'язок можна розширити для довільного $t \in [t_0, T]$, використовуючи методику, що описана в [1]. Єдиність розв'язку доводиться за допомогою стандартного відомого методу [1, 5–9].

Доведено існування l -го моменту сильного розв'язку для стохастичного інтегро-диференціального рівняння Іто-Вольтерри при наявності вінерівських збурень та пуассонівських перемикачів. Отримані результати можна застосувати при подальших дослідженнях системи (1), (2) на стійкість.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ до §6

1. Mizel V., Trutzer V. Stochastic Hereditary Equations: Existence and Asymptotic Stability // Journal of Integral Equations.— 1984.— №7.— P.1—72. [Elsevier Science Publishing Co., Inc.].
2. Свердан М.Л., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Стійкість у стохастичному моделюванні складних динамічних систем.— Снятин: Над Прутом, 1996.— 448 с.
3. Ясинский И.В., Ясинский В.К. Исследование стохастической задачи "свисающий паук" с бесконечной предисторией и пуассоновскими переключениями. Ч.1. Свойства решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений с бесконечной предисторией и пуассоновскими переключениями // Кибернетика и системный анализ.— 2000.— №4.— С.101–130.
4. Ясинский В.К., Ясинский Е.В. Исследование стохастической задачи "свисающий паук" с бесконечной предисторией и пуассоновскими переключениями. Ч.2. Устойчивость решений СДФУ с бесконечной предисторией и пуассоновскими переключениями // Кибернетика и системный анализ.— 2000.— № 5.— С.113–139.
5. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение.— К.: Наук. думка, 1982.— 612 с.
6. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф., Шуренков

В.М. Справочник по теории вероятностей и математической статистике.— К.: Наук. думка, 1978.— 582 с.

7. Юрченко І.В., Ясинський В.К. Про існування l -го моменту сильного розв'язку стохастичних інтегро-диференціальних рівнянь Іто-Вольтерра // Доповіді НАН України.— 2004.— № 7.— С.33–39.
8. Ясинський В.К., Юрченко І.В. Стійкість та оптимальне керування в лінійних стохастичних динамічних системах з випадковими операторами.— Чернівці: Золоті литаври, 2009.— 237 с.
9. Ясинський В.К., Юрченко І.В. Стійкість та оптимальне керування в стохастичних динамічних системах з випадковими операторами. Моногр. Вид. 2-е, доповнене.— Чернівці: Технодрук, 2019.— 258 с.

§7. КРИТЕРІЇ СТІЙКОСТІ ТА НЕСТІЙКОСТІ В СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ ДИФУЗІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ СИСТЕМ ГІХМАНА-ІТО ПІД ДІЄЮ ЗОВНІШНИХ ЗБУРЕНЬ ТИПУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

7.1. Постановка задачі

Після введення поняття сильного розв'язку стохастичного диференціального рівняння, дослідження його властивостей та подальше поширення цих понять на класи стохастичних диференціально-функціональних рівнянь (див. праці Кійосі Іто, Й.І. Гіхмана, А.В. Скорохода, В.С. Корольюка, Є.Ф. Царкова та ін.) стало можливим дослідження асимптотичної стійкості розв'язку для стохастичних диференціально-функціональних рівнянь (див., наприклад, роботи [1–5]).

У даній статті досліджено асимптотичну стійкість у середньому квадратичному (в середньому) тривіального розв'язку дифузійних стохастичних диференціально-функціональних рівнянь (СДФР) Гіхмана-Іто в термінах власних значень матриці $\mathbf{B}$, яка побудована з коефіцієнтів цих рівнянь.

Якщо максимальне власне значення матриці $\mathbf{B}$ $\max \lambda_{\mathbf{B}} < 1$, то система стійка в середньому квадратичному (l.i.m.) (в середньому). Якщо $\lambda_{\mathbf{B}} > 1$, то система асимптотично нестійка в l.i.m. Досліджено також випадок, коли $\lambda_{\mathbf{B}} = 1$, де $\max \lambda_{\mathbf{B}}$ – корінь Перрона [6] додатно визначеної матриці $\mathbf{B}$.

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, \mathbf{P})$ задано ДСДФР вигляду

$$dx(t, \omega) = \varphi(\omega) a(x_t) dt + \psi(\omega) b(x_t) dw(t, \omega) \quad (1)$$

за початковими умовами

$$x_t \Big|_{t=0} \equiv \left\{ x(t+\theta), \theta \in [-r, 0] \right\} \Big|_{t=0} = \alpha \in \mathbf{R}^n, \quad (2)$$

де $x(t, \omega) \in \mathbf{R}^n$; $x_t \in \mathbf{D}_n([-r, 0])$ – простір Скорохода [7] неперервних справа функцій, що мають лівосторонні границі; $\varphi(\omega), \psi(\omega): \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ – задані попарно

незалежні від n -вимірною вінерового процесу [8] $w(t, \omega): [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ випадкові величини, що мають обмежені другі моменти

$$\mathbf{E}\{\varphi^2(\omega)\} = K_1 < \infty; \quad \mathbf{E}\{\psi^2(\omega)\} = K_2 < \infty; \quad (3)$$

$$a(x_t): \mathbf{D}_n([-r, 0]) \rightarrow \mathbf{R}^n; \quad b(x_t): \mathbf{D}_n([-r, 0]) \rightarrow \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n.$$

Означення 1. Під сильним розв'язком задачі (1)–(3) будемо розуміти сепарабельний випадковий процес $x(t, \omega): [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$, який визначений для довільного $t \in [-r, 0]$ співвідношенням (2), вимірний відносно σ -алгебри $F_t \times B_t$ (B_t – σ -алгебра борелевих множин відрізка $[-r, t]$) та з імовірністю 1 задовольняє інтегральне рівняння [7, 9, 10]

$$x(t, \omega) = \alpha(0) + \varphi(\omega) \int_0^t a(x_\tau) d\tau + \psi(\omega) \int_0^t b(x_\tau) dw(\tau, \omega). \quad (4)$$

Будемо вважати, що коефіцієнти та функції $\varphi(\omega), \psi(\omega)$ такі, що існують сильні розв'язки задачі (1)–(3) [3, 11, 12].

7.2. Перехід до інтегрального розв'язку задачі (1)–(2) за допомогою фундаментального розв'язку скороченої задачі

Позначимо через $\mathcal{M}_T$ простір n -вимірних випадкових процесів $f(t, \omega)$, який є вимірним для довільного $t \in [0, T]$ відносно σ -алгебри $F_t, t \geq 0, F_t \subset F$ і такий, що

$$\int_0^T \mathbf{E}\{f^2(t, \omega)\} dt < \infty. \quad (5)$$

Припущення 1. Нехай надалі задано n -вимірний випадковий процес

$$z(t, \omega) = \varphi(\omega) \int_0^t H(t, \tau) dw(\tau, \omega) f(\tau, \omega) d\tau, \quad (6)$$

де $\varphi(\omega)$ – незалежна від $w(t, \omega)$, $f(\tau, \omega)$, а елементи дійсних матриць $H(t, \tau)$,

$\frac{d}{dt} H(t, \tau)$ – визначені та неперервні за сукупністю аргументів $t \geq \tau \geq 0$.

Припущення 2. Власні значення $\lambda(\omega) \in \mathbf{R}^1$ твірного оператора напівгрупи розв'язків диференціального рівняння при кожному $\omega \in \Omega$ [10]

$$dy(t) = \varphi(\omega) a(y_t(\theta)) dt \quad (7)$$

лежать у лівій півплощині $\operatorname{Re} \lambda(\omega) < 0$.

Лема 1 [1, 11–13]. Нехай:

- 1) виконуються припущення 1, 2;
- 2) випадковий процес $f(t, \omega): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ неперервний з імовірністю одиниця за змінною $t \in [0, T]$ і для нього виконується нерівність (5);
- 3) $\varphi(\omega), \varphi(\omega)$ попарно незалежні від вінерового процесу $w(t, \omega): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ та виконуються умови (3).

Тоді випадковий процес $z(t, \omega): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$, який задано рівністю (6), матиме стохастичний диференціал

$$\begin{aligned} dz(t, \omega) = & \psi(\omega) \int_0^t H(t, \tau) dw(\tau, \omega) f(\tau, \omega) d\tau + \\ & + \psi(\omega) H(t, t) dw(t, \omega) f(t, \omega). \end{aligned} \quad (8)$$

Доведення. За означенням стохастичного диференціала [13] вираз для $dz(t, \omega)$ означає, що для довільних $t', t'' \in [0, T] \subset [0, \infty)$ виконується інтегральне рівняння

$$\begin{aligned} z(t'', \omega) - z(t', \omega) = & \varphi(\omega) \int_{t'}^{t''} \frac{\partial H(t, \tau)}{\partial \tau} f(\tau, \omega) d\tau + \\ & + \psi(\omega) \int_{t'}^{t''} H(t, t) f(t, \omega) dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Для доведення леми 1 слід встановити, що (6) задовольняє (3). Розіб'ємо відрізок

$[t', t''] \subset [0, T]$ на інтервали довжиною $\Delta = \frac{t'' - t'}{m}$. Тоді різниця (9) набуде вигляду

$$z(t'', \omega) - z(t', \omega) = \sum_{i=0}^{m-1} [z(t_{i+1}, \omega) - z(t_i, \omega)] =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{m-1} \varphi(\omega) \int_{t_i}^{t_{i+1}} H(t_{i+1}, \tau) f(\tau, \omega) d\omega(\tau, \omega) + \\
&+ \sum_{i=0}^{m-1} \psi(\omega) \int_{t_i}^{t_{i+1}} [H(t_{i+1}, \tau) - H(t_i, \tau)] f(\tau, \omega) d\omega(\tau, \omega) = \\
&= \int_{t'}^{t''} \varphi(\omega) H(t, t) f(t, \omega) d\omega(t, \omega) + \\
&+ \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t'}^{t''} \psi(\omega) [H(t_{i+1}, \tau) - H(t_i, \tau)] d\omega(\tau, \omega) + \\
&+ \sum_{i=0}^{m-1} \psi(\omega) \int_{t_i}^{t_{i+1}} [H(t_{i+1}, \tau) - H(t_i, \tau)] f(\tau, \omega) d\omega(\tau, \omega) + \\
&+ \sum_{i=0}^{m-1} \int_0^{t_{i+1}} \psi(\omega) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\partial H(t, \tau)}{\partial \tau} f(\tau, \omega) d\omega(\tau, \omega) = \\
&= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \psi(\omega) H(t, t) d\omega(t, \omega) + \int_{t'}^{t''} \int_0^t \frac{\partial H(t, \tau)}{\partial \tau} \psi(\omega) f(\tau, \omega) d\omega(\tau, \omega) d\tau + \\
&+ \sum_{i=0}^{m-1} \psi(\omega) \int_{t_i}^{t_{i+1}} [H(t_{i+1}, \tau) - H(t_i, \tau)] d\omega(\tau, \omega) f(\tau, \omega) - \\
&- \sum_{i=0}^{m-1} \psi(\omega) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^{t_{i+1}} H(t, \tau) d\omega(\tau, \omega) f(\tau, \omega) d\tau. \tag{10}
\end{aligned}$$

У (10) для подальших оцінок позначимо

$$\begin{aligned}
A_m &\equiv \sum_{i=0}^{m-1} \psi(\omega) \int_{t_i}^{t_{i+1}} [H(t_{i+1}, \tau) - H(t_i, \tau)] d\omega(\tau, \omega) f(\tau, \omega); \\
B_m &\equiv \sum_{i=0}^{m-1} \psi(\omega) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{\tau}^{t_{i+1}} \frac{\partial H(t, \tau)}{\partial \tau} d\omega(\tau, \omega) f(\tau, \omega) d\tau.
\end{aligned}$$

Обчислюючи математичне сподівання $E\{|A_m|^2\}$, з урахуванням властивості математичного сподівання від стохастичного інтегралу Гіхмана-Іто [8] та неперервність $\frac{\partial H(t, \tau)}{\partial \tau}$ на замкненому інтервалі, матимемо

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\{|A_m|^2\right\} &\leq m \sum_{i=0}^{m-1} K_2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} |H(t_{i+1}, \tau) - H(\tau, \tau)|^2 \mathbf{E}\left\{|f(\tau, \omega)|^2\right\} d\tau \leq \\
&\leq m \sum_{i=0}^{m-1} \Delta^2 K_2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left| \frac{\partial H(t_i^*, \tau)}{\partial \tau} \right|^2 \mathbf{E}\left\{|f(\tau, \omega)|^2\right\} d\tau \leq \\
&\leq K_2 K_3 \Delta \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{E}\left\{|f(\tau, \omega)|^2\right\} d\tau,
\end{aligned}$$

$$\text{де } t_i \leq t_i^* \leq t_{i+1}, \quad K_3 \equiv (t'' - t') K_2 \sup_{t, \tau \in [t', t'']} \left| \frac{\partial H(t, \tau)}{\partial t} \right|.$$

Таким чином, за умови інтегровності по $t \in [0, T]$ в середньому квадратичному випадковому процесу $f(t, \omega)$ (5) та нерівності Чебишова [8], одержимо

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\omega: |A_m| > \varepsilon\right\} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}\left\{|A_m(\omega)|^2\right\}}{\varepsilon^2} = 0. \quad (11)$$

Далі, аналогічно до $|A_m(\omega)|^2$, справджуються нерівності для $|B_m(\omega)|^2$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left\{|B_m|^2\right\} &\leq m \sum_{i=0}^{m-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\int_{\tau}^{t_{i+1}} \frac{\partial H(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right)^2 \mathbf{E}\left\{|f(\tau, \omega)|^2\right\} d\tau \leq \\
&\leq m \sum_{i=0}^{m-1} K_2 \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_0^{t_{i+1}} \left| \frac{\partial H(t, \tau)}{\partial \tau} \right|^2 \mathbf{E}\left\{|f(\tau, \omega)|^2\right\} d\tau dt \leq \\
&\leq K_2 K_3 \Delta \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{E}\left\{|f(\tau, \omega)|^2\right\} d\tau.
\end{aligned}$$

Тоді за нерівністю Чебишова має місце співвідношення

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\omega: |B_m(\omega)|^2 > \varepsilon\right\} \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{E}\left\{|B_m(\omega)|^2\right\} = 0.$$

В силу довільності вибору m твердження леми 1 доведено.

Як і раніше, під фундаментальним розв'язком $H(t, \omega)$ диференціального рівняння (7), побудованого за початковою умовою (2), назвемо $H(t, \omega)$ для $t > 0$ вигляду [10]

$$H(t, \omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Pi} e^{\lambda t} V^{-1}(\lambda, \omega) d\lambda, \quad (12)$$

де

$$V(\lambda, \omega) \equiv \lambda - \varphi(\omega) a(e^{\lambda \theta}) \quad (13)$$

є квазіполіномом СДФР (7), а Π – контур, що охоплює всі корені характеристичного рівняння $\det V(\lambda, \omega) = 0, \omega \in \Omega$. При цьому $H(0, \omega) = I$ – одинична матриця, а для $t < 0$ маємо $H(t, \omega) = 0$.

Теорема 1 [13]. Нехай виконуються умови леми 1 та припущення 1, 2. Тоді розв'язок задачі Коші для СДФР (1), (2) $x(t, \omega) \in \mathbf{R}^n$ за допомогою фундаментального розв'язку $H(t)$ можна подати у вигляді

$$x(t, \omega) = y(t, \omega) + \psi(\omega) \int_0^t H(t - \tau, \omega) dw(\tau, \omega) b(x_t(\theta)), \quad (14)$$

де $y(t)$ – розв'язок диференціально-функціонального рівняння (7).

Доведення. Випадковий процес $x(t, \omega): [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$, згідно з лемою 1, має стохастичний диференціал

$$dx(t, \omega) = dy(t, \omega) + \psi(\omega) b(x_t(\theta)) dw(t, \omega) + \int_0^t \frac{\partial H(t - \tau, \omega)}{\partial t} b(x_t(\theta)) dw(t, \omega) d\tau. \quad (15)$$

За означенням фундаментального розв'язку з імовірністю одиниця маємо, що

$$\frac{\partial H(t - \tau, \omega)}{\partial t} = \varphi(\omega) a(H_{t-\tau}(\theta), \omega)$$

для $T \geq t \geq 0$.

З урахуванням лінійності оператора $a(\cdot)$, одержимо з імовірністю одиниця співвідношення

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \psi(\omega) \frac{\partial H(t-\tau, \omega)}{\partial t} b(x_\tau(\theta)) dw(\tau, \omega) = \\
& = \varphi(\omega) a \left(\int_0^t H(t-\tau, \omega) b(x_\tau(\theta)) dw(\tau, \omega) \right) = \\
& = \varphi(\omega) a(x_t(\theta) - y_t(\theta, \omega)),
\end{aligned}$$

що й доводить теорему 1.

7.3. Необхідні та достатні умови належності розв'язків системи лінійних СДФР до простору сумовних за часом в середньому квадратичному випадкових процесів

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, \mathbf{P})$ задано автономне лінійне СДФР (1), (2), коефіцієнти якого задовольняють умови існування та єдиності розв'язку з імовірністю одиниця [12].

Припущення 3. Власні значення квазіполінома $V(\lambda)$ (13) розташовані в лівій півплощині $\operatorname{Re} \lambda < 0$ комплексної площини $xO(iy)$.

Уведемо до розгляду матрицю $\mathbf{B}$ наступного вигляду

$$\mathbf{B} \equiv \int_0^\infty \mathbf{E} \left\{ \left[b(H_t(\theta, \omega)) \right]_+^2 \right\} dt. \quad (16)$$

Тут і далі знак “2” вгорі біля матриці (вектора) означає піднесення до квадрату кожного елемента матриці (вектора), знак “+” внизу означає, що кожний елемент матриці (вектора) потрібно брати за модулем.

Застосуємо $b(\cdot)$ до лівої та правої частин рівняння (14), в результаті одержимо, що

$$b(x_t(\theta, \omega)) = b(y_t(\theta, \omega)) + \psi(\omega) \int_0^t b(H_{t-\tau}(\theta, \omega)) dw(\tau, \omega) b(x_\tau(\theta, \omega)). \quad (17)$$

Піднесемо до квадрату ліву та праву частини (17), застосуємо операцію математичного сподівання та, використовуючи властивості стохастичних інтегралів [7, 8], одержимо

$$\mu_b(t) = \mathbf{E}\{b^2(y_t(\theta, \omega))\} + \mathbf{E}\{\psi^2(\omega)\} \int_0^t \mathbf{E}\{b^2(H_{t-\tau}(\theta, \omega))\} \mu_b(s) ds, \quad (18)$$

де $\mu_b(t) = \mathbf{E}\{b^2(x_t(\theta, \omega))\}$.

Далі інтегруємо рівняння (18) за аргументом t від 0 до $+\infty$ та, змінюючи порядок інтегрування у правій частині, матимемо

$$\int_0^\infty \mu_b(t) dt = \int_0^\infty \mathbf{E}\{b^2(y_t(\theta, \omega))\} dt + \mathbf{E}\{\psi^2(\omega)\} \int_0^\infty \mathbf{E}\{b^2(H_t(\theta, \omega))\} dt \int_0^\infty \mu_b(s) ds. \quad (19)$$

У рівнянні (19) в якості $y(t)$ слід брати стовпці матриці $H(t) = \{h_{ij}(t)\}$, $i, j = \overline{1, n}$. Будемо позначати їх через $y_j(t)$, $j = \overline{1, n}$.

Для зручності введемо наступні позначення:

$$N_j \equiv \int_0^\infty b^2(y_{tj}(\theta)) dt; \quad M_j \equiv \int_0^\infty \mu_{b_j}(t) dt.$$

Тоді, аналогічно до (18), можна записати рівняння

$$M_j = N_j + \mathbf{E}\{\psi^2(\omega)\} \int_0^\infty \mathbf{E}\{b^2(H_t(\theta, \omega))\} dt \cdot M_j, \quad j = \overline{1, n}. \quad (20)$$

Або, за означенням матриці $\mathbf{B}$, одержимо

$$M_j = N_j + \mathbf{E}\{\psi^2(\omega)\} \mathbf{B} \cdot M_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

За побудовою, вектор N_j збігається з j -им стовпчиком матриці $\mathbf{B}$, при цьому $\mathbf{B} = \{N_1, N_2, \dots, N_n\}$. Тоді позначимо $M \equiv \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ і подамо (20) у вигляді матричного рівняння

$$M = \mathbf{B} + \mathbf{E}\{\psi^2(\omega)\} \cdot \mathbf{B} \cdot M. \quad (21)$$

Доведемо наступне твердження.

Теорема 2. Нехай для лінійного СДФР (1), (2) виконуються всі умови теореми 1 та припущень 1–3.

Тоді необхідною та достатньою умовою належності простору $\mathfrak{M}_\infty$ довільного лінійного функціоналу $f: \mathbf{D}_n([-r, 0]) \rightarrow \mathbf{R}^n$ є умова $\rho(\mathbf{B}) < 1$ або

$|\lambda_{\max}(B)| < 1$, де $\rho(\mathbf{B})$ – спектральний радіус додатної матриці $\mathbf{B}$, $\lambda_{\max}(B)$ – корінь Перрона додатної матриці $\mathbf{B}$.

Доведення. *Необхідність* будемо доводити від супротивного. Оскільки матриця $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$, $i, j = \overline{1, n}$, складена за побудовою з невід’ємних елементів, то існує додатне власне значення $\lambda_0 > 0$ [14]. Нехай $\lambda_0 \geq 1$.

Випадок $\lambda_0 = 1$. Позначимо через $\bar{b}_0$ власний вектор матриці $\mathbf{B}$, що відповідає власному значенню $\lambda_0 = 1$. Тоді від матричного рівняння (21) легко перейти до рівняння

$$X = \bar{b} + \mathbf{E}\{\psi^2(\omega)\} \mathbf{B}X,$$

де $X = M\bar{b}_0$. Одержане рівняння не має обмеженого розв’язку [14].

Таким чином, для $\lambda_0 = 1$ матричне рівняння (21) має необмежений розв’язок. Це означає, що існують початкові функції $\alpha(\theta)$, за якими побудовані розв’язки мають властивість $b(x_t(\theta)) \notin \mathfrak{M}_\infty$.

Доведемо, що в даному випадку для довільного функціоналу $f(\cdot) \notin \mathfrak{M}_\infty$. Застосуємо до (14) функціонал $f(\cdot)$. Після аналогічних вищенаведеним перетворень та з урахуванням припущень теореми одержимо, що

$$\int_0^\infty \mu_f(t) dt = \int_0^\infty \mathbf{E}\{f^2(y_t(\theta, \omega))\} dt + \mathbf{E}\{\psi^2(\omega)\} \int_0^\infty \mathbf{E}\{f^2(H_t(\theta, \omega))\} dt \int_0^\infty \mu_b(t) dt. \quad (22)$$

Для досить малих $\delta > 0$ та $\varepsilon > 0$ з урахуванням вищезгаданих властивостей очевидна нерівність

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \mathbf{E}\{f^2(H_t(\theta, \omega))\} dt \int_0^\infty \mu_f(t) dt &\geq \mathbf{E}\{\psi^2(\omega)\} \int_0^\delta \mathbf{E}\{f^2(H_t(\theta, \omega))\} dt \int_0^\infty \mu_f(t) dt \geq \\ &\geq \mathbf{E}\{\psi^2(\omega)\} \frac{\delta}{2} \int_0^\infty \mu_f(t) dt. \end{aligned}$$

За цими нерівностями співвідношення (22) дає $f(\cdot) \notin \mathfrak{M}_\infty$, що суперечить припущенню теореми 2.

Випадок $\lambda_0 > 1$. Доведемо, що матричне рівняння (21) має необмежений розв'язок. Якщо припустити протилежне, тоді матричне рівняння (21) матиме обмежений розв'язок $\frac{\bar{b}_0}{1-\lambda_0}$, координати якого від'ємні. А це неможливо, оскільки координати розв'язку матричного рівняння (21) невід'ємні [14]. Таким чином, припущення невірне.

Аналогічно і для випадку $\lambda_0 > 1$ можна довести [14], що $f(\cdot) \notin \mathfrak{M}_\infty$.

Отже, необхідність доведена.

Достатність. Нехай $\rho(\mathbf{B}) < 1$. Доведемо, що для довільного функціонала $f(\cdot)$ виконується $f(\cdot) \in \mathfrak{M}_\infty$.

Застосуємо метод послідовних наближень [10] для розв'язання матричного рівняння (16), яке еквівалентне (18).

Якщо вибрати $M_0 = 0_{n \times n}$, тоді $M_m = \sum_{i=0}^{m-1} \mathbf{B}^i N$. Оскільки [14]

$\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\|\mathbf{B}\|^m} = \max_i \lambda_i$, тоді умова теореми 2 дає $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\|\mathbf{B}\|^m} = d < 1$. Отже, для досить великих $m \geq m_1$ отримуємо, що $\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\|\mathbf{B}\|^m} < d + \varepsilon < 1$ та $\|\mathbf{B}^m\| < (d + \varepsilon)^m$. Це означатиме, що для $m \geq m_1$

$$\|M_m\| \leq \sum_{i=0}^{m-1} (d + \varepsilon)^i \|N\|,$$

а, отже,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|M_m\| \leq \frac{\|N\|}{(1-d)}.$$

Іншими словами, $b(x_t) \in \mathfrak{M}_\infty$. Тоді за (22) $f(\cdot) \in \mathfrak{M}_\infty$.

Теорема 2 повністю доведена.

7.4. Асимптотична стійкість та нестійкість в середньому квадратичному (l.i.m.) розв'язків систем лінійних СДФР

За умови виконання накладених вище умов можна отримати наступні твердження про стійкість та нестійкість у l.i.m. розв'язків систем лінійних СДФР (1)–(3).

Теорема 3. Нехай виконуються умови теореми 1 для лінійного автономного СДФР (1)–(3), а також $\rho(\mathbf{B}) < 1$ для матриці $\mathbf{B}$, яка задана (16).

Тоді тривіальний розв'язок $x(t) \equiv x(t, \omega): [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$ задачі (2), (3) асимптотично стійкий у l.i.m.

Доведення. Застосуємо перетворення Лапласа [3] $\mathcal{L}(\cdot)$ до рівняння (18). В результаті отримаємо рівняння в зображеннях

$$M_b(\lambda) = F_b(\lambda) + \mathbf{E}\{\psi^2(\omega)\} H_b(\lambda) M_b(\lambda),$$

$$\text{де } M_b(\lambda) \equiv \mathcal{L}\{\mu_b(t)\}; H_b(\lambda) \equiv \mathcal{L}\{\mathbf{E}\{b^2(H_t(\theta, \omega))\}\}; F_b(\lambda) \equiv \mathcal{L}\{\mathbf{E}\{b^2(y_t(\theta, \omega))\}\}.$$

З попереднього рівняння для зображень матимемо

$$M_b(\lambda) = [I - H_b(\lambda)]^{-1} F_b(\lambda). \quad (23)$$

З умов теореми 3 випливає, що розв'язок $y(t)$ СДФР (1), (2) експоненціально стійкий. Тоді $F_b(\lambda)$, як перетворення Лапласа $\mathcal{L}\{\mathbf{E}\{b^2(y_t(\theta, \omega))\}\}$ не має полюсів у напівплощині $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$.

Позначимо через $\gamma(\lambda)$ корінь Перрона матриці $H_b(\lambda)$. Тоді побудова матриці $H_b(\lambda)$ дає властивість

$$\max_{\operatorname{Re} \lambda \rightarrow d} \gamma(\lambda) = \gamma(d). \quad (24)$$

Доведемо, що рівняння

$$\Phi(\lambda) \equiv \det[I - M_b(\lambda) \mathbf{E}\{\psi^2(\omega)\}] = 0$$

має нулі в лівій півплощині $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Дійсно, припустимо протилежне, тобто що $\Phi(\lambda_0) = 0$, де $\operatorname{Re} \lambda_0 \geq 0$. Це означатиме, що $H_b(\lambda_0)$ матиме власне значення, рівне одиниці. Тоді $\gamma(\operatorname{Re} \lambda_0) \geq 1$. Однак елементи матриці $H_b(\lambda)$ для дійсних λ ($\operatorname{Re} \lambda$) спадають, тобто $\gamma(\operatorname{Re} \lambda)$ є спадною функцією. Отже, $\gamma(0) \geq 1$, а матриця $H_b(0) = \mathbf{B}$ має власне значення за модулем не менше за одиницю. А це суперечить умовам теореми 3, за якими $\rho(\mathbf{B}) < 1$.

Отже, полюси $M_b(\lambda)$ лежать у півплощині $\operatorname{Re} \lambda < 0$, а оригінал $\mu_b(t)$ поводить себе при $t = +\infty$ як $\exp(rt)$, де $r < 0$ (r – дійсна частина найбільш віддаленого праворуч від полюса зображення $M_b(\lambda)$ [3]). Тоді

$$|\mu_b(t)| \leq C \exp(-rt) \|d\|_0,$$

де $r > 0$, $C > 0$.

За твердженням теореми 2, для довільного лінійного функціоналу $f(\cdot)$ має місце оцінка

$$\mathbf{E} \left\{ \left| f^2(y_i(\theta)) \right| \right\} \leq C_1 (\exp(-r_1 t)) \|d\|_0,$$

де $r_1 > 0$, $C_1 > 0$.

А це приводить до стійкості в л.і.м. розв'язку $x(t)$ СДФР (1), (2).

Асимптотична стійкість у л.і.м. цього розв'язку впливає з нерівності

$$\mathbf{E} \left\{ |x(t)|^2 \right\} \leq C_1 (\exp(-r_1 t)) \|d\|_0 + \mathbf{E} \left\{ \|H(t)\|^2 \right\} \int_0^\infty |\mu_b(t)|^2 dt.$$

Теорема 3 доведена.

Наслідок 1. Якщо підставити вираз (12) для $H_b(t)$ у вираз (16) для матриці $\mathbf{B}$ та застосувати теорему Планшереля [13], то формула для $\mathbf{B}$ набуде вигляду

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\pi} \mathbf{E} \left\{ \psi^2(\omega) \right\} \int_0^\infty |b(e^{is\theta})|^2 [V^{-1}(is)]_+^2 ds, \quad (25)$$

де $i = \sqrt{-1}$.

Теорема 4. Нехай тривіальний розв'язок $y(t) \equiv 0$ диференціального рівняння (7) експоненціально стійкий, при цьому

$$\rho(\mathbf{B}) > 1. \quad (26)$$

Тоді в околі нуля знайдеться така початкова функція $d(t) \in \mathbf{R}^n$, що розв'язок $x(t, \omega) \in \mathbf{R}^n$ СДФР (1)–(2) поводить себе в л.і.м. як $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E} \{ \|x(t, \omega)\|^2 \} = +\infty$.

Доведення. Використаємо співвідношення (23) для визначення

$$M_b(\lambda) = \left[I - E \{ \varphi^2(\omega) \} H(\lambda) \right]^{-1} \cdot F(\lambda),$$

де $F(\lambda)$ за умов теореми 4 не має особливостей у півплощині $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$.

Тоді полюси комплексного вектора $M_b(\lambda)$ збігаються з нулями визначника $\det [I \cdot H_b(\lambda) E \{ \varphi^2(\omega) \}]$. Матриця $H_b(\lambda)$, як функція комплексної змінної, має додатне власне значення $\gamma(\lambda) > 0$, модуль якого не менший за модулі решти власних значень, тобто $\max_{\operatorname{Re} \lambda = d} \gamma(\lambda) = \gamma(d)$. За умовою теореми 4 $\gamma(0) \geq 1$. Однак $\gamma(\lambda)$ є неперервною функцією дійсної змінної λ і така, що $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \gamma(\lambda) = 0$. Таким чином, знайдеться таке дійсне $\lambda_0 > 0$, що $\gamma(\lambda_0) = 1$. Тоді $|\mu_b(t)|$ зростатиме при $t \rightarrow +\infty$ не повільніше за $\exp(\lambda_0 t)$, $\lambda_0 > 0$. Теорема 4 доведена.

Зауваження 1. Оскільки умова $\rho(\mathbf{B}) > 1$ вимагає знаходження найбільшого за модулем власного значення матриці $\mathbf{B}$ (25), для побудови якої необхідно знаходити обернену матрицю $[V^{-1}(is)]_+^2$ до матриці $[V(is)]_+^2$, а потім почленно інтегрувати кожен елемент цієї оберненої матриці від 0 до $+\infty$ за аргументом s , то постає питання, чи можна уникнути проблеми знаходження власних значень та побудови оберненої матриці, оскільки це приводить до великої кількості додаткових обчислень і використання значних обчислювальних ресурсів комп'ютера при розв'язанні прикладних задач.

Знаходження $\max \rho(\mathbf{B})$ можна уникнути, якщо від системи (1), (2) перейти до покоординатного запису

$$dx_i(t, \omega) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(\omega) a_{ij}(x_{ijt}(\theta)) dt + \sum_{j=1}^n \psi_j(\omega) b_{ij}(x_{ijt}(\theta)) dw_{ij}(t, \omega) \quad (27)$$

за початковими умовами

$$x_i(t) = \alpha_i(t) \quad (28)$$

де $a_{ij}(\cdot), b_{ij}(\cdot): \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}^1$ – лінійні неперервні функціонали, $w_{ij}(t, \omega)$, $i, j = \overline{1, n}$, – попарно незалежні та F_t -вимірні для $t \geq 0$.

Тоді в теоремі 4 потрібно перевіряти таку умову:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^\infty \mathbf{E} \{ b_{ij}^2(H_{kl}(t + \theta)) \} dt < 1. \quad (29)$$

При малих $n \leq 10$ доцільно обчислювати $\rho(\mathbf{B})$, а при більших n можна скористатися формулою (29).

7.5. Асимптотична поведінка на безмежності другого моменту розв'язку систем лінійних СДФР загального вигляду під дією зовнішніх збурень типу випадкових величин

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, \mathbf{P})$ задано n -вимірний випадковий процес $x(t, \omega): [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$, який є розв'язком СДФР вигляду

$$\begin{aligned} I \cdot \frac{d^N x(t, \omega)}{dt^N} + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^m \varphi_{jk}(\omega) A_{jk} \frac{d^j x(t, \omega)}{dt^j} = \\ = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^m \psi_{jk}(\omega) B_{jk} \frac{dw_{jk}(t, \omega)}{dt} \frac{d^j x(t, \omega)}{dt^j} \end{aligned} \quad (30)$$

за початковими умовами

$$\left. \frac{d^j x(t, \omega)}{dt^j} \right|_{t \in [-r, 0]} = \alpha(t), \quad j = \overline{1, N-1}, \quad (31)$$

де $x(t, \omega) \in \mathbf{R}^n$, I – одинична матриця розмірності $n \times n$; $w_{jk}(t, \omega) \equiv \{w_{jk}^{lq}(t, \omega)\}$ – незалежні попарно вінерові процеси з нульовими зносами і матрицями

параметрів дифузії $S_{jk} \equiv \{s_{jk}^{lq}\}$, де $l = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, N-1}$; $A_{jk} \equiv \{a_{jk}^{lq}\}$, $B_{jk} \equiv \{b_{jk}^{lq}\}$ – матриці з дійсними елементами; $\varphi_{jk}(\omega)$ – попарно незалежні зовнішні випадкові величини, $j = \overline{1, N-1}$; $k = \overline{0, m}$; $l = \overline{1, N}$; $q = \overline{1, N-1}$, зі скінченними першими та другими моментами $\mathbf{E}\{\varphi_{jk}(\omega)\} \leq K_1 < \infty$; $\mathbf{E}\{\varphi_{jk}^2(\omega)\} \leq K_2 < \infty$.

Позначимо через $H(t, \omega)$ матричний розв'язок з імовірністю 1 системи

$$I \cdot \frac{d^N y(t, \omega)}{dt^N} + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^m \varphi_{jk}(\omega) A_{jk} \frac{d^j y(t + \theta, \omega)}{dt^j} = 0 \quad (32)$$

такий, що $H(t, \omega) = 0$ для $t < 0$,

$$H(0, \omega) = \frac{dH(0, \omega)}{dt} = \dots = \frac{d^{N-2}H(0, \omega)}{dt^{N-2}} = 0; \quad \frac{d^{N-1}H(0, \omega)}{dt^{N-1}} = I, \quad (33)$$

а за умови $t > 0$

$$\frac{d^j H(t, \omega)}{dt^j} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^j e^{\lambda t} V^{-1}(\lambda, \omega) d\lambda,$$

де контур Γ охоплює всі нулі ймовірнісного квазіполінома системи (32), а саме

$$\det V(\lambda, \omega) = \det \left[I \lambda^N + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^m \varphi_{jk}(\omega) A_{jk} \lambda^j e^{-\lambda \theta} \right] \quad (34)$$

з імовірністю одиниця.

Використовуючи формулу (14), можна перейти від (30) до інтегральної системи

$$x^j(t, \omega) = y^j(t) + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^m \int_0^t \left[\frac{d^j H(t-\tau)}{dt^j} dw_{jk}(t, \omega) \right] B_{jk} \frac{d^j x(t, \omega)}{dt^j}, \quad (35)$$

де $j = \overline{0, 1, \dots, N-1}$, а $y(t)$ – розв'язок (32) у детермінованому випадку.

Теорема 5. Нехай на ймовірнісному базисі задана задача Коші для СДФР (30), (31), для якого виконано умови:

- 1) A_{jk}, B_{jk} – дійсні матриці;
- 2) $\varphi_{jk}(\omega), \psi_{jk}(\omega), w_{jk}(\omega)$ – попарно незалежні;
- 3) $\mathbf{E}\{\varphi_{jk}(\omega)\} \leq K_1 < \infty$; $\mathbf{E}\{\varphi_{jk}^2(\omega)\} \leq K_2 < \infty$;

$$4) \mathbf{E}\{\psi_{jk}(\omega)\} \leq K_3 < \infty; \mathbf{E}\{\psi_{jk}^2(\omega)\} \leq K_4 < \infty;$$

5) корені квазіполінома $\det V_+(\lambda)$ лежать у лівій півплощині $\operatorname{Re} \lambda < 0$;

6) спектральний радіус $\rho(\mathbf{B}) < 1$ для матриці

$$\mathbf{B}(\omega) \equiv \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^m \int_0^\infty \mathbf{E}\{\psi_{jk}^2(\omega)\} S_{jk} |(is)^j|^2 \cdot [V^{-1}(is, \omega)]_+^2 ds, \quad \omega \in \Omega. \quad (36)$$

Тоді тривіальний розв'язок СДФР (30), (31) є асимптотично стійким, а саме, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}\{|x(t, \omega)|^2\} = 0$, якщо $\rho(\mathbf{B}) < 1$. Якщо ж $\rho(\mathbf{B}) > 1$, тоді $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}\{|x(t, \omega)|^2\} = +\infty$.

Нагадаємо, що знак “2” вгорі біля матриці (вектора) означає піднесення до квадрату кожного елемента матриці (вектора), знак “+” внизу означає, що кожний елемент матриці (вектора) потрібно брати за модулем.

Доведення. Використаємо відому [12, 13] властивість математичного сподівання від квадрата інтеграла зі змінною по $t \geq 0$ верхньою межею, яка дорівнює звичайному інтегралу від математичного сподівання квадрата підінтегральної функції, попарну незалежність елементів матриць $w_{jk}(t, \omega)$, після піднесення за рядками до квадрату обох частин (35) і застосування операції математичного сподівання $\mathbf{E}\{\cdot\}$, отримуємо систему рівнянь $N \cdot m$ -го порядку вигляду

$$\mu_l(t, \omega) = \left[\frac{d^l y(t, \omega)}{dt^l} \right]^2 + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^m \mathbf{E}\{\psi_{jk}^2(\omega)\} \left[\frac{d^l H(t - \tau, \omega)}{dt^l} \right]^2 S_{jk}^2 \cdot \mu_j(\tau + \theta) d\tau, \quad (37)$$

$$\text{де } \mu_l \in \mathbf{R}^n, l = 0, 1, \dots, N-1; \quad \mu_l(t) \equiv \mathbf{E}\left\{ \left[\frac{d^l x(t)}{dt^l} \right]^2 \right\}.$$

Після застосування до обох частин (37) перетворення Лапласа $\mathcal{L}\{\cdot\}$ за змінною λ , матимемо

$$M_l(\lambda) = Y_l(\lambda) + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^m \mathbf{E}\{\psi_{jk}^2(\omega)\} \mathbf{E}\{H_l(\lambda, \omega)\} S_{jk} e^{-\tau \lambda} M_j(\lambda), \quad (38)$$

$$\text{де } M_l(\lambda) \equiv \mathcal{L}\{\mu_l(t)\}; \quad Y_l(\lambda) \equiv \mathcal{L}\left\{ \mathbf{E}\left\{ \left[\frac{d^l y(t)}{dt^l} \right]^2 \right\} \right\}; \quad H_l(\lambda, \omega) \equiv \mathcal{L}\left\{ \left[\frac{d^l H(t, \omega)}{dt^l} \right]^2 \right\}.$$

Якщо $\rho(\mathbf{B}) < 1$, то довільний розв'язок $y(t, \omega)$ рівняння (32) за модулем прямує до нуля при $t \rightarrow +\infty$ не швидше за $\exp\{\varepsilon t\}$ з $\varepsilon < 0$ [13]. Тоді $Y_l(\lambda)$ не має особливостей у півплощині $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ [10].

Отже, особливості вектора $M_l(\lambda)$ збігаються з нулями визначника $F(\lambda)$ системи (38).

Для продовження доведення спочатку слід провести наступні елементарні перетворення, а саме, спочатку домножимо зліва перший рядок системи (38) на $-H(\lambda)H_0^{-1}(\lambda)$ і додамо до r -го рядка, потім домножимо зліва r -ий рядок на $H_0(\lambda)\sum_{k=0}^m S_{jk}$ і додамо до першого рядка ($r = 2, 3, \dots, N-2$).

Отже, одержимо $F(\lambda, \omega) = \det(I - L(\lambda, \omega))$, де

$$L(\lambda) = H_0(\lambda, \omega) \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^m \psi_{jk}^2(\omega) S_{jk} \mathbf{E}\{H_j(\lambda, \omega)\} e^{-i\lambda} H_0^{-1}(\lambda, \omega), \quad \omega \in \Omega. \quad (39)$$

Згідно з [14], матриця $L_+(\lambda)$ має корінь Перрона, який за модулем не менший від решти власних значень. Позначимо цей корінь Перрона через $p(\lambda)$. Відомо, що всі власні значення $L(\lambda)$ не перевищують за модулем $p(\lambda)$, тобто $\max_{\operatorname{Re} \lambda = c} p(z) = p(c)$.

Першу частину теореми 5 доведемо від супротивного. Нехай $F(\lambda_0) = 0$, але $\operatorname{Re} \lambda_0 > 0$. Тоді $L(\lambda)$ має власне значення, яке дорівнює одиниці і $p(\operatorname{Re} \lambda_0) \geq 1$. Зауважимо, що $p(\operatorname{Re} \lambda)$ не зростає при зростанні $\operatorname{Re} \lambda$, оскільки елементи матриці $L_+(\operatorname{Re} \lambda)$ не зростають [14]. Це означає, що $p(0) \geq 1$.

Використовуючи вираз для

$$\frac{d^j H(t)}{dt^j} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^j e^{\lambda t} V^{-1}(\lambda) d\lambda,$$

одержимо

$$H_j(0, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |(is)^j|^2 \varphi_{jk}^2(\omega) [V^{-1}(is, \omega)]_+^2 ds.$$

Тоді очевидно, що матриця $L(0)$ подібна до матриці $\mathbf{B}$ за умови (36) теореми 5. Таким чином, матриця $\mathbf{B}$ має власні значення $p(0) \geq 1$, що суперечить умові $\rho(\mathbf{B}) < 1$ з першої частини теореми 5.

Доведемо друге твердження теореми. Нехай корінь Перрона $p(\mathbf{B}) > 1$. Тоді $p(0) > 1$. Зауважимо, що при дійсних $s > 0$ границя $\lim_{s \rightarrow +\infty} p(s) = 0$ і $p(s)$ – неперервна функція дійсного аргумента s [14]. Отже, існує дійсне $s_0 > 1$ таке, що $p(s_0) = 1$. А це означає, що $F(s_0) = 0$ для $s_0 > 0$. Таким чином, $\mu_l(t)$, $l = 0, 1, \dots, N-1$, зростає при $t \rightarrow +\infty$ не повільніше за $\exp(st)$ [14], що й доводить остаточно теорему 5.

7.6. Стохастична задача стабілізації курсу океанського лайнера під дією зовнішніх збурень типу випадкових величин

Розглянемо на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \{F_t, t \geq 0\}, \mathbf{P})$ наступну систему дифузійних диференціально-різницевих рівнянь вигляду [11]:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t, \omega) + \varphi(\omega) H \dot{x}(t, \omega) + \psi(\omega) K y(t, \omega) = \\ = \gamma_1(\omega) \dot{x}(t, \omega) w_1(t, \omega) + \gamma_2(\omega) y(t, \omega) w_2(t, \omega), \\ \dot{y}(t, \omega) + \psi(\omega) \frac{1}{T} y(t, \omega) + \varphi(\omega) [Bx(t, \omega) + Lx(t - \tau, \omega)] = \\ = \gamma_1(\omega) x(t, \omega) w_3(t, \omega) + \gamma_2(\omega) x(t - \tau, \omega) w_4(t, \omega), \end{cases} \quad (40)$$

за початковими даними

$$\begin{cases} \dot{x}(t, \omega)|_{0 \leq t \leq \tau} = \alpha_1(\omega); \\ x(t, \omega)|_{0 \leq t \leq \tau} = \alpha_2(\omega); \\ y(t, \omega)|_{0 \leq t \leq \tau} = \beta(\omega), \end{cases} \quad (41)$$

де $x(t, \omega)$ – кут відхилення лайнера від теоретичного курсу при куті повороту керма $y(t, \omega)$; $w_j(t, \omega): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$; $j = \overline{1, 4}$, – задані вінерові процеси;

$\varphi(\omega), \psi(\omega): \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ – одновимірні задані зовнішні збурення типу випадкових величин (мінливість морських течій, нерівномірна інтенсивність потоків); $\gamma_1(\omega)$, $\gamma_2(\omega)$, $\alpha_1(\omega)$, $\alpha_2(\omega)$, $\beta(\omega)$ – одновимірні відомі зовнішні збурення типу випадкових величин із заданими законами розподілу, які визначаються серією вимірювань методами математичної статистики [8]; $H > 0$, $K > 0$, $T > 0$, B , L – сталі, що характеризують найпростішу модель курсу лайнера.

Квазіполіном системи (40) має вигляд

$$\det V(\lambda, \omega) \equiv \det \left[R\lambda^2 + \sum_{j=0}^1 \sum_{r=0}^1 A_{jr}(\omega) \lambda^j e^{-\Delta_r \lambda} \right], \quad (42)$$

де матриці

$$R \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_{00} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \psi(\omega)R \\ \varphi(\omega)B & T^{-1} \end{bmatrix}; \quad A_{01} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varphi(\omega)L & 0 \end{bmatrix};$$

$$A_{10} \equiv \begin{bmatrix} \varphi(\omega)H & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A_{11} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Обчислимо квазіполіном

$$\det V(\lambda, \omega) \equiv \lambda^2 R + H\lambda\varphi^2(\omega)(T^{-1} + \lambda) - R\psi^2(\omega) \left[-\mathbf{E}\{\varphi^2(\omega)\}B + Le^{-\tau\lambda}\mathbf{E}\{\varphi^2(\omega)\} \right].$$

У просторі параметрів H, T, K, B, L, R, τ при фіксованих $\varphi(\omega), \psi(\omega)$ з $\mathbf{E}\{\varphi^2(\omega)\} \leq K_1 < \infty$, $\mathbf{E}\{\psi^2(\omega)\} \leq K_2 < \infty$ можна побудувати межі D -розбиття за Беллманом, а також області, де корені квазіполінома мають від'ємні дійсні частини ($\operatorname{Re} \lambda < 0$).

Отже,

$$V^{-1}(is, \omega) = \frac{1}{\det V(is, \omega)} \begin{bmatrix} -s^2 + is\varphi^2(\omega)H & \psi^2(\omega)B + L\varphi^2(\omega) \\ \psi^2(\omega)K & T^{-1} + is \end{bmatrix},$$

де

$$|\det V(is, \omega)|^2 = \left[(is)^2 + (T^{-1} + H\varphi^2(\omega)) + H(is)(T^{-1} + is)\psi^2(\omega) - B^2\psi^2(\omega) + R\varphi^2(\omega)\psi^2(\omega)L\sin is \right]^2.$$

Матриця $\mathbf{B}$ має вигляд

$$\mathbf{B}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \sum_{j=0}^1 \sum_{r=0}^1 S_{jr}^+ \right\} |is|^2 [V^{-1}(is, \omega)]_+^2 ds,$$

де

$$S_{00}^+ \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; S_{01}^+ \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; S_{10}^+ \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; S_{11}^+ \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Позначимо через $I_{11}(\omega)$, $I_{12}(\omega)$, $I_{21}(\omega)$, $I_{22}(\omega)$ відповідні випадкові інтеграли у матриці $\mathbf{B}(\omega)$. Тоді власні значення (як випадкові величини) матриці $\mathbf{B}(\omega)$ дорівнюють

$$\lambda_1(\omega) = (I_{11}(\omega) + I_{22}(\omega) + \sqrt{D(\omega)}); \quad \lambda_2(\omega) = (I_{11}(\omega) + I_{22}(\omega) - \sqrt{D(\omega)}),$$

де $D(\omega) = (I_{11}(\omega) + I_{22}(\omega))^2 - 4(I_{11}(\omega)I_{22}(\omega) + I_{12}(\omega)I_{21}(\omega))$.

Тривіальний розв'язок системи (40), (41) асимптотично стійкий у l.i.m., якщо $|\lambda_i(\omega)| < 1$, $i = 1, 2$. Це і є умовою стабілізації курсу лайнера.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ до §7

1. Ясинський В.К., Ясинський Е.В. Задачі стійкості та стабілізації динамічних систем зі скінченною післядією.— Київ: Вид-во “ТВіМС”, 2005.— 586 с.
2. Ясинський В.К., Лукашів Т.О. Стабілізація стохастичних дифузійних динамічних систем випадкової структури.— Чернівці: Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 2013.— 136 с.
3. Ясинський В.К., Юрченко І.В., Кисілюк У.М. Існування та єдиність сильного розв'язку стохастичного диференціально-функціонального рівняння із зовнішніми випадковими збуреннями // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика і інформатика.— 2017.— Вип. №1 (30).— С.143-153.

4. Yurchenko I.V., Yasynsky V.K. The existence of Lyapunov-Krasovskii functionals for stochastic differential-functional Ito-Skorokhod equations under the condition of the solutions stability on probability with finite aftereffect // Cybernetics and Systems Analysis.— 2018.— Vol.54, Iss.6.— P.957-970.
5. Ясинський В.К., Довгунь А.Я. Стабілізація стохастичних динамічних систем автоматичного регулювання.— Чернівці: ЧНУ, 2015.— 142 с.
6. Кушнер Г.Дж. Стохастическая устойчивость и управление.— М.: Мир, 1969.— 200 с.
7. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. — К.: Наукова думка, 1982. — 612 с.
8. Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. В 3-х томах. Т.3: Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика.— Чернівці: Вид-во “Золоті литаври”, 2009.— 798 с.
9. Андреева Е. А., Колмановский В. Б., Шайхет Л. Е. Управление системами с последействием.— М.:Наука, 1992.— 336 с.
10. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1984.— 421 с.
11. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений.— Рига: Зинатне, 1989.— 421 с.
12. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения.— Рига: Ориентир, 1990.— 328 с.
13. Свердан М.Л., Царков Е.Ф., Ясинський В.К. Стійкість у стохастичному моделюванні складних динамічних систем.— Снятин: Над Прутом, 1996.— 448 с.
14. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.— М.: Наука, 1967.— 575 с.

§8. ПРО ІСНУВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПІД ДІЄЮ ЗОВНІШНИХ ЗБУРЕНЬ

8.1. Постановка задачі

У межах теорії стохастичного керування досліджується управління в системах з випадковими параметрами. Ця теорія має широке застосування в багатьох галузях, включаючи фінанси, інженерію, економіку та ін.

Початки теорії стохастичного керування пов'язані з роботами, в яких вивчаються розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь, що описують еволюцію системи в часі за умови випадкових збурень чи впливу випадкових факторів. Розвиток теорії стохастичного керування відбувався вдосконаленням методів розв'язання стохастичних диференціальних рівнянь, введенням нових підходів до аналізу випадкових процесів і застосуванням до таких областей, як фінанси, оптимальне керування портфелями, ризик-менеджмент і багато інших (див. праці [1–11]).

Сучасні дослідження в теорії стохастичного керування продовжують розширювати її застосування в нові галузі, розробляти більш ефективні методи розв'язання складних проблем і поширювати її теоретичну базу.

У цій статті розглянуто теорему порівняння для розв'язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь (СДФР) під дією зовнішних збурень та її застосування для однієї задачі стохастичного керування, що є розвитком результатів, отриманих для одновимірних процесів Іто у працях [3, 5–7] та для випадку наявності пуассонових збурень у працях [12–15].

8.2. Теорема порівняння для розв'язків СДФР

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — ймовірнісний простір з потоком σ -алгебр $\{F_t, t \geq 0\}$, D — простір неперервних справа функцій, що мають лівосторонні границі (НПЛГ) зі значеннями з $\mathbf{R}^1$ та з рівномірною метрикою [1–3].

Теорема 1. Нехай задані:

1) строго зростаюча функція $\{\rho(x), x \in \mathbf{R}_+\}$ така, що

$$\rho(0) = 0, \quad \int_0^\infty \rho^{-2}(x) dx = \infty;$$

2) неперервні функціонали $b: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}^1$; $c: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{D} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R}^1$, $\mathbf{V} \subset \mathbf{R}^1$ такі, що для довільних $\varphi, \psi \in \mathbf{D}$

$$|b(t, \varphi) - b(t, \psi)| + \int_{\mathbf{V}} |c(t, \varphi, u) - c(t, \psi, u)| \Pi(du) \leq$$

$$\leq \rho(\|\varphi - \psi\|), \quad t \geq 0;$$

3) два неперервних функціонали $a_i: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}^1$, $i = 1, 2$, такі, що

$$a_1(t, \varphi) \leq a_2(t, \varphi), \quad t \geq 0, \quad \varphi \in \mathbf{D};$$

4) $\{x_i(t) \equiv x_i(t, \omega), t \in \mathbf{R}_+, \omega \in \Omega, i = 1, 2\}$ — неперервні за t випадкові процеси, $\{F_t\}$ -вимірні за ω ;

5) стандартний вінерів процес $w(t) \equiv w(t, \omega): [0, \infty) \times \Omega \subset \mathbf{R}^1$ такий, що $w(0) = 0 \pmod{\mathbf{P}}$;

6) $\{\tilde{\nu}(t, A) = \nu(t, A) - \Pi(A)t, A \in \mathbf{V} \subset \mathbf{R} \setminus \{0\}\}$ — центрована пуассонова міра, при цьому $\{w(t)\}$ і $\{\tilde{\nu}(t, A)\}$ незалежні один від одного;

7) $\{\alpha_i(t) \equiv \alpha_i(t, \omega), t \in \mathbf{R}, \omega \in \Omega\}$ — вимірні відносно $\{F_t, t \geq 0\}$ випадкові процеси.

Нехай також випадкові процеси з пп. 4—7 даної теореми з імовірністю 1 задовольняють умови:

$$x_i(t) - x_i(0) = \int_0^t \alpha_i(s) ds + \int_0^t b(s, x_i^s) dw(s) +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbf{V}} c(s, x_i^s, v) \tilde{\nu}(ds, dv),$$

$$x_1(\theta) \leq x_2(\theta), \quad \theta \in (-\infty, 0],$$

$$\alpha_1(t) \leq \alpha_1(t, x_1^t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$\alpha_2(t) \leq \alpha_2(t, x_2^t), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

де $\{x^t \equiv \{x(t + \theta), \theta \in (-\infty, 0]\}\}$.

Тоді з імовірністю 1 виконується нерівність

$$x_1(t) \leq x_2(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (3)$$

Якщо виконується умова єдиності з імовірністю 1 сильних розв'язків хоча б для одного з таких СДФР:

$$dx_i(t) = a_i(t, x^t)dt + b(t, x^t)dw(t) + \int_{\mathbf{v}} c(t, x^t, v)\tilde{v}(dt, dv), \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

тоді (3) виконується й за слабкішої умови:

$$a_1(t, \varphi) \leq a_2(t, \varphi), \quad t \geq 0, \quad \varphi \in \mathbf{D}.$$

Доведення. Вважатимемо, що a_i , $i = 1, 2$, b і c обмежені (з урахуванням міркувань локалізації [3, 7, 13]).

Етап 1. Припустимо, що для $a_1(t, x)$ виконується умова Ліпшиця:

$$|a_1(t, \varphi) - a_1(t, \psi)| \leq K \|\varphi - \psi\| \quad \forall \varphi, \psi \in \mathbf{D}. \quad (5)$$

Виберемо послідовність $\{\psi_n(t), t \in \mathbf{R}_+, n = 1, 2, \dots\}$ неперервних функцій таких, що їхні носії містяться на інтервалах

$$(a_n, a_{n+1}), \quad 1 > a_1 > \dots > a_n > 0,$$

$$0 \leq \psi_n(t) \leq \frac{2\rho^{-2}(t)}{n}, \quad \int_{a_n}^{a_{n+1}} \psi_n(t)dt = 1.$$

Нехай

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \int_0^x dy \int_0^y \psi_n(t)dt, & x > 0. \end{cases}$$

Для $\varphi_n \in C(\mathbf{R}^1)$ виконуються співвідношення:

$$\varphi_n(x) = 0 \quad \text{для} \quad n \leq 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = x^+ \quad \text{для} \quad n \rightarrow \infty;$$

$$\varphi_n''(x) = \psi_n(x), \quad 0 \leq \varphi_n'(x) \leq 1, \quad (6)$$

Застосовуючи узагальнену формулу Іто [3], одержимо

$$\varphi_n(x_1(t) - x_2(t)) = \sum_{i=1}^5 I_i(n),$$

де

$$I_1(n) \equiv \int_0^t \varphi_n'(x_1(s) - x_2(s)) \{b(s, x_1^s) - b(s, x_2^s)\} dw(s),$$

$$I_2(n) \equiv \int_0^t \varphi_n'(x_1(s) - x_2(s)) \{\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\} ds,$$

$$I_3(n) \equiv \frac{1}{2} \int_0^t \varphi_n''(x_1(s) - x_2(s)) \{b(s, x_1^s) - b(s, x_2^s)\}^2 ds,$$

$$I_4(n) \equiv \int_0^t \int_{\mathbf{v}} [\varphi_n(x_1(s) - x_2(s) + c(s, x_1^s, v) - c(s, x_2^s, v)) - \\ - \varphi_n(x_1(s) - x_2(s))] \tilde{v}(ds, dv),$$

$$I_5(n) \equiv \int_0^t \int_{\mathbf{v}} [\varphi_n(x_1(s) - x_2(s) + c(s, x_1^s, v) - c(s, x_2^s, v)) - \\ - \varphi_n(x_1(s) - x_2(s)) - \varphi_n'(x_1(s) - x_2(s))(c(s, x_1^s, v) - c(s, x_2^s, v))] \Pi(dv) ds.$$

Використовуючи властивості стохастичних інтегралів [3], отримаємо

$$E\{I_1(n)\} = 0, \quad E\{I_4(n)\} = 0,$$

$$E\{I_3(n)\} \leq \frac{1}{2} E\left\{\int_0^t \varphi_n''(x_1(s) - x_2(s)) \rho^2(|x_1(s) - x_2(s)|) ds\right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} E\left\{\int_0^t \psi_n(x_1(s) - x_2(s)) \rho^2(|x_1(s) - x_2(s)|) ds\right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} E\left\{\int_0^t \frac{2}{n} \rho^{-2}(|x_1(s) - x_2(s)|) \rho^2(|x_1(s) - x_2(s)|) ds\right\} \leq \frac{t}{n}.$$

З урахуванням умов (1), (2), (5), (6) отримуємо

$$I_2(n) \leq \int_0^t \varphi_n'(x_1(s) - x_2(s)) \{a_1(s, x_1^s) - a_2(s, x_2^s)\} ds \leq$$

$$\leq K \int_0^t \chi_{x_1(s) > x_2(s)} \|x_1^s - x_2^s\| ds \leq$$

$$\leq K \int_0^t (x_1^s - x_2^s)^+ ds.$$

З (6) випливає, що

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E\{I_5(n)\} &= E\left\{\int_0^t \lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi_n(x_1(s) - x_2(s) + c(s, x_1^s, v) - \right. \\ &\quad \left. - c(s, x_2^s, v)) - \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x_1(s) - x_2(s)) - \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n'(x_1(s) - x_2(s)) \times \right. \\ &\quad \left. \times (c(s, x_1^s, v) - c(s, x_2^s, v)) \Pi(dv) ds = \int_0^t \lim_{n \rightarrow \infty} (c(s, x_1^s, v) - c(s, x_2^s, v)) \times \right. \\ &\quad \left. \times [1 - \varphi_n'(x_1(s) - x_2(s))] \Pi(dv) ds = 0. \right\} \end{aligned}$$

З граничної рівності

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n(x_1(t) - x_2(t))}{x_1(t) - x_2(t)} = 1$$

випливає нерівність

$$E\{(x_1(t) - x_2(t))^+\} \leq K \int_0^t E\{(x_1(s) - x_2(s))^+\} ds.$$

Звідси одержимо, що $E\{(x_1(t) - x_2(t))^+\} = 0 \quad \forall t \geq 0$, тобто $P\{(x_1(t) \leq x_2(t))^+\} = 1 \quad \forall t \geq 0$.

Внаслідок виконання умов теорем існування та єдиності розв'язку з [3, 7, 13], отримуємо НІЛГ траєкторії й дійдемо висновку, що (3) виконується. Завуважимо, що у випадку виконання умови Ліпшиця (5) для $a_2(t, \varphi)$ і з аналогічного міркування щодо етапу 1 можна одержати (3).

Етап 2. У загальному випадку вибираємо $a(t, \varphi)$ у такий спосіб, щоб

$$a_1(t, \varphi) < a(t, \varphi) < a_2(t, \varphi), \quad t \geq 0, \quad \varphi \in \mathbf{D},$$

і для $a(t, \varphi)$ виконувалася умова (3).

Нехай $\{x(t)\}$ — єдиний розв'язок СДФР:

$$dx(t) = a(t, x^t)dt + b(t, x^t)dw(t) + \int_{\mathbf{V}} c(t, x^t, v)\tilde{v}(dt, dv), \quad t \geq 0,$$

з початковими умовами

$$x(\theta) = \varphi_2(\theta), \quad -\infty < \theta \leq 0.$$

Тоді за результатами етапу 1 маємо $x(t) \leq x_2(t)$ і $x_1(t) \leq x(t)$ для $t \geq 0$ майже напевно. Отже, (3) виконується.

Етап 3. Нехай існує єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності розв'язок $\{x(t)\}$ рівняння (4) за умови, що $i = 1$:

$$dx(t) = a_1(t, x^t)dt + b(t, x^t)dw(t) + \int_{\mathbf{v}} c(t, x^t, v)\tilde{v}(dt, dv), \quad (7)$$

$$x(\theta) = \varphi_1(\theta), \quad -\infty < \theta \leq 0.$$

Для $\varepsilon > 0$ матимемо $x^{(\pm\varepsilon)}(t)$ — два розв'язки рівнянь:

$$dx(t) = (a_1(t, x^t) \pm \varepsilon)dt + b(t, x^t)dw(t) + \int_{\mathbf{v}} c(t, x^t, v)\tilde{v}(dt, dv),$$

$$x(\theta) = \varphi_1(\theta), \quad -\infty < \theta \leq 0,$$

для яких з етапів 1, 2 випливає, що

$$x^{(-\varepsilon)}(t) \leq x(t) \leq x^{(+\varepsilon)}(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Якщо $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$, тоді

$$x^{(-\varepsilon_1)}(t) \leq x^{(-\varepsilon_2)}(t), \quad x^{(+\varepsilon_2)}(t) \leq x^{(+\varepsilon_1)}(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Отже, внаслідок неперервності $a_1(t, \varphi)$ і єдиності розв'язку для (7), отримаємо

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} x^{(-\varepsilon)}(t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} x^{(+\varepsilon)}(t) = x(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Враховуючи нерівності $\alpha_1 \leq a_1(t, x_1^t)$, $a_1(t, x_1^t) \leq a_1(t, x_1^t) + \varepsilon$ і застосовуючи вище доведені результати для $x_2(t)$ і $x^{(+\varepsilon)}(t)$, запишемо

$$x_1(t) \leq x^{(+\varepsilon)}(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Для $\varepsilon \downarrow 0^+$ одержимо

$$x_1(t) \leq x(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (8)$$

З аналогічного міркування у випадку $\alpha_2(t) \geq a_2(t, x_2^t)$, $a_2(t, x^t) > a_1(t, x^t) - \varepsilon$ дійдемо до нерівності $x^{(-\varepsilon)}(t) \leq x_2(t)$ з імовірністю 1. При $\varepsilon \downarrow 0^+$ маємо, що

$$x(t) \leq x_2(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (9)$$

Порівнюючи нерівності (8) і (9), запишемо

$$x_1(t) \leq x(t) \leq x_2(t) \quad \forall t \geq 0,$$

що й завершує доведення теореми. ■

Зауваження 1. Теорема 1 має місце і для нелінійних СДФР вигляду

$$\begin{aligned} dx(t, \omega) = & x(\theta) + \sum_{j=1}^r \alpha_j(t, \omega) a_j(t, x(t + \theta, \omega)) dt + \\ & + \sum_{j=r+1}^{2r+1} \alpha_j(t, \omega) b_j(s, x(t + \theta, \omega)) dw_j(t, \omega) + \\ & + \sum_{j=2r+2}^{3r+2} \int_V \alpha_j(t, \omega) c_j(t, x(s + \theta, \omega), v) \tilde{v}_j(dt, dv, \omega) \end{aligned} \quad (10)$$

за умови

$$x(t + \theta, \omega)|_{t=0} = \varphi(\theta); \quad \alpha_j(t, \omega)|_{t=0} = \beta(\theta), \quad j = \overline{1, 3r+2}, \quad (11)$$

де $\alpha_j(t, \omega): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ – зовнішні попарно незалежні між собою та з вінеровими процесами випадкові процеси; коефіцієнти a_j, b_j, c_j задовольняють умови Ліпшиця та умови теореми 1.

8.3. Задача існування оптимального керування розв'язків СДФР серед допустимих керувань

Розглянемо задачу стохастичної оптимізації, яку можна розв'язати за допомогою теореми 1. Ця оптимізаційна задача є прикладом доведення існування стохастичного керування для класу СДФР під дією зовнішніх збурень типу випадкових процесів. Отримані результати є розвитком досліджень, проведених у працях [7, 13, 15], на випадок дії зовнішніх збурень типу випадкових процесів.

Нехай $k(z)$ — неспадна невід'ємна функція, визначена на $[0, \infty)$.

Означення 1. Систему випадкових процесів

$$\{\alpha_j(t, \omega), j = \overline{1, 3r+1}, w_l(t, \omega), l = \overline{r+1, 2r+1}, \tilde{v}_k(t, v, \omega), k = \overline{2r+2, 3r+2}, u(t, \omega), t \geq 0\} \quad (12)$$

назвемо допустимою системою або допустимим керуванням, якщо:

1) вона визначена на просторі $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, \mathfrak{N}_y(\mathbf{Y}), P)$, де $\{F_t, t \geq 0\}$ – потік σ -алгебр, $\mathfrak{N}_y(\mathbf{Y})$ – σ -алгебра множини $\mathbf{Y} \equiv \{y_1, y_2, \dots, y_r\} \subset \mathbf{R}^r$;

2) $\alpha_j(t, \omega): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ – діагональні матриці, вимірні відносно мінімальної σ -алгебри $F_t \cap \mathfrak{N}_y(\mathbf{Y})$, попарно незалежні одна від одної та від n -вимірних вінерових процесів $w_j(t, \omega)$ і центрованих пуассонових мір $\tilde{\nu}_j(t, v, \omega)$, при цьому $\alpha_j(t, \omega) \in \mathbf{C}([- \Delta, \infty])$;

3) $u(t)$ — n -вимірний $F_t \cap \mathfrak{N}_y(\mathbf{Y})$ випадковий процес такий, що $|u(t, \omega)| \leq 1$ для всіх $t \geq 0$ з імовірністю 1 (майже скрізь);

4) $x(t, \omega) \in \mathbf{C}([- \Delta, \infty])$ заданий та фіксований випадковий процес $x(t, \omega): [- \Delta, \infty] \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n$.

Для допустимої системи (12) та її коефіцієнтів виконано умови теореми 1 (теореми порівняння). Ризик $x^u(t, \omega)$ для (12) визначається рівністю

$$\begin{aligned} x^u(t, \omega) = & x(\theta) + \int_0^t \sum_{j=r+1}^{2r+1} \alpha_j(s, \omega) b(s, y, x^u(s + \theta)) dw_j(s) + \\ & + \int_0^t \int \sum_{j=2r+2}^{3r+2} \alpha_j(s, \omega) c(s, x^u(s + \theta, \omega), v) \tilde{\nu}(ds, dv, \omega) + \int_0^t u(s) ds, \end{aligned} \quad (13)$$

за початковими умовами

$$\begin{aligned} x^u(t + \theta, \omega) \Big|_{t=0} &= x_0^u(\theta), \\ \alpha_j(t, \omega) \Big|_{t=0} &= \alpha_j^0(\omega), \quad j = \overline{1, 3r+2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Далі для скорочення доведення будемо вважати, що $\alpha_j(t, \omega) \equiv 0$, $j = \overline{1, r}$, $x_t^u \equiv \{x^u(t + \theta, \omega), \theta \in [- \Delta, 0], \Delta > 0\}$.

Постановка задачі мінімізації математичного сподівання $E\{k \| x_t^u \| \}$ виконується за всіма можливими системами (12). Будемо розв'язувати цю задачу згідно з методикою, викладеною в [7, 13].

Нехай $U(l)$ визначено в такий спосіб:

$$U(l) = \begin{cases} \frac{-l}{|l|}, & l \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}, \\ 0, & l = 0. \end{cases}$$

Розглянемо СДФР вигляду

$$\begin{aligned} dx(t, \omega) = & \sum_{j=r+1}^{2r+1} \alpha_j(t, \omega) b(t, x_t) dw_j(t, \omega) + \\ & + \int \sum_{j=2r+1}^{3r+2} \alpha_j(t, \omega) c(t, x_t, v) \tilde{v}(dt, dv, \omega) + U(x(t, \omega)) dt \end{aligned} \quad (15)$$

з початковими умовами

$$x(t + \theta, \omega)|_{t=0} = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-\Delta, 0), \Delta > 0; \quad (16)$$

$$x(t + \theta, \omega)|_{t=0} = x, \quad \alpha_j(t, \omega)|_{t=0} = \alpha_j, \quad j = 1, 2. \quad (17)$$

Відомо [7, 13], що розв'язок (15)-(17) існує та єдиний з імовірністю 1 за умовами теореми 1.

Нехай $u^0(s) \equiv U^0(x(t, \omega))$, тоді допустима система

$$\{\alpha_j^0(t, \omega), j = \overline{1, 3r+1}, w_l^0(t, \omega), l = \overline{r+1, 2r+1}, \tilde{v}_k^0(t, v, \omega), k = \overline{2r+2, 3r+2}, u^0(t, \omega), t \geq 0\}$$

задає оптимальне керування, тобто для довільної допустимої системи (12) матимемо, що

$$E\{k(|x(t, \omega)|)\} \leq E\{k(|x^u(t, \omega)|)\}.$$

Лема 1. Нехай система (12) — сукупність n -вимірних $\{F_t, \mathfrak{N}_y(\mathbf{Y})\}$ -узгоджених процесів, визначених на модифікованому просторі $(\Omega, F \cap \mathcal{N}, P)$ з потоком $\{F_t \cap \mathcal{N}(x)\}$; подібна сукупність

$$\{\tilde{\alpha}_j(t, \omega), j = \overline{1, 3r+1}, \tilde{w}_l(t, \omega), l = \overline{r+1, 2r+1}, \tilde{v}_k(t, v, \omega), k = \overline{2r+2, 3r+2}, \tilde{u}(t, \omega)\}$$

визначена на іншому модифікованому просторі $(\tilde{\Omega}, \tilde{F} \cap \tilde{\mathcal{N}}, \tilde{P})$ з потоком $\{\tilde{F}_t \cap \tilde{\mathcal{N}}(x)\}$.

Тоді існує модифікований простір $(\hat{\Omega}, \hat{F} \cap \hat{\mathcal{N}}, \hat{P})$ з потоком $\{\hat{F}_t \cap \hat{\mathcal{N}}(x)\}$ і сукупність

$$\{\hat{\alpha}_j(t, \omega), j = \overline{1, 3r+1}, \hat{w}_l(t, \omega), l = \overline{r+1, 2r+1}, \hat{v}_k(t, v, \omega), k = \overline{2r+2, 3r+2}, \hat{u}(t, \omega)\}$$

n -вимірних $\{\tilde{F}_t \cap \tilde{\mathcal{H}}(x)\}$ -узгоджених процесів таких, що:

1)

$$\{x(t, \omega), \alpha_j(t, \omega), j = \overline{1, 3r+1}, w_k(t, \omega), k = \overline{r+1, 2r+1}, \tilde{v}_l(t, A, \omega), l = \overline{2r+2, 3r+2}, A \in \tilde{\mathcal{H}}\} \approx^L \\ \approx^L \{\hat{x}(t, \omega); \hat{\alpha}_j(t, \omega), j = \overline{1, 3r+1}, \hat{w}_l(t, \omega), l = \overline{r+1, 2r+1}, \hat{v}_k(t, A, \omega), k = \overline{2r+2, 3r+2}, A \in \hat{\mathcal{H}}\}$$

;

2)

$$\{\tilde{x}(t, \omega), \tilde{\alpha}_j(t, \omega), j = \overline{1, 3r+1}, \tilde{w}_k(t, \omega), k = \overline{r+1, 2r+1}, \tilde{v}_l(t, A, \omega), l = \overline{2r+2, 3r+2}, A \in \tilde{\mathcal{H}}\} \approx^L \\ \approx^L \{\hat{x}(t, \omega); \hat{\alpha}_j(t, \omega), j = \overline{1, 3r+1}, \hat{w}_l(t, \omega), l = \overline{r+1, 2r+1}, \hat{v}_k(t, v, \omega), k = \overline{2r+2, 3r+2}, A \in \hat{\mathcal{H}}\}$$

;

3) $\{\hat{w}_k(t, \omega), k = \overline{r+1, 2r+1}\}$ — n -вимірні вінерові процеси;

4) $\{\hat{v}_k(t, v, \omega), k = \overline{2r+2, 3r+2}, A \in \hat{\mathcal{H}}\}$ — $n \times n$ -вимірні центровані

пуассонові міри.

Тут символ $\approx^L$ означає, що процеси мають однакові закони розподілу.

Доведення леми 1 проводиться аналогічно до доведення леми VI-2.1 [7].

За наведеними припущеннями справджується наступна теорема.

Теорема 2. Нехай (12) — довільна задана допустима система та для заданого $x \in \mathbf{R}^n$ розв'язок $\{x^u(t, \omega)\}$ визначається СДФР (13). Тоді на деякому модифікованому ймовірнісному просторі можна побудувати $\mathbf{R}^n$ -вимірні процеси $\{\tilde{x}^u(t, \omega)\}, \{\tilde{x}^0(t, \omega)\}$ та $\{\tilde{\alpha}_j^u(t, \omega), j = \overline{1, 3r+2}\}, \{\tilde{\alpha}_j^0(t, \omega), j = \overline{1, 3r+2}\}$ такі, що:

$$1) \{x^u(t, \omega)\} \approx^L \{\tilde{x}^u(t, \omega)\};$$

$$2) \{x^0(t, \omega)\} \approx^L \{\tilde{x}^0(t, \omega)\};$$

$$3) |\tilde{x}^0(t, \omega)| \leq |\tilde{x}^u(t, \omega)| \text{ для довільного } t \geq 0 \text{ з імовірністю } 1;$$

4) $\{\tilde{\alpha}_j^0(t, \omega), j = \overline{1, 3r+2}\} \stackrel{L}{\approx} \{\tilde{\alpha}_j^u(t, \omega), j = \overline{1, 3r+2}\}$ з імовірністю 1.

Доведення. Нехай (12) – задана допустима система, для якої (13), (14) є розв'язком рівняння (15)–(17).

Позначимо $\{x^0(t), \alpha^0(t), w^0(t), \tilde{v}^0(t, A)\}$ розв'язок рівняння (15)–(17) та випустимо для зручності відповідні індекси.

Виберемо $o(n)$ -значну борелеву функцію $\{p_{ij}(x)\}$ таку, що

$$p_{ij}(x) = \begin{cases} \frac{x^i}{|x|}, & x \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n) \neq 0, \\ \delta_{1j}, & x = 0. \end{cases}$$

Нехай

$$\bar{\alpha}^0(t, \omega) = \int_0^t p(x^0(s)) ds, \quad \bar{w}(t) = \int_0^t p(x^u(s)) dw(s), \quad \bar{w}^0(t) = \int_0^t p(x^0(s)) dw^0(s),$$

$$\bar{v}(t, \omega) = \int \int_0^t p(x^u(s, \omega)) \tilde{v}^0(dv, ds, \omega), \quad \bar{v}^0(t, \omega) = \int \int_0^t p(x^0(s, \omega)) \tilde{v}^0(dv, ds, \omega).$$

Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} x_u(t) &= x + \int_0^t \sum_{j=r+1}^{2r+1} \alpha_j^{-1}(s, \omega) p^{-1}(x^u(s, \omega)) d\bar{w}(t, \omega) + \\ &+ \int \int_0^t \sum_{k=2r+2}^{3r+2} \alpha_k^{-1}(s, \omega) p^{-1}(x^u(s, \omega)) \tilde{v}(dv, ds, \omega) + \int_0^t u(s) ds, \\ x^0(t, \omega) &= x + \int_0^t \sum_{j=r+1}^{2r+1} \alpha_j^{-1}(s, \omega) p^{-1}(x^0(s, \omega)) d\bar{w}^0(t, \omega) + \\ &+ \int \int_0^t \sum_{k=2r+2}^{3r+2} \alpha_k^{-1}(s, \omega) p^{-1}(x^0(s, \omega)) \bar{v}^0(dv, ds, \omega) + \int_0^t U(x^0(s, \omega)) ds. \end{aligned}$$

Застосовуючи лему 1 до $\{x^u(t, \omega), \bar{w}(t, \omega), \bar{v}(t, A, \omega)\}$ та $\{x^0(t, \omega), \bar{w}^0(t, \omega), \bar{v}^0(t, A, \omega)\}$, одержимо сукупність $\{\hat{x}^u(t, \omega), \hat{x}^0(t, \omega), \hat{w}(t, \omega), \hat{v}(t, A, \omega)\}$ відповідних процесів на ймовірнісному просторі з потоком $\{\hat{F}_t \cap \hat{\mathfrak{N}}(x)\}$ таких, що $\{\hat{w}(t, \omega)\}$ – $n \times r$ -вимірний $\hat{F}_t \cap \hat{\mathfrak{N}}(x)$ -вінеровий процес, $\{\hat{v}(t, A, \omega)\} \in \hat{F}_t \cap \hat{\mathfrak{N}}(x)$ – $n \times r$ -вимірна центрована пуассонова міра і для $A \in \mathfrak{N}$ виконуються співвідношення

$$\{x^u(t, \omega), \bar{w}(t, \omega), \bar{v}(t, A, \omega)\} \approx^L \{\hat{x}_u^t(t, \omega), \bar{w}(t, \omega), \hat{v}(t, A, \omega)\},$$

$$\{x^0(t, \omega), w^0(t, \omega), \bar{v}^0(t, A, \omega)\} \approx^L \{\hat{x}^0(t, \omega), w^0(t, \omega), \hat{v}^0(t, A, \omega)\}.$$

Очевидно, що існує $\hat{F}_t \cap \hat{\mathcal{H}}(x)$ -вимірний n -вимірний процес $\{u(t)\}$ такий, що $|\hat{u}(t)| \leq 1$ для довільного $t \geq 0$ і

$$\begin{aligned} \hat{x}_u(t, \omega) = & x + \int_0^t \sum_{j=r+1}^{2r+1} \alpha_j^{-1}(s, \omega) p^{-1}(\hat{x}^u(s, \omega)) d\hat{w}(s, \omega) + \\ & + \int_0^t \int_V \sum_{k=2r+2}^{3r+2} \alpha_k^{-1}(s, \omega) p^{-1}(\hat{x}_u(s, \omega)) \hat{v}(dv, ds, \omega) + \int_0^t \hat{u}(s, \omega) ds. \end{aligned}$$

Для спрощення викладок покладемо, що $\sum_{j=r+1}^{2r+1} \alpha_j^{-1}(t, \omega) = 1, \sum_{k=2r+2}^{3r+2} \alpha_k^{-1}(t, \omega) = 1$.

Застосовуючи формулу Іто–Скорохода до $x_1(t, \omega) = |\hat{x}^0(t, \omega)|^2$ та $x_2(t, \omega) = |\hat{x}^u(t, \omega)|^2$, одержимо

$$\begin{aligned} dx_2(t) = & 2\hat{x}^u(t, \omega) p^{-1}(\hat{x}^u(t, \omega)) d\hat{w}(t, \omega) + \int_V [|\hat{x}^u(t, \omega) + p^{-1}(\hat{x}^u(t, \omega))|^2 - \\ & - |\hat{x}^u(t, \omega)|^2]_1 \tilde{v}(dv, dt) + \{2\hat{x}^u(t, \omega) \hat{u}(t, \omega) + n + \int_V [|\hat{x}^u(t, \omega) + \\ & + p^{-1}(\hat{x}^u(t, \omega))|^2 - |\hat{x}^u(t, \omega)|^2 - 2\hat{x}^u(t, \omega) p^{-1}(\hat{x}^u(t, \omega))]_2 \Pi(du)\} dt = \\ = & 2|\hat{x}^u(t, \omega)| d\hat{w}^1(t, \omega) + \int_V [|\hat{x}^u(t, \omega) + p^{-1}(\hat{x}^u(t, \omega))|^2 - |\hat{x}^u(t, \omega)|^2]_1 \tilde{v}(dv, dt) + \\ & + \{2\hat{x}^u(t, \omega) \hat{u}(t, \omega) + n + \int_V [|\hat{x}^u(t, \omega) + p^{-1}(\hat{x}^u(t, \omega))|^2 - \\ & - |\hat{x}^u(t, \omega)|^2 - 2\hat{x}^u(t, \omega) p^{-1}(\hat{x}^u(t, \omega))]_2 \Pi(dv) dt = 2\sqrt{x_2(t, \omega)} d\hat{w}^1(t, \omega) + \\ & + \int_V [|\hat{x}^u(t, \omega) + p^{-1}(\hat{x}^u(t, \omega))|^2 - |\hat{x}^u(t, \omega)|^2]_1 \tilde{v}(dv, dt) + \\ & + \{2\hat{x}^u(t, \omega) \hat{u}(t, \omega) + n + \int_V [|\hat{x}^u(t, \omega) + p^{-1}(\hat{x}^u(t, \omega))|^2 - |\hat{x}^u(t, \omega)|^2 - \\ & - 2\hat{x}^u(t, \omega) p^{-1}(\hat{x}^u(t, \omega))]_2 \Pi(dv) dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dx_1(t, \omega) = & 2\hat{x}^0(t, \omega) p^{-1}(\hat{x}^0(t, \omega)) d\hat{w}(t, \omega) + \\ & + \int_V [|\hat{x}^0(t, \omega) + p^{-1}(\hat{x}^0(t, \omega))|^2 - |\hat{x}^0(t, \omega)|^2]_1 \tilde{v}^0(dv, dt) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \{2\hat{x}^0(t, \omega)U(x^0(t, \omega)) + n + \int_V [|\hat{x}^0(t, \omega) + p^{-1}(\hat{x}^0(t, \omega))|^2 - \\
& - |\hat{x}^0(t, \omega)|^2 - 2\hat{x}^0(t, \omega)p^{-1}(\hat{x}^0(t, \omega))]_2 \Pi(dv)\} dt = \\
& = 2|\hat{x}^0(t, \omega)| d\hat{w}^1(t, \omega) + \int_V [|\hat{x}^0(t, \omega) + p^{-1}(\hat{x}^0(t, \omega))|^2 - \\
& - |\hat{x}^0(t, \omega)|^2]_1 \hat{v}^0(dv, dt) + \{-2|\hat{x}^0(t, \omega)| + n + \int_V [|\hat{x}^0(t, \omega) + p^{-1}(\hat{x}^0(t, \omega))|^2 - \\
& - |\hat{x}^0(t, \omega)|^2 - 2\hat{x}^0(t, \omega)p^{-1}(\hat{x}^0(t, \omega))]_2 \Pi(dv) dt = 2\sqrt{x_1(t, \omega)} d\hat{w}^1(t, \omega) + \\
& + \int_V [|\hat{x}^0(t, \omega) + p^{-1}(\hat{x}^0(t, \omega))|^2 - |\hat{x}^0(t, \omega)|^2]_1 \bar{v}^0(dv, dt) + \{-2\sqrt{x_1(t, \omega)} + n + \\
& + \int_V [|\hat{x}^0(t, \omega) + p^{-1}(\hat{x}^0(t, \omega))|^2 - |\hat{x}^0(t, \omega)|^2 - 2\hat{x}^0(t, \omega)p^{-1}(\hat{x}^0(t, \omega))]_2 \Pi(dv)\} dt,
\end{aligned}$$

де $\hat{w}(t) = (\hat{w}^1(t), \hat{w}^2(t), \dots, \hat{w}^n(t))$.

Зауважимо, що

$$[xp^{-1}(x)]_i = \sum_j x_j (p^{-1}(x_j))_i = \sum_j x_j p_{ij}(x) = \delta_{i1} |x|.$$

Нехай

$$\begin{aligned}
& b(t, n) = 2\sqrt{x \vee 0}; \\
& b_1(t, x) = b_2(t, x) = -2\sqrt{x \vee 0} + n + \\
& + \int_V [|\hat{x}^u(t, \omega) + p^{-1}(\hat{x}^u(t, \omega))|^2 - |\hat{x}^u(t, \omega)|^2 - 2\hat{x}^u(t, \omega)p^{-1}(\hat{x}^u(t, \omega))]_2 \Pi(dv), \\
& \beta_2(t, \omega) = 2\hat{x}^u(t, \omega)\hat{u}(t, \omega) + n + \int_V [|\hat{x}^u(t, \omega) + p^{-1}(\hat{x}^u(t, \omega))|^2 - \\
& - |\hat{x}^u(t, \omega)|^2 - 2\hat{x}^u(t, \omega)p^{-1}(\hat{x}^u(t, \omega))]_2 \Pi(dv).
\end{aligned}$$

Тоді вочевидь, що $\beta_1(t, \omega) = b_1(t, x_1(t, \omega))$ і

$$\begin{aligned}
& \beta_2(t, \omega) \geq -2|\hat{x}^u(t, \omega)| + n + \int_V [|\hat{x}^u(t, \omega) + p^{-1}(\hat{x}^u(t, \omega))|^2 - \\
& - |\hat{x}^u(t, \omega)|^2 - 2\hat{x}^u(t, \omega)p^{-1}(\hat{x}^u(t, \omega))]_2 \Pi(dv) = b_2(t, x_2(t, \omega)).
\end{aligned}$$

Має місце [7, 13, 15] потраєкторна єдиність розв'язку для СДФР (10), (11). Отже, можна застосувати друге твердження теореми 1 і отримати нерівність $x_1(t, \omega) \leq x_2(t, \omega) \pmod{P}$ для довільного $t \geq 0$. Теорему 2 доведено.

У роботі доведено, що для допустимих систем вигляду (12) існує мінімальне значення математичного сподівання $E\{k\|x_t^u\|\}$. Розглянуто теорему порівняння для СДФР під дією зовнішніх збурень типу випадкових процесів, встановлено факт існування оптимального керування для цього класу систем.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ до §8

1. Bellman R. Dynamic programming and stochastic control processes. *Information and Control*. 1958. Vol.1, Iss.3. P.228-239.
[https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(58\)80003-0](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(58)80003-0).
2. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. Київ: Наук. думка, 1968. 354 с.
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение. Київ: Наук. думка, 1982. 612 с.
4. Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Об одном методе построения приближенного синтеза оптимального управления. *Доповіди АН УРСР. Сер.А*. 1978. №8. С.32–36.
5. Toshio Yamada. On a comparison theorem for solutions of stochastic differential equations and its applications. *Journal Math. Kyoto Univ*. 1973. Vol.13(3). P.497-512. <https://doi.org/10.1215/kjm/1250523321>.
6. Tokuzo Shiga. Diffusion processes in population genetics. *Journal Math. Kyoto Univ*. 1981. Vol.21 (1). P.133-151.
7. Ikeda N., Watanabe S. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. Amsterdam: North-Holland Mathematical Library, 1989. 568 p.
8. Knopov P.S. Optimization and Identification of Stochastic Systems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2023. Vol.59(3). P.375–384.
<https://doi.org/10.1007/s10559-023-00572-4>.
9. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциальные уравнения. Рига: Ориентир, 1992. 328 с.

10. Øksendal B. Stochastic Differential Equations An Introduction with Applications. Sixth Edition. Heidelberg New York Dordrecht London: Springer Science+Business Media, 2013. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-14394-6>.
11. Åström K.J. Introduction to Stochastic Control Theory. Dover Publications, 2006. 320 p.
12. Yurchenko I.V. The Comparison Theorem for the Solution of the Stochastic Differential Functional Equations. Міжнародна математична конференція, присвячена пам'яті Ганса Гана. Матеріали. Чернівці: Рута, 1995. С.322–332.
13. Yasyns'kyi V.K., Sverdan M.L., Yurchenko I.V. On one problem of stochastic control. *Ukrainian Mathematical Journal*. 1995. Vol.47, №11. P.1788–1797. <https://doi.org/10.1007/BF01057927>.
14. Свердан М.Л., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Стійкість у стохастичному моделюванні складних динамічних систем.— Снятин: Над Прутом, 1996.— 448 с.
15. Ясинський В.К., Юрченко І.В. Стійкість та оптимальне керування в стохастичних динамічних системах з випадковими операторами. Видання друге, доповнене.— Чернівці: Технодрук, 2019.— 258 с.

§9. ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ ТА МЕТОДИ ЙОГО КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

9.1. Огляд проблеми

У даному параграфі досліджується задача Коші для стохастичного диференціально-функціонального рівняння з частинними похідними спеціального вигляду, яке описує динамічні процеси з пам'яттю під впливом випадкових збурень. Зокрема, вивчаються математичні умови, що гарантують існування та єдиність розв'язку такого рівняння. Теоретичні результати базуються на сучасному апараті стохастичного аналізу та функціонального диференціального числення.

Оскільки розв'язання подібних рівнянь у загальному випадку не може бути отримано аналітично, у роботі розглянуто підходи до їх наближеного чисельного розв'язання. Описано дискретизацію простору та часу, а також способи апроксимації функціональних членів рівняння з використанням буфера пам'яті. Розглянуто реалізацію шумового впливу через додавання просторово-часового стохастичного збурення, змодельованого на основі вінерового процесу.

Для перевірки теоретичних результатів і практичної ілюстрації динаміки процесів з пам'яттю розроблено комп'ютерну програму на мові Python, яка реалізує алгоритм розв'язання з використанням методу наближених обчислень Ейлера-Маруяма. Розглянуто рівняння, що описує еволюцію системи з урахуванням просторового поширення (дифузії), згасання, впливу історії станів (ефект пам'яті) та випадкових збурень (шуму). Для наближеного розв'язання цього рівняння використовується дискретизація простору і часу та апроксимація інтегралу пам'яті як середнього по буферу попередніх значень. Побудовано графічну візуалізацію зміни стану системи в просторі та часі та теплову карту (heatmap), яка показує, як "розливається" і коливається функція $u(t, x)$ у просторі та часі під впливом пам'яті та шуму. Отримані результати мають перспективу

подальшого використання в теорії та практиці комп'ютерного моделювання складних динамічних систем з ефектами пам'яті та стохастичними збуреннями. Зокрема, розроблені підходи можуть бути застосовані до моделювання процесів у фізиці (теплопровідність із запізненням, дифузія в середовищах зі структурною пам'яттю), біології та екології (розповсюдження популяцій або інфекцій з інкубаційними періодами), фінансовій математиці (волатильність із залежністю від минулих станів), а також у технічних та інформаційних системах керування зі стохастичними впливами й запізненням сигналу.

Дослідженню детермінованих рівнянь у частинних похідних присвячено численну кількість робіт, зазначених у монографіях [1, 2] та не меншу кількість опублікованих робіт науковців наприкінці ХХ – початку ХХІ ст., зокрема, праці А.Д. Мишкіса, М.В. Азбелева, Ю.О. Митропольського, А.М. Самойленка, М.М. Перестюка, В.П. Рубаника, В.І. Фодчука, Д.І. Мартинюка, Дж. Хейла, Е.М. Райта, Р. Беллмана та багатьох інших. Після введення поняття стохастичного диференціалу та інтеграла, заміни змінних для стохастичного диференціалу, визначення сильного розв'язку стохастичного диференціального рівняння (СДР) у відомих роботах [3–7] та їх подальше поширення на класи стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з частинними похідними (СДФРЧП) [8–11] (див. наведену бібліографію в цих роботах) стало можливим дослідження асимптотично сильного розв'язку для СДФРЧП. Зокрема, у монографії [12] доводиться теорема про розв'язність задачі Коші для лінійного параболічного стохастичного рівняння з неперервними збуреннями, розв'язання якого в фіксовані моменти часу зазнає імпульсного впливу. Подальше дослідження СДФРЧП йшло шляхом створення математичних моделей складних реальних систем, які вимагають враховувати випадкові параметри у цих рівняннях (див., наприклад, роботи [13–18]).

9.2. Постановка задачі

Нехай на ймовірнісному базисі

$$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \forall \{t_1, t_2\} \subset [0, T], \mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}, t_1 < t_2; \mathbf{P})$$

задано стохастичне диференціально-функціональне рівняння з частинними похідними спеціального вигляду (СДФРЧПСВ) під дією випадкових процесів $\{\alpha(t, \omega), \beta(t, \omega)\}: [0, T] \equiv \mathbf{T} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ з простору Скорохода $\mathbf{D}$ неперервних праворуч процесів, що мають лівосторонні границі [3,4]

$$du(t, x, \omega) = a(t, u_t, B_x u_t, \dots, B_{m_x} u_t, \alpha(t, \omega)) dt + b(t, u_t, B_x u_t, \dots, B_{m_x} u_t, \beta(t, \omega)) dw(t, \omega) \quad (1)$$

за початковими умовами

$$\begin{aligned} u_t|_{t=0} &\equiv u(t+\theta, x, \omega)|_{t=0} = \varphi_0(\theta, \omega), \\ B_{kx} u_t|_{t=0} &\equiv B_{kx} u(t+\theta, x, \omega)|_{t=0} = \varphi_k(\theta, \omega), \end{aligned} \quad (2)$$

де $\theta \in [-\Delta, 0]$, $\Delta > 0$; $k = 1, 2, \dots, m-1$; $u(t, x, \omega): \mathbf{T} \times X \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$; $u(t+\theta, x, \omega) \equiv u_t$; $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset X \subset \mathbf{R}^1$; неперервні випадкові процеси $\{\alpha(t, \omega), \beta(t, \omega)\}: \mathbf{T} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ та одновимірний вінерів процес попарно незалежні, при цьому $\mathbf{E}\{w(t_2 - t_1, \omega)\} = 0$; $\mathbf{E}\{w^2(t_2 - t_1, \omega)\} = t_2 - t_1$, $t_1 < t_2$ для довільних $\{t_1, t_2\} \subset \mathbf{T} \equiv [0, T]$, $T > 0$;

$$B_{kx} u_t \equiv \frac{\partial^k u(t+\theta, x, \omega)}{\partial x_1^{\gamma_1} \dots \partial x_n^{\gamma_n}}, \quad \gamma_1 + \dots + \gamma_n = k, \quad (3)$$

$k = \overline{1, m}$, $\theta \in [-\Delta, 0]$; $a(t, \cdot, \dots, \alpha(t, \omega))$ та $b(t, \cdot, \dots, \beta(t, \omega))$ є неперервними функціоналами від другого до передостаннього аргументу, а також неперервні по $t \in T$ та $\alpha(t, \omega)$ і $\beta(t, \omega)$.

Зауважимо, що при $\theta = 0$ матимемо стохастичне диференціальне рівняння з частинними похідними; при $\theta = -\Delta$, $\Delta > 0$ матимемо стохастичне диференціально-різницеve рівняння за Беллманом і Куком [1].

Лема 1. При виконанні вищенаведених умов існує такий зв'язок оригінала $u(t, x, \omega)$ та зображення $v(t, \omega)$ перетворення Фур'є

$$\|u(t, x, \omega)\|_{E_1} = 2\pi \|v(t, \sigma, \omega)\|_{2\mathbf{R}_+}, \quad \sigma > 0. \quad (4)$$

Доведення. Існування перетворення Фур'є [4]

$$\Phi\{u(t, x, \omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{E_1} e^{i\sigma x} u(t, x, \omega) dx \equiv v(t, \omega)$$

з імовірністю одиниця ($\text{mod } \mathbf{P}$) виконується завдяки приналежності розв'язку $u(t, x, \omega): \mathbf{T} \times X \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ до простору неперервних для кожного $t \in \mathbf{T}$ та $x \in X \subset E_1$ та інших аргументів. Це випливає з нерівності Чебишова [3,4]

$$\mathbf{P}\left\{\omega: |u(t, x, \omega)|^2 > N\right\} \leq \frac{\mathbf{E}\{|u(t, x, \omega)|^2\}}{N} \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow +\infty$, $\mathbf{E}\{\cdot\}$ – операція математичного сподівання.

Зауважимо, що під формальним записом СДФРЧПСВ (1) розуміємо інтегральне стохастичне диференціально-функціональне рівняння Вінера-Іто [3,4,8,9] вигляду

$$\begin{aligned} u(t, x, \omega) = & u_0 + \int_0^t a(s, u_s, B_x u_s, \dots, B_m u_s, \alpha(s, \omega)) ds + \\ & + \int_0^t b(s, u_s, B_x u_s, \dots, B_m u_s, \beta(s, \omega)) dw(s, \omega). \end{aligned} \quad (5)$$

За теоремою Планшереля [1,3,8] виконується інтегральна рівність

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t, \sigma, \omega)|^2 d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx. \quad (6)$$

Тоді, з урахуванням означення норм, матимемо рівність

$$\|v(t, \sigma, \omega)\|_{2\mathbf{R}_+} = \frac{1}{2\pi} \|u(t, x, \omega)\|_{E_1}, \quad (7)$$

що й доводить лему 1.

Якщо $\mathbf{E}\{v^2(t, \omega)\} \equiv \varphi(t)$ є скалярною детермінованою функцією $\varphi(t): \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{R}^1$, то маємо нерівність Гронуолла [1,8,9].

Зауважимо, що рівність (4) можна посилити на σ -алгебри $\sigma(E_1), \sigma(2\mathbf{R}_+)$:

$$\|u(t, x, \omega)\|_{\sigma(E_1)} = 2\pi \|v(t, \omega)\|_{\sigma(2\mathbf{R}_+)}.$$

Застосуємо перетворення Фур'є до (1)–(3), тоді матимемо СДФР вигляду

$$dv(t, \omega) = a(t, v_t(\omega), \tilde{B}_1 v_t, \dots, \tilde{B}_m v_t, \alpha(t, \omega)) dt +$$

$$+b(t, v_t(\omega), \tilde{B}_1 v_t, \dots, \tilde{B}_m v_t, \beta(t, \omega)) dw(t, \omega), \quad (8)$$

$$v_t(\omega)|_{t=0} = v(t + \theta, \omega)|_{t=0} = \Phi(u_t(\omega))|_{t=0} = \varphi(\theta) = \varphi_0, \quad (9)$$

де $\theta \in [-\Delta, 0]$,

$$\tilde{B}_k v_t|_{t=0} = \Phi(B_{kx}, u_t) = \varphi_k(\theta) \equiv \varphi_k, \quad k = \overline{1, m}.$$

Зауваження 1. Виконання рівності (4) леми 1 означатиме, що властивості (та умови, що породжують ці властивості) розв'язку $v(t, \omega): \mathbf{T} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ задачі Коші СДФР вигляду (8)–(9) збігаються з властивостями розв'язку $u(t, x, \omega): \mathbf{T} \times X \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ СДФРЧПСВ (1)–(3) (як перетворення Фур'є відповідного розв'язку).

Надалі будемо вважати, що існують пряме та обернене перетворення Фур'є від коефіцієнтів $a(t, x, u_t, B_x u_t, \dots, B_{mx} u_t, \alpha(t, \omega))$ та $b(t, u_t, B_x u_t, \dots, B_{mx} u_t, \beta(t, \omega))$, тобто пряме перетворення Фур'є $\Phi(a(t, x, u_t, B_x u_t, \dots, B_{mx} u_t, \alpha(t, \omega)))$, $\Phi(b(t, u_t, B_x u_t, \dots, B_{mx} u_t, \beta(t, \omega)))$, де $u_t \equiv u(t + \theta, x, \omega)$, $\theta \in [-\Delta, 0]$, $x \in X \subset \mathbf{R}^1$ та відповідне обернене перетворення Фур'є $\Phi^{-1}(\cdot)$ такі, що

$$v(t, \sigma, \omega) = \Phi\{u(t, x, \omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{E_1} e^{i\sigma x} u(t, x, \omega) dx, \quad \sigma > 0,$$

$$\Phi^{-1}\{v(t, \sigma, \omega)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-i\sigma x} v(t, \sigma, \omega) d\sigma.$$

Зауваження 2. Частинним випадком СДФРЧПСВ (1)–(3) є випадок $m = 2$ та $a(\cdot) \equiv \alpha(t, \omega) a_1(\cdot)$, $b(\cdot) \equiv \beta(t, \omega) b_1(\cdot)$, тобто

$$\begin{aligned} du(t, x, \omega) &= \alpha(t, \omega) a_1(t, u_t, B_x u_t, B_{xx} u_t) dt + \\ &+ \beta(t, \omega) b_1(t, u_t, B_x u_t, B_{xx} u_t) dw(t, \omega) \end{aligned} \quad (10)$$

за умов

$$u_t|_{t=0} = \varphi(\theta), \quad B_x u_t|_{t=0} = \varphi_1(\theta). \quad (11)$$

Таке представлення корисне при переході від (10)–(11) до еквівалентного квазілінійного СДФРЧП вигляду

$$du^*(t, x, \omega) = \left[Au_t^*(\omega) + a^*(t, u_t^*, B_x u_t^*, B_{xx} u_t^*, \alpha(t, \omega)) \right] dt + \\ + \left[Bu_t^*(\omega) + b^*(t, u_t^*, B_x u_t^*, B_{xx} u_t^*, \beta(t, \omega)) \right] dw(t, \omega), \quad (12)$$

$$u_t^*|_{t=0} = \varphi(\theta), \quad (13)$$

$$B_x u_t^*|_{t=0} = \varphi_1(\theta) \quad (14)$$

заміною

$$a(t, u_t, B_x u_t, B_{xx} u_t, \alpha(t, \omega)) = \frac{Au_t^*(\omega) + a^*(t, u_t^*, B_x u_t^*, B_{xx} u_t^*, \alpha(t, \omega))}{a(t, u_t^*, B_x u_t^*, B_{xx} u_t^*, \alpha(t, \omega))}, \quad (15)$$

$$b(t, u_t, B_x u_t, B_{xx} u_t, \beta(t, \omega)) = \frac{Bu_t^*(\omega) + b^*(t, u_t^*, B_x u_t^*, B_{xx} u_t^*, \beta(t, \omega))}{b(t, u_t^*, B_x u_t^*, B_{xx} u_t^*, \beta(t, \omega))}, \quad (16)$$

Це дає можливість для слабонелінійних вихідних СДФРЧП (1)–(3) звести дослідження на асимптотичну стійкість у середньому квадратичному до дослідження на асимптотичну стійкість лінійного СДФРЧП вигляду [8,9]

$$du^*(t, x, \omega) = Au_t^* dt + Bu_t^* dw(t, \omega), \quad (17)$$

$$u_t^*(x, \omega)|_{t=0} = \psi(\theta, \omega). \quad (18)$$

Якщо (1)–(3) є сильно нелінійним СДФРЧП або нелінійним змішаного типу, то дослідження (1)–(3) на стійкість у середньому квадратичному проводиться другим методом Ляпунова-Красовського [8,9].

Теорема 1. Нехай на ймовірнісному базисі задана задача Коші для вихідного СДФРЧП (1)–(3) та виконуються умови:

- 1) нелінійні функціонали $a(t, \cdot, \cdot, \cdot, \alpha(t, \omega))$ та $b(t, \cdot, \cdot, \cdot, \beta(t, \omega))$ з імовірністю одиниця належать до класу неперервних функціоналів;
- 2) $a(t, \cdot, \cdot, \cdot, \alpha(t, \omega))$, $b(t, \cdot, \cdot, \cdot, \beta(t, \omega))$ задовольняють умову Ліпшиця за всіма аргументами від другого до m -го з імовірністю одиниця зі сталою $L > 0$ та при всіх $\alpha(t, \omega)$, $\beta(t, \omega)$;

- 3) випадкові процеси $\{\alpha(t, \omega), \beta(t, \omega)\}: \mathbf{T} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ і вінеровий процес $w(t, \omega): \mathbf{T} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ ($\mathbf{E}\{w(t, \omega)\} = 0, \mathbf{E}\{w^2(t, \omega)\} = t$) попарно незалежні;
- 4) функціонали a та b задовольняють при $t \in \mathbf{T}$ умови обмеженості вигляду:

$$a(t, \cdot, \cdot, \cdot, \alpha(t, \omega)) \leq a(0, \cdot, \cdot, \cdot, \alpha(0, \omega)), \quad (19)$$

$$b(t, \cdot, \cdot, \cdot, \beta(t, \omega)) \leq b(0, \cdot, \cdot, \cdot, \beta(0, \omega)), \quad (20)$$

якщо

$$\begin{aligned} \alpha(t, \omega) &\leq \alpha(0, \omega), \quad \beta(t, \omega) \leq \beta(0, \omega), \quad t \in \mathbf{T}, \\ \alpha(0, \omega) &= \sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{\omega \in \Omega} \alpha(t, \omega), \quad \beta(0, \omega) = \sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{\omega \in \Omega} \beta(t, \omega). \end{aligned} \quad (21)$$

Тоді зі ймовірністю одиниця існує розв'язок СДФРЧП (1)–(3).

Доведення існування розв'язку СДФРЧП (1)–(3) складається з двох частин – прямого та оберненого ходу.

Прямий хід містить кроки А-D.

Крок А. Застосувавши перетворення Фур'є до рівняння (1)–(3), отримуємо

$$v(t, \omega) \equiv \Phi(u(t, x, \alpha)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x} u(t, x, \omega) dx, \quad \sigma > 0, \quad (22)$$

одержимо СДФРЧП для зображень вигляду

$$\begin{aligned} dv(t, \omega) &= a(t, v_t, \tilde{B}_1 v_t, \dots, \tilde{B}_m v_t, \alpha(t, \omega)) dt + \\ &+ b(t, v_t, \tilde{B}_1 v_t, \dots, \tilde{B}_m v_t, \beta(t, \omega)) dw(t, \omega), \end{aligned} \quad (23)$$

де $v_t \equiv v(t + \theta, \omega) = \Phi(u_t)$, за умов

$$v_t|_{t=0} \equiv v(t + \theta, \omega)|_{t=0} = v_0(\theta), \quad (24)$$

$$\tilde{B}_l v_t|_{t=0} = \Phi(B_{lx} u_t)|_{t=0} = v_l(\theta), \quad l = \overline{1, m}, \quad \theta \in [-\Delta, 0]. \quad (25)$$

Крок В. Від (23)–(25) переходимо до апроксимуючого рівняння

$$\begin{aligned} d\tilde{v}(t, \omega) &= a(0, \tilde{v}_t, \tilde{B}_1 v_t, \dots, \tilde{B}_m v_t, \alpha(0, \omega)) dt + \\ &+ b(0, \tilde{v}_t, \tilde{B}_1 v_t, \dots, \tilde{B}_m v_t, \beta(0, \omega)) dw(t, \omega), \end{aligned} \quad (26)$$

якщо

$$\alpha(t, \omega) \leq \alpha_0, \quad \beta(t, \omega) \leq \beta_0, \quad t \in \mathbf{T},$$

$$\alpha_0 \equiv \alpha(0, \omega), \quad \beta_0 \equiv \beta(0, \omega),$$

$$a(t, \dots, \alpha(t, \omega)) \leq a(0, \dots, \alpha(0, \omega)), \quad b(t, \dots, \beta(t, \omega)) \leq b(0, \dots, \beta(0, \omega)),$$

за умов

$$\tilde{v}_t|_{t=0} = \tilde{\varphi}_0(\omega), \quad t \in [-\Delta, 0], \quad (27)$$

$$B_k \tilde{v}_t|_{t=0} = \tilde{\varphi}_k(\omega), \quad k = \overline{1, m-1}, \quad \theta \in [-\Delta, 0]. \quad (28)$$

Отже, можна вважати, що розв'язки (23) та (26) пов'язані нерівністю

$$v(t, \omega) \leq \tilde{v}(t, \omega), \quad t \in [-\Delta, \infty). \quad (29)$$

Крок С. Доведення існування розв'язку $\tilde{v}(t, \omega)$ задачі Коші СДФР (26)–(28) проводиться локальним методом кроків (ЛМК) з переходом на глобальний метод кроків, який полягає в наступному:

- 1) спочатку доводиться існування неперервного розв'язку СДФР (26)–(28) $\tilde{v}(t, \omega)$ на відрізку $[0, \Delta]$ за принципом стислих відображень, використовуючи початкові значення $\varphi_k(\theta)$, $k = \overline{0, m-1}$, $\theta \in [-\Delta, 0]$, $\Delta > 0$;
- 2) відбувається перестановка знайдених значень $\tilde{v}(t, \omega)$, $t \in [0, \Delta]$ на місце початкових, що будуть виступати в якості початкових для знаходження $\tilde{v}(t, \omega)$ на відрізку $[\Delta, 2\Delta]$;
- 3) пункт 2 повторюємо N разів;
- 4) припиняємо процес знаходження розв'язку $\tilde{v}(t, \omega)$ рівняння (26)–(28) на відрізку $[(N-1)\Delta, N\Delta]$, якщо $N\Delta = T$.

Крок D. На кожному відрізку $[(k-1)\Delta, k\Delta]$, $k = \overline{1, N}$, працює ЛМК знаходження розв'язку $\tilde{v}(t, \omega): \mathbf{T} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$, якщо $\Delta t = \frac{k\Delta}{n} > 0$, $n = 10^3 \sim 10^6$.

Існування розв'язку $\tilde{v}(t, \omega)$ при застосуванні ЛМК обґрунтовується принципом стислих відображень. Опишемо його застосування, а саме, визначимо для $\tilde{v}(t, \omega): \mathbf{T} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ простір Σ як повний простір випадкових

процесів $\tilde{v}(t, \omega)$ з $[-\Delta, T]$, вимірних відносно простору σ -алгебр $\Sigma_t \equiv \mathfrak{N}_1(dw(t, \omega)) \cup \mathfrak{N}_2(\alpha(t, \omega)) \cup \mathfrak{N}_3(\beta(t, \omega)) \cup \bigcup_{j=4}^{m-1} \mathfrak{N}_j(\varphi_j(t, \omega))$, $t \in [-\Delta, 0]$, з нормою

$$\|v(t, \omega)\|_{\Sigma}^2 \equiv \mathbf{E} \left\{ \sup_{-\Delta \leq t \leq T} |\tilde{v}(t, \omega)|^2 \right\} < \infty.$$

Визначимо для $\tilde{v}(t, \omega) \in \Sigma$ оператор

$$\begin{aligned} (S\tilde{v}(t, \omega))(t) = & v(0, \omega) + \int_0^t a(s, \tilde{v}_s, B_1 \tilde{v}_s, \dots, B_m \tilde{v}_s, \alpha(s, \omega)) ds + \\ & + \int_0^t b(s, \tilde{v}_s, B_1 \tilde{v}_s, \dots, B_m \tilde{v}_s, \beta(s, \omega)) dw(s, \omega), \end{aligned} \quad (30)$$

$$(S\tilde{v}(t, \omega))(t) = (\varphi_0(t, \omega), \varphi_1(t, \omega), \dots, \varphi_{m-1}(t, \omega), \alpha(t, \omega), \beta(t, \omega)), \quad t \in [-\Delta, 0].$$

Для скорочення подальших записів покладемо $\varphi_j(t, \omega) = \varphi_{j0} = \text{const}$, $t \in [-\Delta, 0]$.

З властивостей інтегралів Рімана та Вінера-Іто, зауважень 1, 2 та умов теореми 1 випливає, що оператор S переводить простір Σ у простір Σ .

Рівняння (26) еквівалентне рівнянню

$$\tilde{v} = S\tilde{v}. \quad (31)$$

Тому доведення існування розв'язку $\tilde{v}(t, \omega)$ СДФР (26) еквівалентне доведенню існування єдиної нерухомої точки оператора S^n у просторі Σ [3,19,20]. Визначимо оператор S^n , ($n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{N}$ – множина натуральних чисел), як n -кратне послідовне застосування оператора S .

При виконанні умов Ліпшиця можна одержати нерівність

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\{ \sup_{t-\Delta \leq s \leq t} \left| (S\tilde{v}^{(1)}(t, \omega))(s) - (S\tilde{v}^{(2)}(t, \omega))(s) \right|^2 \right\} \leq \\ \leq 3(T+3)T \|\tilde{v}^{(1)}(t, \omega) - \tilde{v}^{(2)}(t, \omega)\|_{\Sigma}^2, \end{aligned} \quad (32)$$

де для всіх $t \in [0, T]$, $\tilde{v}^{(1)}(t, \omega)$ та $\tilde{v}^{(2)}(t, \omega)$ – розв'язки СДФР (26)–(28).

Тоді для довільних $l \in \mathbf{N}$ за умов теореми 1 та нерівності (32) можна, послідовно змінюючи $l = \overline{1, n}$, одержати нерівність

$$\begin{aligned} \|S^l \tilde{v}^{(1)}(t, \omega) - S^l \tilde{v}^{(2)}(t, \omega)\|_{\Sigma}^2 &= \mathbf{E} \left\{ \sup_{-\Delta \leq s \leq T} \left| (S^l \tilde{v}^{(1)}(t, \omega))(s) - (S^l \tilde{v}^{(2)}(t, \omega))(s) \right|^2 \right\} \leq \\ &\leq \frac{3T^{n+1}}{l!} \|\tilde{v}^{(1)}(t, \omega) - \tilde{v}^{(2)}(t, \omega)\|_{\Sigma}^2, \end{aligned} \quad (33)$$

де $\mathbf{E}\{\cdot\}$ – операція математичного сподівання.

З нерівності (33) одержуємо, що для довільного додатного $T > 0$ та досить великого $l \in \mathbf{N}$ оператор S є стискаючим [1,3,9]. Отже, у нього існує нерухома точка $\tilde{v}$ з Σ , тобто виконується рівність

$$\tilde{v} = S^l \tilde{v}. \quad (34)$$

Випадковий процес $\tilde{v}(t, \omega)$ є розв'язком СДФР (26)–(28), оскільки для довільних $l \in \mathbf{N}$ з (30) випливає нерівність

$$\|\tilde{v} - S\tilde{v}\|_{\Sigma} = \|S^{kl} \tilde{v} - S^{k(l+1)} \tilde{v}\|_{\Sigma} \leq \frac{3(Tk+1)^{lk} T^{lk}}{(lk)!} \|\tilde{v} - S\tilde{v}\|_{\Sigma}. \quad (35)$$

З (35) при $l \rightarrow +\infty$ випливає існування нерухомої точки $\tilde{v}(t, \omega)$, яка є розв'язком (26)–(28).

За оберненим ходом за теоремою порівняння [1,3,19] існує $v(t, \omega)$ як розв'язок (23)–(25) з урахуванням зауваження 1, оскільки $v(t, \omega) \leq \tilde{v}(t, \omega)$ для всіх $t \in [0, T]$. З урахуванням леми 1 та зауваження 1 отримуємо, що існує $u(t, x, \omega)$ як розв'язок задачі Коші (1)–(3).

Неперервність $u(t, x, \omega)$ за змінною $t \in [0, T]$ випливає з еквівалентного до СДФРЧП (1) інтегрального функціонального рівняння вигляду

$$\begin{aligned} u(t, x, \omega) &= u_0 + \int_0^t a(s, u_s, B_x u_s, \dots, B_m u_s, \alpha(s, \omega)) ds + \\ &+ \int_0^t b(s, u_s, B_x u_s, \dots, B_m u_s, \beta(s, \omega)) dw(s, \omega), \end{aligned}$$

оскільки інтеграл Рімана та інтеграл Вінера-Іто є неперервними випадковими процесами [4]. Теорему 1 доведено.

Для доведення єдиності розв'язку СДФРЧП (1)–(3) за $\text{mod } \mathbf{P}$ сформулюємо узагальнену лему Гронуолла для випадкових процесів.

Лема 2. Нехай $v(t, \omega): \mathbf{T} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ задовольняє такі умови:

- 1) $\in \mathfrak{N}_t$ -вимірною;
- 2) $v(t, \omega) \geq 0$;
- 3) обмежена дійсним числом;
- 4) $v(t, \omega) \equiv 0$ для довільного $t \in [-\Delta, 0]$;
- 5) задовольняє для $t > 0$ нерівність

$$P\left\{\omega: v(t, \omega) \leq L \int_{0-\Delta}^t \int_0^{\tau} v(t+s, \omega) d\beta(s) ds\right\} = 1. \quad (36)$$

Тоді виконується співвідношення

$$P\{\omega: v(t, \omega) = 0\} = 1 \quad \forall t > 0. \quad (37)$$

Доведення. Проінтегруємо неівність з (36)

$$\begin{aligned} v(t, \omega) &\leq L \int_{0-\Delta}^t \int_0^{\tau} \int_0^{\tau} v(\tau_1 + s_1, \omega) d\beta(s_1) ds d\beta(s) d\tau \leq \\ &\leq L^2 K_1 K \int_{0-\Delta}^t \int_0^{\tau} d\tau_1 d\beta(s) d\tau \leq L^2 K_1^2 t^2 K \pmod{\mathbf{P}}, \end{aligned}$$

де $\beta(s)$ – функція обмеженої варіації,

$$|v(t, \omega)| \leq K; \quad \int_{-\Delta}^0 d\beta(s) \leq K; \quad \int_{0-\Delta}^t \int_0^{\tau} \tau d\beta(s) d\tau \leq \frac{K_1 t^2}{2}.$$

Повторюючи ітерації l разів, одержимо нерівність

$$v(t, \omega) \leq \frac{(LK_1 T)^l K^{l-1}}{l!} \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} 0 \pmod{\mathbf{P}}. \quad (38)$$

Лема 2 доведена.

9.3. Єдиність розв'язку задачі Коші СДФРЧР (1)–(3)

Теорема 2. Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathfrak{F}, \{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}, \forall \{t_1, t_2\} \subset [0, T], \mathfrak{F}_{t_1} \subset \mathfrak{F}_{t_2}, t_1 < t_2; \mathbf{P})$ задано задачу Коші (1)–(3) та виконуються такі умови:

- 1) коефіцієнти $\alpha(t, \cdot, \alpha)$ і $\beta(t, \cdot, \beta)$ неперервні за всіма аргументами;

2) одновимірні неперервні випадкові процеси $\alpha(t, \omega)$, $\beta(t, \omega)$ і вінеровий

процес $w(t, \omega)$ попарно незалежні, $E\{\Delta w(t, \omega)\} = 0$, $E\{\Delta^2 w(t, \omega)\} = \Delta t^2$;

3) коефіцієнти $a(t, \cdot, \alpha)$ і $\beta(t, \cdot, \beta)$ задовольняють умови обмеженості

$$\begin{aligned} & \left| a(t, u_t, B_x u_t, \dots, B_{m_x} u_t, \alpha) \right|^2 + \left| b(t, u_t, B_x u_t, \dots, B_{m_x} u_t, \beta) \right|^2 \leq \\ & \leq l \left(1 + \|u(t + \theta, x, \omega)\|^2 \right), \quad u_t \equiv u(t + \theta, x, \omega), \quad \theta \in [-\Delta, 0], \quad \Delta > 0, \quad x \in X \subset \mathbf{R}^1; \end{aligned} \quad (39)$$

4) виконується нерівність вигляду

$$\begin{aligned} & \left| a(t, u_t^{(1)}, B_x u_t^{(1)}, \dots, B_{m_x} u_t^{(1)}, \alpha) - a(t, u_t^{(2)}, B_x u_t^{(2)}, \dots, B_{m_x} u_t^{(2)}, \alpha) \right|^2 + \\ & + \left| b(t, u_t^{(1)}, B_x u_t^{(1)}, \dots, B_{m_x} u_t^{(1)}, \beta) - b(t, u_t^{(2)}, B_x u_t^{(2)}, \dots, B_{m_x} u_t^{(2)}, \beta) \right|^2 \leq \\ & \leq l_r \|u_t^{(1)}(x, \omega) - u_t^{(2)}(x, \omega)\|^2, \quad l_r > 0, \end{aligned} \quad (40)$$

де $u_t^{(j)}(x, \omega) \equiv u_t^{(j)}(t + \theta, x, \omega)$, $j = 1, 2$, $\theta \in [-\Delta, 0]$, $\Delta > 0$; $B_{kx} u_t^{(j)}(x, \omega)$ – частинні похідні k -го порядку по x , $k = \overline{1, m}$, $\|u_t^{(j)}\| \equiv \|u^{(j)}(t + \theta, x, \omega)\| \leq r$, $j = 1, 2$.

Тоді існує єдиний розв'язок $u(t, x, \omega): T \times X \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^1$ з імовірністю одиниця (mod P).

Доведення. Під нормою розумітимемо вираз [1,4], який враховує післядію $\theta \in [-\Delta, 0]$ вигляду

$$\|u_t(x, \omega)\|^2 = u_{0t} + \int_{-\Delta}^0 |u(t + \theta, x, \omega)|^2 d\theta, \quad (41)$$

де θ враховує значення розв'язку СДФРЧП (1)–(3) на відрізку часу $[t, t + \theta]$, $t \in \mathbf{R}_+^1$, $\theta \in [-\Delta, 0]$.

Доведення будемо проводити з використанням прямого та оберненого ходу, аналогічно до теореми 1. Прямий хід доведення складається з кроків А–С, в результаті яких прийдемо до СДФР вигляду

$$\begin{aligned} d\tilde{v}(t, \omega) = & a(t, \tilde{v}_t(\omega), B_1 \tilde{v}_t, \dots, B_m \tilde{v}_t, \alpha(0, \omega)) dt + \\ & + b(t, \tilde{v}_t(\omega), B_1 \tilde{v}_t, \dots, B_m \tilde{v}_t, \beta(0, \omega)) dw(t, \omega), \end{aligned} \quad (42)$$

з відповідними початковими умовами та при

$$\alpha(t, \omega) \leq \alpha(0, \omega), \quad \beta(t, \omega) \leq \beta(0, \omega), \quad t \in [0, T],$$

$$\alpha(0, \omega) = \sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{\omega \in \Omega} \alpha(t, \omega), \quad \beta(0, \omega) = \sup_{0 \leq t \leq T} \sup_{\omega \in \Omega} \beta(t, \omega), \quad T > 0.$$

Під СДФР (42) розуміємо інтегральне стохастичне рівняння Вінера-Іто з післядією $\theta \in [-\Delta, 0]$, $\Delta > 0$,

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t, \omega) = & v_0 + \int_0^t a(s, \tilde{v}_s, B_x \tilde{v}_s, \dots, B_m \tilde{v}_s, \alpha(0, \omega)) ds + \\ & + \int_0^t b(s, \tilde{v}_s, B_x \tilde{v}_s, \dots, B_m \tilde{v}_s, \beta(0, \omega)) dw(s, \omega), \quad \forall t \in [0, T], \quad T > 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Доведення єдиності за ймовірністю одиниця СДФР (42) проводиться на відрізках $[0, \Delta]$, $[\Delta, 2\Delta]$, ..., $[(N-1)\Delta, N\Delta]$ з послідовним урахуванням знайденого розв'язку, наприклад, з відрізка $[\Delta, 2\Delta]$ в якості початкових значень на $[0, \Delta]$ тощо.

Отже, доведемо єдиність розв'язку на відрізку $[0, \Delta]$, потім просуватимемося праворуч для доведення єдиності на відрізку $[\Delta, 2\Delta]$, враховуючи за початкові дані знайдений розв'язок на $[0, \Delta]$. Так будемо продовжувати до кінця відрізка $[0, T]$.

Нехай $\tilde{v}^{(1)}(t, \omega)$ та $\tilde{v}^{(2)}(t, \omega)$ – два розв'язки СДФР (42) на відрізку $[0, \Delta]$. Розглянемо такі різниці

$$\begin{aligned} I & \equiv \mathbf{E} \left\{ \left| \tilde{v}^{(1)}(t, \omega) - \tilde{v}^{(2)}(t, \omega) \right|^2 \right\} \leq \\ & \leq \mathbf{E} \left\{ \left[\int_0^t \left(a(s, \tilde{v}_s^{(1)}, B_x \tilde{v}_s^{(1)}, \dots, B_m \tilde{v}_s^{(1)}, \alpha(0, \omega)) - a(s, \tilde{v}_s^{(2)}, B_x \tilde{v}_s^{(2)}, \dots, B_m \tilde{v}_s^{(2)}, \alpha(0, \omega)) \right) ds + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \int_0^t \left(b(s, \tilde{v}_s^{(1)}, B_x \tilde{v}_s^{(1)}, \dots, B_m \tilde{v}_s^{(1)}, \beta(0, \omega)) - b(s, \tilde{v}_s^{(2)}, B_x \tilde{v}_s^{(2)}, \dots, B_m \tilde{v}_s^{(2)}, \beta(0, \omega)) \right) dw(s, \omega) \right]^2 \right\} \leq \\ & \leq 2\mathbf{E} \left\{ \left[\int_0^t \left(a(s, \tilde{v}_s^{(1)}, B_x \tilde{v}_s^{(1)}, \dots, B_m \tilde{v}_s^{(1)}, \alpha(0, \omega)) - a(s, \tilde{v}_s^{(2)}, B_x \tilde{v}_s^{(2)}, \dots, B_m \tilde{v}_s^{(2)}, \alpha(0, \omega)) \right) ds \right]^2 \right\} + \\ & + 2\mathbf{E} \left\{ \left[\int_0^t \left(b(s, \tilde{v}_s^{(1)}, B_x \tilde{v}_s^{(1)}, \dots, B_m \tilde{v}_s^{(1)}, \beta(0, \omega)) - b(s, \tilde{v}_s^{(2)}, B_x \tilde{v}_s^{(2)}, \dots, B_m \tilde{v}_s^{(2)}, \beta(0, \omega)) \right) dw(s, \omega) \right]^2 \right\} \equiv \end{aligned}$$

$$\equiv I_1 + I_2, \quad (44)$$

де використано очевидну нерівність $(A+B)^2 \leq 2A^2 + 2B^2$.

Оцінимо кожний з інтегралів у (44) з використанням нерівності Коші-Буняковського. Для спрощення надалі опускатимемо ω у формулах для $\alpha(0, \omega)$ та $\beta(0, \omega)$.

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \mathbf{E} \left\{ \left[\int_0^t \left(a(s, \tilde{v}_s^{(1)}, B_x \tilde{v}_s^{(1)}, \dots, B_m \tilde{v}_s^{(1)}, \alpha(0)) - a(s, \tilde{v}_s^{(2)}, B_x \tilde{v}_s^{(2)}, \dots, B_m \tilde{v}_s^{(2)}, \alpha(0)) \right) ds \right]^2 \right\} \leq \\ &\leq t \mathbf{E} \left\{ \left[\int_0^t \left(a(s, \tilde{v}_s^{(1)}, B_x \tilde{v}_s^{(1)}, \dots, B_m \tilde{v}_s^{(1)}, \alpha(0)) - a(s, \tilde{v}_s^{(2)}, B_x \tilde{v}_s^{(2)}, \dots, B_m \tilde{v}_s^{(2)}, \alpha(0)) \right) ds \right]^2 \right\} \leq \\ &\leq T \mathbf{E} \left\{ \int_0^t l_r \left\| \tilde{v}_s^{(1)} - \tilde{v}_s^{(2)} \right\|^2 ds \right\} \leq T l_r \int_0^t \mathbf{E} \left\{ \left\| \tilde{v}_s^{(1)} - \tilde{v}_s^{(2)} \right\|^2 \right\} ds. \end{aligned} \quad (45)$$

Далі використаємо відомі властивості інтеграла Вінера-Іто [4,19] для оцінки I_2 , а саме:

$$\mathbf{E} \left\{ \int_0^t \xi(s, \omega) dw(s, \omega) \right\} = 0, \quad \mathbf{E} \left\{ \left(\int_0^t \xi(s, \omega) dw(s, \omega) \right)^2 \right\} = \int_0^t \mathbf{E} \{ \xi^2(s, \omega) \} ds. \quad (46)$$

Матимемо таку оцінку для I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &\equiv \mathbf{E} \left\{ \left[\int_0^t \left(b(s, \tilde{v}_s^{(1)}, B_x \tilde{v}_s^{(1)}, \dots, B_m \tilde{v}_s^{(1)}, \beta(0)) - b(s, \tilde{v}_s^{(2)}, B_x \tilde{v}_s^{(2)}, \dots, B_m \tilde{v}_s^{(2)}, \beta(0)) \right) dw(s, \omega) \right]^2 \right\} \leq \\ &\leq l_r \int_0^t \mathbf{E} \left\{ \left\| \tilde{v}_s^{(1)} - \tilde{v}_s^{(2)} \right\|^2 \right\} ds. \end{aligned} \quad (47)$$

Далі слід урахувати нерівність

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left\{ \left\| \tilde{v}_s^{(1)} - \tilde{v}_s^{(2)} \right\|^2 \right\} &= \mathbf{E} \left\{ \left[\int_{-\Delta}^0 \left\| \tilde{v}_s^{(1)}(s + \tau, \omega) - \tilde{v}_s^{(2)}(s + \tau, \omega) \right\| d\beta(\tau) \right]^2 \right\} \leq \\ &\leq \left(\overset{0}{\underset{-\Delta}{V}} \beta_1(t) + \overset{0}{\underset{-\Delta}{V}} \beta_2(t) \right) \int_{-\Delta}^0 \mathbf{E} \left\{ \left\| v^{(1)}(s + \tau, \omega) - v^{(2)}(s + \tau, \omega) \right\|^2 \right\} d\tau, \end{aligned}$$

де $\overset{0}{\underset{-\Delta}{V}} \beta_i(t)$ є повною варіацією функції $\beta_i(t)$ на відрізку $[-\Delta, 0]$, $\Delta > 0$, $i = 1, 2$.

У результаті отримуємо нерівність для I вигляду

$$\begin{aligned}
I &\equiv \mathbf{E} \left\{ \left| \tilde{v}^{(1)}(t, \omega) - \tilde{v}^{(2)}(t, \omega) \right|^2 \right\} \leq \\
&\leq L \int_0^t \int_{-\Delta}^0 \mathbf{E} \left\{ \left| \tilde{v}^{(1)}(s + \tau, \omega) - \tilde{v}^{(2)}(s + \tau, \omega) \right|^2 \right\} d\beta(\tau) d\tau,
\end{aligned} \tag{48}$$

де $L \equiv 3l_r(T+1)$, $\beta(\tau) = \overset{0}{V}_{-\Delta} \beta_1(\tau) + \overset{0}{V}_{-\Delta} \beta_2(\tau)$.

За лемою 2 матимемо, що $\mathbf{E} \left\{ \left| \tilde{v}^{(1)}(t, \omega) - \tilde{v}^{(2)}(t, \omega) \right|^2 \right\} = 0$, тобто

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{E} \left\{ \left| \tilde{v}^{(1)}(t, \omega) - \tilde{v}^{(2)}(t, \omega) \right|^2 \right\} = 0. \tag{49}$$

Отже, з мартингальної властивості [3,4] для $\tilde{v}(t, \omega)$, а саме, $\mathbf{E} \{ \tilde{v}(t, \omega) / \mathfrak{N}_s \} = \tilde{v}(s, \omega)$, та з (49) випливає, що $\mathbf{P} \{ \omega : \tilde{v}_1(t, \omega) = \tilde{v}_2(t, \omega) \} = 1$, тобто за ймовірністю одиниця доведено існування єдиного розв'язку (1)–(3).

Обернений хід. З урахуванням теореми 1, зауваження 1 та теореми порівняння [3,4,19] $v(t, \omega) \leq \tilde{v}(t, \omega)$ можна стверджувати, що $\mathbf{P} \{ \omega : u_1(t, x, \omega) = u_2(t, x, \omega) \} = 1$ для довільного $x \in \mathbf{X} \subset \mathbf{R}^1$.

Теорема 2 доведена.

9.4. Алгоритм побудови наближеного розв'язку для СДФРЧП (1)–(3)

Алгоритм побудови наближеного розв'язку стохастичного диференціального рівняння в частинних похідних зазвичай базується на методі Монте-Карло [21, 22] та дискретизації рівняння, наприклад, за допомогою методу Ейлера-Маруяма [22] або диференціальних схем (метод Мілштейна [22]). Зокрема, якщо розглядати СДРЧП у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u + f(u, x, t) = \sigma(u, x, t) \dot{W},$$

де $\mathcal{L}$ – диференціальний оператор, $f(u, x, t)$ – детермінована функція, а $\sigma(u, x, t) \dot{W}$ – стохастичний шум (формальний запис просторово-часового білого шуму), тоді алгоритм побудови розв'язку складається з таких кроків:

- 1) ділимо область розв'язку на сітку: $x_i = i\Delta x$, $t_n = n\Delta t$;
- 2) вибираємо часовий крок Δt і просторовий крок Δx ;
- 3) використовуємо метод Монте-Карло разом зі стохастичними схемами:

– метод Ейлера-Маруями:

$$u_{i,n+1} = u_{i,n} + \Delta t \mathcal{L}u_{i,n} + f(u_{i,n})\Delta t + \sigma(u_{i,n})\Delta W_n$$

де $\Delta W_n \sim N(0, \sqrt{\Delta t})$ — нормальний випадковий шум.

– метод Мілштейна (точніше враховує нелінійності):

$$u_{i,n+1} = u_{i,n} + \Delta t \mathcal{L}u_{i,n} + f(u_{i,n})\Delta t + \sigma(u_{i,n})\Delta W_n + \frac{1}{2}\sigma'(u_{i,n})\sigma(u_{i,n})((\Delta W_n)^2 - \Delta t)$$

– виконуємо числове моделювання, а саме, генеруємо випадковий шум ΔW_n , для кожної точки сітки обчислюємо значення $u_{i,n+1}$, повторюємо ітерації для всіх часових кроків.

Розглянемо стохастичне диференціально-функціональне рівняння в частинних похідних вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u + f(u, x, t, u_\tau) = \sigma(u, x, t)\dot{W}(x, t),$$

де $\mathcal{L}$ — оператор диференціювання (наприклад, лапласіан), $f(u, x, t, u_\tau)$ — нелінійний функціонал, що залежить від стану $u_\tau = u(x, t - \tau)$, $\sigma(u, x, t)\dot{W}(x, t)$ — формальний запис просторово-часового білого шуму.

Прикладами таких рівнянь можуть бути стохастичне рівняння реакції-дифузії зі запізненням вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u, u_\tau) + \sigma \dot{W}$$

чи стохастичне рівняння моделі популяційної динаміки вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ru(1 - u_\tau) + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma \dot{W}.$$

Для отримання наближеного розв'язку СДФРЧП можна розширити методи, використані для СДРЧП, додавши пам'ять для обліку затримки. Тоді отримаємо такий вигляд алгоритму:

- 1) дискретизація простору та часу (як і раніше, розділяємо область на сітку x_i, t_n , з кроками $\Delta x, \Delta t$);
- 2) зберігання історії розв'язку (вводимо буфер для значень $u(x, t - \tau)$, що зберігає значення рішення за попередні моменти часу);
- 3) модифікація схеми Ейлера-Маруяма:

- для кожного вузла сітки оновлюємо стан:

$$u_{i,n+1} = u_{i,n} + \Delta t \mathcal{L} u_{i,n} + f(u_{i,n}, u_{i,n-m}) \Delta t + \sigma dW_n,$$

- затримане значення $u_{i,n-m}$ береться з попередніх кроків.

Для стохастичного рівняння теплопровідності зі затриманою реакцією вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta u_\tau + \sigma \dot{W}$$

при значеннях довжини області $L = 1.0$, часу моделювання $T = 0.5$, кількості точок у просторі $N_x = 50$, кількості часових кроків $N_t = 1000$, коефіцієнта дифузії $\alpha = 0.01$, інтенсивності шуму $\sigma = 0.1$, впливу запізнення $\beta = 0.05$ та затримки $\tau = 0.1$ отримуємо графік розподілу температури зі запізненням, зображений на Рис.1



Рис.1. Розподіл температури зі запізненням

Для отримання розв'язку використовувалася мова Python з бібліотекою deque для збереження минулих значень. При кожному кроці алгоритму додавалося нове значення, а старе видалялося, значення оновлювалися з урахуванням запізнення u_r . Вплив запізнення призводить до осциляцій і затриманої реакції.

Розглянемо також стохастичне диференціально-функціональне рівняння з частинними похідними у вигляді:

$$du(t, x) = \left[D \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} - \alpha u(t, x) + \beta \int_{-r}^0 u(t + \theta, x) d\theta \right] dt + \sigma dW(t, x),$$

де $u(t, x)$ – невідома функція часу t і простору x ; D – коефіцієнт дифузії; α – коефіцієнт згасання; β – коефіцієнт впливу пам'яті; r – глибина пам'яті (інтервал запізнення); σ – амплітуда шуму; $W(t, x)$ – просторово-часовий вінерів процес.

Дане рівняння описує еволюцію системи з урахуванням просторового поширення (дифузії), згасання, впливу історії станів (ефект пам'яті) та

випадкових збурень (шуму). Для наближеного розв'язання цього рівняння використовується дискретизація простору і часу та апроксимація інтегралу пам'яті як середнього по буферу попередніх значень [22, 23].

Для значень параметрів $L = 1.0$ (довжина простору), $T = 1.0$ (час моделювання), $D = 0.01$ (коефіцієнт дифузії), $\alpha = 1.0$ (згасання), $\beta = 0.5$ (пам'ять), $\sigma = 0.2$ (шум), $r = 0.1$ (глибина пам'яті), $N_x = 50$ (кількість точок у просторі), $N_t = 1000$ (кількість кроків у часі) отримуємо при моделюванні з використанням бібліотек Numpy та Matplotlib мови Python теплову карту (heatmap), яка показує, як "розливається" і коливається функція $u(t, x)$ у просторі та часі під впливом пам'яті та шуму (див. Рис. 2). Кольорова шкала відображає інтенсивність значення функції $u(t, x)$.

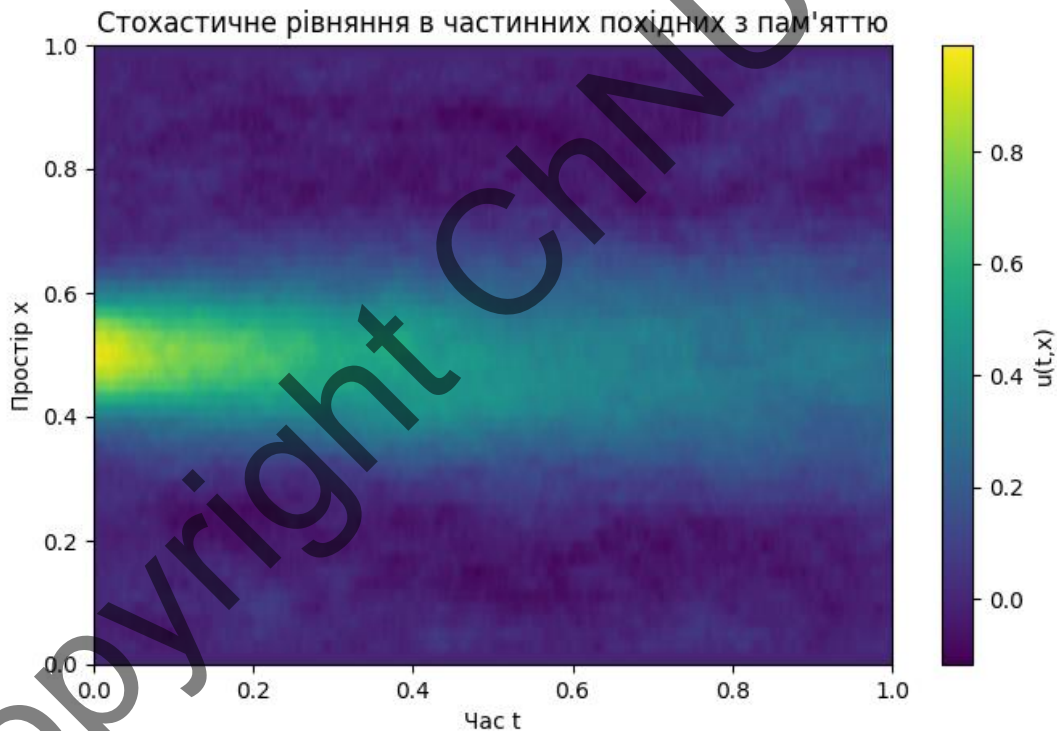


Рис. 2. Теплова карта для розв'язку СДРЧП

Висновки. Доведено існування розв'язку задачі Коші для стохастичного диференціально-функціонального рівняння з частинними похідними спеціального вигляду (1)–(3). Окрему увагу приділено обговоренню алгоритмів наближеного розв'язання подібних рівнянь, що можуть бути реалізовані засобами комп'ютерного моделювання для динамічних процесів з пам'яттю під

впливом випадкових збурень. Отримані результати можуть бути використані для розвитку методів математичного моделювання складних стохастичних процесів у прикладних задачах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ до §9

1. Bellman, R. and Cooke, K.L. (1963) Differential-Difference Equations. Academic Press, New York & London.
2. Michael E. Taylor. Partial Differential Equations. I–III. Series: Applied Mathematical Sciences. Springer Nature Switzerland AG 2023.
<https://doi.org/10.1007/978-3-031-33928-8>
3. Gihman I.I., Skorokhod A.V. Stochastic Differential Equations. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1972. 356 p.
4. Gihman I.I., Skorokhod A.V. The Theory of Stochastic Processes. I–III. Series: Classics in Mathematics. Springer Berlin, Heidelberg, 2004–2007.
<https://doi.org/10.1007/978-3-540-49941-1>
5. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными // Качественные методы исследования нелинейных дифференциальных уравнений и нелинейных колебаний. 36. наук. пр.– Київ: Ін-т математики АН УРСР.– 1981.– С.25–59.
6. Oksendal B., Stochastic differential equations, 6d, Springer, 2013, 379 p.
<https://doi.org/10.1007/978-3-642-14394-6>
7. Arnold, L. Stochastic Differential Equations: Theory and Applications, John Wiley and Sons, London, 1974, 244 p.
8. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений при случайных возмущениях их параметров.– Рига: Зинатне, 1989.– 421 с.
9. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения.– Рига: Ориентир, 1992.– 301 с.

10. Перун Г.М., Ясинский В.К. Исследование задачи Коши для стохастических уравнений в частных производных // Укр. мат. журн.— 1993.— Т.45, № 9.— С.1773–1781.— <https://link.springer.com/article/10.1007/BF01058639>
11. Перун Г.М. Задача з імпульсною дією для лінійного стохастичного параболічного рівняння вищого порядку // Український математичний журнал.— 2008.— Т. 60, № 10.— С.1422–1426.—
<https://link.springer.com/article/10.1007/s11253-009-0151-y>
12. Матійчук М.І. Параболічні та еліптичні задачі в просторах Діні.— Чернівці: Чернів. нац. ун-т, 2010.— 248 с.
13. Stanzhytskyi O., Tsukanova A. Existence and Uniqueness of the solutions to the Cauchy problem for the stochastic reaction-diffusion differential equation of neutral type // Journal of Mathematical Sciences.— 2017.— V.226, №3.— P.306-334.
14. Koroliuk V.S., Yurchenko I.V., Yasynskyy V.K. Behavior of the Second Moment of the Solution to the Autonomous Stochastic Linear Partial Differential Equation with Random Parameters in the Right-Hand Side // Cybernetics and Systems Analysis.— 2015.— Vol. 51, Issue 1.— PP.56-63.—
<https://link.springer.com/article/10.1007/s10559-015-9697-x>
15. Yurchenko I.V., Yasynskyy V.K. On existence and stabization of the strong solution of the autonomous stochastic partial differential Ito-Skorokhod equation with random parameters // System Research & Information Technologies.— 2018.— №3.— P.80-90.— DOI:10.20535/SRIT.2308-8893.2018.3.01—
<http://journal.iasa.kpi.ua/article/view/138168>
16. Lukashiv T.O., Yurchenko I.V., Yasynskyy V.K. Necessary and Sufficient Conditions of Stability in the Quadratic Mean of Linear Stochastic Partial Differential-Difference Equations Subject to External Perturbations of the Type of Random Variables // Cybernetics and System Analysis.— 2020.— Vol. 56, Iss. 2.— P.303–311. <https://doi.org/10.1007/s10559-020-00246-5>
17. Perun G.M., Yasynskyy V.K. The Cauchy Problem for a Stochastic Parabolic Equation with an Argument Deviation // Cybernetics and Systems

Analysis.– 2022.– Vol.58.– No.6.– P.952–956.– <https://doi.org/10.1007/s10559-023-00529-7>

18. Yasynsky V.K., Yurchenko I.V. On the existence of optimal control for stochastic functional differential equations under the influence of external disturbances // Cybernetics and System Analysis.– 2024.– Vol.60, №3.– P.462-471.– <https://doi.org/10.1007/s10559-024-00687-2>
19. Robert C. Dalang, Davar Khoshnevisan, Carl Mueller, David Nualart, Yimin Xiao. A Minicourse on Stochastic Partial Differential Equations. Salt Lake City, Utah, 2006. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, London, Milan, Paris, Tokyo, 228 p. <https://people.math.rochester.edu/faculty/cmlr/Preprints/Utah-Summer-School.pdf>
20. Pao-Liu Chow. Stochastic Partial Differential Equations. Applied Mathematics and Nonlinear Science Series. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2007, 292 p.
21. Kozachenko Yu., Pogorilyak O., Rozora I., Tegza A.M. Simulation of stochastic processes with given accuracy and reliability. ISTE Press Elsevier, 2016, 346 p.
22. Kloeden, P.E., Platen, E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer, 1992, 636 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-12616-5>
23. Lord G.J., Powell C.E., Shardlow T. An Introduction to Computational Stochastic PDEs. Cambridge University Press, 2014, 503 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139017329>

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ АВТОРІВ

1. Yasinsky V.K. Stability of Stochastic Dynamic Random-Structure Systems with Aftereffect and Markov Switchings // Cybernetics and Systems Analysis.– 2013.– Vol. 49, №5.– P.706–719.– DOI 10.1007/s10559-013-9558-4.
<https://link.springer.com/article/10.1007/s10559-013-9558-4>
2. Yasinsky V.K. Stability in the First Approximation of Random-Structure Diffusion Systems with Aftereffect and External Markov Switchings // Cybernetics and Systems Analysis.– 2014.– Vol.50, №2.– P.248–259.– DOI 10.1007/s10559-014-9612-x.
<https://link.springer.com/article/10.1007/s10559-014-9612-x>
3. Donez N.P., Yurchenko I.V., Yasynskyy V.K. Mean Square Behavior of the Strong Solution of a Linear Non-Autonomous Stochastic Partial Differential Equation with Markov Parameters // Cybernetics and Systems Analysis.– 2014.– Vol.50, №6.– P.930–939.– DOI 10.1007/s10559-014-9683-8.
<https://link.springer.com/article/10.1007/s10559-014-9683-8>
4. Koroliuk V.S., Yurchenko I.V., Yasynskyy V.K. Behavior of the Second Moment of the Solution to the Autonomous Stochastic Linear Partial Differential Equation with Random Parameters in the Right-Hand Side // Cybernetics and Systems Analysis.– 2015.– Vol.51, №1.– P.56–63.– DOI 10.1007/s10559-015-9697-x.
<https://link.springer.com/article/10.1007/s10559-015-9697-x>
5. Yurchenko I.V., Yasynskyy V.K. Stability of Self-Adjusting Stochastic Dynamic Systems with Finite Aftereffect and Reference Model // Cybernetics and Systems Analysis.– 2015.– Vol.51, №6.– P.915–928.– DOI 10.1007/s10559-015-9784-z.
<https://link.springer.com/article/10.1007/s10559-015-9784-z>
6. Ясинський В.К., Юрченко І.В. Про існування розв'язку задачі Коші для нелінійного дифузійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішніх збурень // Системні дослідження та інформаційні технології.– 2017.– №2.– С.103-114.
URL: <http://journal.iasa.kpi.ua/article/view/108824>
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2017.2.10
7. Ясинський В.К., Юрченко І.В., Кусілюк У.М. Існування та єдиність сильного розв'язку стохастичного диференціально-функціонального рівняння із зовнішніми випадковими збуреннями // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика і інформатика.– 2017.– Вип. №1 (30).– С.143-153.
8. Ясинський В.К., Юрченко І.В. Асимптотика другого моменту розв'язку лінійного автономного стохастичного рівняння в частинних похідних із зовнішніми випадковими збуреннями // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка.– Кам'янець-Подільський:

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2017.– Вип. 16.– С.181–192.

9. Yurchenko I.V., Yasynskyy V.K. Existence of Lyapunov–Krasovskii Functionals for Stochastic Functional Differential Ito–Skorokhod Equations under the Condition of Solutions’ Stability on Probability with Finite Aftereffect // Cybernetics and Systems Analysis.– 2018.– Vol.54, №6.– P.957–970.– DOI 10.1007/s10559-018-0099-8.
<https://link.springer.com/article/10.1007/s10559-018-0099-8>
10. Yurchenko I.V., Yasynskyy V.K. On existence and stabization of the strong solution of the autonomous stochastic partial differential Ito-Skorokhod equation with random parameters // System Research & Information Technologies.– 2018.– №3.– P.80-90.
<http://journal.iasa.kpi.ua/article/view/138168>
DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2018.3.01
11. Ясинський В.К., Юрченко І.В. Стійкість та оптимальне керування в стохастичних динамічних системах з випадковими операторами. Монографія. Видання друге, доповнене.– Чернівці: Технодрук, 2019.– 258 с.
12. Lukashiv T.O., Yurchenko I.V., Yasynskyy V.K. Necessary and Sufficient Conditions of Stability in the Quadratic Mean of Linear Stochastic Partial Differential-Difference Equations Subject to External Perturbations of the Type of Random Variables // Cybernetics and Systems Analysis.– 2020.– Vol.56, №2.– P.303–311.– DOI 10.1007/s10559-020-00246-5.
<https://link.springer.com/article/10.1007/s10559-020-00246-5>
13. Yasynskyy V.K., Yurchenko I.V. Existence of the Solution to the Cauchy Problem for Nonlinear Stochastic Partial Differential-Difference Equations of Neutral Type // Cybernetics and Systems Analysis.– 2021.– Vol.57, №5.– P.764–774.– DOI 10.1007/s10559-021-00401-6.
<https://link.springer.com/article/10.1007/s10559-021-00401-6>
14. Yasynskyy V.K., Yurchenko I.V. Mean-Square Stability and Instability Criteria for the Gikhman–Ito Stochastic Diffusion Functional Differential Systems Subject to External Disturbances of the Type of Random Variables // Cybernetics and Systems Analysis.– 2023.– Vol.59, №2.– P.283–295.– DOI 10.1007/s10559-023-00562-6.
<https://link.springer.com/article/10.1007/s10559-023-00562-6>
15. Yasynskyy V.K., Yurchenko I.V. On the existence of optimal control for stochastic functional differential equations under the influence of external disturbances // Cybernetics and System Analysis.– 2024.– Vol.60, №3.– P.462-471.
<https://link.springer.com/article/10.1007/s10559-024-00687-2>
16. Ясинський В.К., Юрченко І.В. Стійкість та оптимальне керування в стохастичних динамічних системах з випадковими операторами. Монографія. Видання друге, доповнене.– Чернівці: Технодрук, 2019.– 258 с. <https://archer.chnu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/1875>

**Додаток А. Візуалізація траєкторій розв'язків стохастичних
диференціальних рівнянь з пуассонівськими збуреннями та запізненнями з
аналізом стійкості розв'язку з використанням Python**

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def simulate_sde_with_jumps_and_delay(mu=0.1, sigma=0.2, lambda_p=5,
jump_size=0.5, delay=0.01, x0=1, T=1, N=1000, M=5):
    dt = T / N # Крок часу
    t = np.linspace(0, T, N + 1)
    X = np.zeros((M, N + 1)) # Зберігаємо траєкторії
    X[:, 0] = x0 # Початковий стан
    delay_steps = max(1, int(delay / dt)) # Кількість кроків запізнення

    for i in range(M):
        W = np.random.normal(0, np.sqrt(dt), N) # Вінерівський процес
        N_p = np.random.poisson(lambda_p * dt, N) # Пуассонівські збурення
        J = np.random.normal(jump_size, 0.1, N) * N_p # Стрибки
        for j in range(N):
            delayed_index = max(0, j - delay_steps) # Запізнення
            X[i, j + 1] = X[i, j] + mu * X[i, delayed_index] * dt + sigma * X[i, j] * W[j] +
J[j]
        return t, X

# Параметри моделі
mu, sigma, lambda_p, jump_size, delay, x0, T, N, M = 0.1, 0.2, 5, 0.5, 0.01, 1, 1,
1000, 5

t, X = simulate_sde_with_jumps_and_delay(mu, sigma, lambda_p, jump_size, delay,
x0, T, N, M)
```

```
# Візуалізація траєкторій
```

```
plt.figure(figsize=(10, 5))
```

```
for i in range(M):
```

```
    plt.plot(t, X[i], label=f'Trajectory {i+1}')
```

```
plt.xlabel('Time')
```

```
plt.ylabel('X(t)')
```

```
plt.title('Sample Paths of SDE with Poisson Jumps and Delay')
```

```
plt.legend()
```

```
plt.grid()
```

```
plt.show()
```

```
# Фазові діаграми
```

```
plt.figure(figsize=(10, 5))
```

```
for i in range(M):
```

```
    plt.plot(X[i][:-1], X[i][1:], label=f'Trajectory {i+1}')
```

```
plt.xlabel('X(t)')
```

```
plt.ylabel('X(t+dt)')
```

```
plt.title('Phase Diagrams of SDE with Poisson Jumps and Delay')
```

```
plt.legend()
```

```
plt.grid()
```

```
plt.show()
```

```
# Гістограма розподілу значень X в кінцевий момент часу
```

```
plt.figure(figsize=(10, 5))
```

```
final_values = X[:, -1] # Останні значення всіх траєкторій
```

```
plt.hist(final_values, bins=20, density=True, alpha=0.6, color='b', edgecolor='black')
```

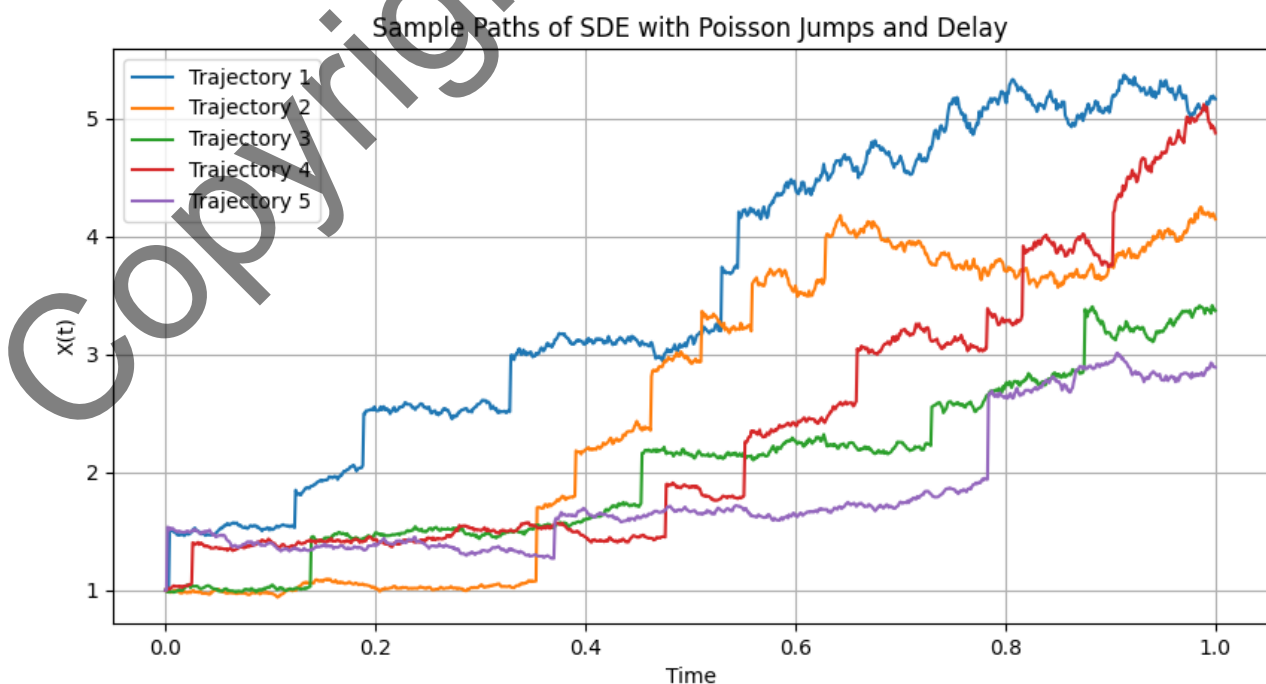
```
plt.xlabel('X(T)')
```

```
plt.ylabel('Density')
```

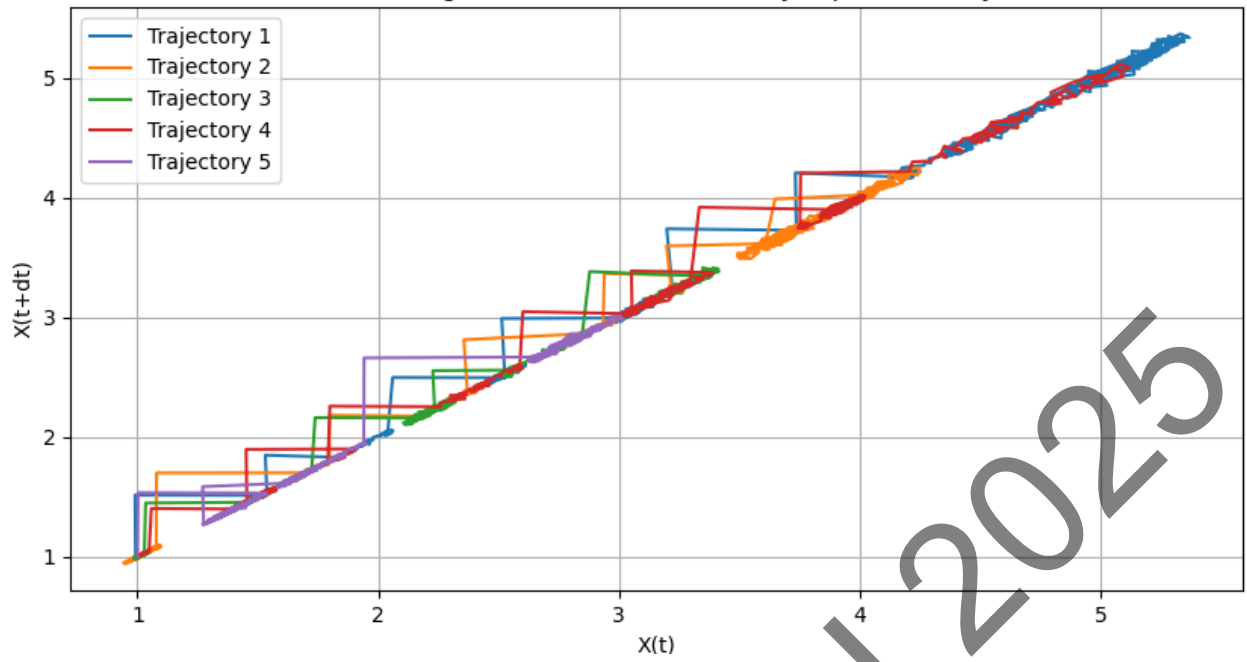
```
plt.title('Probability Distribution of X at Final Time')
plt.grid()
plt.show()
```

Аналіз стійкості

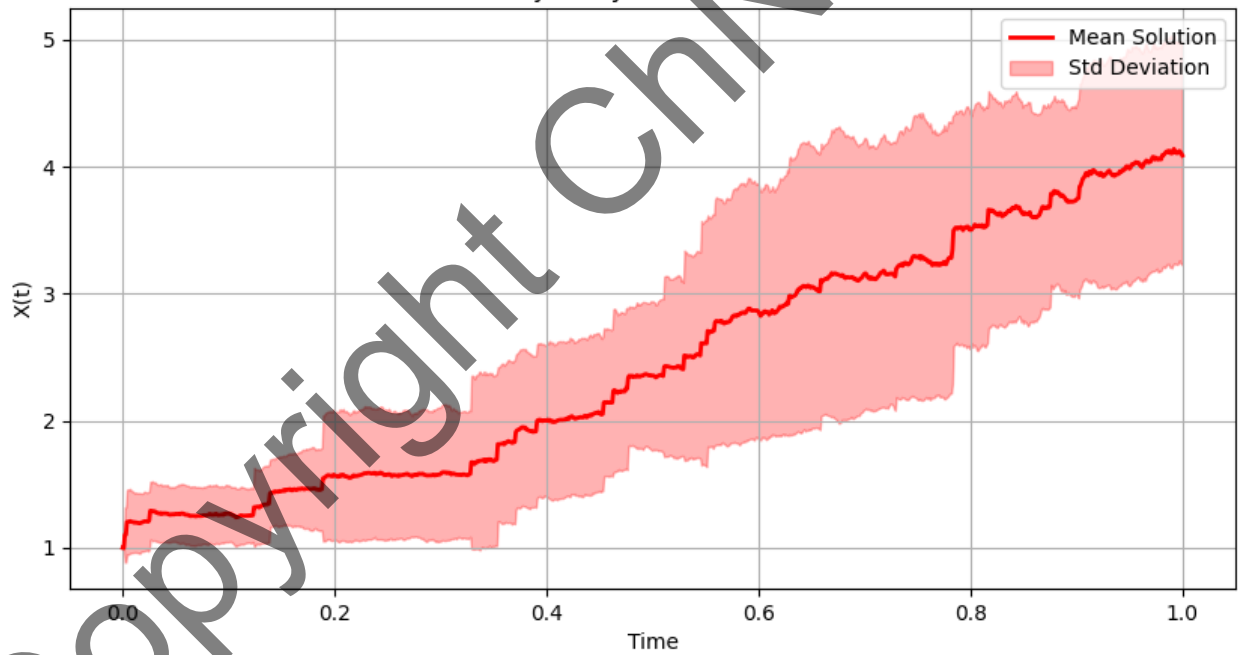
```
plt.figure(figsize=(10, 5))
average_trajectory = np.mean(X, axis=0) # Середня траєкторія
std_deviation = np.std(X, axis=0) # Стандартне відхилення
plt.plot(t, average_trajectory, label='Mean Solution', color='red', linewidth=2)
plt.fill_between(t, average_trajectory - std_deviation, average_trajectory +
std_deviation, color='red', alpha=0.3, label='Std Deviation')
plt.xlabel('Time')
plt.ylabel('X(t)')
plt.title('Stability Analysis of SDE Solution')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```



Phase Diagrams of SDE with Poisson Jumps and Delay



Stability Analysis of SDE Solution



Додаток В. Моделювання розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь в частинних похідних з використанням Python

За допомогою бібліотек NumPy, Seaborn, Matplotlib мови Python проведено моделювання розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь в частинних похідних з використанням схеми Ейлера-Маруямі [1–3]. Використовується класичний підхід до дискретизації лапласіана та стохастичних збурень (вінерівський та пуассонівський процеси) [4–7].

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
```

```
"""
```

Модель стохастичного диференціального рівняння:

$$du = D * (d^2u/dx^2) dt + \sigma dW + J dN$$

де:

- $u(x, t)$ — шукане поле,
- D — коефіцієнт дифузії,
- σ — інтенсивність стохастичного шуму,
- dW — вінерівський процес,
- J — амплітуда пуассонівських збурень,
- dN — пуассонівський процес.

Чисельний метод: схема Ейлера-Маруямі з кінцевими різницями для лапласіана:

$$u_{n+1} = u_n + dt * D * (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) / dx^2 + \sigma * \xi * \sqrt{dt} + J * \eta * dN$$

де:

- $\xi \sim N(0,1)$ — випадковий шум,
- $\eta \sim N(0,1)$ — випадковий внесок пуассонівського процесу,
- $dN \sim \text{Poisson}(\lambda dt)$ — приріст пуассонівського процесу з інтенсивністю λ .

Графік стійкості відображає максимальні значення $u(x, t)$ для кожного з 10 експериментів. Високі значення свідчать про потенційну нестійкість розв'язку. Якщо хоча б один експеримент має значення вище критичного порогу (наприклад, 10), система вважається нестійкою.

```
"""
```

```
# Параметри
```

```
L = 1.0 # Довжина області
```

```

Nx = 50 # Кількість вузлів у просторі
T = 1.0 # Часова область
Nt = 1000 # Кількість кроків у часі
dx = L / Nx # Крок по простору
dt = T / Nt # Крок по часу

# Параметри рівняння
diffusivity = 0.1 # Коефіцієнт дифузії
sigma = 0.1 # Інтенсивність шуму
J = 0.5 # Амплітуда пуассонівських збурень
lambda_poisson = 5.0 # Інтенсивність пуассонівського процесу

# Дискретизація простору і часу
x = np.linspace(0, L, Nx)
t = np.linspace(0, T, Nt)

# Візуалізація 10 розв'язків
plt.figure(figsize=(10, 5))

for i in range(10):
    # Початкові умови
    u = np.sin(np.pi * x)

    # Стохастичний процес
    np.random.seed(i) # Відтворюваність
    xi = np.random.normal(0, np.sqrt(dt), size=(Nt, Nx))
    eta = np.random.normal(0, 1, size=(Nt, Nx))
    dN = np.random.poisson(lambda_poisson * dt, size=(Nt, Nx))

    # Чисельне розв'язання за допомогою схеми Ейлера-Маруямі
    for n in range(1, Nt):
        laplacian = (np.roll(u, -1) - 2 * u + np.roll(u, 1)) / dx**2
        u += dt * diffusivity * laplacian + sigma * xi[n, :] * np.sqrt(dt) + J * eta[n, :] *
dN[n, :]

    plt.plot(x, u, label=f"Run {i+1}", alpha=0.6)

plt.xlabel("x")
plt.ylabel("u(x, t)")
plt.title("10 розв'язків стохастичного диференціального рівняння з
пуассонівськими збуреннями")
plt.legend()
plt.show()

# Аналіз стійкості

```

```

stability_measures = []
stability_map = np.zeros((10, Nx))

for i in range(10):
    u = np.sin(np.pi * x)
    np.random.seed(i)
    xi = np.random.normal(0, np.sqrt(dt), size=(Nt, Nx))
    eta = np.random.normal(0, 1, size=(Nt, Nx))
    dN = np.random.poisson(lambda_poisson * dt, size=(Nt, Nx))
    for n in range(1, Nt):
        laplacian = (np.roll(u, -1) - 2 * u + np.roll(u, 1)) / dx**2
        u += dt * diffusivity * laplacian + sigma * xi[n, :] * np.sqrt(dt) + J * eta[n, :] *
dN[n, :]
    stability_measures.append(np.max(np.abs(u)))
    stability_map[i, :] = np.abs(u)

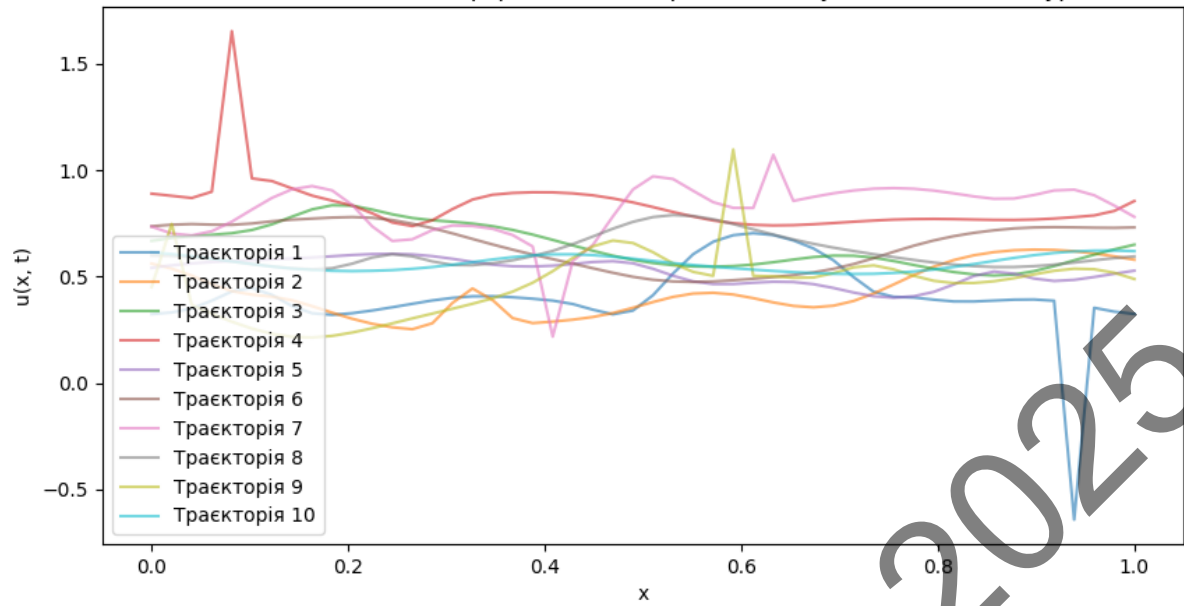
plt.figure(figsize=(8, 5))
plt.plot(range(1, 11), stability_measures, marker='o', linestyle='-')
plt.xlabel("Номер експерименту")
plt.ylabel("Максимальна величина u")
plt.title("Графік стійкості")
plt.show()

# Візуалізація областей стійкості
plt.figure(figsize=(10, 6))
sns.heatmap(stability_map, cmap="coolwarm", xticklabels=False,
yticklabels=range(1, 11))
plt.xlabel("Просторова координата x")
plt.ylabel("Номер експерименту")
plt.title("Області стійкості")
plt.show()

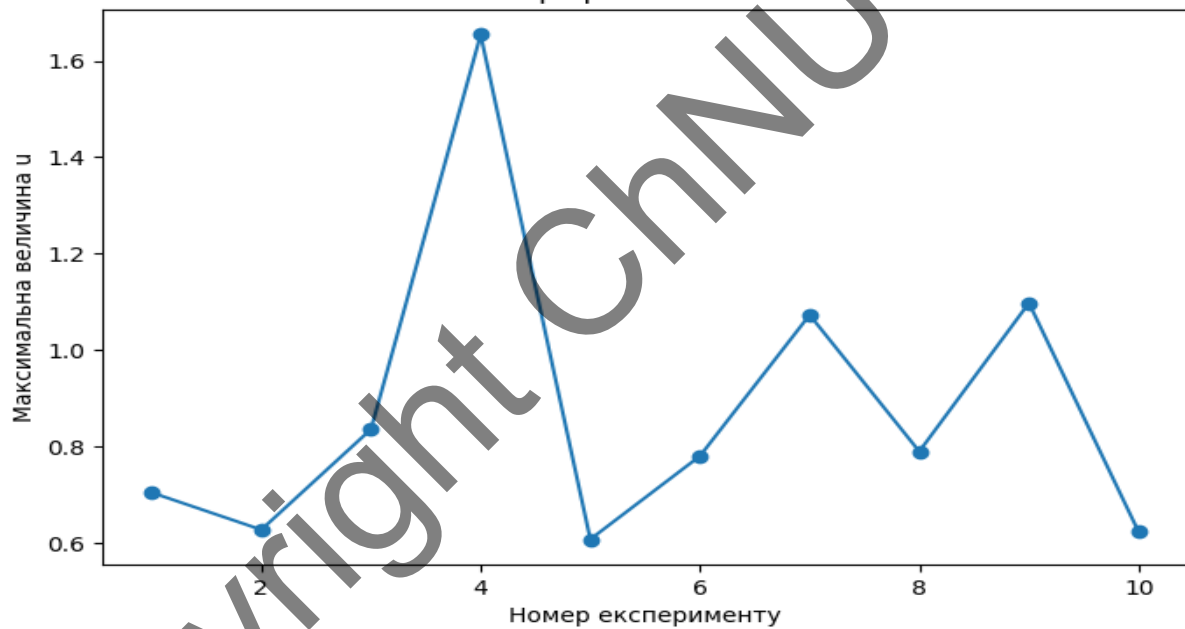
if any(sm > 10 for sm in stability_measures):
    print("Деякі розв'язки нестійкі.")
else:
    print("Усі розв'язки стійкі.")

```

Розв'язки стохастичного диференціального рівняння з пуассонівськими збуреннями



Графік стійкості





СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ до Додатку В

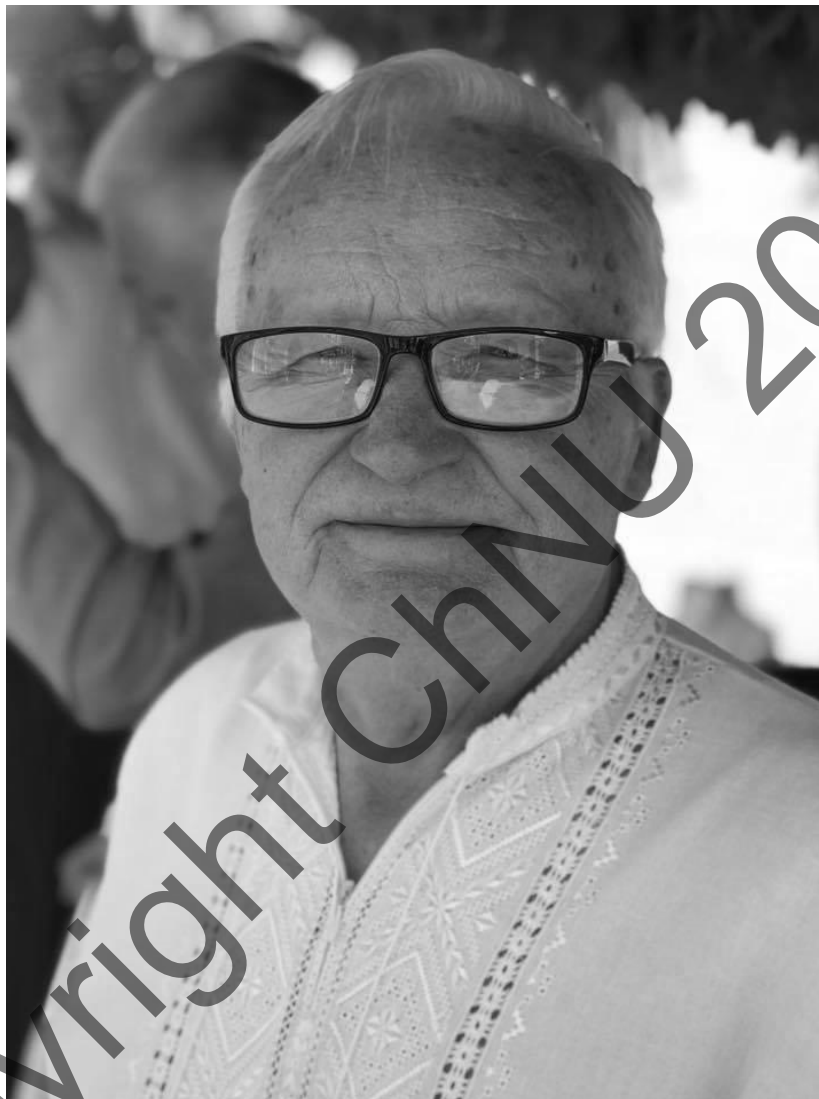
1. Kloeden, P. E., & Platen, E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer. 1992.
2. Oksendal, B. Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications. Springer. 2003.
3. Lord, G. J., Powell, C. E., & Shardlow, T. An Introduction to Computational Stochastic PDEs. Cambridge University Press. 2014.
4. Jae-Hun Jung, James M. Kim, Hyunggyu Park. Numerical solution of stochastic differential equations with Poisson white noise // Physical Review E, 2009. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.80.026704>
5. Assyr Abdulle, Grigorios A. Pavliotis. Numerical methods for stochastic partial differential equations with multiple scales // Multiscale Modeling & Simulation, 2009. https://www.ma.imperial.ac.uk/~pavl/abdulle_pavliotis_spde.pdf
- Xiaojie Wang, Wuyin Wang. Compensated projected Euler-Maruyama method for stochastic differential equations with jumps // Applied Mathematics and Computation, 2020. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S009630032030713X>
6. Shuaibing Gao, Junhao Hu, Li Tan, Chenggui Yuan. Strong convergence rate of truncated Euler-Maruyama method for stochastic differential delay equations with Poisson jumps // Frontiers of Mathematics in China, 2021. <https://link.springer.com/article/10.1007/s11464-021-0914-9>

7. Xiaoyue Li, Chengjian Zhang, Jinqiao Duan. Poisson stable solutions for stochastic PDEs driven by Lévy noise // Journal of Differential Equations, 2023.
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039623007489>

Copyright ChNU 2025

ПРО АВТОРІВ

Ясинський Володимир Кирилович – доктор фіз.-мат. наук, професор, академік АН ВШ України.



Web-сторінка:

<https://sites.google.com/chnu.edu.ua/yasynskyyvolodymyrkyrylovych>

ZentrblattMATH: <https://zbmath.org/authors/?q=Yasynskyy>

ORCID ID: www.orcid.org/0000-0001-5434-6427

Web of Science: www.researcherid.com/rid/C-3535-2016

SCOPUS: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57204787030>

Ясинський Володимир Кирилович народився 12 жовтня 1940 р. в м.Пружани (Брестська область, Беларусь). Закінчив середню школу у м.Шахтарську Сахалінської області (1958 р.), технічне училище у м. Олександрія Кіровоградської області (1960 р.), фізико-математичний факультет (матема–

тичний відділ, кафедра прикладної математики і механіки (ПММ), спеціальність “Обчислювальна математика”) (1965 р.) Чернівецького державного університету (ЧДУ), аспірантуру при Латвійському університеті (лабораторія математичної статистики Обчислювального центру, науковий керівник – кандидат фіз.-мат. наук, доцент Царков Є.Ф. (1973 р.)

Кандидатську дисертацію “Стійкість розв'язків стохастичних рівнянь з післядією” захистив 15 лютого 1975 р. в ЧДУ (науковий керівник – кандидат фіз.-мат. наук, доцент Царков Є.Ф.; офіційні опоненти: доктор фіз.-мат. наук, професор Скороход А.В., кандидат фіз.-мат. наук, доцент Букатар М.І.; провідна установа – Київський державний університет імені Тараса Шевченка (КДУ)).

Докторську дисертацію “Математичні методи дослідження стійкості стохастичних систем з післядією при наявності пуассонових збурень” (спеціальності 01.01.09 – математична кібернетика; 01.01.05 – теорія ймовірностей і математична статистика) захистив 18 березня 1993 р. на засіданні спеціалізованої ради при КДУ (офіційні опоненти: академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор Королюк В.С., доктори фіз.-мат. наук, професори Наконечний О.Г., Кулініч Г.Л.; провідна установа – Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України).

Вчене звання доцента по кафедрі прикладної математики і механіки ЧДУ присвоєно в 1983 р.; професора по кафедрі математичного моделювання ЧДУ – в 1996 р.

На посаді завідувача кафедри математичної і прикладної статистики (МіПС) Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича В.К. Ясинський працював у 2001-2015 рр. (у 2010 р. кафедру МіПС перейменовано на кафедру стохастичного та системного аналізу, у 2012 р. – на кафедру системного аналізу і страхової та фінансової математики (САСФМ)). У 2015–2017 рр. працював на посаді професора кафедри САСФМ. Проживає в Канаді з 2018 року.

В.К. Ясинський обґрунтував і узагальнив метод функціоналів Ляпунова-Красовського (другий метод Ляпунова) для динамічних систем випадкової структури, що описуються стохастичними диференціально-функціональними рівняннями Іто-Скорохода, інтегро-функціональними рівняннями Іто-Скорохода-Вольтерри.

Опублікував у наукових виданнях близько 600 наукових праць, з яких 12 монографій, понад 160 статей у міжнародних журналах, понад 30 підручників, навчальних посібників, навчально-методичних праць для студентів математичного факультету, факультету математики та інформатики, факультету комп'ютерних наук ЧНУ. В.К. Ясинський керував більше ніж 20 грантовими науково-дослідними і госпдоговірними темами. Під його керівництвом захищено 12 кандидатських дисертацій та одна докторська.

Активно працює в області стійкості, оптимізації та стабілізації стохастичних диференціальних, диференціально-різницевих та диференціально-функціональних рівнянь під впливом зовнішніх збурень на системи, що описуються цими рівняннями.

Лауреат обласної педагогічної премії імені Юрія Федьковича (2002 р.).

У 2009 р. Ясинського В.К. нагороджено Почесною Грамотою Міністерства освіти і науки України. Академік Академії наук вищої школи України з 2009 р.

У 2015 р. В.К. Ясинському оголошено подяку від міського голови м.Чернівці Каспрука О.П.

Copyright ChNU 2025

Юрченко Ігор Валерійович – кандидат фіз.-мат. наук, доцент.



Web-сторінка: <https://mathmod.chnu.edu.ua/pro-nas/spivrobitnyky/yurchenko-igor-valeriiovych/>

ZentrblattMATH: <https://zbmath.org/authors/?q=ai:yurchenko.i-v>

Google Scholar: <http://scholar.google.com.ua/citations?user=yEBtORQAAAAJ>

ORCID ID: www.orcid.org/0000-0001-9929-5758

Researcher ID: www.researcherid.com/rid/B-9321-2016

SCOPUS: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=23096632000>

Народився 6 серпня 1971 р. в м. Чернівці. Закінчив середню школу №5 м. Чернівці (1988 р.) із золотою медаллю, математичний факультет (кафедра математичних проблем управління та кібернетики, спеціальність – прикладна математика, 1993 р.) Чернівецького державного університету (ЧДУ) із червоним дипломом і аспірантуру при цьому університеті (кафедра математичного моделювання, науковий керівник – доктор фіз.-мат. наук, професор Ясинський В.К., 1995 р.).

Кандидатську дисертацію "Математичні методи дослідження стійкості у стохастичному моделюванні динамічних систем з післядією" (спеціальність

01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи в наукових дослідженнях) захистив 24 червня 1995 р. на засіданні спеціалізованої вченої ради в ЧДУ (науковий керівник – доктор фіз.-мат. наук, професор В.К. Ясинський; офіційні опоненти: доктори фіз.-мат. наук, старші наукові співробітники М.В. Андрєєв і Р.В. Бобрик; провідна установа – Київський національний університет імені Тараса Шевченка).

З 1 липня 1995 р. працював асистентом кафедри математичного моделювання ЧДУ. У 2001 р. перейшов на новостворену кафедру математичної і прикладної статистики. У 2002-2012 рр. працював на посаді доцента кафедри МіПС, у 2012-2017 рр. – доцент кафедри САСФМ. З 2017 р. працює доцентом кафедри математичного моделювання Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

На кафедрі САСФМ забезпечував читання таких навчальних дисциплін: “Інформатика та програмування”, “Практикум на ЕОМ”, “Програмне забезпечення обчислювальних систем”, “Прикладний статистичний аналіз”, “Комп’ютерна статистика”, “Стохастичне прогнозування”, “Прийняття рішень у соціально-економічних системах”, відповідав за проведення виробничої та педагогічної практики студентів, що спеціалізувалися на кафедрі САСФМ.

На кафедрі математичного моделювання забезпечує читання навчальних дисциплін “Програмування мовою Python”, “Бібліотеки мови Python”, “Прикладний статистичний аналіз з використанням Python”, “Створення веб-додатків з використанням фреймворка Django мови Python”, “Data Mining з використанням мови Python”, “Інтелектуальні системи прийняття рішень”, “Системи штучного інтелекту”, “Прогнозування в системному аналізі”, “Штучний інтелект та аналітика BigData” для студентів спеціальностей 122 – Комп’ютерні науки, 124 – Системний аналіз. Є гарантом освітньої програми “Інформаційні технології та управління проектами” для студентів спеціальності 122 – Комп’ютерні науки (бакалавр) кафедри математичного моделювання ЧНУ.

Опублікував (у співавторстві) більше 150 наукових та методичних праць, серед яких 5 монографій, 20 навчальних посібників, 19 наукових статей у рейтингових закордонних та 17 – у рейтингових вітчизняних журналах. Брав участь у більше ніж 50 наукових конференціях, входив до складу оргкомітету двох міжнародних конференцій.

У 2006–2009 рр. був членом спеціалізованої ради К 76.051.09 (створена наказом ВАК України від 13 листопада 2006 р. № 549), у 2010–2013 рр. – членом спеціалізованої ради К 76.051.02 (створена наказом ВАК України від 15 лютого 2010 р. № 7); голова обох спецрад – проф. Р.І. Петришин; заступник голови – проф. В.С. Григорків; вчений секретар – проф. Я.Й. Бігун; спеціальності: 01.01.02 – диференціальні рівняння; 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи; 01.01.01 – математичний аналіз. 22 грудня 2023 р. був членом разової спеціалізованої ради ДФ 76.051.037 (спеціальність 113 – Прикладна математика (наказ ректора ЧНУ від 18.10.2023 р., №380).

Нагороджений почесною грамотою Чернівецької міської ради в 2013 році, Подякою Міністерства освіти і науки України в 2023 році.

Зміст

ВСТУП	5
§ 1. ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ СИЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ІЗ ЗОВНІШНІМИ ВИПАДКОВИМИ ЗБУРЕННЯМИ	7
1.1. Постановка задачі	7
1.2. Про єдиність сильного розв'язку СДФРЗЗ	8
1.3. Про існування сильного розв'язку задачі Коші з простору Скорохода	12
1.4. Про існування парного моменту розв'язку задачі	15
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ до §1	20
§2. ПРО ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ДИФУЗІЙНОГО СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ З УРАХУВАННЯМ ВИПАДКОВИХ ЗОВНІШНИХ ЗБУРЕНЬ	23
2.1. Постановка задачі	23
2.2. Обговорення попередніх результатів та означення	24
2.3. Основний результат	26
2.4. Доведення основного твердження	28
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ до §2	36
§3. ПРО ІСНУВАННЯ ТА СТАБІЛІЗАЦІЮ СИЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ АВТОНОМНИХ СТОХАСТИЧНИХ РІВНЯНЬ ІТО-СКОРОХОДА В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ІЗ ВИПАДКОВИМИ ПАРАМЕТРАМИ	38
3.1. Постановка задачі	38
3.2. Існування розв'язку задачі Коші для ЛСДРІСзЧП (8)–(9) у просторі $\mathcal{M}_{IT}$	40
3.3. Асимптотична поведінка в середньому квадратичному сильного розв'язку ЛСДРІСзЧП	45
3.4. Задача втрати стійкості стрижня	47
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ до §3	49
§4. ПРО НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ СТІЙКОСТІ В СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ПІД ДІЄЮ ЗОВНІШНИХ ЗБУРЕНЬ ТИПУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН	52
4.1. Постановка задачі	52
4.2. Допоміжні твердження	53
4.3. Асимптотична стійкість у середньому квадратичному сильного розв'язку (1), (2)	56
4.4. Модельна задача про стійкість стрижня під дією "білого шуму"	61
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ до §4	63
§5. ПРО ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ	65
5.1. Постановка задачі	65
5.2. Про попередні результати та основні означення	66
5.3. Основне твердження	68
5.4. Доведення основного твердження	70
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ до §5	81
§6. ІСНУВАННЯ L-ГО МОМЕНТУ СИЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНОГО ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ІТО-ВОЛЬТЕРРИ	83
6.1. Постановка задачі	83
6.2. Основний результат	88
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ до §6	91

§7. КРИТЕРІЇ СТІЙКОСТІ ТА НЕСТІЙКОСТІ В СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ ДИФУЗІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ СИСТЕМ ГІХМАНА-ІТО ПІД ДІЄЮ ЗОВНІШНИХ ЗБУРЕНЬ ТИПУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН	93
7.1. Постановка задачі	93
7.2. ПЕРЕХІД ДО ІНТЕГРАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ (1)–(2) ЗА ДОПОМОГОЮ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ СКОРОЧЕНОЇ ЗАДАЧІ	94
7.3. НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ НАЛЕЖНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ СДФР ДО ПРОСТОРУ СУМОВНИХ ЗА ЧАСОМ В СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ	99
7.4. АСИМПТОТИЧНА СТІЙКІСТЬ ТА НЕСТІЙКІСТЬ В СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ (L.I.M.) РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ СДФР	103
7.5. АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА НА БЕЗМЕЖНОСТІ ДРУГОГО МОМЕНТУ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ СДФР ЗАГАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ ПІД ДІЄЮ ЗОВНІШНИХ ЗБУРЕНЬ ТИПУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН	106
7.6. СТОХАСТИЧНА ЗАДАЧА СТАБІЛІЗАЦІЇ КУРСУ ОКЕАНСЬКОГО ЛАЙНЕРА ПІД ДІЄЮ ЗОВНІШНИХ ЗБУРЕНЬ ТИПУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН	110
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ до §7	112
§8. ПРО ІСНУВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПІД ДІЄЮ ЗОВНІШНИХ ЗБУРЕНЬ	114
8.1. Постановка задачі	114
8.2. ТЕОРЕМА ПОРІВНЯННЯ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СДФР	114
8.3. ЗАДАЧА ІСНУВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СДФР СЕРЕД ДОПУСТИМИХ КЕРУВАНЬ	120
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ до §8	127
§9. ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ ТА МЕТОДИ ЙОГО КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ	129
9.1. ОГЛЯД ПРОБЛЕМИ	129
9.2. Постановка задачі	130
9.3. ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ СДФРЧР (1)–(3)	139
9.4. АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ДЛЯ СДФРЧП (1)–(3)	143
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ до §9	148
СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ АВТОРІВ	151
ДОДАТОК А. ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ТРАЕКТОРІЙ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПУАССОНІВСЬКИМИ ЗБУРЕННЯМИ ТА ЗАПІЗНЕННЯМИ З АНАЛІЗОМ СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ З ВИКОРИСТАННЯМ RUTHON	153
ДОДАТОК В. МОДЕЛЮВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ З ВИКОРИСТАННЯМ RUTHON	157

Наукове видання

**СТІЙКІСТЬ ТА ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ
У СТОХАСТИЧНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ
частина друга**

монографія

**Ясинський Володимир Кирилович
Юрченко Ігор Валерійович**

Публікується в авторській редакції

Підписано до друку 1.10.2025 р. Папір офсетний. Формат 60×84/16.

Ум. друк. арк. Вид. № . Зам.№ . Тираж 100 прим.

Виготовлено з готового оригінал-макета замовника.

Видавець та виготівник: ПБКФ “Технодрук”

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК №1841 від 10.06.2004 р.
58000, м.Чернівці, вул. І.Франка, 20, оф.18, тел. (0372) 55-05-85