

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

**В.С. Григорків, М.В. Григорків,
О.І. Ярошенко, Л.В. Скращук**

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ: ПРАКТИКУМ

Навчальний посібник



Чернівці

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича
2026

УДК 330.4: 519.86 (075.8)

Г-83

Друкується за ухвалою Вченої ради
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича
(протокол № 2 від 26.01.2026 р.)

Рецензенти:

Буяк Л.М., завідувач кафедри економічної кібернетики та інформатики Західноукраїнського національного університету, доктор економічних наук, професор;
Маляр М.М., професор кафедри кібернетики і прикладної математики ДВНЗ «Ужгородський національний університет», доктор технічних наук, професор

В.С. Григорків та ін.

Г-83 Оптимізаційні методи та моделі: практикум : навч. посіб. /
В.С. Григорків, М.В. Григорків, О.І. Ярошенко, Л.В. Скращук.
Чернівці: Чернівець. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича. 2026. 240 с.
ISBN 978-617-8703-50-9

Пропоноване видання містить типові завдання та приклади їх виконання із оптимізаційних методів та моделей. Викладений у посібнику матеріал охоплює базову тематику класичних моделей безумовної оптимізації та моделей і методів лінійного, нелінійного та динамічного програмування. Посібник має чітку прикладну спрямованість і може бути використаний для практичних і лабораторних робіт, самостійної та індивідуальної роботи, контролю та самоконтролю відповідних теоретичних знань і практичних навиків.

Для студентів економічних та інших прикладних спеціальностей.

УДК 330.4: 519.86 (075.8)

ISBN 978-617-8703-50-9

© Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, 2026

© В.С. Григорків, М.В. Григорків,
О.І. Ярошенко, Л.В. Скращук, 2026

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	4
ТЕМА 1. ОДНОВИМІРНА ОПТИМІЗАЦІЯ.....	5
ТЕМА 2. КЛАСИЧНА БАГАТОВИМІРНА ОПТИМІЗАЦІЯ.....	17
ТЕМА 3. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ	32
ТЕМА 4. ТРАНСПОРТНІ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ.....	97
ТЕМА 5. ЦІЛОЧИСЛОВЕ ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ.....	127
ТЕМА 6. НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ	139
ТЕМА 7. ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ.....	167
ВІДПОВІДІ	183
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	239

ПЕРЕДМОВА

Підготовка сучасних фахівців у сфері економіки та бізнесу, у тому числі й фахівців у інших сферах людської діяльності, неможлива без знання основних принципів та інструментарію прийняття рішень, зокрема тих, професійне обґрунтування яких потребує вміння використовувати на практиці оптимізаційні моделі та наявні методи і технології їх аналізу і розв'язування з метою продукування оптимальних рішень.

Формування зазначених фахових компетентностей передбачено у багатьох освітніх програмах, тому розробка навчально-методичної літератури з оптимізаційних методів і моделей є одним із актуальних завдань освітнього процесу. При цьому ефективність навчально-методичного забезпечення суттєво залежить від його повноти та відповідності освітній програмі, що обов'язково передбачає наявність як теоретичних, так і практичних посібників, матеріали яких можна використати не тільки для аудиторних занять, але й для самостійної роботи, контролю та самоконтролю здобутих знань. У цьому контексті пропонований навчальний посібник є корисним доповненням до комплексу розробок з цієї тематики.

У посібнику наведено типові завдання та приклади їх виконання із класичної одно- та багатовимірної оптимізації, лінійного, нелінійного та динамічного програмування. Матеріал посібника спрямований на засвоєння базових теоретичних і прикладних знань з оптимізаційних методів і моделей.

Усі завдання доповнені відповідями, які відіграють важливу роль у процесі самостійної підготовки здобувачів освіти. Успішне виконання завдань передбачає наявність у них відповідних теоретичних знань [1-10] та навичок їх практичного застосування.

Тема 1. ОДНОВИМІРНА ОПТИМІЗАЦІЯ

Опрацювання теми дає можливості:

- знаходити стаціонарні точки функції одної змінної;
- досліджувати функції на екстремум;
- розв'язувати прикладні оптимізаційні задачі.

Ключові поняття:

- локальні та глобальні екстремуми;
- точки мінімуму та максимуму;
- необхідна умова екстремуму;
- достатні умови екстремуму;
- безумовна та умовна оптимізація.

Практичне застосування: максимізація випуску продукції, максимізація прибутку, визначення оптимальної ціни товару, мінімізація виробничих витрат.

1.1. Приклади виконання завдань

Приклад 1.1. Знайти стаціонарні точки функції $y = f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 7$ та дослідити їх на екстремум.

■ Для того, щоб дослідити функцію $y = f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 7$ на екстремум, спочатку уточнимо, що областю визначення функції $D(f) = \mathbb{R}^1 = (-\infty, \infty)$, а її похідною – $f'(x) = 15x^4 - 15x^2$.

Далі конкретизуємо стаціонарні (критичні) точки, тобто точки області визначення, у яких $f'(x)$ дорівнює нулю (або її не існує). Із рівняння

$$15x^4 - 15x^2 = 0$$

впливає, що

$$15x^2(x^2 - 1) = 0,$$

або

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -1.$$

Позначимо стаціонарні точки на області визначення та уточнимо знак похідної і характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення. Після цього визначимо відносно кожної стаціонарної точки, чи є вона точкою максимуму або мінімуму, чи не є точкою екстремуму (рис. 1.1), використовуючи достатні умови оптимальності [6].

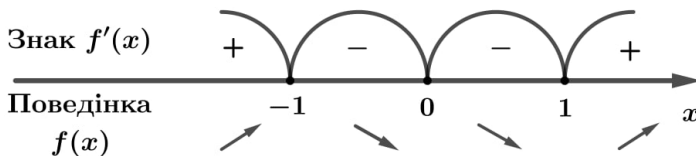


Рис. 1.1. Ілюстрація до прикладу 1.1

Зауважимо, що результати дослідження функції на екстремуми також зручно подавати у вигляді табл. 1.1:

Таблиця 1.1

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	1	$\searrow$	-9	$\nearrow$
		max				Min	

Отже, $x_{\max} = -1$; $x_{\min} = 1$ - точки екстремуму, $y_{\max} = f(-1) = -5$; $y_{\min} = f(1) = -9$ - відповідно максимальне та мінімальне значення функції. ■

Приклад 1.2. Знайти найменше та найбільше значення функції $f(x) = x^3 - 12x - 8$ на відрізку $X = [1; 3]$.

■ Для того, щоб знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = x^3 - 12x - 8$ на відрізку $[1; 3]$, спочатку потрібно переконатися, що заданий відрізок належить області визначення функції $f(x)$. У цьому випадку область визначення функції – усі дійсні числа ($D(f) = \mathbb{R}^1 = (-\infty, \infty)$), отже, заданий відрізок $[1; 3]$ належить області визначення функції $f(x)$. Оскільки

$$f'(x) = 3x^2 - 12,$$

то розв'язками рівняння

$$3x^2 - 12 = 0$$

є точки

$$x_1 = 2, x_2 = -2,$$

які і є стаціонарними.

Заданому відрізку $[1; 3]$ належить лише точка $x_1 = 2$, тому знаходимо значення функції у цій точці і на кінцях відрізка:

$$f(1) = 1; \quad f(2) = -4; \quad f(3) = 3.$$

Порівнявши одержані значення функції, уточнимо найменше і найбільше з них:

$$\max_{[1;3]} f(x) = f(3) = 3$$

$$\min_{[1;3]} f(x) = f(2) = -4. \blacksquare$$

Приклад 1.3. Довжина паркану 100 м. Потрібно визначити розміри максимальної за площею прямокутної ділянки, яку можна загородити цим парканом.

■ Нехай ділянка має форму прямокутника $ABCD$ зі стороною $AB = x$ (рис. 1.2).

Оскільки паркан буде прокладено по периметру прямокутника, то $2AB + 2BC = 100$ або $2x + 2BC = 100$, звідки $BC = 50 - x$.

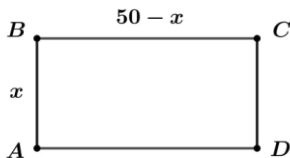


Рис. 1.2. Ілюстрація до прикладу 1.3

Очевидно, що довжина кожної сторони прямокутника є додатним числом, тобто $0 < x < 50$ – область визначення функції (площі прямокутника)

$$S(x) = AB \cdot BC = x(50 - x) = 50x - x^2.$$

Дослідимо функцію $S(x)$ на екстремум :

1) знаходимо похідну $S'(x) = 50 - 2x$ (вона існує при всіх дійсних значеннях x , а отже, $S(x)$ – неперервна функція на заданому проміжку);

2) визначаємо стаціонарні точки з умови $S'(x) = 0$:

$$50 - 2x = 0,$$

$$x = 25;$$

3) уточнюємо знак похідної і характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення (рис. 1.2).



Рис. 1.3. Ілюстрація до прикладу 1.3

У точці $x = 25$ похідна змінює знак із плюса на мінус, тому $x = 25$ – точка максимуму.

Отже, площа огороженої ділянки буде найбільшою, якщо сторони прямокутника будуть однаковими за довжиною ($AB = x = 25$, $BC = 50 - x = 25$), тобто коли ділянка матиме форму квадрата зі стороною 25 м. ■

1.2. Завдання для самостійної роботи

Завдання 1.1. Знайти стаціонарні точки функції $f(x)$ (приклади 1.1.1–1.1.30) та дослідити їх на екстремум:

1.1.1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$;

1.1.2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$;

1.1.3. $f(x) = x^4 - \frac{20}{3}x^3 + 8x^2$;

1.1.4. $f(x) = (x-1)^3(x+1)^2$;

1.1.5. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$;

1.1.6. $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}$;

1.1.7. $f(x) = x^2 e^{-x}$;

1.1.8. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$;

1.1.9. $f(x) = \ln \sqrt{1+x^2} + \operatorname{arctg} x$;

1.1.10. $f(x) = \ln(1+x) - \frac{x^2}{2}$;

1.1.11. $f(x) = x^2 \ln x$;

1.1.12. $f(x) = \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 - 36x}$;

1.1.13. $f(x) = \frac{x^3}{(x-2)(x+3)}$;

1.1.14. $f(x) = \frac{2}{3}x^2 \sqrt[3]{6x-7}$;

1.1.15. $f(x) = (x^2 - 2x) \ln x - \frac{3}{2}x^2 + 4x$;

1.1.16. $f(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$;

1.1.17. $f(x) = x + \frac{1}{x}$;

$$1.1.18. f(x) = \frac{2x}{1+x^2};$$

$$1.1.19. f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1};$$

$$1.1.20. f(x) = \sqrt{2x - x^3};$$

$$1.1.21. f(x) = x\sqrt[3]{x-1};$$

$$1.1.22. f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x;$$

$$1.1.23. f(x) = e^x \sin x;$$

$$1.1.24. f(x) = \frac{\ln^2 x}{x};$$

$$1.1.25. f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1;$$

$$1.1.26. f(x) = (x-1)^6;$$

$$1.1.27. f(x) = 5x^6 - 36x^5 + \frac{165}{2}x^4 - 60x^3 + 36;$$

$$1.1.28. f(x) = x - \ln(1+x);$$

$$1.1.29. f(x) = x \ln^2 x;$$

$$1.1.30. f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

Завдання 1.2. Знайти найменше та найбільше значення функції $f(x)$ (приклади 1.2.1–1.2.30) на відрізку X :

1.2.1. $f(x) = 2^x$, $X = [-1; 5]$;

1.2.2. $f(x) = x^2 - 4x + 6$, $X = [-3; 10]$;

1.2.3. $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $X = [0, 01; 100]$;

1.2.4. $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$, $X = [-1; 1]$;

1.2.5. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $X = [-2; 2]$;

1.2.6. $f(x) = x + \sqrt{x}$, $X = [0; 4]$;

1.2.7. $f(x) = e^{2x} - e^{-2x}$, $X = [-2; 1]$;

1.2.8. $f(x) = 3x^2 - 6x$, $X = [0; 3]$;

1.2.9. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$, $X = [-2; 1]$;

1.2.10. $f(x) = \frac{4 - x^2}{4 + x^2}$, $X = [-1; 3]$;

1.2.11. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$, $X = [-4; 4]$;

1.2.12. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$, $X = [0; 3]$;

1.2.13. $f(x) = x - 2 \ln x$, $X = [1; e]$;

1.2.14. $f(x) = x^2 \ln x$, $X = [1; e]$;

1.2.15. $f(x) = \sqrt[3]{2x^2} + 1$, $X = [-2; 1]$;

1.2.16. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$, $X = [-1; 2]$;

1.2.17. $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 9x^2 + 48x$, $X = [0; 9]$;

1.2.18. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$, $X = [-1; 2]$;

1.2.19. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, $X = [-1; 2]$;

1.2.20. $f(x) = \frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$, $X = [0; 1]$;

1.2.21. $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1}$, $X = [-1; 1]$;

$$1.2.22. \ f(x) = x - 2\sqrt{x}, \ X = [0; 5];$$

$$1.2.23. \ f(x) = x - 2 \ln x, \ X = \left[\frac{3}{2}; e \right];$$

$$1.2.24. \ f(x) = x \ln \frac{x}{5}, \ X = [1; 5];$$

$$1.2.25. \ f(x) = x - 4\sqrt{x} + 1, \ X = [1; 9];$$

$$1.2.26. \ f(x) = x + \frac{4}{x^2}, \ X = [1; 3];$$

$$1.2.27. \ f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \ X = [0; 2];$$

$$1.2.28. \ f(x) = \sqrt{21+4x-x^2}, \ X = [-1; 7];$$

$$1.2.29. \ f(x) = \frac{x^2+3}{x^2+2x+5}, \ X = [-1; 3];$$

$$1.2.30. \ f(x) = \sqrt[3]{(x^2-2x)^2}, \ X = [0; 3].$$

Завдання 1.3. Розв'язати задачі 1.3.1–1.3.30:

1.3.1. Вікно має форму прямокутника, завершеного півкругом. Визначити розміри вікна, яке пропускає найбільшу кількість світла при заданому периметрі.

1.3.2. Із квадратного листа жерсті зі стороною a необхідно виготовити відкриту зверху коробку, вирізавши по кутах квадратики та загнувши утворені кромки. Якою має бути сторона коробки, щоб її об'єм був найбільший?

1.3.3. Необхідно виготовити ящик із кришкою, об'єм якого повинен дорівнювати 72 см^3 , причому сторони основи відносилися як 1:2. Які повинні бути розміри всіх сторін, щоби повна поверхня була найменшою?

1.3.4. Відкритий бак має форму циліндра. Якими при даному об'ємі V повинні бути радіус основи і висота циліндра, щоб його поверхня була найменшою?

1.3.5. На сторінці текст повинен займати 324 см^2 . Верхнє та нижнє поля мають бути по 3 см, праве та ліве – по 2 см. Якщо брати до уваги тільки економію паперу, то які повинні бути найвигідніші розміри сторінки, щоб її периметр був найменшим?

1.3.6. Бак без кришки з квадратною основою повинен мати об'єм V . Як мають відноситись довжина основи до висоти баку, щоб на його виготовлення пішла найменша кількість матеріалу?

1.3.7. Завод A необхідно з'єднати шосейною дорогою з прямолінійною ділянкою залізниці, на якій розташоване місто B . Відстань BC (рис. 1.4) по залізниці дорівнює a , відстань AC до залізниці дорівнює l . Витрати перевезень по шосе в m разів дорожчі за вартість перевезень по залізниці ($m \geq 1$). Як провести шосе до залізниці, щоб вартість перевезень від заводу до міста була найменшою?

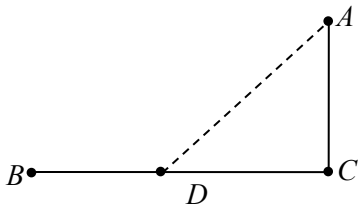


Рис. 1.4. Ілюстрація до задачі 1.3.7

1.3.8. Із трьох дощок однакової ширини збивають жолоб. При якому куті нахилу бічних стінок до дна жолоба площа його поперечного перерізу буде найбільшою?

1.3.9. З круглої колоди, діаметр перерізу якої дорівнює d , потрібно витесати балку найбільшої міцності. Міцність балки пропорційна xu^2 , де x – довжина основи прямокутника, який є перерізом балки, а u – його висота.

1.3.10. Човен розміщений на відстані 3 км від найближчої точки A берега. Пасажир хоче переплисти човном у село B , яке розташоване на березі на відстані 5 км від A (ділянку AB берега вважати прямолінійною). Човен рухається зі швидкістю 4 км/год; пасажир, вийшовши з човна, може пройти за годину 5 км. До якого пункту на березі має пристати човен, щоб пасажир прибув у село B за найкоротший час?

1.3.11. Потрібно відокремити прямокутну ділянку найбільшої площі біля стіни так, щоб з одного боку вона прилягала до стіни, а з інших трьох була огорожена a метрами сітки.

1.3.12. По двох вулицях рухаються до перехрестя дві машини зі сталими швидкостями 40 і 50 км/год. Вважаючи, що вулиці перетинаються під прямим кутом і знаючи, що в деякий момент часу машини перебувають від перехрестя на відстані 2 і 3 км відповідно, визначте, через який час відстань між ними буде найменшою.

1.3.13. Якими мають бути розміри ящика з кришкою місткістю 1764 см³, якщо сторони відносяться як 3 : 4, щоб на його виготовлення пішло найменше матеріалу?

1.3.14. Довжина відкритого басейну об'ємом 288 м² вдвічі більша за його ширину. Якими мають бути розміри басейну, щоб на його облицювання пішло найменше матеріалу?

1.3.15. Ціна алмаза, за інших однакових умов, пропорційна квадрату його маси. Ціна алмаза в 1 карат становить a гр. од. Якою буде найменша вартість двох алмазів загальною масою в 4 карати за тих самих умов?

1.3.16. Серед усіх прямокутників площею S знайти прямокутник із найменшим периметром.

1.3.17. Серед усіх прямокутників площею S знайти прямокутник з найменшою діагоналлю.

1.3.18. Необхідно виготовити закритий циліндричний бак об'ємом 500 л. Якими повинні бути його розміри, щоб для виготовлення використати найменшу кількість матеріалу?

1.3.19. Який кут повинен бути при вершині рівнобедреного трикутника із заданою площею, щоб радіус вписаного в цей трикутник кола був найбільшим?

1.3.20. Дві сторони паралелограма лежать на сторонах трикутника, а одна із його вершин належить третій стороні. За яких умов площа паралелограма буде найбільшою?

1.3.21. Серед рівнобедрених трикутників з бічною стороною a знайти трикутник з найбільшою площею.

1.3.22. У який круг можна вписати прямокутник з найбільшою площею і периметром $P = 56$ см?

1.3.23. Бічне ребро правильної трикутної піраміди має постійно задану довжину і нахилене до площини основи під кутом α . При якому значенні α об'єм піраміди буде найбільшим?

1.3.24. Потрібно загородити огорожею прямокутну ділянку землі площею у 294 га і розділити потім цю ділянку огорожею на дві рівні частини. При яких лінійних розмірах ділянки довжина всієї огорожі буде найменшою?

1.3.25. Із пункту A на прогулянку вийшов пішохід зі швидкістю v км/год. Після того як він відійшов від A на 6 км, із A слідом за ним виїхав велосипедист, швидкість якого була на 9 км/год більшою від швидкості пішохода. Коли велосипедист наздогнав пішохода, вони пішли назад і разом повернулись до A зі швидкістю 4 км/год. При якій швидкості v час прогулянки пішохода буде найменшим?

1.3.26. У прямокутний трикутник з гіпотенузою 24 см і кутом 60° вписаний прямокутник, основа якого лежить на гіпотенузі. Якими повинні бути довжини сторін прямокутника, щоб його площа була найбільшою?

1.3.27. Знайти довжини сторін прямокутника найбільшої площі, вписаного у прямокутний трикутник, зі сторонами 18, 24 і 30 см, якщо прямокутник має з трикутником спільний прямий кут.

1.3.28. Величина кута при основі рівнобедреного трикутника дорівнює α . При якому значенні α відношення довжин радіусів вписаного і описаного кола найбільше? Яке найбільше значення цього відношення?

1.3.29. Визначити довжини сторін прямокутника з найбільшою площею, вписаного у прямокутну трапецію з довжинами основ 24 і 8 см і довжиною висоти 12 см (дві вершини прямокутника лежать на бічних сторонах трапеції, а дві інші – на її більшій основі).

1.3.30. Твірна конуса має постійну довжину і складає з висотою конуса кут α . У конус вписана правильна шестикутна призма з рівними довжинами ребер (основа призми лежить у площині основи конуса). При якому значенні α бічна поверхня призми буде найбільшою?

Тема 2. КЛАСИЧНА БАГАТОВИМІРНА ОПТИМІЗАЦІЯ

Опрацювання теми дає можливість:

- застосовувати необхідні та достатні умови екстремуму функцій багатьох змінних для знаходження розв'язків задач багатовимірної оптимізації;
- розв'язувати задачі умовної оптимізації методом множників Лагранжа.

Ключові поняття:

- умови оптимальності;
- матриця Гессе;
- критерій Сильвестра;
- функція Лагранжа.

Практичне застосування: знаходження розв'язків та аналіз оптимізаційних економіко-математичних моделей.

2.1. Приклади виконання завдань

Приклад 2.1. Дослідити на екстремум функцію:

$$f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 12x_1 - 3x_2.$$

■ Функція визначена у всьому просторі $\mathbb{R}^2$, тому маємо задачу на безумовний екстремум. Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2 - 12,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 + 2x_2 - 3.$$

Прирівнявши знайдені частинні похідні до нуля, отримаємо систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 12 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3 = 0, \end{cases}$$

розв'язком якої є значення

$$x_1 = 7, \quad x_2 = -2.$$

Точка $(7, -2)^T$ стаціонарна або критична, у чому легко переконатися. Частинні похідні другого порядку в цій точці такі:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 1.$$

Оскільки матриця Гессе

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

то її *головні (або кутові) мінори*

$$\Delta_1 = a_{11} = 2 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 4 - 1 = 3 > 0.$$

Із критерію Сильвестра [6] випливає, що знайдена стаціонарна точка $(7, -2)^T$ є точкою мінімуму і

$$f_{\min} = f(7; -2) = 7^2 + 7 \cdot (-2) + (-2)^2 - 12 \cdot 7 - 3 \cdot (-2) = -39. \blacksquare$$

Приклад 2.2. На підприємстві є дані про кількість проданої продукції y_i ($i = \overline{1, 7}$) та витрати на її рекламу x_i ($i = \overline{1, 7}$) за сім років (табл. 2.1). Побудувати для $(x_i, y_i)^T$ $i = \overline{1, 7}$, оптимальну апроксимуючу функцію $g(x) = a + bx$ (a, b – параметри), скориставшись критерієм мінімізації

суми квадратів відхилень значень $g(x_i)$ від заданих y_i ($i = \overline{1,7}$) (метод найменших квадратів), та спрогнозувати обсяг продажу продукції y^* , якщо витрати на рекламу $x^* = 25$ тис. гр. од.

Таблиця 2.1

x_i , тис. гр. од	1	2	3	4	5	6	7
y_i , тис. шт.	3	9	14	16	20	24	26

■ Це завдання розкриває зміст методу найменших квадратів і його застосування у задачах оптимальної апроксимації, зокрема для ідентифікації параметрів лінійної функції $y = a + bx$ на основі вибірових даних у математичній статистиці та економетриці. Задача побудови оптимальної апроксимуючої лінійної функції (для сукупності із n даних) зводиться до задачі безумовної (по a та b) мінімізації

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^n [a + bx_i - y_i]^2 \rightarrow \min.$$

Із необхідних умов екстремуму для функції двох змінних, тобто умов

$$\begin{cases} \frac{\partial F(a, b)}{\partial a} = 0, \\ \frac{\partial F(a, b)}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

або умов

$$\begin{cases} 2 \sum_{i=1}^n (a + bx_i - y_i) = 0, \\ 2 \sum_{i=1}^n (a + bx_i - y_i) \cdot x_i = 0 \end{cases}$$

отримаємо відносно невідомих a та b систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} na + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot b = \sum_{i=1}^n y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot a + \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \cdot b = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i, \end{cases}$$

розв'язавши яку, остаточно визначимо шукані a та b .

Наприклад, для $n=7$ і відповідних даних із табл. 2.1, заданої в умові задачі

$$\sum_{i=1}^7 x_i = 28, \quad \sum_{i=1}^7 y_i = 112, \quad \sum_{i=1}^7 x_i^2 = 140, \quad \sum_{i=1}^7 x_i y_i = 553, \quad \text{тому}$$

система для знаходження a та b має такий вигляд:

$$\begin{cases} 7a + 28b = 112, \\ 28a + 140b = 553. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи будуть значення

$$b = 3,75, \quad a = 1.$$

Отже, $(a, b)^T = (1; 3,75)^T$ – стаціонарна точка.

Переконаємося у тому, що ця точка є точкою мінімуму.

Матриця Гессе (матриця других похідних)

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial b \partial a} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial b \partial a} & \frac{\partial^2 F}{\partial b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n & 2 \sum_{i=1}^n x_i \\ 2 \sum_{i=1}^n x_i & 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{pmatrix}$$

у випадку $n=7$, $\sum_{i=1}^7 x_i = 28$, $\sum_{i=1}^7 x_i^2 = 140$ конкретизується

так:

$$H = \begin{pmatrix} 14 & 56 \\ 56 & 280 \end{pmatrix}.$$

Для цієї матриці $a_{11} = 14 > 0$ і $\Delta = 14 \cdot 280 - 56^2 = 784 > 0$, тому, згідно із критерієм Сильвестра [6], ця матриця

додатно визначена і $(a, b)^T = (1; 3,75)^T$ – точка мінімуму. Отже, $y = a + bx = 1 + 3,75x$ – оптимальна апроксимуюча функція.

Для $x^* = 25$ (тис. гр. од) $y^* = 1 + 3,75 \cdot x^* = 94,75$ (гр. од). ■

Приклад 2.3. З урахуванням заданих умов зв'язку $x_1 + x_2 = 1$ знайти екстремум функції $f(x) = x_1 x_2$.

■ Маємо класичну задачу на умовний екстремум [6], у якій допустима множина розв'язків описується співвідношенням $g(x) = x_1 + x_2 - 1 = 0$.

Оскільки градієнт

$$g'(x) = \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial g(x)}{\partial x_2} \right)^T = (1, 1)^T \neq (0, 0)^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

для усіх x , що задовольняють умову зв'язку (і взагалі для усіх x), а один ненульовий вектор завжди лінійно незалежний, то виконується умова регулярності і функція Лагранжа також буде регулярною, тобто матиме вигляд

$$L(x, \lambda) = x_1 x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - 1),$$

де λ – множник Лагранжа.

На другому кроці обчислимо частинні похідні першого порядку від функції Лагранжа:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 + \lambda, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + \lambda, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 1. \end{cases}$$

Прирівнявши знайдені частинні похідні до нуля, отримаємо систему рівнянь, розв'язком якої і буде шукана стаціонарна точка x^* . Отже,

$$\begin{cases} x_2 + \lambda = 0, \\ x_1 + \lambda = 0, \\ x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \lambda = -x_2, \\ \lambda = -x_1, \\ x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \lambda = -x_2, \\ x_1 = x_2 \\ x_1 + x_2 - 1 = 0, \end{cases}$$

тому

$$x_1^* = \frac{1}{2}, \quad x_2^* = \frac{1}{2}, \quad \lambda^* = -\frac{1}{2},$$

$$\text{тобто } x^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^T.$$

Наступний крок полягає у визначенні матриці других похідних $L''_{xx}(\lambda, x)$ у цій точці за змінними x_1, x_2 . З огляду на те, що

$$\frac{\partial^2 L(\lambda, x)}{\partial x_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L(\lambda, x)}{\partial x_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L(\lambda, x)}{\partial x_1 \partial x_2} = 1,$$

матриця

$$L''_{xx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки головні мінори $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0 - 1 = -1$, використати критерій Сильвестра тут не можна. Потрібно дослідити на знаковизначеність другий диференціал $d^2 L(x, \lambda)$, тобто квадратичну форму

$$\begin{aligned} d^2 L(x, \lambda) &= \left\langle L''_{xx}(x, \lambda) dx, dx \right\rangle = \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} dx_2 \\ dx_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix} \right\rangle = dx_1 dx_2 + dx_1 dx_2 = 2 dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

При всіх ненульових $dx \in \mathbb{R}^2$, для яких виконується умова

$$dg(x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g(x)}{\partial x_2} dx_2 =$$

$$= 1 \cdot dx_1 + 1 \cdot dx_2 = dx_1 + dx_2 = 0,$$

тобто умова $dx_2 = -dx_1$,

другий диференціал

$$d^2 L(x, \lambda) = 2dx_1(-dx_1) = -2(dx_1)^2 < 0.$$

Отже, згідно з достатніми умовами [6], це означає, що

точка $x^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$ є точкою максимуму.

Стосовно даного завдання зауважимо, що його можна виконати і в інший спосіб, а саме записавши умову зв'язку у вигляді $x_2 = 1 - x_1$.

Тоді $f(x) = x_1 x_2 = x_1(1 - x_1) = x_1 - x_1^2 = \tilde{f}(x_1)$ і завдання зведеться до дослідження на безумновний екстремум функції однієї змінної. Очевидно, що коренями рівняння $\tilde{f}'(x_1) = 0$, тобто рівняння $1 - 2x_1 = 0$, є значення $x_1^* = \frac{1}{2}$, тому

$$x_2^* = \frac{1}{2}.$$

Врахувавши, що $\tilde{f}''(x_1) = -2 < 0$, приходимо до висновку, що $x_1^* = \frac{1}{2}$ – точка максимуму, тобто $x^* = (x_1^*, x_2^*)^T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T$ – точка максимуму функції $f(x) = x_1 x_2$ на допустимій множині, заданій умовою зв'язку $x_1 + x_2 = 1$, що і потрібно було підтвердити. ■

2.2. Завдання для самостійної роботи

Завдання 2.1. Дослідити на екстремум функцію $f(x)$
(приклади 2.1.1–2.1.30):

2.1.1. $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 - x_2$;

2.1.2. $f(x) = 2 + x_1 - x_2 - x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$;

2.1.3. $f(x) = 3x_1 + 6x_2 - x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$;

2.1.4. $f(x) = 3(x_1^2 + x_2^2) - x_1^3 + 4x_2$;

2.1.5. $f(x) = 3x_1^2x_2 + x_2^3 - 12x_1 - 15x_2 + 3$;

2.1.6. $f(x) = 2x_1^3 + x_1x_2^2 + 5x_1^2 + x_2^2$;

2.1.7. $f(x) = 3x_1^3 + x_2^3 - 3x_2^2 - x_1 - 1$;

2.1.8. $f(x) = x_1^3 + x_2^3 + 3ax_1x_2$;

2.1.9. $f(x) = x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2^2 - 6x_1^2x_2 + 12x_1x_2$;

2.1.10. $f(x) = x_1^4 + x_2^4 - 2x_1^2$;

2.1.11. $f(x) = x_1^4 + x_2^4 - 2(x_1 - x_2)^2$;

2.1.12. $f(x) = 2x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_2^2$;

2.1.13. $f(x) = x_1x_2^2(12 - x_1 - x_2)$, $x > 0$, $y > 0$;

2.1.14. $f(x) = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} - x_1x_2$;

2.1.15. $f(x) = \frac{8}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} + x_2$;

2.1.16. $f(x) = 81\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) - (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$;

2.1.17. $f(x) = 3x_1^2 - 2x_1\sqrt{x_2} + x_2 - 8x_1$;

2.1.18. $f(x) = x_1\sqrt{1+x_2} + x_2\sqrt{1+x_1}$, $x_1 > -1$, $x_2 > -1$;

2.1.19. $f(x) = 1 + x_1^2 + \sqrt[3]{(x_2 + 2)^2}$;

2.1.20. $f(x) = 1 + x_2^2 - \sqrt[5]{(x_1 - 2)^4}$;

- 2.1.21. $f(x) = (x_1 + x_2^2)e^{\frac{x_1}{2}};$
- 2.1.22. $f(x) = (x_1^2 - 2x_2^2)e^{x_1 - x_2};$
- 2.1.23. $f(x) = (8x_1^2 - 6x_1x_2 + 3x_2^2)e^{2x_1 + 3x_2};$
- 2.1.24. $f(x) = (5 - 2x_1 + x_2)e^{x_1^2 - x_2};$
- 2.1.25. $f(x) = \frac{x_1^3}{3} + 3x_1^2e^{x_2} - e^{-x_2^2};$
- 2.1.26. $f(x) = (25 - 5x_1 - 7x_2)e^{-(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)};$
- 2.1.27. $f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 4\ln x_1 - 10\ln x_2;$
- 2.1.28. $f(x) = 108\ln x_1 - x_1x_2^2 + \frac{x_2^3}{3};$
- 2.1.29. $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 32\ln(x_1x_2);$
- 2.1.30. $f(x) = x_1x_2\ln(x_1^2 + x_2^2).$

Завдання 2.2. На підприємстві є дані про кількість y_i (тис. шт.) проданої продукції та витрати x_i (тис. грошових (гр.) од.) на її рекламу за сім років ($i = \overline{1,7}$). Побудувати для $(x_i, y_i)^T$ $i = \overline{1,7}$ (табл. 2.2.1-2.2.30) оптимальну апроксимуючу функцію $g(x) = a + bx$ (a, b – параметри), скориставшись критерієм мінімізації суми квадратів відхилень значень $g(x_i)$ від заданих y_i ($i = \overline{1,7}$) (метод найменших квадратів), та спрогнозувати обсяг продажу продукції y^* , якщо витрати на рекламу $x^* = 25$ тис. гр. од.

2.2.1

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	6	9	12	15	18	21	24

2.2.2

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	3	16	14	16	20	24	26

2.2.3

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	10	16	21	23	20	24	26

2.2.4

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	3	9	14	30	20	24	26

2.2.5

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	3	9	14	16	20	24	33

2.2.6

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	10	16	21	16	20	24	26

2.2.7

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	3	9	14	16	20	24	40

2.2.8

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	3	9	14	16	20	24	47

2.2.9

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	3	16	21	16	20	24	33

2.2.10

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	3	9	28	16	13	24	26

2.2.11

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	3	9	14	23	20	24	26

2.2.12

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	3	9	28	16	55	24	26

2.2.13

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	3	16	14	16	20	38	26

2.2.14

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	17	16	14	16	20	24	40

2.2.15

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	3	9	14	16	20	31	33

2.2.16

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	3	16	21	16	20	52	26

2.2.17

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	3	9	14	16	13	24	26

2.2.18

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	3	16	14	30	20	24	26

2.2.19

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	3	9	21	16	27	31	26

2.2.20

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	17	16	14	16	20	17	26

2.2.21

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	17	9	14	16	20	24	40

2.2.22

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	10	9	14	16	20	24	40

2.2.23

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	3	16	7	16	20	24	26

2.2.24

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	3	16	21	16	20	24	26

2.2.25

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	17	16	14	30	20	24	26

2.2.26

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	3	9	28	16	27	31	47

2.2.27

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	10	16	14	16	20	45	26

2.2.28

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	10	16	14	16	20	24	40

2.2.29

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	10	16	14	16	20	24	26

2.2.30

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	10	16	21	23	20	24	40

Завдання 2.3. Знайти екстремум функції $f(x)$ з урахуванням заданих умов зв'язку (приклади 2.3.1–2.3.30):

$$2.3.1. \quad f(x) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2, \quad x_1^2 + x_2^2 = 8;$$

$$2.3.2. \quad f(x) = x_1^2 + x_2^2, \quad 3x_1 + 2x_2 = 6;$$

$$2.3.3. \quad f(x) = x_1^2 - x_2^2, \quad 2x_1 - x_2 = 3;$$

$$2.3.4. \quad f(x) = x_1 x_2, \quad 2x_1 + 3x_2 = 5;$$

$$2.3.5. \quad f(x) = x_1 x_2^2, \quad x_1 + 2x_2 = 1;$$

$$2.3.6. \quad f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 + x_1 + x_2 - 4, \quad x_1 + x_2 = -3;$$

$$2.3.7. \quad f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2, \quad x_1 - x_2 = 0;$$

$$2.3.8. \quad f(x) = x_1 x_2^2, \quad x_1 + 2x_2 = 1;$$

$$2.3.9. \quad f(x) = 5 - 3x_1 - 4x_2, \quad x_1^2 + x_2^2 = 25;$$

$$2.3.10. \quad f(x) = 1 - 4x_1 - 8x_2, \quad x_1^2 - 8x_2^2 = 8;$$

$$2.3.11. \quad f(x) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2, \quad x_1^2 + x_2^2 = 1;$$

$$2.3.12. \quad f(x) = 2x_1^2 + 12x_1 x_2 + x_2^2, \quad x_1^2 + 4x_2^2 = 25;$$

$$2.3.13. \quad f(x) = 1 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}, \quad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{8};$$

$$2.3.14. \quad f(x) = \ln(x_1 x_2), \quad x_1^3 + x_1 x_2 + x_2^3 = 0;$$

$$2.3.15. \quad f(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 13;$$

$$2.3.16. \quad f(x) = x_1 x_2^2 x_3^3, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 12;$$

$$2.3.17. \quad f(x) = x_1^2 x_2^3 x_3^4, \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 18;$$

$$2.3.18. \quad f(x) = \sin x_1 \sin x_2 \sin x_3, \quad x_1 + x_2 + x_3 = \frac{\pi}{2};$$

$$2.3.19. \quad f(x) = x_1 - 2x_2 + 2x_3, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9;$$

$$2.3.20. \quad f(x) = x_1 - x_2 + 2x_3, \quad x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 = 16;$$

$$2.3.21. \quad f(x) = x_1 x_2 x_3, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3;$$

$$2.3.22. \quad f(x) = x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3, \quad x_1 x_2 x_3 = 108;$$

$$2.3.23. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1, a > b > c > 0;$$

$$2.3.24. f(x) = x_1 + x_2 + x_3, \frac{a}{x_1} + \frac{b}{x_2} + \frac{c}{x_3} = 1, a > 0, b > 0, c > 0;$$

$$2.3.25. f(x) = x_1 x_2 x_3, x_1 + x_2 - x_3 = 3, x_1 - x_2 - x_3 = 8;$$

$$2.3.26. f(x) = x_1 x_2 x_3, x_1 x_2 + x_2 x_3 - x_1 x_3 = 8, x_1 + x_2 + x_3 = 5;$$

$$2.3.27. f(x) = x_1 x_2 + x_2 x_3, x_1^2 + x_2^2 = 2, x_2 + x_3 = 2, x_2 > 0;$$

$$2.3.28. f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 + x_3^2 = 1, x_1 + x_2 + x_3 = 0;$$

$$2.3.29. f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 - 3)^2,$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 21, 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0;$$

$$2.3.30. f(x) = \frac{x_1^2}{4} + x_2^2 + x_3^2, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1,$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0.$$

Тема 3. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Опрацювання теми дає можливість:

- будувати математичні моделі, формалізовані задачами лінійного програмування;
- знаходити розв'язки задач лінійного програмування графічним та симплексним методами;
- будувати та аналізувати двоїсті задачі лінійного програмування, знаходити їх розв'язки.

Ключові поняття:

- форми запису задач лінійного програмування;
- алгоритм графічного та симплексного методів;
- двоїсті задачі лінійного програмування.

Практичне застосування: оптимізація виробничих процесів, планування, прогнозування, прийняття рішень в умовах визначеності.

3.1. Приклади виконання завдань

Приклад 3.1. Побудувати математичну модель задачі:

Процес виготовлення заводом двох видів виробів A_1 і A_2 вимагає, по-перше, послідовної обробки на токарних і фрезерних верстатах і, по-друге, витрат двох видів сировини: сталі й кольорових металів. Дані про витрати кожного ресурсу на одиницю продукції та загальні запаси ресурсів наведено у табл. 3.1:

Таблиця 3.1

Матеріали та обладнання	Витрати на один виріб		Ресурси
	A_1	A_2	
Сталь (кг)	10	70	320
Кольорові метали(кг)	20	50	420
Токарні верстати (верстатогодини)	300	400	6200
Фрезерні верстати (верстатогодини)	200	100	3400

Прибуток від реалізації одиниці виробу A_1 – 3 тис. гр. од., одиниці виробу A_2 – 8 тис. гр. од. Знайти такий план випуску продукції, який забезпечить максимальний прибуток за умови, що час роботи фрезерних верстатів буде використано повністю.

■ Нехай x_1 та x_2 – обсяги випуску продукції A_1 та A_2 . Тоді прибуток від їх реалізації визначається за формулою

$$f(x) = f(x_1, x_2) = 3x_1 + 8x_2. \quad (3.1)$$

Ресурси матеріалів та обладнання обмежені, тобто

$$\begin{cases} 10x_1 + 70x_2 \leq 320, \\ 20x_1 + 50x_2 \leq 420, \\ 300x_1 + 400x_2 \leq 6200, \\ 200x_1 + 100x_2 \leq 3400. \end{cases} \quad (3.2)$$

Крім того, кількість виробів може бути тільки невід'ємною:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (3.3)$$

З урахуванням (3.1)-(3.3), економіко-математична модель задачі планування оптимального випуску продукції у цьому випадку формалізується задачею лінійного програмування (3.4):

$$\begin{cases} f(x) = 3x_1 + 8x_2 \rightarrow \max, \\ 10x_1 + 70x_2 \leq 320, \\ 20x_1 + 50x_2 \leq 420, \\ 300x_1 + 400x_2 \leq 6200, \\ 200x_1 + 100x_2 \leq 3400, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

■

Приклад 3.2. Звести до канонічного вигляду таку задачу лінійного програмування

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \rightarrow \min, \\ 7x_1 + 2x_2 \geq 14, \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30, \\ 3x_1 + 8x_2 \geq 24, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases} \quad (3.5)$$

■ Щоб записати задачу (3.5) у канонічній формі, потрібно перейти від обмежень-нерівностей до обмежень-рівностей, ввівши допоміжні змінні x_3, x_4, x_5 . Тоді задача (3.5) набуде канонічного вигляду (3.6):

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \rightarrow \min, \\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 = 14, \\ 5x_1 + 6x_2 + x_4 = 30, \\ 3x_1 + 8x_2 - x_5 = 24, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}. \end{cases} \quad (3.6)$$

■

Приклад 3.3. Розв'язати графічним методом задачу лінійного програмування

$$\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \rightarrow \min, \\ 7x_1 + 2x_2 \geq 14, \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 30, \\ 3x_1 + 8x_2 \geq 24, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases} \quad (3.7)$$

■ На площині координат $x_1 O x_2$ геометрично відтворюємо допустиму область задачі та побудуємо напрямний вектор $c = (c_1, c_2)^T = (-2; 5)^T$, який є вектором-градієнтом цільової функції, і перпендикулярно до нього лінії рівня $-2x_1 + 5x_2 = \text{const}$. Трикутник ABC (рис. 3.1) є областю допустимих розв'язків задачі. Рухаючи лінію рівня $-2x_1 + 5x_2 = \text{const}$ у протилежному напрямку (функція зростає у напрямку градієнта і спадає у напрямку антиградієнта) до вектора $c = (-2, 5)^T$, приходимо до висновку, що точка В є точкою мінімуму задачі.

Геометрична ілюстрація процесу розв'язування задачі графічним методом наведена на рис. 3.1.

Знайдемо координати т. В, як координати точки перетину прямих (II) та (III), розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 = 30, \\ 3x_1 + 8x_2 = 24. \end{cases}$$

Розв'язком системи є $x_1^* = \frac{48}{11}$, $x_2^* = \frac{15}{11}$. Ці значення і є розв'язком задачі (3.7). При цьому $f_{\min}^* = -2 \cdot \frac{48}{11} + 5 \cdot \frac{15}{11} = -\frac{21}{11}$.

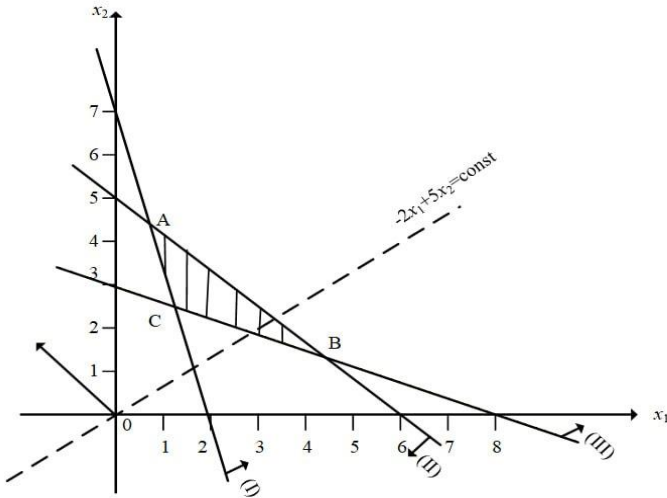


Рис. 3.1. Ілюстрація до прикладу 3.3

Приклад 3.4. Дослідити і розв'язати (у випадку сумісності) методом Жордана-Гаусса таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases} \quad (3.8)$$

■ Результати обчислень наведено у табл. 3.2. У ній через $\tilde{A}^{(0)}$, $\tilde{A}^{(1)}$, $\tilde{A}^{(2)}$, $\tilde{A}^{(3)}$ позначені розширені матриці відповідно системи (3.8) та еквівалентних до (3.8) систем, отриманих після 1-ї, 2-ї і 3-ї ітерації. Для кожної з указаних матриць змінна x_j ($j = \overline{1,3}$) відповідає j -ому стовпчику, а змінна x_0 – стовпчику вільних членів.

Матриця $\tilde{A}^{(1)}$ формується так. У матриці $\tilde{A}^{(0)}$ виберемо ведучий елемент $a_{21}^{(0)} = 1$, після чого розділимо елементи

ведучого рядка ($r=2$) на $a_{21}^{(0)}$ і отримаємо r -й (другий) рядок матриці $\tilde{A}^{(1)}$. Елементи першого стовпця $\tilde{A}^{(1)}$ нульові, за винятком другого $a_{21}^{(1)}$, який відповідає ведучому елементу $a_{rs}^{(0)}$ ($r=2, s=1$) матриці $\tilde{A}^{(0)}$. Інші елементи матриці $\tilde{A}^{(1)}$ обчислюються «за правилом прямокутника» [6] і набувають таких числових значень:

$$a_{12}^{(1)} = -1 - \frac{2 \cdot 3}{1} = -7, \quad a_{13}^{(1)} = 1 - \frac{2 \cdot (-2)}{1} = 5, \quad b_1^{(1)} = 3 - \frac{2 \cdot 1}{1} = 1,$$

$$a_{32}^{(1)} = 1 - \frac{0 \cdot 3}{1} = 1, \quad a_{33}^{(1)} = 2 - \frac{0 \cdot (-2)}{1} = 2, \quad b_3^{(1)} = 8 - \frac{0 \cdot 1}{1} = 8.$$

При формуванні матриці $\tilde{A}^{(2)}$ за ведучий елемент матриці $\tilde{A}^{(1)}$ вибрано $a_{32}^{(1)} = 1$, а матриці $\tilde{A}^{(3)}$ – елемент $a_{13}^{(2)} = 19$ матриці $\tilde{A}^{(2)}$. У результаті від матриці $\tilde{A}^{(0)}$ ми прийшли до матриці $\tilde{A}^{(3)}$, тобто система (3.8) звелася до еквівалентного вигляду:

$$\begin{cases} x_3 = 3, \\ x_1 = 1, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

Отже, система (3.8) має єдиний розв'язок

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3.$$

Таблиця 3.2

Матриці	x_1	x_2	x_3	x_0
$\tilde{A}^{(0)}$	2	-1	1	3
	1	3	-2	1
	0	1	2	8
$\tilde{A}^{(1)}$	0	-7	5	1
	1	3	-2	1
	0	1	2	8
$\tilde{A}^{(2)}$	0	0	19	57
	1	0	-8	-23
	0	1	2	8
$\tilde{A}^{(3)}$	0	0	1	3
	1	0	0	1
	0	1	0	2

■

Приклад 3.5. Знайти опорний розв'язок наведеної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 - 2x_3 + 2x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases} \quad (3.9)$$

■ Поділивши друге рівняння системи (3.9) на 2, отримаємо еквівалентну систему вигляду:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 1,5x_1 - x_3 + x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases} \quad (3.10)$$

Для системи (3.10) базисними є змінні x_4, x_5, x_2 , а вільними – x_1, x_3 . При $x_1 = x_3 = 0$ базисні змінні $x_4 = 6$, $x_5 = 2$, $x_2 = 2$. Тому опорним розв'язком є $x^* = (0; 2; 0; 6; 2)^T$. ■

Приклад 3.6. Знайти всі опорні розв'язки системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_5 = 9. \end{cases} \quad (3.11)$$

■ Результати обчислень наведені у табл. 3.3. Як бачимо, система (3.11) має початковий базисний розв'язок

$$x^{(\bar{0},0)} = (0,0,9,8,9)^T,$$

який і є опорним. Далі користуємося симплексними перетвореннями. Вибираємо перший стовпчик ведучим, оскільки в ньому є два додатних елементи. Враховуючи правило вибору ведучого рядка, тобто те, що

$$\min(\tilde{b}_2 / \tilde{a}_{21} = 8, \tilde{b}_3 / \tilde{a}_{31} = 3) = 3,$$

ведучим рядком вибираємо третій рядок. На перетині ведучих стовпчика й рядка знаходиться ведучий елемент. Використовуючи вже відомі перетворення Жордана-Гаусса, отримуємо еквівалентну форму запису системи (3.11) та відповідний їй опорний розв'язок $x^{(\bar{0},1)} = (3,0,15,5,0)^T$. Ітераційний процес знаходження інших опорних розв'язків продовжується аналогічно (табл. 3.3).

Таблиця 3.3

Номер ітерації	бз	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_0	Розв'язки
0	x_3	-2	3	1	0	0	9	$x^{(\delta,0)} = (0,0,9,8,9)^T$
	x_4	1	1	0	1	0	8	
	x_5	3	-2	0	0	1	9	
1	x_3	0	$\frac{5}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	15	$x^{(\delta,1)} = (3,0,15,5,0)^T$
	x_4	0	$\frac{5}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	5	
	x_1	1	$-\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	3	
2	x_3	0	0	1	-1	1	10	$x^{(\delta,2)} = (5,3,10,0,0)^T$
	x_2	0	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	3	
	x_1	1	0	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	5	
3	x_5	0	0	1	-1	1	10	$x^{(\delta,3)} = (3,5,0,0,10)^T$
	x_2	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	5	
	x_1	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	3	
4	x_5	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	1	15	$x^{(\delta,4)} = (0,3,0,5,15)^T$
	x_2	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	3	
	x_4	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	5	

■

Приклад 3.7. Розв'язати симплекс-методом задачу лінійного програмування, в якій відомий початковий опорний розв'язок:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 10, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 7, \\ 3x_1 - 2x_3 + x_5 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases} \quad (3.12)$$

■ Задача лінійного програмування записана у канонічній формі, має базисні змінні x_2, x_4, x_5 та початковий опорний розв'язок (план) $x^{(\delta,1)} = (0;10;0;7;4)^T$.

Для знаходження оптимального розв'язку задачі (3.12) використаємо симплекс-метод. Результати обчислень наведені у табл. 3.4:

Таблиця 3.4

I	бз	c_i^{δ}	x_i^{δ}	2	-1	3	1	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_2	-1	10	2	1	-3	0	0
2	x_4	1	7	1	0	1	1	0
3	x_5	0	4	3	0	-2	0	1
m+1			-3	-3	0	1	0	0
1	x_2	-1	22/3	0	1	-5/3	0	-2/3
2	x_4	1	17/3	0	0	5/3	1	-1/3
3	x_1	2	4/3	1	0	-2/3	0	1/3
m+1			1	0	0	-1	0	1
1	x_2	-1	13	0	1	0	1	-1
2	x_3	3	17/5	0	0	1	3/5	-1/5
3	x_1	2	18/5	1	0	0	2/5	1/5
m+1			22/5	0	0	0	3/5	4/5

У першій симплекс-таблиці стовпець «бз» заповнюємо базисними змінними x_2, x_4, x_5 , у наступному стовпці – « C_i^0 » зазначаємо коефіцієнти при базисних змінних у цільовій функції, у стовпці « x_i^0 » записуємо вільні члени системи обмежень, а решту елементів таблиці заповнюємо коефіцієнтами системи обмежень при відповідних змінних. Оскільки у $(m+1)$ -му рядку першої симплекс-таблиці є від’ємний елемент, то початковий опорний розв’язок не оптимальний. Оскільки симплекс-різниця $\sigma_1 = -3 < 0$, то ведучим стовпцем обираємо перший. Знайшовши $\min \left\{ \frac{10}{2}; \frac{7}{1}; \frac{4}{3} \right\} = \frac{4}{3}$, визначаємо третій рядок як ведучий. На

перетині ведучих стовпця і рядка знаходиться ведучий елемент. Тому в другій симплекс-таблиці у базис уводимо змінну x_1 замість змінної x_5 . Елементи третього рядка знаходимо шляхом ділення на ведучий елемент. Решта комірок таблиці обчислюємо за правилом прямокутників.

З другої симплекс-таблиці випливає, що $x^{(6,2)} = \left(\frac{4}{3}; \frac{22}{3}; 0; \frac{17}{3}; 0 \right)^T$ також не оптимальний, бо $\sigma_3 = -1 < 0$.

У третьому стовпці один додатний елемент, тому в новий базис уводимо змінну x_3 замість x_4 . Обчисливши елементи третьої симплекс-таблиці, знаходимо оптимальний розв’язок задачі $x^* = x^{(6,3)} = \left(\frac{18}{5}; 13; \frac{17}{5}; 0; 0 \right)^T$, оскільки всі

$$\sigma_j \geq 0, j = \overline{1,5}.$$

Оптимальне значення цільової функції

$$f_{\max}^* = 2 \cdot \frac{18}{5} - 1 \cdot 13 + 3 \cdot \frac{17}{5} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = \frac{22}{5}. \blacksquare$$

Приклад 3.8. Розв’язати симплекс-методом задачу лінійного програмування, в якій невідомий початковий опорний розв’язок:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 10x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 11, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases} \quad (3.13)$$

■ Система обмежень задачі лінійного програмування (3.13) не має початкового базису, тому введемо дві невід’ємні штучні змінні x_5 і x_6 та перейдемо до розширеної задачі (М-задачі):

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 10x_4 - Mx_5 - Mx_6 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 + x_6 = 11, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Задачу (3.14) розв’яжемо симплекс-методом (табл. 3.5).

Таблиця 3.5

і	Бз	c_i^0	x_i^0	1	-4	3	10	-M	-M
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	x_5	-M	0	1	1	-1	1	1	0
2	x_6	-M	11	1	14	10	-10	0	1
m+1	σ_j		0	-1	4	-3	-10	0	0
m+2			-11	-2	-15	-9	9	0	0
1	x_2	-4	0	1	1	-1	1		0
2	x_6	-M	11	-13	0	24	-24		1
m+1	σ_j		0	-5	0	1	-14		0
m+2			-11	13	0	-24	24		0
1	x_2	-4	11/24	11/24	1	0	0		
2	x_3	3	11/24	-13/24	0	1	-1		
m+1	σ_j		-11/24	-107/24	0	0	-13		

Таблиця 3.5 складається з трьох симплекс-таблиць, у перших двох з яких рядок для симплекс-різниць розбиваємо на два рядки. У першому $(m+1)$ -му рядку запишемо вільні члени, а в $(m+2)$ -му – оцінки σ_j ($j = \overline{1,6}$) та коефіцієнти при M у цільовій функції. Критерієм оптимальності служить $(m+2)$ -й рядок доти поки з базису не виключені штучні змінні.

У першій симплекс-таблиці є три від’ємних симплекс-різниць $\sigma_1 = -2$, $\sigma_2 = -15$, $\sigma_3 = -9$. Оскільки $\sigma_2 < \sigma_3 < \sigma_1$, то ведучим стовпцем вибираємо другий. Оскільки $\min \left\{ \frac{0}{1}; \frac{11}{14} \right\} = 0$, то ведучим рядком є перший. З урахуванням того, що ведучий елемент дорівнює 1, будуємо другу симплекс-таблицю, у якій базисну змінну x_5 замінюємо на x_2 .

Оскільки у $(m+2)$ -му рядку другої симплекс-таблицю $\sigma_3 = -24 < 0$, а у відповідному стовпці лише один додатній елемент, то з базису виводимо штучну змінну x_6 , замінивши її на x_3 . Після виведення штучних змінних з базису стовпці, що їм відповідають, можна не перераховувати, а критерієм оптимальності служить $(m+1)$ -й рядок.

У третій симплекс-таблиці в $(m+1)$ -му рядку є від’ємні оцінки $\sigma_1 = -107/24$ та $\sigma_4 = -13$, тому розв’язок $x^{(6,3)} = \left(0; \frac{11}{23}; \frac{11}{24}; 0 \right)^T$ не оптимальний. Оскільки $\sigma_4 < \sigma_1$, то четвертий стовпець ведучий. Цей стовпець складається з недодатних елементів, це означає, що цільова функція $f(x) = x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 10x_4$ необмежена зверху на допустимій множині розв’язків, тому оптимального розв’язку в цій задачі лінійного програмування немає. ■

Приклад 3.9. Виписати до наведеної нижче задачі двоїсту, розв'язати її графічним методом і за допомогою теорем двоїстості знайти розв'язок вихідної задачі.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases} \quad (3.15)$$

Розв'язати задачу симплекс-методом і, користуючись останньою симплекс-таблицею, знайти розв'язок двоїстої задачі.

■ Спочатку випишемо до задачі (3.15) двоїсту задачу:

$$\begin{cases} 4y_1 + y_2 \rightarrow \min, \\ y_1 + y_2 \geq 2, \\ 2y_1 - y_2 \geq 1, \\ 5y_1 - y_2 \geq 3, \\ -y_1 + 2y_2 \geq 1, \\ y_1, y_2 - \text{довільні}. \end{cases} \quad (3.16)$$

Спосіб 1. Розв'яжемо двоїсту задачу (3.16) графічним методом. Геометрична ілюстрація процесу розв'язування наведена на рис. 3.2.

З рис. 3.2. випливає, що мінімального значення функція набуває у точці A , яка знаходиться на перетині I та II прямих. Знайдемо координати цієї точки як розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 2, \\ 2y_1 - y_2 = 1. \end{cases}$$

Отже, точка A має координати $y_1^* = 1$, $y_2^* = 1$, що й визначають розв'язок задачі (3.16). При цьому $f_{\min} = \tilde{f}(y) = 4 \cdot 1 + 1 = 5$.

$$\begin{cases} (1+1-2)x_1^* = 0, \\ (2-1-1)x_2^* = 0, \\ (5-1-3)x_3^* = 0, \\ (-1+2-1)x_4^* = 0, \end{cases}$$

тобто x_1 – довільне, x_2 – довільне, $x_3 = 0$, x_4 – довільне.

Отже,

$$\begin{cases} x_1^* + 2x_2^* - x_4^* = 4, \\ x_1^* - x_2^* + 2x_4^* = 1. \end{cases} \quad (3.17)$$

Система (3.17) має безліч розв'язків. Нехай $x_4 = 0$,

$$\begin{cases} x_1^* + 2x_2^* = 4, \\ x_1^* - x_2^* = 1, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} x_1^* = 2, \\ x_2^* = 1. \end{cases}$$

Отже, знайдено один розв'язок системи (3.17): $x^{(1)*} = (2; 1; 0; 0)^T$. Для формалізації загального розв'язку знайдемо ще один розв'язок системи (3.17) при $x_1 = 0$. Тоді

$$\begin{cases} 2x_2^* - x_4^* = 4, \\ -x_2^* + 2x_4^* = 1, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} x_4^* = 2, \\ x_2^* = 3. \end{cases}$$

Тому $x^{(2)*} = (0; 3; 0; 2)^T$. Загальний розв'язок системи (3.17) подамо у вигляді опуклої лінійної комбінації:

$$\begin{aligned} x^* &= \alpha x^{(1)*} + (1-\alpha)x^{(2)*} = \alpha(2, 1, 0, 0)^T + (1-\alpha)(0, 3, 0, 2)^T = \\ &= (2\alpha, 3-2\alpha, 0, 2-2\alpha)^T, \quad \alpha \in [0; 1]. \end{aligned}$$

Це і є розв'язок задачі (3.15). При цьому

$$f_{\max} = 2 \cdot 2\alpha + 1 \cdot (3 - 2\alpha) + 3 \cdot 0 + 1 \cdot (2 - 2\alpha) = 5.$$

Спосіб 2. Знайдемо розв'язок прямої задачі, використовуючи симплекс-метод. Оскільки задача не містить початкового опорного плану, то застосуємо М-метод до її розв'язування. Додамо до обмежень задачі невід'ємні штучні змінні x_5 і x_6 у перше та друге обмеження відповідно і отримаємо розширену задачу

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - Mx_5 - Mx_6 \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_6 = 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases} \quad (3.18)$$

Результати розв'язування задачі (3.18) наведено у табл. 3.6:

Таблиця 3.6

і	бз	c_i^{δ}	x_i^{δ}	2	1	3	1	-М	-М
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	x_5	-М	4	1	2	5	-1	1	0
2	x_6	-М	1	1	-1	-1	2	0	1
m+1	σ_j		0	-2	-1	-3	-1	0	0
m+2			-5	-2	-1	-4	1	0	0
1	x_3	3	4/5	1/5	2/5	1	-1/5	1/5	0
2	x_6	-М	9/5	6/5	-3/5	0	9/5	1/5	1
m+1	σ_j		12/5	-7/5	1/5	0	-8/5	3/5	0
m+2			-9/5	-6/5	3/5	0	-9/5	-1/5	0
1	x_3	3	1	1/3	1/3	1	0	2/9	1/9
2	x_4	1	1	2/3	-1/3	0	1	1/9	5/9
m+1	σ_j		4	-1/3	-1/3	0	0	7/9	8/9

Продовж. табл. 3.6

i	бз	$c_i^{\bar{o}}$	$x_i^{\bar{o}}$	2	1	3	1	-M	-M
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	x_3	3	1/2	0	1/2	1	-1/2	1/6	-1/6
2	x_1	2	3/2	1	-1/2	0	3/2	1/6	5/6
m+1	σ_j		9/2	0	-1/2	0	1/2	5/6	7/10
1	x_2	1	1	0	1	2	-1	1/3	-1/3
2	x_1	2	2	1	0	1	1	1/3	2/3
m+1	σ_j		5	0	0	1	0	1	1
1	x_2	1	3	1	1	3	0	2/3	1/3
2	x_4	1	2	1	0	1	1	1/3	2/3
m+1	σ_j		5	0	0	1	0	1	1

У $(m+2)$ -му рядку першої симплекс-таблиці є три від'ємних симплекс-різниці $\sigma_1 = -2$, $\sigma_2 = -1$, $\sigma_3 = -4$. Ведучим стовпцем обираємо третій ($\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$). Ведучим (провідним) елементом визначаємо єдине додатне число ведучого стовця та обчислюємо елементи другої симплекс-таблиці, замінивши базисну змінну x_5 на x_3 .

Оскільки у $(m+2)$ -му рядку другої симплекс-таблиці найменшою з від'ємних оцінок є $\sigma_4 = -\frac{9}{5} < 0$, а у відповідному стовпці лише один додатний елемент, то з базису виводимо штучну змінну x_6 , замінивши її на x_4 .

Після виведення штучних змінних із базису критерієм оптимальності служить $(m+1)$ -й рядок. У третій симплекс-таблиці в $(m+1)$ -му рядку є від'ємні оцінки $\sigma_1 = -\frac{1}{3}$ та $\sigma_2 = -\frac{1}{3}$. Тому розв'язок $x^{(\bar{o},3)} = (0; 0; 1; 1)^T$ не є оптимальний.

Оскільки оцінки однакові, то для вибору ведучого стовця проаналізуємо коефіцієнти при відповідних змінних у цільовій функції та оберемо ведучим стовець, що відповідає більшому з них, тобто x_1 . Оскільки, $\min \left\{ 3; \frac{3}{2} \right\} = \frac{3}{2}$, то ведучим рядком є другий. Тому у базисі замінюємо змінну x_4 на x_1 .

Заповнивши елементи четвертої симплек-таблиці, приходимо до висновку, що оптимальний розв'язок не знайдено, оскільки порушується умова оптимальності – $\sigma_1 = -\frac{1}{2} < 0$. Вибравши ведучий елемент, виводимо з базису змінну x_3 , замінивши її на нову базисну змінну x_2 . Обчисливши елементи п'ятої симплек-таблиці, знаходимо оптимальний розв'язок задачі $x^{(1)*} = (2; 1; 0; 0)^T$, $f_{\max} = 5$ (всі $\sigma_j \geq 0$, $j = \overline{1, 6}$). Проте, оскільки в $(m+1)$ -му рядку є нульове значення навпроти небазисної змінної x_4 , розв'язок не єдиний. Для знаходження загального розв'язку задачі зробимо ще одну ітерацію, обравши за ведучий стовець, що відповідає змінній x_4 .

У останній симплекс-таблиці переходимо до нового базису, який формують змінні x_2 та x_4 . Обчисливши елементи таблиці, знаходимо другий розв'язок задачі $x^{(2)*} = (0; 3; 0; 2)^T$. Загальний розв'язок прямої задачі формалізуємо у вигляді $x^* = \alpha x^{(1)*} + (1 - \alpha)x^{(2)*}$, $\alpha = [0; 1]$.

Розв'язок двоїстої задачі знайдемо, скориставшись формулою [6]

$$y^* = (B^{-1})^T c^*, \quad (3.19)$$

де $c^* = (c_{i_1}, \dots, c_{i_m})^T$ – вектор із коефіцієнтів цільової функції, які відповідають базисним змінним; B^{-1} – матриця розмірності $(m \times m)$, обернена до матриці B , побудованої зі

стовпчиків матриці A першої симплекс-таблиці, і які відповідають базисним змінним $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$ (порядок стовпців строго відповідає порядку базисних змінних у рядках симплекс-таблиці).

Отже, згідно з формулою (3.19),

$$c^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix},$$

$$y^* = (B^{-1})^T c^* = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок двоїстої задачі $y^* = (1; 1)^T$ знайдено. Зауважимо також, що у даному випадку його можна визначити з останньої симплекс-таблиці за елементами $(m+1)$ -го рядка, що відповідають штучним змінним. ■

3.2. Завдання для самостійної роботи

Завдання 3.1. Побудувати математичні моделі задач (3.1.1–3.1.30):

3.1.1. Для виготовлення двох видів продукції P_1 та P_2 є чотири види ресурсів R_1, R_2, R_3, R_4 , запаси ресурсів обмежені. Кількість одиниць ресурсів, що витрачаються на виготовлення одиниці продукції, наведено у табл. 3.1.1. Визначити план виробництва продукції, при якому прибуток від її реалізації буде максимальним.

Таблиця 3.1.1

Ресурси	Запаси	К-сть од. ресурсу, що витрачається на виготовлення од. продукції	
		P_1	P_2
R_1	7	3	2
R_2	8	7	0
R_3	10	1	5
R_4	5	0	4
Ціна		2	3

3.1.2. Цех випускає вироби двох видів: вали і втулки. На виготовлення одного вала робітник витрачає 3 год, а однієї втулки – 2 год. Від реалізації вала підприємство одержує прибуток 0,8 гр. од., а від реалізації втулки – 0,6 гр. од. Цех повинен випустити не менше 100 валів і не менше 200 втулок. Скільки треба виготовити валів і втулок, щоб цех одержав найбільший прибуток, якщо фонд робочого часу становить 900 людино-годин?

3.1.3. Для збереження працездатності та здоров'я людина повинна споживати за добу певну кількість поживних речовин: білків B_1 , жирів B_2 , вітамінів B_3 . Їх запаси у одиниці продукту Π_1 і Π_2 , а також ціна продуктів наведені в табл. 3.1.3:

Таблиця 3.1.3

Поживні речовини	Вміст поживних речовин в одиниці продукту		Мінімальна норма
	Π_1	Π_2	
B_1	0,2	0,1	120
B_2	0,075	0,1	70
B_3	0	0,1	10
Вартість продукту	0,2	0,3	

Треба так організувати харчування, щоб його вартість була найменшою, а організм одержав належну кількість поживних речовин.

3.1.4. Продаючи товари двох типів A і B , торгівельне підприємство використовує чотири види ресурсів P_1 , P_2 , P_3 , P_4 . Норми витрат ресурсів на реалізацію одиниці товару та обсяг ресурсів наведено в табл. 3.1.4:

Таблиця 3.1.4

Ресурси	Норма витрат ресурсів на реалізацію одиниці товару		Кількість ресурсів на підприємстві
	A	B	
P_1	2	2	12
P_2	1	2	8
P_3	4	0	16
P_4	0	4	12

Прибуток від реалізації одиниці товару A складає 2 гр. од., товару B – 3 гр. од. Знайти оптимальний план реалізації товарів, який забезпечує максимальний прибуток.

3.1.5. Для виготовлення виробів P_1 і P_2 промкомбінат використовує три види сировини S_1 , S_2 і S_3 відповідно у кількостях 280, 300 і 300 одиниць. Для виготовлення одного виробу P_1 витрачається 6 одиниць сировини S_1 , 8 одиниць сировини S_2 і 10 одиниць сировини S_3 . На один виріб P_2

витрачається відповідно 5, 5 і 2,5 одиниці кожного виду сировини. Знайти такий план виробництва, який забезпечував би найбільший прибуток, якщо реалізація одного виробу P_1 дає 7 гр. од. прибутку, а виробу P_2 – 5 гр. од.

3.1.6. Максимальна площа, яку господарство може використати під посадку плодових дерев, складає 1000 га. На цій площі планується посадити три види дерев – P_1 , P_2 і P_3 . Господарство має три типи обмежених ресурсів: S_1 – орна земля, S_2 – трудові ресурси, S_3 – гроші та матеріали. Запаси ресурсів, їх витрати на 1 га посадок і ціна продукції з одного гектара відповідної культури задані табл. 3.1.6:

Таблиця 3.1.6

Типи ресурсів	Види дерев			Запаси ресурсів
	P_1	P_2	P_3	
S_1	1	1	1	1 тис. га
S_2	100	60	200	200 тис. людино-днів
S_3	400	200	800	600 тис. гр. од.
Ціна продукції з 1 га (тис. гр. од.)	3	2	5	

Треба знайти такі площі посадок дерев кожного виду, які б забезпечували максимальний прибуток від реалізації одержаної продукції.

3.1.7. Підприємство випускає чотири типи продукції, для чого використовує три види сировини. Дані про витрати сировини на одиницю продукції, обмеження на запаси сировини, а також величину прибутку від реалізації одиниці продукції наведено в табл. 3.1.7:

Таблиця 3.1.7

Вид сировини	Витрати сировини на одиницю продукції				Запаси сировини
	P_1	P_2	P_3	P_4	
S_1	2	2	4	5	28
S_2	0	1	2	2	10
S_3	2	1	0	6	14
Прибуток	2	4	6	1	

Треба так спланувати випуск продукції, щоб сумарний прибуток від її реалізації був максимальним.

3.1.8. Треба утворити суміш, яка містить три хімічні речовини A , B , C . Відомо, що утворена суміш повинна містити речовини A не менше 6 одиниць, речовини B – не менше 8 одиниць, речовини C – не менше 12 одиниць. Речовини A , B , C містяться в трьох видах продуктів P_1 , P_2 , P_3 в концентраціях, що задаються табл. 3.1.8:

Таблиця 3.1.8

Продукти	Хімічні речовини		
	A	B	C
P_1	2	1	3
P_2	1	2	4
P_3	3	1,5	2

Одиниця продукту P_1 коштує 2 гр. од., одиниця P_2 – 3 гр. од., одиниця P_3 – 2,5 гр. од. Суміш повинна бути такою, щоб вартість використаних продуктів була найменшою.

3.1.9. Для виробництва продукції типу P_1 і P_2 підприємство використовує два види сировини: S_1 і S_2 . Дані про виробництво наведені у табл. 3.1.9:

Таблиця 3.1.9

Сировина	Витрати сировини на одиницю продукції, кг/од.		Кількість сировини, кг
	P_1	P_2	
S_1	1	3	300
S_2	1	1	150
Прибуток, тис. гр. од./од. пр.	2	3	

Треба так організувати виробництво, щоб прибуток був максимальним.

3.1.10. На обладнанні трьох типів P_1, P_2, P_3 підприємство повинно виробити три види продукції A_1, A_2, A_3 . Потужності обладнання кожного типу і затрати часу на виробництво одиниці продукції задані у табл. 3.1.10:

Таблиця 3.1.10

Тип обладнання	Затрати часу на од. операції			Потужність обладнання (год)
	A_1	A_2	A_3	
P_1	2	4	0	100
P_2	5	1	4	20
P_3	0	1	4	80

Знайти, скільки виробів кожного виду повинно випускати підприємство, щоб одержати максимальний прибуток, якщо прибуток від реалізації одиниці продукції кожного виду складає відповідно 3, 2 і 4 гр. од.

3.1.11. На обладнанні трьох типів P_1, P_2, P_3 підприємство повинно виробити три види продукції A_1, A_2, A_3 . Потужності обладнання кожного типу, затрати часу на виробництво одиниці продукції і прибуток від реалізації одиниці продукції кожного виду задані у табл. 3.1.11:

Таблиця 3.1.11

Тип обладнання	Затрати часу на од. операції			Потужність обладнання (год)
	A_1	A_2	A_3	
P_1	2	4	0	100
P_2	5	1	4	20
P_3	0	1	4	80
Прибуток (гр. од.)	3	2	4	

Знайти, скільки виробів кожного виду повинно випускати підприємство, щоб використати повністю наявні потужності обладнання.

3.1.12. Фабрика випускає три види тканин P_1 , P_2 і P_3 , причому добовий план складає не менше 90 м тканини P_1 , 70 м тканини P_2 і 60 м тканини P_3 . Добові ресурси такі: 780 одиниць обладнання, 850 одиниць сировини і 790 одиниць електроенергії, витрати яких на один метр тканини подано у табл. 3.1.12:

Таблиця 3.1.12

Ресурси	Тканини		
	P_1	P_2	P_3
Обладнання	2	3	4
Сировина	1	4	5
Електроенергія	3	4	2

Ціна одного метра тканини P_1 складає 80 гр. од, P_2 – 70 гр. од., P_3 – 60 гр. од. Визначити, скільки метрів тканини кожного виду треба виробити, щоб загальний прибуток від випуску продукції був максимальним.

3.1.13. Підприємство випускає чотири види продукції і використовує три типи основного обладнання: токарне, фрезерне і шліфувальне. Затрати часу на виготовлення одиниці продукції для кожного з типів обладнання наведені в таблиці 3.1.13. В ній також вказано загальний фонд робочого часу для кожного типу обладнання і прибуток від реалізації одного виробу даного виду.

Таблиця 3.1.13

Тип обладнання	Затрати часу на одиницю продукції				Загальний фонд робочого часу
	P_1	P_2	P_3	P_4	
Токарне	2	1	1	3	300
Фрезерне	1	0	2	1	70
Шліфувальне	1	2	1	0	340
Прибуток	8	3	2	1	

Знайти обсяг випуску кожного з виробів, при якому загальний прибуток від їхньої реалізації буде максимальним.

3.1.14. Для виготовлення продукції двох типів Π_1 і Π_2 підприємство використовує чотири види сировини S_1 , S_2 , S_3 , S_4 . Норми витрат кожного виду сировини на одиницю продукції, її наявність на підприємстві, а також прибуток від реалізації одиниці продукції наведено у табл. 3.1.14:

Таблиці 3.1.14

Вид сировини	Норми витрат сировини на од. продукції		Запаси сировини
	Π_1	Π_2	
S_1	2	3	19
S_2	2	1	13
S_3	0	3	15
S_4	3	0	18
Прибуток	7	5	

Треба скласти такий план випуску продукції, при якому прибуток підприємства від реалізації продукції буде максимальним.

3.1.15. На трьох складах C_1 , C_2 , C_3 є відповідно 90, 70, 50 тонн борошна, яке треба перевезти у крамниці K_1 , K_2 , K_3 , K_4 відповідно у кількості 80, 60, 40, 30 тонн. Скласти

оптимальний план перевезення, якщо вартість перевезення 1 тонни борошна в крамниці K_1, K_2, K_3, K_4 зі складу C_1 дорівнює, відповідно, 2, 1, 3, 2 гр. од, зі складу C_2 – 2, 3, 3, 1 гр. од., зі складу C_3 – 3, 3, 2, 1 гр. од.

3.1.16. Для виготовлення трьох видів виробів Π_1, Π_2, Π_3 використовують чотири типи обладнання S_1, S_2, S_3, S_4 . Затрати часу на обробку одного виробу для кожного з видів обладнання, часовий ресурс обладнання та прибуток від реалізації виробу даного типу наведено у табл. 3.1.16:

Таблиця 3.1.16

Тип обладнання	Затрати часу на обробку одного виробу			Загальний фонд робочого часу обладнання
	Π_1	Π_2	Π_3	
S_1	2	4	5	120
S_2	1	8	6	280
S_3	7	4	5	240
S_4	4	6	7	360
Прибуток	10	14	12	

Скласти математичну модель, що дозволить визначити, скільки виробів і якого виду необхідно виготовити з метою максимізації прибутку від їх реалізації.

3.1.17. Скласти оптимальний добовий раціон відгодівлі тварин. Вихідні дані для розв'язування задачі наведено у табл. 3.1.17:

Таблиця 3.1.17

Поживні речовини, ум. од.	Вміст поживних речовин в одиниці корму виду		Мінімальна добова норма споживання, ум. од.
	K_1	K_2	
Кормові одиниці	1	0,5	5
Перетравлюваний протеїн	800	200	560
Кальцій	1	8	20
Ціна 1 од. корму, гр. од.	3	5	

3.1.18. У механічному цеху встановлено два верстати, на кожному з яких можна обробляти будь-яку кількість деталей A_1 , A_2 , A_3 . У таблиці 3.1.18 наведено норми затрат часу на обробку кожним з верстатів однієї деталі відповідного виду, вартість однієї години роботи верстата і добовий фонд робочого часу верстатів.

Таблиця 3.1.18

Верстати	Норми затрат часу на обробку однієї деталі			Вартість однієї год роботи	Фонд робочого часу
	A_1	A_2	A_3		
P_1	0,3	0,1	0,2	30	20
P_2	0,5	0,2	0,4	20	22

Знайти, скільки деталей кожного виду необхідно обробити на кожному з верстатів, щоб загальні витрати на обробку деталей були найменшими при такому добовому завданні виготовлення деталей: A_1 – 30 од., A_2 – 80 од., A_3 – 70 од.

3.1.19. Треба утворити суміш, яка містить три хімічні речовини A_1 , A_2 , A_3 . Відомо, що ця суміш повинна містити речовини A_1 не менше 6 одиниць, речовини A_2 – не менше 8 одиниць, речовини A_3 – не менше 12 одиниць. Речовини

A_1 , A_2 , A_3 містяться у видах продуктів P_1 , P_2 , P_3 у концентраціях, що визначаються табл. 3.1.19:

Таблиця 3.1.19

Продукти	Хімічні речовини		
	A_1	A_2	A_3
P_1	2	1	3
P_2	1	2	4
P_3	3	1,5	2

Вартість одиниці продукту P_1 складає 2 гр. од., одиниці продукту P_2 – 3 гр. од., одиниці продукту P_3 – 2,5 гр. од. Суміш повинна бути такою, щоб вартість використаних продуктів була найменшою.

3.1.20. У пунктах A_1 і A_2 розміщені цегельні заводи, а в пунктах B_1 і B_2 – кар'єри, які постачають глину. Потреби заводів у глині не більші, ніж продуктивність кар'єрів. Відомо, скільки глини потрібно кожному заводу і скільки її добувають у кожному з кар'єрів. Відома також вартість перевезення 1 тонни глини з кожного кар'єру до заводів. Побудувати модель плану постачання заводів глиною, щоб витрати були найменшими, якщо всі необхідні дані наведено у табл. 3.1.20:

Таблиця 3.1.20

Постачальник	Споживач		Запаси
	A_1	A_2	
B_1	2	6	70
B_2	5	3	3
Потреби	40	50	

3.1.21. Підприємство спеціалізується на виробництві офісних меблів, зокрема, вона випускає дві моделі збірних книжкових полиць – A_1 і A_2 . Полиці обох моделей обробляють на верстатах B_1 і B_2 . Тривалість обробки (у хвиликах) однієї полиці кожної моделі подано у табл. 3.1.21:

Таблиця 3.1.21

Верстат	Тривалість обробки полиці за моделями, хв.	
	A_1	A_2
B_1	30	15
B_2	12	26

Час роботи верстатів B_1 і B_2 становить відповідно 40 та 36 год на тиждень. Прибуток фірми від реалізації однієї полиці моделі A_1 дорівнює 50 гр. од., а моделі A_2 – 30 гр. од. Вивчення ринку збуту показало, що тижневий попит на книжкові полиці моделі A_1 ніколи не перевищує попиту на модель A_2 більш як на 30 одиниць, а попит на полиці моделі A_2 не перевищує 80 одиниць на тиждень.

Побудувати модель оптимального обсягу виробництва книжкових полиць різних моделей, що максимізують прибуток фірми.

3.1.22. Невелика птахоферма має розрахувати оптимальний кормовий раціон для 1000 курчат, яких вирощують до 8-тижневого віку. Нехтуючи тим, що тижневі витрати кормів для курчат залежать від їхнього віку, вважатимемо, що в середньому за 8 тижнів вони досягнуть маси 500 г. З цією метою кормовий раціон курчат має задовольняти певні вимоги поживності. Сформулюємо ці вимоги у спрощеному вигляді, враховуючи лише дві поживні речовини: білок і клітковину, що містяться у кормах двох видів – зерні та соєвих бобах. Вміст поживних речовин у кожному кормі та їх вартість задано табл. 3.1.22:

Таблиця 3.1.22

Корм	Вміст поживних речовин, %		Вартість 1 кг корму, гр. од.
	Білок	Клітковина	
Зерно	10	2	0,4
Соєві боби	50	8	0,9

Готова кормова суміш має містити не менше як 20 % білка і не більше як 5 % клітковини. Визначити масу кожного з двох видів кормів, що утворюють кормову суміш мінімальної вартості, задовольняючи вимоги до загальних витрат кормової суміші та її поживності.

3.1.23. У студентській їдальні для виготовлення бутербродів трьох типів використовують чотири види продуктів, загальні обсяги яких і норми витрат зазначені у табл. 3.1.23:

Таблиця 3.1.23

Вид продукту	Норми витрат продуктів (кг) на одну партію бутербродів типу			Наявність продуктів (кг)
	B_1	B_2	B_3	
S_1	4	8	1	42
S_2	2	5	4	56
S_3	3	6	2	38
S_4	5	7	3	40
Прибуток (гр. од.)	5	7	8	

Побудувати модель для визначення оптимального обсягу бутербродів кожного виду, що максимізують сумарний прибуток їдальні.

3.1.24. На меблевій фабриці зі стандартних листів фанери потрібно вирізати 24, 28 і 18 заготовок трьох розмірів. Лист фанери можна розрізати двома способами. Кількість отриманих заготовок та площу відходів за кожного способу розрізування одного листа фанери наведено у табл. 3.1.24:

Таблиця 3.1.24

Заготовка	Кількість отриманих заготовок, за способами, шт.	
	Першим	другим
1	2	6
2	4	4
3	2	3
Площа відходів, см ²	12	18

Скільки листів фанери та яким способом необхідно розрізати, щоб отримати потрібну кількість заготовок із мінімальними відходами?

3.1.25. Комерційне підприємство рекламує свою продукцію, використовуючи місцеві радіо- та телевізійну мережі. Витрати на рекламу в бюджеті фірми становлять 10 000 гр. од. на місяць. Хвилина радіореклами коштує фірмі 5 гр. од., а телереклами – 90 гр. од. Підприємство має намір використовувати радіорекламу принаймні вдвічі частіше, ніж рекламу на телебаченні. Досвід показав: обсяг збуту, що його забезпечує 1 хв телереклами, у 30 разів перевищує обсяг збуту, що його забезпечує 1 хв радіореклами.

Побудувати модель визначення оптимального розподілу коштів, які щомісяця мають витратитися на рекламу, за якого обсяг збуту продукції фірми буде найбільшим.

3.1.26. Невелике сільськогосподарське підприємство спеціалізується на вирощуванні овочів, зокрема капусти та томатів, використовуючи для цього мінеральні добрива (фосфорні та калійні). Норми внесення мінеральних добрив під кожен культуру та запас добрив у господарстві наведено у табл. 3.1.26:

Таблиця 3.1.26

Мінеральні добрива	Норма внесення добрива, кг діючої речовини / га		Запас добрив, кг
	Капуста	Томати	
Фосфорні	150	400	6000
Калійні	500	300	9000

Під вирощування овочів відведено земельну ділянку площею 20 га. Очікуваний прибуток господарства від реалізації 1 ц капусти становить 10 гр. од., а 1 ц томатів – 20 гр. од. Середня врожайність капусти в господарстві дорівнює 300 ц/га, а томатів – 200 ц/га.

Визначити такий варіант розміщення культур на земельній ділянці, який максимізує прибуток господарства за умови, що витрати мінеральних добрив не перевищують максимально можливого запасу.

3.1.27. Підприємство виготовляє письмові столи типів *A* та *B*. Для одного столу типу *A* необхідно 2 м² деревини, а для столу типу *B* – 3 м². Підприємство може отримати до 1200 м² деревини за тиждень. Для виготовлення одного столу типу *A* потрібно 12 хв роботи обладнання, а для моделі *B* – 30 хв. Обладнання може використовуватися 160 год на тиждень. Оцінено, що за тиждень може бути реалізовано до 550 столів.

Відомо, що прибуток від реалізації одного письмового столу типу *A* становить 30 гр. од., а типу *B* – 40 гр. од. Побудувати економіко-математичну модель задачі, що дозволить визначити, скільки столів кожного типу необхідно виготовляти за тиждень.

3.1.28. Підприємство виготовляє деталі до автомобілів типу A_1 і A_2 , ринок збуту яких практично необмежений. Будь-яка деталь має пройти послідовну обробку на трьох верстатах B_1 , B_2 і B_3 , час використання кожного з яких становить 10 год/добу. Тривалість обробки однієї деталі на кожному верстаті наведено у табл. 3.1.28:

Таблиця 3.1.28

Деталь	Тривалість обробки деталі за верстатами, хв		
	B_1	B_2	B_3
A_1	4	8	1
A_2	2	5	4

Прибуток від оптової реалізації однієї деталі кожного виду становить відповідно 20 та 30 гр. од. Побудувати економіко-математичну модель задачі, яка дозволить визначити оптимальні добові обсяги виробництва деталей кожного виду, що максимізують її прибуток.

3.1.29. Підприємство виготовляє два види продукції A та B , використовуючи для цього два види сировини, добовий запас якої має не перевищувати відповідно 210 та 240 од. Витрати сировини для виготовлення одиниці продукції кожного виду подано у табл. 3.1.29:

Таблиця 3.1.29

Сировина	Норми витрат сировини для виготовлення продукції, ум. од.	
	A	B
S_1	2	5
S_2	3	4

Відділ збуту фірми вважає, що виробництво продукції B має становити не більш як 65 % від загального обсягу реалізації продукції обох видів. Ціна одиниці продукції A та B дорівнює відповідно 10 та 40 ум. од.

Визначити оптимальний план виробництва продукції, який максимізує дохід фірми.

3.1.30. Підприємство виготовляє дві моделі дитячих іграшок, причому кожна модель складається на окремій технологічній лінії. Добовий обсяг виробництва першої лінії становить 60 од., а другої – 70 од. На одну іграшку першої моделі витрачається 10 однотипних деталей, а на іграшку

другої моделі – 8. Максимальний добовий запас деталей, що використовуються у виробництві, становить 1000 од. Прибуток від реалізації однієї іграшки першої та другої моделей дорівнює відповідно 35 та 25 гр. од.

Визначити оптимальні обсяги виробництва іграшок обох моделей.

Завдання 3.2. Звести до канонічного вигляду задачі лінійного програмування (3.2.1–3.2.30):

3.2.1

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 7, \\ 7x_1 \leq 8, \\ x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ 4x_2 \leq 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.2.2

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \rightarrow \max, \\ 7x_1 + 2x_2 \geq 14, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 28, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.2.3

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \rightarrow \min, \\ 3x_1 + x_2 \geq 3, \\ 3x_1 - x_2 \leq 0, \\ x_1 - x_2 \geq 3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.2.4

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ 3x_1 + x_2 \geq 3, \\ 3x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.2.5

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ -2 \leq x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 + 3x_2 \leq 1, \\ 0 \leq x_1 \leq 5, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.2.6

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 - 3x_2 \leq 1, \\ x_1 - x_2 \geq 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.2.7

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 - 2x_2 \leq 1, \\ 2x_1 - x_2 \leq 1, \\ -3x_1 + x_2 \leq 0, \\ 2x_1 - x_2 \leq 0, \\ 2x_1 - 3x_2 \geq 3, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.2.8

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max, \\ -1 \leq -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 \geq -1, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ 2x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.2.9

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \rightarrow \min, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.2.10

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ 4x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 16, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.2.11

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \\ -2x_1 + x_2 \leq 0, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 - 2x_2 \leq 5, \\ 0 \leq x_1 \leq 6, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.2.12

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + 4x_2 \geq 8, \\ x_1 - 2x_2 \leq 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \geq -6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.2.13

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \rightarrow \max, \\ 1 \leq x_1 + x_2 \leq 2, \\ 2 \leq x_1 - 2x_2 \leq 3, \\ 1 \leq 2x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.2.14

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \min, \\ 0 \leq x_1 \leq 1, \\ 0 \leq x_2 \leq 2, \\ 0 \leq x_1 + x_2 \leq 3, \\ -1 \leq x_1 - x_2 \leq 0. \end{cases}$$

3.2.15

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 \leq 1, \\ 2x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 - 2x_2 \leq 1, \\ 2x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.2.16

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 - 2x_2 \leq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \geq 0, 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.2.17

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \rightarrow \max, \\ -x_1 + x_2 - 3 \geq 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2 \geq 0, \\ x_1 - x_2 - 1 \geq 0, \\ x_2 - 4 \geq 0, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.2.18

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ 2x_1 + x_2 \leq 6, \\ -x_1 + 3x_2 \geq 3, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 3, \\ x_1 - x_2 \leq 0, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.2.19

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ -2x_1 + 4x_2 \leq 8, \\ 3x_1 - 2x_2 \geq 0, \\ x_1 + 3x_2 \geq 3, \\ x_1 \geq 1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.2.20

$$\begin{cases} 2x_1 - 10x_2 \rightarrow \min, \\ -x_1 + 5x_2 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \geq 0, \\ 0 \leq x_1 \leq 5, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.2.21

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ x_1 - x_2 \geq -4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.2.22

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 - 4x_2 \leq 4, \\ -5x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.2.23

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \\ 0 \leq 4x_1 \leq 16, \\ 0 \leq 4x_2 \leq 12, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + x_2 \leq 6. \end{cases}$$

3.2.24

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \max, \\ 0 \leq x_1 \leq 12, \\ 0 \leq x_2 \leq 9, \\ x_1 + 2x_2 \leq 24, \\ x_1 + x_2 \leq 18. \end{cases}$$

3.2.25

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max, \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ x_1 \leq 4, x_2 \leq 5. \end{cases}$$

3.2.26

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \min, \\ 3x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.2.27

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max, \\ 3x_1 - 4x_2 \geq -12, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ 0 \leq x_1 \leq 4, \\ 0 \leq x_2 \leq 2. \end{cases}$$

3.2.28

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 12, \\ -3x_1 - 2x_2 \leq -4. \end{cases}$$

3.2.29

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 - x_2 \leq 5, \\ 4x_1 + x_2 \geq 3, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 12. \end{cases}$$

3.2.30

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 \rightarrow \min, \\ 3x_1 - 4x_2 \geq -24, \\ -3x_1 - 8x_2 \geq -48, \\ x_1 - x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 4, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Завдання 3.3. Розв'язати графічним методом задачі лінійного програмування (3.3.1–3.3.30):

3.3.1

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

3.3.2

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \rightarrow \max, \\ 7x_1 + 2x_2 \geq 14, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ 7x_1 + 10x_2 \leq 28, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

3.3.3

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \rightarrow \min, \\ 3x_1 + x_2 \geq 3, \\ 3x_1 - x_2 \leq 0, \\ x_1 - x_2 \geq 3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

3.3.4

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ 3x_1 + x_2 \geq 3, \\ 3x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

3.3.5

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ -2 \leq x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 + 3x_2 \leq 1, \\ 0 \leq x_1 \leq 5, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.3.6

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 \leq 1, \\ x_1 - 3x_2 \leq 1, \\ x_1 - x_2 \geq 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

3.3.7

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 - 2x_2 \leq 1, \\ 2x_1 - x_2 \leq 1, \\ -3x_1 + x_2 \leq 0, \\ 2x_1 - x_2 \leq 0, \\ 2x_1 - 3x_2 \geq 3, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.3.8

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max, \\ -1 \leq -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 \geq -1, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ 2x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.3.9

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \rightarrow \min, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.3.10

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ 4x_1 - 2x_2 \leq 12, \\ -x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 16, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.3.11

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \rightarrow \max, \\ 1 \leq x_1 + x_2 \leq 2, \\ 2 \leq x_1 - 2x_2 \leq 3, \\ 1 \leq 2x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.3.12

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \min, \\ 0 \leq x_1 \leq 1, \\ 0 \leq x_2 \leq 2, \\ 0 \leq x_1 + x_2 \leq 3, \\ -1 \leq x_1 - x_2 \leq 0. \end{cases}$$

3.3.13

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \\ -2x_1 + x_2 \leq 0, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 - 2x_2 \leq 5, \\ 0 \leq x_1 \leq 6, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.3.14

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + 4x_2 \geq 8, \\ x_1 - 2x_2 \leq 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \geq -6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.3.15

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 \leq 1, \\ 2x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1 - 2x_2 \leq 1, \\ 2x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.3.16

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 - 2x_2 \leq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \geq 0, 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.3.17

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \rightarrow \max, \\ -x_1 + x_2 - 3 \geq 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2 \geq 0, \\ x_1 - x_2 - 1 \geq 0, \\ x_2 - 4 \geq 0, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.3.18

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ 2x_1 + x_2 \leq 6, \\ -x_1 + 3x_2 \geq 3, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 3, \\ x_1 - x_2 \leq 0, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.3.19

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ -2x_1 + 4x_2 \leq 8, \\ 3x_1 - 2x_2 \geq 0, \\ x_1 + 3x_2 \geq 3, \\ x_1 \geq 1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.3.20

$$\begin{cases} 2x_1 - 10x_2 \rightarrow \min, \\ -x_1 + 5x_2 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \geq 0, \\ 0 \leq x_1 \leq 5, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.3.21

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ x_1 - x_2 \geq -4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.3.22

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 - 4x_2 \leq 4, \\ -5x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.3.23

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \\ 0 \leq 4x_1 \leq 16, \\ 0 \leq 4x_2 \leq 12, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + x_2 \leq 6. \end{cases}$$

3.3.24

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \max, \\ 0 \leq x_1 \leq 12, \\ 0 \leq x_2 \leq 9, \\ x_1 + 2x_2 \leq 24, \\ x_1 + x_2 \leq 18. \end{cases}$$

3.3.25

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max, \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10, \\ x_1 \leq 4, x_2 \leq 5. \end{cases}$$

3.3.26

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \min, \\ 3x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3.3.27

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max, \\ 3x_1 - 4x_2 \geq -12, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ 0 \leq x_1 \leq 4, \\ 0 \leq x_2 \leq 2. \end{cases}$$

3.3.28

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 12, \\ -3x_1 - 2x_2 \leq -4. \end{cases}$$

3.3.29

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 - x_2 \leq 5, \\ 4x_1 + x_2 \geq 3, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 12. \end{cases}$$

3.3.30

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 \rightarrow \min, \\ 3x_1 - 4x_2 \geq -24, \\ -3x_1 - 8x_2 \geq -48, \\ x_1 - x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 4, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Завдання 3.4. Дослідити і розв'язати (у випадку сумісності) методом Жордана-Гаусса системи рівнянь (3.4.1–3.4.30):

3.4.1

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

3.4.2

$$\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 19x_3 + 25x_4 = 25, \\ 10x_1 + 22x_2 + 16x_3 + 39x_4 = 25, \\ 5x_1 + 12x_2 + 9x_3 + 25x_4 = 30, \\ 20x_1 + 46x_2 + 34x_3 + 89x_4 = 70. \end{cases}$$

3.4.3

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 20. \end{cases}$$

3.4.4

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 8. \end{cases}$$

3.4.5

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 + 14x_3 + 9x_4 = 4. \end{cases}$$

3.4.6

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = -1, \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 7, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$$

3.4.7

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 17x_3 + 17x_4 = 84, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 10x_4 = 11. \end{cases}$$

3.4.8

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 5x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10, \\ 6x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -2. \end{cases}$$

3.4.9

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 14x_4 = 14, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 8, \\ 5x_1 - 4x_2 + 19x_3 + 25x_4 = 74, \\ 2x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 7x_4 = 50. \end{cases}$$

3.4.10

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ 6x_1 + 8x_2 - 14x_3 = 17, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 11x_2 - 16x_3 = 21. \end{cases}$$

3.4.11

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 15x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$$

3.4.12

$$\begin{cases} 8x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 8x_5 = 5, \\ 10x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 9x_4 + 15x_5 = 10, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 11x_5 = 3. \end{cases}$$

3.4.13

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 4, \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 6, \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 10. \end{cases}$$

3.4.14

$$\begin{cases} 4x_1 - 8x_2 - 5x_3 - x_4 = 4, \\ -4x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ -3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

3.4.15

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$$

3.4.16

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 5x_3 - x_4 = 3, \\ 7x_1 + 6x_2 + 4x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$$

3.4.17

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 14x_3 + 9x_4 = 1. \end{cases}$$

3.4.18

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 3, \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 - x_4 = 7, \\ 5x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 7x_4 = 6, \\ 10x_1 - 22x_2 + 9x_3 = 1. \end{cases}$$

3.4.19

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 1, \\ 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 4. \end{cases}$$

3.4.20

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 1, \\ -2x_2 + x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

3.4.21

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5, \\ -x_2 + x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

3.4.22

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 4x_2 - x_3 - x_4 = 3, \\ -3x_1 + 10x_2 - 10x_3 + 2x_4 = 10. \end{cases}$$

3.4.23

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ -x_2 + x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$$

3.4.24

$$\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 = 2, \\ 7x_3 - 4x_4 = 7, \\ -5x_3 + 3x_4 = 10. \end{cases}$$

3.4.25

$$\begin{cases} 4x_1 + 12x_2 + 5x_3 + x_4 = 2, \\ 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 - x_4 = 6, \\ 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 14. \end{cases}$$

3.4.26

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 12. \end{cases}$$

3.4.27

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 8, \\ 4x_2 + 18x_3 + 48x_4 = 36. \end{cases}$$

3.4.28

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_4 = 8, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12. \end{cases}$$

3.4.29

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6, \\ -x_1 + 7x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 15, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

3.4.30

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 4. \end{cases}$$

Завдання 3.5. Знайти опорні розв'язки систем лінійних алгебраїчних рівнянь (3.5.1–3.5.30):

3.5.1

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 - 2x_3 + 2x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$$

3.5.2

$$\begin{cases} x_2 + 3x_4 = 6, \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 - 2x_4 - x_5 = 4. \end{cases}$$

3.5.3

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_5 = 4. \end{cases}$$

3.5.4

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_5 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 6. \end{cases}$$

3.5.5

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 31, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 21. \end{cases}$$

3.5.6

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 36, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5. \end{cases}$$

3.5.7

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 12. \end{cases}$$

3.5.8

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12. \end{cases}$$

3.5.9

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 33, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 6. \end{cases}$$

3.5.10

$$\begin{cases} x_1 - x_4 + x_5 = 3, \\ x_2 - x_4 + 4x_5 = 21, \\ x_3 + 4x_4 - x_5 = 21. \end{cases}$$

3.5.11

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_5 = 2, \\ x_2 - 3x_3 = 6, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$$

3.5.12

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 = 2, \\ -x_3 - x_4 + 2x_5 = -3, \\ -x_2 + x_4 - x_5 = -5. \end{cases}$$

3.5.13

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$$

3.5.14

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4. \end{cases}$$

3.5.15

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_5 = 4, \\ x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 6, \\ x_3 - x_4 + 2x_5 = 8. \end{cases}$$

3.5.16

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 8, \\ -2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

3.5.17

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

3.5.18

$$\begin{cases} -2x_2 + x_3 + 3x_4 = 25, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 25. \end{cases}$$

3.5.19

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 15, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 4. \end{cases}$$

3.5.20

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

3.5.21

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 12, \\ x_1 - 5x_2 - x_4 = -4. \end{cases}$$

3.5.22

$$\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = 16, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 12. \end{cases}$$

3.5.23

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 8, \\ 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

3.5.24

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

3.5.25

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 15. \end{cases}$$

3.5.26

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 = 26. \end{cases}$$

3.5.27

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 4x_1 - x_2 + x_4 = 13, \\ 4x_1 + x_2 + x_5 = 13. \end{cases}$$

3.5.28

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_5 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 25, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

3.5.29

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_4 = 13, \\ 4x_1 + x_2 + x_5 = 26. \end{cases}$$

3.5.30

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 27, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 4. \end{cases}$$

Завдання 3.6. Розв'язати симплекс-методом задачі лінійного програмування (3.6.1–3.6.30), в яких відомий початковий опорний розв'язок:

3.6.1

$$\begin{cases} f = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 = 24, \\ 6x_1 + 6x_2 + x_4 = 30, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.6.2

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \rightarrow \max, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

3.6.3

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\ x_1 - x_4 - 2x_6 = 5, \\ x_2 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 6x_6 = 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

3.6.4

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_3 + 5x_4 + 8x_5 + 7x_6 \rightarrow \min, \\ x_2 + x_3 + 2x_6 = 100, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_5 = 200, \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 150, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

3.6.5

$$\begin{cases} 6x_1 + x_3 \rightarrow \max, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

3.6.6

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

3.6.7

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28, \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 = 30, \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 + x_6 = 32, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

3.6.8

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 - 6x_6 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_6 = 18, \\ -3x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_6 = 24, \\ x_1 + 3x_3 + x_5 - 4x_6 = 36, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

3.6.9

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 18, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 + x_6 = 24, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

3.6.10

$$\begin{cases} 8x_2 + 7x_4 + x_6 \rightarrow \max, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_4 - 2x_6 = 12, \\ 4x_2 + x_3 - 4x_4 - 3x_6 = 12, \\ 5x_2 + 5x_4 + x_5 + x_6 = 25, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

3.6.11

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \rightarrow \min, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

3.6.12

$$\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 2x_5 \rightarrow \min, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7, \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

3.6.13

$$\begin{cases} x_2 - x_5 \rightarrow \max, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2, \\ x_2 + x_4 - 2x_5 = 2, \\ x_2 + x_3 + x_5 = 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

3.6.14

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 2, \\ -x_1 - x_2 + x_5 = 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

3.6.15

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \min, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ -2x_1 + 4x_2 + x_5 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_6 = 10, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

3.6.16

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 10, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_4 = 12, \\ 2x_1 + x_5 = 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

3.6.17

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 15, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_4 = 18, \\ 4x_1 + x_5 = 16, \\ x_1 + 4x_2 + x_6 = 8, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

3.6.18

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_4 = 5, \\ x_2 + 2x_4 - 3x_5 = 3, \\ x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 15, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

3.6.19

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 - 3x_5 \rightarrow \min, \\ x_1 + 2x_4 + x_5 = 1, \\ x_2 - 6x_4 + 2x_5 = 2, \\ x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 2, \\ x_j \geq 1, j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

3.6.20

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 \rightarrow \min, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 4, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_5 + x_6 = 15, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

3.6.21

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 8, \\ -4x_1 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

3.6.22

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \rightarrow \min, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 8, \\ 4x_1 - x_3 + x_5 = 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

3.6.23

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max, \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

3.6.24

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.6.25

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ x_2 + x_5 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

3.6.26

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 - x_2 + x_5 = 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

3.6.27

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 12, \\ -2x_1 + 5x_2 + x_4 = 9, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 8, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

3.6.28

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ -3x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

3.6.29

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \max, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.6.30

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \max, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Завдання 3.7. Розв'язати задачі лінійного програмування (3.7.1–3.7.30), в яких невідомий початковий опорний розв'язок:

3.7.1

$$\begin{cases} f = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 = 10, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

3.7.2

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.7.3

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 - x_3 + 5x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.7.4

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.7.5

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max, \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 \leq 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.7.6

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.7.7

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\ 5x_1 + 12x_2 + 2x_3 = 9, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 11, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.7.8

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.7.9

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 9, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 7, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.7.10

$$\begin{cases} 12x_1 + 27x_2 + 6x_3 \rightarrow \min, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 14, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 6, \\ 6x_1 + 9x_2 + 2x_3 \geq 22, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.7.11

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 - 5x_3 - 3x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 15x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.7.12

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 4x_3 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.7.13

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 6, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 8, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.7.14

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \min, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 10, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.7.15

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 1, \\ 3x_1 + 7x_2 + 5x_3 \geq 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.7.16

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \min, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \geq 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \geq -1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.7.17

$$\begin{cases} 8x_1 - 6x_2 - 5x_3 + 2x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 16, \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 20, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.7.18

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.7.19

$$\begin{cases} 15x_1 + 33x_2 \rightarrow \min, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ 8x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 1. \end{cases}$$

3.7.20

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.7.21

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ 7x_1 + 5x_2 \leq 20, \\ -2x_1 + 4x_2 \geq 3, \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 14, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

3.7.22

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + 3x_2 \geq 8, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ 5x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

3.7.23

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_5 = 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

3.7.24

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_5 = 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

3.7.25

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - x_4 = 1, \\ -x_1 + 5x_2 + x_5 = 10, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

3.7.26

$$\begin{cases} -x_1 + 9x_2 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \geq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 10, \\ -2x_1 + 6x_2 + x_5 = 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

3.7.27

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.7.28

$$\begin{cases} x_1 + 5x_3 \rightarrow \min, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 8, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.7.29

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 5, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.7.30

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 \rightarrow \max, \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Завдання 3.8. 1. Вписати до наведених нижче задач (3.8.1–3.8.30) двоїсті, розв'язати їх графічним методом і за допомогою теорем двоїстості знайти розв'язки вихідних задач.

2. Розв'язати задачі симплекс-методом і, користуючись останньою симплекс-таблицею, знайти розв'язки двоїстих задач:

3.8.1

$$\begin{cases} f = 2x_1 + 7x_2 \rightarrow \max, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 14, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.8.2

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

3.8.3

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.8.4

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.8.5

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 9, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

3.8.6

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

3.8.7

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min, \\ -x_1 + x_2 \geq 5, \\ -x_1 - 2x_2 \geq -3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.8.8

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\ x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ x_2 + 2x_3 \geq 3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

3.8.9

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.8.10

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.8.11

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.8.12

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 15, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 14, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.8.13

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.8.14

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 24, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.8.15

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.8.16

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_4 = 9, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.8.17

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 \rightarrow \max, \\ 5x_1 + 24x_2 - 7x_3 - x_4 = 41, \\ -x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.8.18

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 4, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.8.19

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 3x_3 \rightarrow \min, \\ x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_3 \geq 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.8.20

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 - x_3 \rightarrow \min, \\ x_1 + 2x_2 \geq 0, \\ x_2 + 5x_3 \geq 10, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.8.21

$$\begin{cases} -4x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 5x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.8.22

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 30, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 28, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.8.23

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.8.24

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 5x_3 \rightarrow \max, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 12, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 18, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.8.25

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \max, \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 + x_4 = 12, \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 = 14, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.8.26

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 9, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.8.27

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 \rightarrow \min, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 22, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.8.28

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \min, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.8.29

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.8.30

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 2x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 5, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Тема 4. ТРАНСПОРТНІ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Опрацювання теми дає можливість розв'язувати:

- збалансовані та незбалансовані класичні транспортні задачі;
- транспортні задачі із специфічними обмеженнями;
- транспортні задачі за критерієм часу.

Ключові поняття:

- методи знаходження початкового опорного плану;
- метод потенціалів розв'язування транспортних задач.

Практичне застосування: логістика та управління ланцюгами поставок, розподіл товарів, планування маршрутів, задачі про призначення.

4.1. Приклади виконання завдань

Приклад 4.1. Знайти розв'язок транспортної задачі (табл. 4.1) за критерієм вартості перевезень продукції (a_i – обсяг запасу продукції у i -го постачальника, b_j – обсяг потреб j -го споживача у даній продукції):

Таблиця 4.1

$a_i \backslash b_j$	75	80	60	85
100	6	7	3	5
150	1	2	5	6
50	8	10	20	1

■ Оскільки $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j = 300$, то ця транспортна задача

збалансована (закрита).

Зазначимо, що початковий опорний план можна знайти різними методами, наприклад, методами північно-західного кута або мінімальної вартості.

Знайдемо початковий опорний план методом мінімальної вартості. Для цього на кожному кроці заповнимо клітинку таблиці, яка має найменшу вартість перевезення одиниці продукції. Ці дії повторимо, поки не буде розподілено всю продукцію між постачальниками та споживачами.

Отримали такий опорний план перевезень:

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 60 & 35 \\ 75 & 75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix},$$

а значення цільової функції для цього плану

$$F(X^{(1)}) = 5 \cdot 7 + 60 \cdot 3 + 35 \cdot 5 + 75 \cdot 1 + 75 \cdot 2 + 50 \cdot 1 = 665 \text{ од.}$$

Проаналізуємо план $X^{(1)}$ на виродженість. Число ненульових базисних змінних $k=6$ дорівнює рангу $r = m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$. Отже, ця Т-задача не вироджена.

Усі подальші розрахунки здійснюємо, користуючись табл. 4.2.

Таблиця 4.2

$a_i \backslash b_j$	75	80	60	85	α_i
100	6 + - 75	7 - 5 + 75	3 60 -	5 35 50	0
150	1 - 75	2 + 75	5 -	6 -	-5
50	8 -	10 -	20 -	1	-4
β_j	6	7	3	5	

Для знаходження потенціалів $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ розв'язуємо для зайнятих клітинок табл. 4.2 систему рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_1 + \beta_2 = 7, \\ \alpha_1 + \beta_3 = 3, \\ \alpha_1 + \beta_4 = 5, \\ \alpha_2 + \beta_1 = 1, \\ \alpha_2 + \beta_2 = 2, \\ \alpha_3 + \beta_4 = 1. \end{cases}$$

Очевидно, що, користуючись табл. 4.2, таку систему рівнянь можна розв'язати усно. Результати (розв'язки системи) записуємо відповідно у правому стовпці та нижньому рядку.

Далі для вільних клітинок визначаємо

$$\begin{aligned} d_{11} &= \alpha_1 + \beta_1 - c_{11} = 0 + 6 - 6 = 0, \\ d_{23} &= \alpha_2 + \beta_3 - c_{23} = -5 + 3 - 5 = -7, \\ d_{24} &= \alpha_2 + \beta_4 - c_{24} = -5 + 5 - 6 = -6, \\ d_{31} &= \alpha_3 + \beta_1 - c_{31} = -4 + 6 - 8 = -6, \\ d_{32} &= \alpha_3 + \beta_2 - c_{32} = -4 + 7 - 10 = -7, \\ d_{33} &= \alpha_3 + \beta_3 - c_{33} = -4 + 3 - 20 = -21. \end{aligned}$$

Оскільки усі оцінки $d_{ij} \leq 0$, то план $X^{(1)}$ оптимальний. Враховуючи, що серед них є $d_{11} = 0$, робимо висновок, що задача має безліч розв'язків.

Для демонстрації множинності розв'язків побудуємо альтернативний оптимальний план, використовуючи вільну клітинку (1,1) з нульовою оцінкою. Для неї побудуємо цикл перерозрахунку: $(1,1) \rightarrow (2,1) \rightarrow (2,2) \rightarrow (1,2) \rightarrow (1,1)$ (табл. 4.2) та визначимо максимальний обсяг перерозподілу $\min\{5, 75\} = 5$. Далі число 5 додамо до відповідного числа, розміщеного у «+»-клітинці і віднімемо від числа,

розміщеного у «-»-клітинках. Результати обчислень записано у табл. 4.3.

Зауважимо, що число 0 записується у клітинках Т-таблиці лише тоді, коли воно є фіксованим числом.

Таблиця 4.3

$a_i \backslash b_j$	75	80	60	85	α_i
100	6 5	7 -	3 60	5 35	0
150	1 70	2 80	5 -	6 -	-5
50	8 -	10 -	20 -	1 50	-4
β_j	6	7	3	5	

Значення цільової функції для цього плану $X^{(2)}$ також дорівнює $F(X^{(2)}) = 665$ од.

Далі для зайнятих клітинок табл. 4.3 визначаємо потенціали (табл. 4.3), а для вільних клітинок – оцінки:

$$d_{12} = \alpha_1 + \beta_2 - c_{12} = 0 + 7 - 7 = 0,$$

$$d_{23} = \alpha_2 + \beta_3 - c_{23} = -5 + 3 - 5 = -7,$$

$$d_{24} = \alpha_2 + \beta_4 - c_{24} = -5 + 5 - 6 = -6,$$

$$d_{31} = \alpha_3 + \beta_1 - c_{31} = -4 + 6 - 8 = -6,$$

$$d_{32} = \alpha_3 + \beta_2 - c_{32} = -4 + 7 - 10 = -7,$$

$$d_{33} = \alpha_3 + \beta_3 - c_{33} = -4 + 3 - 20 = -21.$$

Оскільки всі оцінки $d_{ij} \leq 0$, то альтернативний план $X^{(2)}$ також оптимальний, що підтверджує наш висновок про наявність множини оптимальних розв'язків цієї транспортної задачі.

Отже, ми отримали два оптимальні плани $X^{(1)}$ та $X^{(2)}$,

тому довільна лінійна опукла комбінація $X^* = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha)X^{(2)}$, ($\alpha \in [0,1]$) також буде оптимальним планом Т-задачі, тобто

$$\begin{aligned} X^* &= \alpha \begin{pmatrix} 0 & 5 & 60 & 35 \\ 75 & 75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} 5 & 0 & 60 & 35 \\ 70 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 5\alpha & 60\alpha & 35\alpha \\ 75\alpha & 75\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5-5\alpha & 0 & 60-60\alpha & 35-35\alpha \\ 70-70\alpha & 80-80\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50-50\alpha \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 5-5\alpha & 5\alpha & 60 & 35 \\ 70+5\alpha & 80-5\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}, \alpha \in [0,1]. \end{aligned}$$

$$F(X^*) = 665 \text{ од.} \blacksquare$$

Приклад 4.2. Знайти розв'язок транспортної задачі (табл. 4.4) з особливостями (А – постачальник, В – споживач):

Три нафтопереробних заводи A_1, A_2, A_3 , із максимальною щоденною продуктивністю відповідно 30, 20, 15 тис. т бензину забезпечують чотири бензосховища B_1, B_2, B_3, B_4 , потреба яких становить відповідно 10, 20, 25 та 20 тис. т бензину. Бензин транспортується до бензосховищ за допомогою трубопроводів. Вартість перекачування 1000 т бензину від заводів до сховищ (в умовних одиницях) наведено у табл. 4.4.

Таблиця 4.4

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	5	3	7
A_2	7	6	2	5
A_3	2	3	9	8

Формалізувати та розв'язати відповідну транспортну задачу з урахуванням таких умов:

- 1) повністю задовольнити попит бензосховища B_4 ;
- 2) недопостачання бензину до сховища B_2 штрафується 5 ум. од. вартості за кожні 1000 т бензину;
- 3) у зв'язку з виконанням ремонтних робіт на трубопроводі постачання бензину із заводу A_1 до сховища B_1 тимчасово неможливе.

■ Спочатку перевіримо, чи задача збалансована (закрита):

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 30 + 20 + 15 = 65; \quad \sum_{j=1}^4 b_j = 10 + 20 + 25 + 20 = 75.$$

Оскільки загальна пропозиція менша за попит $\left(\sum_{i=1}^n a_i < \sum_{j=1}^m b_j \right)$, то введемо фіктивного постачальника A_4 з потужністю 10 тис. т. При цьому кількість бензину, що буде в оптимальному плані відправлена споживачам від цього постачальника, показуватиме обсяг незадоволеного попиту (табл. 4.5).

Таблиця 4.5

$A \backslash B$	10	20	25	20
30	4	5	3	7
20	7	6	2	5
15	2	3	9	8
10	0	0	0	0

Для виконання першої вимоги задачі потрібно заблокувати клітинку $(A_4; B_4)$, записавши в ній досить високу вартість перевезення M . Тоді в оптимальному плані транспортної задачі ця клітинка обов'язково буде незаповненою, а бензосховище B_4 отримає потрібну кількість бензину від фактичних, а не фіктивних нафтопереробних заводів.

Виконання другої умови задачі забезпечується тим, що у клітинці $(A_4; B_2)$ вартість транспортування 1000 т бензину замість 0 ум.од. дорівнюватиме 5 ум.од.

Для виконання третьої вимоги задачі необхідно заблокувати маршрут $(A_1; B_1)$. Для цього в зазначеній клітинці замість вартості перевезення 4 ум. од. записуємо величину M .

У результаті отримаємо таку Т-задачу (табл. 4.6).

Таблиця 4.6

$A \backslash B$	10	20	25	20
30	M	5	3	7
20	7	6	2	5
15	2	3	9	8
10	0	5	0	M

Знайдемо її початковий опорний план методом мінімальної вартості та по заповнених комірках визначимо

потенціали рядків та стовпців за формулою $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$ (табл. 4.7).

Таблиця 4.7

$A \backslash B$	10	20	25	20	α_i
30	M -	5 - 15	3 5	7 + 10	0
20	7 -	6 -	2 20	5 -	-1
15	2 - 10	3 + 5	9 -	8 -	-2
10	0 + -	5 -	0 -	M - 10	7-M
β_j	4	5	3	7	

Вартість такого перевезення складає $250 + 10M$.

Використовуючи порожні комірки, знайдемо оцінки

$$d_{ij} = \alpha_i + \beta_j - c_{ij} :$$

$$d_{11} = 4 + 0 - M = 4 - M < 0 ;$$

$$d_{21} = 4 - 1 - 7 = -4 < 0 ;$$

$$d_{22} = 5 - 1 - 6 = -2 < 0 ;$$

$$d_{24} = 7 - 1 - 5 = 1 > 0 ;$$

$$d_{33} = 3 - 2 - 9 = -8 < 0 ;$$

$$d_{34} = 7 - 2 - 8 = -3 < 0 ;$$

$$d_{41} = 4 + M - 7 - 0 = M - 3 > 0 ;$$

$$d_{42} = 5 + M - 7 - 5 = M - 7 > 0 ;$$

$$d_{43} = 3 + M - 7 - 0 = M - 4 > 0 .$$

Серед додатних значень виберемо найбільше і комірку (4;1), якій воно відповідає, вважатимемо провідною. Побудуємо на основі неї цикл перерозрахунку та отримаємо таблицю, у якій по заповнених комірках визначимо потенціали рядків та стовпців за формулою $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$.

Оскільки $k = 6 < r$, то в одній комірці, наприклад (3,1), зафіксуємо 0 (табл. 4.8).

Таблиця 4.8

$A \backslash B$	10	20	25	20	α_i
30	M -	5 5	3 + 5	7 - 20	0
20	7 -	6 -	2 - 20	5 + -	-1
15	2 0	3 15	9 -	8 -	-2
10	0 10	5 -	0 -	M -	-4
β_j	4	5	3	7	

Для порожніх (вільних) комірок знайдемо оцінки:

$$d_{11} = 4 + 0 - M = 4 - M < 0;$$

$$d_{21} = 4 - 1 - 7 = -4 < 0;$$

$$d_{22} = 5 - 1 - 6 = -2 < 0;$$

$$d_{24} = 7 - 1 - 5 = 1 > 0;$$

$$d_{33} = 3 - 2 - 9 = -8 < 0;$$

$$d_{34} = 7 - 2 - 8 = -3 < 0;$$

$$d_{42} = 5 - 4 - 5 = -4 < 0;$$

$$d_{43} = 7 - 4 - M = 3 - M < 0;$$

$$d_{44} = 7 - 4 - M = 7 - M < 0.$$

План перевезень не оптимальний, оскільки $d_{24} > 0$, тому на основі комірки (2;4) побудуємо цикл перерозрахунку та отримаємо таблицю, у якій по заповнених комірках визначимо потенціали рядків і стовпців за формулою $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$. Оскільки $k = 5 < r$, то у двох комірках зафіксуємо 0. У результаті отримаємо таку Т-задачу (табл. 4.9).

Таблиця 4.9

$A \backslash B$	10	20	25	20	α_i
30	M -	5 5	3 25	7 -	0
20	7 -	6 -	2 0	5 20	-1
15	2 0	3 15	9 -	8 -	-2
10	0 10	5 -	0 -	M -	-4
β_j	4	5	3	6	

Отже, для порожніх клітинок знайдемо оцінки:

$$d_{11} = 4 + 0 - M = 4 - M < 0;$$

$$d_{21} = 4 - 1 - 7 = -4 < 0;$$

$$d_{22} = 5 - 1 - 6 = -2 < 0;$$

$$d_{33} = 3 - 2 - 9 = -8 < 0;$$

$$d_{34} = 6 - 2 - 8 = -4 < 0;$$

$$d_{42} = 5 - 4 - 5 = -4 < 0;$$

$$d_{43} = 3 - 4 - 0 = -1 < 0;$$

$$d_{44} = 6 - 4 - M = 2 - M < 0.$$

Умова оптимальності виконана ($d_{ij} < 0$), тому запишемо єдиний розв'язок транспортної задачі:

1) план перевезення;

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

2) вартість перевезення:

$$F(X^*) = 5 \cdot 5 + 3 \cdot 25 + 5 \cdot 20 + 3 \cdot 15 = 245. \blacksquare$$

Приклад 4.3. Знайти розв'язок транспортної задачі (табл. 4.10) за критерієм часу перевезень продукції (a_i –

обсяг запасу продукції у i -го постачальника, b_j – обсяг потреб j -го споживача у даній продукції):

Таблиця 4.10

$a_i \backslash b_j$	5	10	20	15
10	8	3	5	2
15	4	1	6	7
25	1	9	4	3

■ Ця задача збалансована, оскільки $\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^4 b_j = 50$.

Тому знайдемо початковий опорний план $X^{(1)}$ методом північно-західного кута (табл. 4.11).

Таблиця 4.11

$a_i \backslash b_j$	5	10	20	15
10	8 –	3 5	5 +	2 –
15	4 +	1 –	6 –	7 –
25	1 –	9 –	4 10	3 15

Для цього плану $X^{(1)}$ проаналізуємо заповнені клітинки й обчислимо час $T_1 = T(X^{(1)}) = \max\{8; 3; 1; 6; 4; 3\} = 8$. Ця величина характеризує час, протягом якого здійснюється цей план перевезень. Оскільки у клітинці $(3; 2)$ час перевезення $t_{32} = 9 > T_1$, то її треба виключити з розгляду, щоб запобігти її заповненню і, у такий спосіб, не збільшити максимальний час перевезення.

Далі для клітинки $(1; 1)$, яка має час перевезення T_1 , будуємо розвантажувальний цикл. Для Т-задач за критерієм часу він може складатися як із заповнених, так і вільних клітинок, які не виключені з розгляду на попередніх кроках. При цьому повинна виконуватися така умова: всім

клітинкам зі знаком «-» (починаючи з (1;1) і далі по циклу) відповідатимуть лише заповнені клітинки, а клітинкам зі знаком «+» відповідатимуть як заповнені, так і вільні клітинки, у яких час перевезення $t_{ij} < T$. Зауважимо, що таких циклів можна побудувати кілька (табл. 4.11).

Далі побудуємо новий опорний план $X^{(2)}$ (табл. 4.12). У ньому розглянемо всі заповнені клітинки й обчислимо $T_2 = \max\{3; 5; 4; 1; 6; 4; 3\} = 6$. Оскільки в клітинках (1;1) та (2;4) час перевезення більший за T_2 , то їх треба також виключити з розгляду, а для клітинки (2;3), яка має час перевезення T_2 , побудувати розвантажувальний цикл (табл. 4.12).

Таблиця 4.12

$a_i \backslash b_j$	5	10	20	15
10	8 -	3 - 5 +	5 5	2 -
15	4 5	1 + 5 -	6 5	7 -
25	1 -	9 -	4 10	3 15

Для заповнених клітинок нового опорного плану $X^{(3)}$ (табл. 4.10) обчислимо $T_3 = \max\{3; 5; 4; 1; 4; 3\} = 5$. Оскільки у клітинці (2;3) час перевезення $6 > T_3$, то її виключимо з розгляду, а для клітинки (1;3), яка має час перевезення T_3 , будемо розвантажувальний цикл (табл. 4.13).

Таблиця 4.13

$a_i \backslash b_j$	5	10	20	15
10	8 -	3 -	5 - 10 +	2 -
15	4 5	1 10	6 -	7 -
25	1 -	9 -	4 + 10	3 15

Далі побудуємо новий опорний план $X^{(4)}$ (табл. 4.14). Для заповнених клітинок обчислимо максимальний час перевезення $T_4 = \max\{3; 2; 4; 1; 4; 3\} = 4$. Оскільки у клітинці $(1; 3)$ час перевезення $5 > T_4$, то її виключимо з розгляду.

Таблиця 4.14

$a_i \backslash b_j$	5	10	20	15
10	8	3	5	2
15	4	1	6	7
25	1	9	4	3

Для клітинок $(2; 1)$ або $(3; 3)$ неможливо побудувати цикл так, щоб їх звільнити. Отже, задача розв'язана і її розв'язок

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 10 \\ 5 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}, T^* = 4. \blacksquare$$

4.2. Завдання для самостійної роботи

Завдання 4.1. Знайти розв'язки закритих транспортних задач (табл. 4.1.1–4.1.30) за критерієм вартості перевезень продукції (a_i – обсяг запасу продукції у i -го постачальника, b_j – обсяг потреб j -го споживача у даній продукції):

4.1.1

$a_i \backslash b_j$	20	110	40	110
60	1	2	5	3
120	1	6	5	2
100	6	3	7	4

4.1.2

$a_i \backslash b_j$	80	60	170	80
110	8	1	9	7
190	4	6	2	12
90	3	5	8	9

4.1.3

$a_i \backslash b_j$	30	40	20
20	7	5	3
40	4	6	1
30	3	2	4

4.1.4

$a_i \backslash b_j$	25	10	13
18	4	1	5
10	2	3	6
20	5	7	4

4.1.5

$a_i \backslash b_j$	5	9	9	7
11	7	8	5	3
11	2	4	5	9
8	6	3	1	2

4.1.6

$a_i \backslash b_j$	20	25	30	25
40	4	2	5	7
30	6	0	3	1
30	5	4	2	6

4.1.7

$a_i \backslash b_j$	80	50	50	70
80	4	2	3	1
140	6	3	5	6
70	3	2	6	3

4.1.8

$a_i \backslash b_j$	180	110	60	40
175	9	7	5	3
125	1	2	4	6
140	8	10	12	1

4.1.9

$a_i \backslash b_j$	70	30	20
40	0	0	8
60	3	5	1
50	4	2	4

4.1.10

$a_i \backslash b_j$	15	10	20
50	5	6	8
25	1	3	5

4.1.11

$a_i \backslash b_j$	90	120	110	130
185	4	3	9	2
165	5	9	7	4

4.1.12

$a_i \backslash b_j$	6	14	20
10	4	5	1
8	2	3	4
12	1	2	4

4.1.13

$a_i \backslash b_j$	110	80	60
100	2	4	2
70	5	5	6
60	4	7	3
20	6	8	1

4.1.14

$a_i \backslash b_j$	60	40	40	30	30
60	5	2	0	7	3
40	6	1	4	2	8
70	7	4	3	6	1
30	3	5	6	4	2

4.1.15

$a_i \backslash b_j$	140	90	170
140	5	6	4
80	3	9	1
80	2	4	8
100	1	3	7

4.1.16

$a_i \backslash b_j$	85	65	90	60
120	7	4	15	9
80	11	2	7	3
100	4	5	12	8

4.1.17

$a_i \backslash b_j$	20	30	20	20
20	4	1	5	3
30	2	6	4	7
40	5	3	6	4

4.1.18

$a_i \backslash b_j$	40	20	10	30
50	5	6	4	2
30	3	2	4	1
20	2	3	6	5

4.1.19

$a_i \backslash b_j$	15	28	20
23	18	10	5
18	0	0	4
29	3	5	2

4.1.20

$a_i \backslash b_j$	30	40	30
70	6	5	4
40	8	3	2
50	7	4	6
20	5	2	8

4.1.21

$a_i \backslash b_j$	40	40	120
50	4	1	5
70	3	2	4
60	7	8	9
20	11	2	3

4.1.22

$a_i \backslash b_j$	200	20	100
100	1	3	5
112	4	8	11
98	2	12	3

4.1.23

$a_i \backslash b_j$	60	30	50
20	5	2	6
45	3	1	4
40	14	12	7
35	15	13	11

4.1.24

$a_i \backslash b_j$	15	25	30
10	2	1	5
20	4	4	7
40	6	3	2

4.1.25

$a_i \backslash b_j$	40	50	30	40
60	4	3	10	1
60	1	8	9	7
40	7	2	2	4

4.1.26

$a_i \backslash b_j$	50	50	100	50
111	2	5	3	1
99	11	13	4	17
40	10	8	7	4

4.1.27

$a_i \backslash b_j$	70	100	80	100
200	1	9	1	2
100	8	7	5	7
50	4	10	6	3

4.1.28

$a_i \backslash b_j$	100	100	150	50
150	10	8	3	5
50	9	7	2	3
50	8	7	3	3
150	9	7	4	5

4.1.29

$a_i \backslash b_j$	120	135	135
101	4	9	7
49	5	8	8
151	7	2	3
89	6	1	10

4.1.30

$a_i \backslash b_j$	140	90	170
140	5	6	4
80	3	9	1
80	2	4	8
100	1	7	3

Завдання 4.2. Знайти розв'язки транспортних задач (табл. 4.2.1–4.2.30) з особливостями (A – постачальник, B – споживач):

4.2.1. Знайти розв'язок транспортної задачі, яка задана таблицею,

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	Запаси
A_1	7	10	12	40
A_2	3	16	7	50
A_3	4	14	12	70
A_4	8	11	6	90
Потреби	100	120	30	250

якщо:

1) за маршрутами (1;1), (3;2) і (4;1) обсяги перевезень фіксовані та дорівнюють відповідно 15, 35 і 30 од. вантажу;

2) за маршрутами (2;1), (2;2) і (4;3) треба перевезти відповідно не менше ніж 10, 15 і 20 од. вантажу.

4.2.2. Розв'язати транспортну задачу, яка задана таблицею,

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1	4	3	2	5	30
A_2	5	4	3	2	40
A_3	1	10	3	4	50
A_4	2	3	4	5	45
Потреби	40	50	45	30	165

якщо комунікації між (1,4) і (3,2) заборонені.

4.2.3. Знайти розв'язок транспортної задачі, яка задана таблицею,

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1	4	6	2	3	100
A_2	4	7	6	4	80
A_3	2	5	4	3	120
Потреби	50	60	90	100	300

якщо з A_3 до B_3 повинно бути перевезено не менше 100 одиниць вантажу.

4.2.4. Розв'язати транспортну задачу, яка задана таблицею,

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	1	2	3	1	4	180
A_2	6	3	4	5	2	220
A_3	8	2	1	9	3	100
Потреби	120	80	160	90	50	500

якщо комунікації між (1,2) і (2,5) заборонені.

4.2.5. Знайти розв'язок транспортної задачі, яка задана таблицею,

$A \backslash B$	B_1	B_2	Запаси
A_1	1	2	25
A_2	3	4	15
Потреби	10	20	

якщо за маршрутом (2,2) обсяг перевезень фіксований і дорівнює 15 одиниць вантажу.

4.2.6. Розв'язати транспортну задачу, яка задана таблицею,

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	1	2	3	1	4	180
A_2	6	3	4	5	2	220
A_3	8	2	1	9	3	100
Потреби	120	80	160	90	50	500

якщо з A_2 до B_1 повинно бути перевезено 60 одиниць вантажу.

4.2.7. Знайти розв'язок транспортної задачі, яка задана таблицею,

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	5	3	2	4	8	160
A_2	7	6	5	3	1	90
A_3	8	9	4	5	2	140
Потреби	90	60	80	70	90	390

якщо з A_3 до B_5 повинно бути перевезено не менше 60 одиниць вантажу.

4.2.8. Розв'язати транспортну задачу, яка задана таблицею,

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	5	3	2	4	8	160
A_2	7	6	5	3	1	90
A_3	8	9	4	5	2	140
Потреби	90	60	80	70	90	390

якщо з A_2 до B_4 повинно бути перевезено не більше 40 одиниць вантажу.

4.2.9. Знайти розв'язок транспортної задачі, яка задана таблицею,

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	Запаси
A_1	7	10	12	40
A_2	3	16	7	50
A_3	4	14	12	70
A_4	8	11	6	90
Потреби	100	120	30	250

якщо за маршрутами (1,1), (3,2) і (4,1) обсяги перевезень фіксовані й дорівнюють відповідно 15, 35 і 30 одиниць вантажу.

4.2.10. Розв'язати транспортну задачу, яка задана таблицею,

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	Запаси
A_1	7	10	12	40
A_2	3	16	7	50
A_3	4	14	12	70
A_4	8	11	6	90
Потреби	100	120	30	250

якщо за маршрутами (2,1), (2,2) і (4,3) треба перевезти відповідно не менше ніж 10, 15 і 20 одиниць вантажу.

4.2.11. Знайти розв'язок транспортної задачі, яка задана таблицею,

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1	1	2	2	4	100
A_2	4	3	0	4	50
A_3	3	3	3	2	50
Потреби	50	50	50	50	200

якщо комунікації між (1,1) і (1,3) заборонені.

4.2.12. Розв'язати транспортну задачу, яка задана таблицею,

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	4	2	2	4	8	170
A_2	6	5	4	2	1	90
A_3	7	8	3	3	2	180
Потреби	100	70	90	80	100	440

якщо з A_1 до B_5 повинно бути перевезено не більше 90 одиниць вантажу.

4.2.13. Знайти розв'язок транспортної задачі, яка задана таблицею,

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1	6	4	4	5	145
A_2	8	7	6	4	95
A_3	9	10	5	6	110
Потреби	65	120	105	60	350

якщо з A_2 до B_2 повинно бути перевезено не менше 50 одиниць вантажу.

4.2.14. Розв'язати транспортну задачу, яка задана таблицею,

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	4	7	3	5	6	100
A_2	9	5	4	3	2	65
A_3	6	4	8	4	6	75
Потреби	60	45	45	55	35	240

якщо за маршрутами (1,2), (2,3) і (3,5) обсяги перевезень фіксовані й дорівнюють відповідно 100, 40 і 25 одиниць вантажу.

4.2.15. Розв'язати задачу про оптимальне призначення трьох спеціалістів на три посади, якщо ефективність їх призначення задана таблицею:

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	
A_1	40	30	50	1
A_2	30	50	20	1
A_3	50	30	40	1
	1	1	1	3

4.2.16. Розв'язати транспортну задачу, яка задана таблицею,

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	Запаси
A_1	6	8	6	140
A_2	5	10	11	60
A_3	8	11	9	30
A_4	12	7	7	70
Потреби	80	100	120	300

якщо за маршрутом (4,3) обсяг перевезень фіксований і дорівнює 50 одиниць вантажу, а комунікації між (1,2) та (3,1) заборонені.

4.2.17. Розв'язати транспортну задачу, яка задана таблицею,

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1	2	3	6	3	150
A_2	6	8	4	5	160
A_3	7	3	5	3	135
A_4	5	4	2	2	105
Потреби	200	195	95	60	550

якщо за маршрутами (1,1), (2,3) і (3,4) обсяги перевезень фіксовані й дорівнюють відповідно 105, 60 і 50 одиниць вантажу.

4.2.18. Знайти розв'язок транспортної задачі, яка задана таблицею,

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	Запаси
A_1	2	1	3	30
A_2	2	2	1	20
A_3	1	3	2	30
Потреби	35	20	25	80

якщо комунікації між (1,2) і (2,2) заборонені.

4.2.19. Знайти розв'язок транспортної задачі, яка задана таблицею,

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	Запаси
A_1	12	11	13	150
A_2	11	13	12	100
A_3	14	10	11	110
A_4	10	12	10	140
Потреби	200	150	140	

якщо з A_4 до B_3 повинно бути перевезено не менше 100 одиниць вантажу.

4.2.20. Розв'язати задачу про оптимальне призначення трьох спеціалістів на три посади, якщо ефективність їх призначення задана таблицею:

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	
A_1	10	4	6	1
A_2	5	3	4	1
A_3	7	4	5	1
	1	1	1	3

4.2.21. Розв'язати транспортну задачу, яка задана таблицею,

$A \backslash B$	B_1	B_2	Запаси
A_1	5	4	100
A_2	7	3	150
A_3	4	5	50
A_4	3	6	100
Потреби	250	150	400

якщо за маршрутами (1,1) і (3,2) обсяги перевезень фіксовані й дорівнюють відповідно 90 і 40 одиниць вантажу.

4.2.22. Знайти розв'язок транспортної задачі, яка задана таблицею,

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1	9	10	14	15	200
A_2	8	12	10	14	150
A_3	10	11	11	13	300
A_4	9	14	12	15	150
Потреби	150	250	250	150	800

якщо з A_4 до B_3 повинно бути перевезено не менше 200 одиниць вантажу.

4.2.23. Розв'язати транспортну задачу, яка задана таблицею,

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	3	1	1	3	6	60
A_2	4	3	4	3	1	40
Потреби	10	20	30	20	20	100

якщо з A_2 до B_5 повинно бути перевезено не більше 15 одиниць вантажу.

4.2.24. Знайти розв'язок транспортної задачі, яка задана таблицею,

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1	4	2	1	3	35
A_2	5	4	3	2	55
A_3	6	5	3	4	95
A_4	3	2	4	3	80
Потреби	45	85	75	60	265

якщо комунікації між (1,2), (2,3) і (4,4) заборонені.

4.2.25. Розв'язати транспортну задачу, яка задана таблицею,

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запаси
A_1	2	3	4	5	4	235
A_2	5	4	2	3	2	125
A_3	6	3	5	4	6	120
A_4	4	5	3	6	3	205
Потреби	105	128	190	155	107	685

якщо за маршрутами (1,3), (2,4) і (4,4) обсяги перевезень фіксовані й дорівнюють відповідно 105, 50 і 45 одиниць вантажу.

4.2.26. Знайти розв'язок транспортної задачі, яка задана таблицею,

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1	3	4	4	5	100
A_2	2	3	2	3	150
A_3	1	1	2	3	100
A_4	3	2	1	4	100
Потреби	125	100	100	125	450

якщо з A_2 до B_3 повинно бути перевезено не менше 80 одиниць вантажу.

4.2.27. Розв'язати транспортну задачу, яка задана таблицею,

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1	5	2	3	3	80
A_2	4	5	3	2	40
Потреби	20	30	35	25	

якщо з A_1 до B_4 повинно бути перевезено не більше 10 одиниць вантажу.

4.2.28. Розв'язати задачу про оптимальне призначення трьох спеціалістів на три посади, якщо ефективність їх призначення задана таблицею:

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	
A_1	15	9	11	1
A_2	10	8	9	1
A_3	12	9	10	1
	1	1	1	3

4.2.29. Знайти розв'язок транспортної задачі, яка задана таблицею,

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1	3	5	4	3	75
A_2	4	3	2	5	150
A_3	5	4	3	4	145
A_4	3	2	3	2	100
Потреби	125	95	135	115	470

якщо комунікації між (1,1), (2,2) і (3,3) заборонені.

4.2.30. Розв'язати транспортну задачу, яка задана таблицею,

$A \backslash B$	B_1	B_2	B_3	Запаси
A_1	3	8	6	70
A_2	5	7	7	120
A_3	8	6	9	30
A_4	6	7	7	40
Потреби	70	90	100	260

якщо за маршрутом (4,2) обсяг перевезень фіксований і дорівнює 60 одиниць вантажу, а комунікації між (1,3) та (3,1) заборонені.

Завдання 4.3. Знайти розв'язки транспортних задач (табл. 4.3.1–4.3.30) за критерієм часу перевезень продукції (a_i – обсяг запасу продукції у i -го постачальника, b_j – обсяг потреб j -го споживача у даній продукції):

4.3.1

$a_i \backslash b_j$	10	10	5
13	3	3	4
8	2	6	2
4	5	7	10

4.3.2

$a_i \backslash b_j$	200	160	140
240	15	7	8
80	9	4	11
180	6	3	7

4.3.3

$a_i \backslash b_j$	5	15	15	10
15	15	6	7	1
30	12	8	4	6

4.3.4

$a_i \backslash b_j$	5	5	15	15
5	6	10	17	4
35	9	18	8	7

4.3.5

$a_i \backslash b_j$	50	30	20
50	10	6	4
30	7	6	6
10	12	3	9
10	2	17	7

4.3.6

$a_i \backslash b_j$	32	40	68
70	9	13	32
30	16	12	16
30	13	7	5
10	12	7	13

4.3.7

$a_i \backslash b_j$	20	30	50
10	9	5	2
20	4	2	10
40	6	7	5
30	3	8	4

4.3.8

$a_i \backslash b_j$	36	24	40
10	12	13	14
50	8	12	13
10	5	4	2
30	12	8	3

4.3.9

$a_i \backslash b_j$	5	10	20	15
10	8	3	5	2
15	4	1	6	7
25	1	9	4	3

4.3.10

$a_i \backslash b_j$	25	15	5	5
25	9	6	11	1
15	5	5	2	16
10	3	5	8	6

4.3.11

$a_i \backslash b_j$	5	25	5	15
18	11	7	4	11
12	12	11	3	7
20	13	12	1	2

4.3.12

$a_i \backslash b_j$	35	15	15	5
16	8	15	12	11
20	12	11	6	6
34	31	15	4	12

4.3.13

$a_i \backslash b_j$	10	10	20	10
15	9	4	6	5
15	3	4	7	6
20	2	10	3	2

4.3.14

$a_i \backslash b_j$	7	13	9	11
10	8	10	8	2
18	12	7	3	1
12	5	8	1	6

4.3.15

$a_i \backslash b_j$	5	5	20	20
5	6	10	17	4
35	9	18	8	7
10	5	8	19	5

4.3.16

$a_i \backslash b_j$	15	5	10	20
15	5	10	7	1
5	2	8	4	6
30	3	5	8	2

4.3.17

$a_i \backslash b_j$	12	8	20	20
30	15	1	13	11
5	12	4	5	4
25	13	5	7	2

4.3.18

$a_i \backslash b_j$	10	10	20	20
30	8	8	3	11
5	2	4	5	4
25	10	7	7	6

4.3.19

$a_i \backslash b_j$	20	20	10	30
30	12	8	4	15
25	6	4	5	4
25	10	8	8	6

4.3.20

$a_i \backslash b_j$	30	20	20	30
40	9	8	4	15
40	16	6	5	4
20	10	8	9	6

4.3.21

$a_i \backslash b_j$	15	15	25	25
10	1	7	4	10
20	8	2	5	3
30	4	8	4	2
20	6	6	1	5

4.3.22

$a_i \backslash b_j$	45	40	40	25
35	4	9	5	12
40	6	1	4	3
25	11	4	2	6
50	3	5	9	10

4.3.23

$a_i \backslash b_j$	20	40	50	70
30	13	8	7	11
40	6	7	9	8
50	5	12	5	10
60	19	6	14	4

4.3.24

$a_i \backslash b_j$	200	200	200	200
200	8	7	6	5
100	7	6	5	7
200	4	5	6	7
300	5	7	6	4

4.3.25

$a_i \backslash b_j$	10	11	20	9
8	1	3	4	5
12	2	5	1	3
16	3	2	8	4
14	1	4	3	2

4.3.26

$a_i \backslash b_j$	20	30	40	60
20	10	6	3	2
30	5	8	7	4
50	2	4	5	12
50	15	5	9	4

4.3.27

$a_i \backslash b_j$	10	3	17	20	10
35	3	5	6	11	2
15	4	6	3	2	3
10	6	7	8	8	2

4.3.28

$a_i \backslash b_j$	25	15	10	2	8
35	9	16	9	11	11
5	11	6	5	6	5
20	8	11	6	3	7

4.3.29

$a_i \backslash b_j$	30	80	20	30	90
120	6	8	2	3	5
30	8	5	6	6	2
40	2	4	7	4	8
60	3	4	2	1	4

4.3.30

$a_i \backslash b_j$	50	60	20	30	70
100	10	8	2	3	5
40	8	5	6	6	2
40	2	4	7	4	10
50	3	4	2	1	4

Тема 5. ЦІЛОЧИСЛОВЕ ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Опрацювання теми дає можливість:

- будувати моделі, які формалізуються задачами цілочислового лінійного програмування;
- застосовувати метод Гоморі для розв'язування цілочислових задач лінійного програмування.

Ключові поняття:

- задачі повністю та частково цілочислового лінійного програмування;
- додаткові обмеження Гоморі.

Практичне застосування: оптимізація виробничих потужностей, оптимальний розкрій матеріалів, оптимізація розміщення об'єктів, призначення ресурсів.

5.1. Приклади виконання завдань

Приклад 5.1. *Розв'язати задачу частково цілочислового лінійного програмування:*

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = \frac{8}{9}, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases} \quad (5.1)$$

■ За допомогою симплекс-методу розв'яжемо задачу (5.1) як звичайну задачу лінійного програмування. Результати обчислень наведено у табл. 5.1.

Таблиця 5.1

i	бз	c_i^{δ}	x_i^{δ}	8	6	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4
1	x_3	0	11	3	5	1	0
2	x_4	0	8/9	4	1	0	1
m+1	σ_j		0	-8	-6	0	0
1	x_3	0	31/3	0	17/4	1	-3/4
2	x_1	8	2/9	1	1/4	0	1/4
m+1	σ_j		16/9	0	-4	0	2
1	x_3	0	59/9	-17	0	1	-5
2	x_2	6	8/9	4	1	0	1
m+1	σ_j		16/3	16	0	0	6

Отже, $x^* = \left(0, \frac{8}{9}, \frac{59}{9}, 0\right)^T$, $f^* = \frac{16}{3}$.

Оскільки $x_2^* = \frac{8}{9}$ – неціле число, то сформуємо додаткове обмеження для задачі частково цілочислового лінійного програмування на основі другого рядка останньої симплекс-таблиці за формулою:

$$\sum_{j=1}^n \gamma_{ij} x_j \geq \{b_i^*\},$$

де числа γ_{ij} визначаються так:

а) для змінних x_j , які можуть набувати нецілочислових значень

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} a_{ij}^*, & a_{ij}^* \geq 0, \\ \frac{\{b_i^*\}}{1 - \{b_i^*\}} |a_{ij}^*|, & a_{ij}^* < 0; \end{cases}$$

б) для змінних x_j , які можуть набувати цілочислових значень

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \{a_{ij}^*\}, \{a_{ij}^*\} \leq \{b_i^*\}, \\ \frac{\{b_i^*\}}{1 - \{b_i^*\}} |1 - \{a_{ij}^*\}|, \{a_{ij}^*\} > \{b_i^*\}. \end{cases}$$

Оскільки $\{b_2^*\} = \left\{\frac{8}{9}\right\} = \frac{8}{9}$, $\gamma_{21} = \{4\} = 0$, $\gamma_{22} = \{1\} = 0$, $\gamma_{23} = 0$,

$\gamma_{24} = 1$, то додаткове обмеження формалізуємо у вигляді

$$1 \cdot x_4 \geq \frac{8}{9}.$$

Доповниши обмеження задачі з урахуванням останньої симплекс-таблиці (табл. 5.1) додатковим обмеженням, отримаємо таку задачу:

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \max, \\ -17x_1 + x_3 - 5x_4 = \frac{59}{9}, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = \frac{8}{9}, \\ x_4 \geq \frac{8}{9}, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases} \quad (5.2)$$

Звівши задачу (5.2) до канонічного вигляду, перейдемо до розширеної задачі (5.3):

$$\left\{ \begin{array}{l} 8x_1 + 6x_2 - Mx_6 \rightarrow \max, \\ -17x_1 + x_3 - 5x_4 = \frac{59}{9}, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = \frac{8}{9}, \\ x_4 - x_5 + x_6 = \frac{8}{9}, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{array} \right. \quad (5.3)$$

Для знаходження розв'язку задачі (5.3) знову застосуємо симплекс-метод. Результати обчислень наведено у табл. 5.2.

Таблиця 5.2

i	бз	c_i^0	x_i^0	8	6	0	0	0	-M
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	x_3	0	59/9	-17	0	1	-5	0	0
2	x_2	6	8/9	4	1	0	1	0	0
3	x_6	-M	8/9	0	0	0	1	-1	1
m+1	σ_j		16/3	16	0	0	6	0	0
m+2			-8/9	0	0	0	-1	1	0
1	x_3	0	11	-17	0	1	0	-5	
2	x_2	6	0	4	1	0	0	1	
3	x_4	0	8/9	0	0	0	1	-1	
m+1	σ_j		0	16	0	0	0	6	

З останньої симплекс-таблиці знаходимо розв'язок задачі частково цілочислового лінійного програмування (5.1)

$$x^* = \left(0, 0, 11, \frac{8}{9} \right)^T, f^* = 0. \blacksquare$$

Приклад 5.2. Розв'язати задачу повністю цілочислового лінійного програмування:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}, \\ x_j \in \mathbb{Z}, j = \overline{1,4}. \end{cases} \quad (5.4)$$

■ Очевидно, що задача (5.4) належить до задач повністю цілочислового лінійного програмування. Розв'язок цієї задачі без умови цілочисловості такий: $\tilde{x} = (0, 13/2, 0, 25/2)^T$, $f(\tilde{x}) = 0$ (табл. 5.3).

Таблиця 5.3

i	бз	c_i^0	x_i^0	1	2	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4
1	x_3	0	13	2	2	1	0
2	x_4	0	6	1	-1	0	1
m+1	σ_j		0	-1	-2	0	0
1	x_2	2	$\frac{13}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0
2	x_4	0	$\frac{25}{2}$	2	0	$\frac{1}{2}$	1
m+1	σ_j		13	1	0	1	0

Цей розв'язок не оптимальний для задачі (5.4), оскільки $x_2 = 13/2$, $x_4 = 25/2$. Враховуючи, що дробові частини для x_2 і x_4 однакові, додаткове обмеження можна побудувати для кожної із цих компонент. Сформуємо це обмеження для x_2 . Із табл. 5.3 випливає, що $x_1 + x_2 + 1/2x_3 = 13/2$. Тому

обмеження має вигляд: $1/2x_3 \geq 1/2$ або $x_3 \geq 1$. Після цього розв'язуємо задачу лінійного програмування

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + 1/2x_3 = 13/2, \\ 2x_1 + 1/2x_3 + x_4 = 25/2, \\ x_3 - y = 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}, y \geq 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Від задачі (5.5) переходимо до М-задачі (z – штучна змінна) (5.6):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - Mz \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + 1/2x_3 = 13/2, \\ 2x_1 + 1/2x_3 + x_4 = 25/2, \\ x_3 - y + z = 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}, \\ y \geq 0, z \geq 0. \end{cases} \quad (5.6)$$

Процес розв'язування М-задачі (5.6) відображений у табл. 5.4, звідки знаходимо розв'язок задачі (5.6): $x^* = (0, 6, 1, 12)^T$, $f_{\max}^* = 12$. Цей розв'язок задовольняє умови вихідної задачі, тобто цілочисловий, тому він і є шуканим оптимальним розв'язком задачі (5.4).

Таблица 5.4

i	бз	c_i^δ	x_i^δ	1	2	0	0	0	$-M$
				x_1	x_2	x_3	x_4	y	z
1	x_2	2	$\frac{13}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0
2	x_4	0	$\frac{25}{2}$	2	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0
3	z	$-M$	1	0	0	1	0	-1	1
m+1	σ_j		13	1	0	1	0	0	0
m+2			-1	0	0	-1	0	1	0
1	x_2	2	6	1	1	0	0	$\frac{1}{2}$	
2	x_4	0	12	2	0	0	1	$\frac{1}{2}$	
3	x_3	0	1	0	0	1	0	-1	
m+1	σ_j		12	1	0	0	0	1	

■

5.2. Завдання для самостійної роботи

Завдання 5.1. Розв'язати задачі цілочислового лінійного програмування (5.1.1–5.1.30):

5.1.1

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

5.1.2

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 9,5, \\ -4x_1 + 7x_2 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

5.1.3

$$\begin{cases} x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 9,5, \\ 5x_1 - 6x_2 + x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

5.1.4

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 \leq \frac{8}{3}, \\ x_1 + x_2 \geq \frac{4}{3}, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

5.1.5

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

5.1.6

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \max, \\ x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ 3x_1 - 8x_2 \leq 24, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

5.1.7

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \max, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 11, 5, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_4 = 36, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

5.1.8

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 8, \\ x_1 - x_2 \leq 1, 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

5.1.9

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 3, \\ 3x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

5.1.10

$$\begin{cases} -5x_1 + 10x_2 \rightarrow \max, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = \frac{3}{2}, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

5.1.11

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 = \frac{7}{4}, \\ x_1 + \frac{3}{10}x_2 + x_4 = \frac{3}{2}, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

5.1.12

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 = 7, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 3}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

5.1.13

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, 5, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

5.1.14

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 9, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 2, 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

5.1.15

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 3, 5, \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

5.1.16

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 9, \\ -4x_1 + 7x_2 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

5.1.17

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

5.1.18

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

5.1.19

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = \frac{1}{3}, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

5.1.20

$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ -3x_1 + 6x_2 \leq 17, \\ 3x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

5.1.21

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

5.1.22

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 9, \\ \frac{1}{2}x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

5.1.23

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 + 4x_2 \leq 8, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

5.1.24

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + x_4 = 8, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

5.1.25

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 10, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

5.1.26

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 3, \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

5.1.27

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 6, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

5.1.28

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}, \\ x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

5.1.29

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}, x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

5.1.30

$$\begin{cases} -5x_1 + 10x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 3, 5, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1, 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}, x_j \in Z, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Тема 6. НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Опрацювання теми дає можливість розв'язувати:

- задачі нелінійного програмування графічним методом;
- задачі квадратичного та дробово-лінійного програмування.

Ключові поняття:

- функції Лагранжа для нелінійних оптимізаційних задач;
- геометрична інтерпретація задач нелінійного програмування на площині;
- зведення деяких нелінійних оптимізаційних задач до задач лінійного програмування.

Практичне застосування: оптимізація виробничих процесів із нелінійними залежностями, задачі мінімізації ризиків у фінансових розрахунках, моделі економіки з квадратичними цільовими функціями.

6.1. Приклади виконання завдань

Приклад 6.1. Розв'язати графічним методом задачу нелінійного програмування (знайти максимальне й мінімальне значення функції $f = f(x_1, x_2)$):

$$\begin{cases} f = x_1 + x_2 \rightarrow \text{extr}, \\ (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 \geq 1, \\ (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 25, \\ x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases} \quad (6.1)$$

■ Визначимо область допустимих розв'язків задачі (6.1), побудувавши такі геометричні фігури:

- $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 = 1$ – коло з центром у т. $(4; 2)$ та радіусом 1;

- $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 = 25$ – коло з центром у т. $(4; 2)$ та радіусом 5;

- $x_1 + x_2 = 5$ – пряма лінія, що проходить через точки $(0; 5)$ та $(5; 0)$.

Геометрична ілюстрація процесу розв'язування наведена на рис. 6.1.

Спочатку побудуємо напрямний вектор $c = (4; 2)^T$ і перепендикулярно до нього – лінію рівня $x_1 + x_2 = \text{const}$. Рухаючи лінію рівня вздовж напрямного вектора, переконуємося у тому, що точками мінімуму функції, через які проходить лінія найвищого рівня, є точки відрізків AB та CD (безліч розв'язків), а точкою максимуму – точка E .

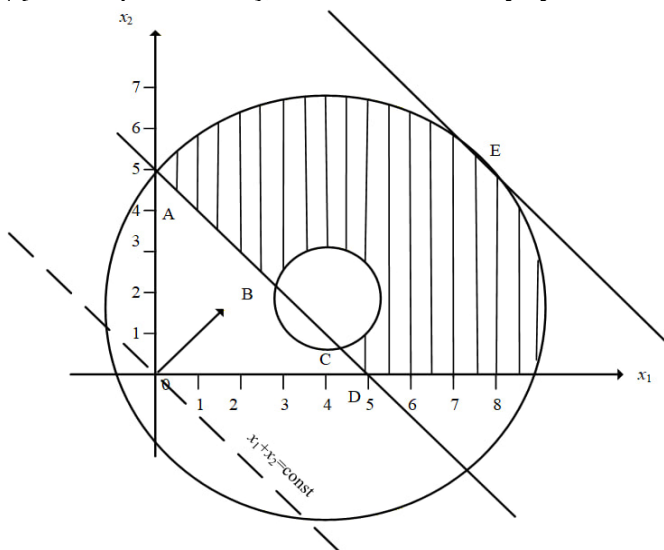


Рис. 6.1. Ілюстрація до завдання 6.1

Для знаходження мінімального значення функції

спершу визначимо координати точок В та С, як точки перетину прямої $x_1 + x_2 = 5$ та кола $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 = 1$, розв'язавши систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язки системи такі:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 3, & x_2^{(1)} = 2; \\ x_1^{(2)} = 4, & x_2^{(2)} = 1. \end{cases}$$

Отже, $B(3;2)$, $C(4;1)$. Точки $A(0;5)$ та $D(5;0)$ визначені раніше (рис. 6.1).

Координати x_1^* та x_2^* довільної точки M , розміщеної на AB , визначимо як опуклі комбінації відповідних координат точок A і B :

$$\begin{aligned} x_1^* &= \alpha \cdot 0 + (1 - \alpha) \cdot 3 = 3 - 3\alpha, \\ x_2^* &= \alpha \cdot 5 + (1 - \alpha) \cdot 2 = 2 + 3\alpha. \end{aligned}$$

Отже, $M(3 - 3\alpha; 2 + 3\alpha)$, а мінімальне значення функції $f_{\min} = 3 - 3\alpha + 2 + 3\alpha = 5$.

Аналогічно знаходяться координати довільної точки M відрізка CD :

$$\begin{aligned} x_1^* &= \alpha \cdot 4 + (1 - \alpha) \cdot 5 = 5 - \alpha, \\ x_2^* &= \alpha \cdot 1 + (1 - \alpha) \cdot 0 = \alpha. \end{aligned}$$

При цьому $M(5 - \alpha; \alpha)$, а мінімальне значення функції $f_{\min} = 5 - \alpha + \alpha = 5$.

Тепер знайдемо координати точки E (точки, через яку проходить лінія найвищого рівня), як точки дотику прямої $x_1 + x_2 = C$ ($C = const$) до кола $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 = 25$.

Кутовий коефіцієнт прямої $k_1 = -1$, а дотичної до кола $(\varphi(x_1, x_2) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 - 25)$ -

$$k_2 = \frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{\frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_2}} = - \frac{2(x_1 - 4)}{2(x_2 - 2)}.$$

Оскільки у т. E $k_1 = k_2$, то $-1 = -\frac{x_1 - 4}{x_2 - 2}$, звідки $x_1 = x_2 + 2$.

Координати т. E задовольняють систему співвідношень:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 2, \\ (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 = 25, \end{cases}$$

тому

$$x_1 = 4 + \frac{5}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = 2 + \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Отже, $E\left(4 + \frac{5}{\sqrt{2}}; 2 + \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$, а максимальне значення

функції $- f_{\max} = f(E) = 4 + \frac{5}{\sqrt{2}} + 2 + \frac{5}{\sqrt{2}} = 6 + 5\sqrt{2}$. Розв'язок

задачі 6.1 знайдено. ■

Приклад 6.2. Знайти максимальне та мінімальне значення функції

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \quad (6.2)$$

на множині X , яка задається системою нерівностей

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 2}. \end{cases} \quad (6.3)$$

■ Область допустимих розв'язків X задачі (6.2), (6.3) є чотирикутником $OABC$ (рис. 6.2), а рівняння лінії рівня $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 = h$ – рівнянням кола із центром у точці $E(2, 3)$ і радіусом $\sqrt{h}$ ($h \geq 0$). Враховуючи, що центр кола знаходиться всередині чотирикутника $OABC$, колом мінімального радіуса (лінією найнижчого рівня), яке має спільну точку з чотирикутником $OABC$, буде коло із

центром у точці $E(2,3)$ і радіусом $\sqrt{h}=0$, тобто коло, вироджене в точку E . При цьому мінімальне значення функції (6.2) на допустимій множині (6.3) $f_{\min}^* = f(2,3) = (2-2)^2 + (3-3)^2 = 0$.

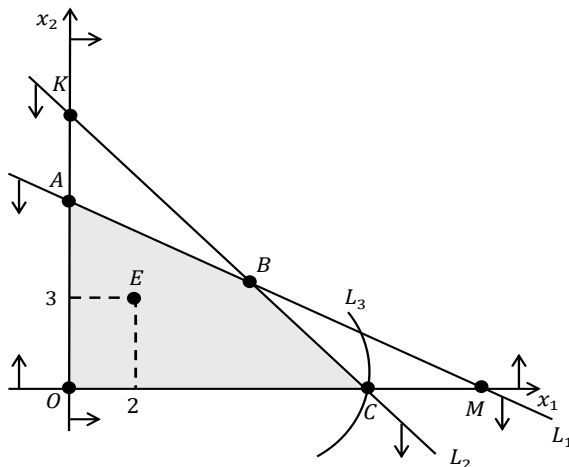


Рис. 6.2. Ілюстрація до прикладу 6.2
(точки O, A, B, C, K, M, E та лінії L_1, L_2, L_3 такі: $O(0,0)$, $A(0,6)$, $B(6,3)$, $C(9,0)$, $K(0,9)$, $M(12,0)$, $E(2,3)$, $L_1: x_1 + 2x_2 = 12$, $L_2: x_1 + x_2 = 9$, L_3 : фрагмент кола $f(x_1, x_2) = h$, що проходить через точку C)

Точка $E(2,3)$ є центром кола максимального радіуса $\sqrt{h} = EC$, яке має спільну точку з чотирикутником $OABC$ (лінією найвищого рівня). Отже, максимальне значення функції (6.2) досягається у точці $C(9,0)$, тобто $f_{\max}^* = f(9,0) = (9-2)^2 + (0-3)^2 = 58$. ■

Приклад 6.3. Знайти максимальне та мінімальне значення функції

$$f(x_1, x_2) = 2(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 7)^2 \quad (6.4)$$

на допустимій множині (6.3).

■ Якщо, як і раніше, h – довільна стала величина ($h \geq 0$), то лініями рівня для цієї задачі будуть еліпси, канонічні рівняння яких мають вигляд

$$\frac{(x_1 - 5)^2}{h/2} + \frac{(x_2 - 7)^2}{h} = 1.$$

Точка $E(5, 7)$ є центром кожного з цих еліпсів, причому велика і мала півосі мають відповідно довжини $\sqrt{h/2}$ і $\sqrt{h}$.

Оскільки точка $E(5, 7)$ знаходиться за межами чотирикутника $OABC$, то лінією найнижчого рівня, що має спільну точку з чотирикутником $OABC$, є еліпс із точкою дотику P (рис. 6.3). Для знаходження координат точки P скористаємося умовою рівності $k_1 = k_2$, де k_1 – кутовий коефіцієнт прямої, що проходить через точки A, B, M (прямої L_1), а k_2 – кутовий коефіцієнт дотичної до еліпса у точці P . Очевидно, що $k_2 = -1/2$. Нехай x_1^* і x_2^* – невідомі координати точки P , а $\varphi(x_1, x_2) = (x_1 - 5)^2 / (h/2) + (x_2 - 7)^2 / h - 1 = 0$ – неявна функція залежності змінної x_2 від x_1 . Оскільки

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial \varphi / \partial x_1}{\partial \varphi / \partial x_2} = -\frac{2(x_1 - 5)}{x_2 - 7},$$

$$\text{то } k_2 = -2(x_1^* - 5) / (x_2^* - 7).$$

З урахуванням того, що точка P належить прямій, що проходить через точки A, B, M , знаходимо невідомі значення x_1^* і x_2^* як розв'язок системи:

$$\begin{cases} -2(x_1^* - 5) / (x_2^* - 7) = -1/2, \\ x_1^* + 2x_2^* = 12. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Отже,} \quad x_1^* &= 38/9, & x_2^* &= 35/9, \\ f_{\min}^* &= 2(38/9 - 5)^2 + (35/9 - 7)^2 = 98/9. \end{aligned}$$

Лінією найвищого рівня, що має спільну точку з чотирикутником $OABC$ (рис. 6.3), буде еліпс, що проходить

через точку $O(0,0)$ або точку $C(9,0)$. Оскільки $f(0,0) = 99$, а $f(9,0) = 81$, то лінія найвищого рівня проходить через точку $O(0,0)$ і $f_{\max}^* = 99$. ■

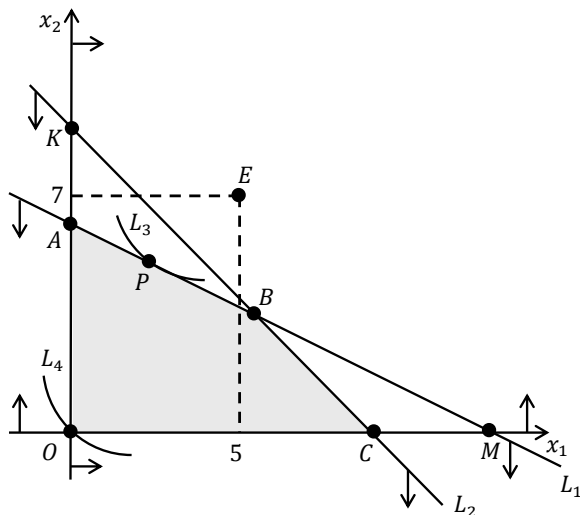


Рис. 6.3. Ілюстрація до прикладу 6.3 (точки O, A, B, C, K, M, E та лінії L_1, L_2, L_3, L_4 такі: $O(0,0)$, $A(0,6)$, $B(6,3)$, $C(9,0)$, $K(0,9)$, $M(12,0)$, $E(5,7)$, $L_1: x_1 + 2x_2 = 12$, $L_2: x_1 + x_2 = 9$, L_3 : фрагмент еліпса $f(x_1, x_2) = h$, що проходить через точку P , L_4 : фрагмент еліпса $f(x_1, x_2) = h$, що проходить через точку O)

Приклад 6.4. Знайти максимальне та мінімальне значення функції

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 7)(x_2 - 1) \quad (6.5)$$

на допустимій множині (6.3).

■ Для функції (6.5) лініями рівня будуть гіперболи $(x_1 - 7)(x_2 - 1) = h$, асимптотами яких є прямі $x_1 = 7$ і $x_2 = 1$ (рис. 6.4). Якщо h зростає, то гіперболи віддаляються від точки перетину асимптот $E(7,1)$. Гіпербола, що

вироджується у точку $E(7,1)$, яка є внутрішньою точкою чотирикутника $OABC$, буде лінією найнижчого рівня. При цьому $f_{\min}^* = f(7,1) = (7-7)(1-1) = 0$. Гіпербола (її нижня вітка), що проходить через точку $O(0,0)$, є лінією найвищого рівня, тому $f_{\max}^* = f(0,0) = (0-7)(0-1) = 7$. ■

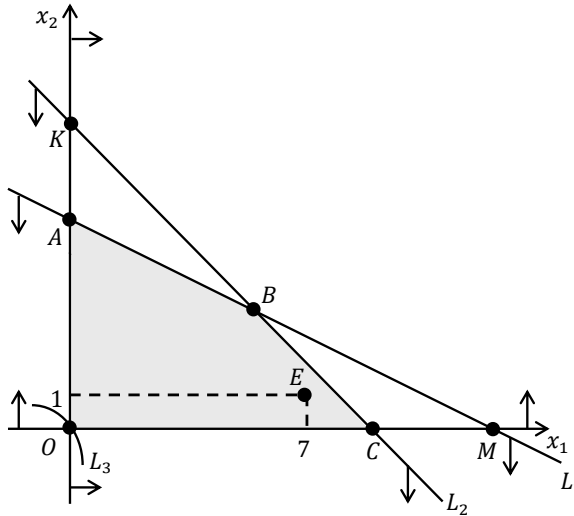


Рис. 6.4. Ілюстрація до прикладу 6.4 (точки O, A, B, C, K, M, E та лінії L_1, L_2, L_3 такі: $O(0,0)$, $A(0,6)$, $B(6,3)$, $C(9,0)$, $K(0,9)$, $M(12,0)$, $E(7,1)$, $L_1: x_1 + 2x_2 = 12$, $L_2: x_1 + x_2 = 9$, L_3 : фрагмент гіперболи $f(x_1, x_2) = h$, яка проходить через точку O)

Приклад 6.5. Розв'язати задачу дробово-лінійного програмування:

$$\begin{cases} f = \frac{x_1 - x_2 + x_3}{2x_1 + x_3 + 1} \rightarrow \max, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 8, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases} \quad (6.6)$$

■ Зведемо задачу дробово-лінійного програмування до задачі лінійного програмування, здійснивши заміну змінних:

$$\begin{cases} y_0 = \frac{1}{2x_1 + x_3 + 1}, \\ y_j = y_0 \cdot x_j, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

У нових змінних задача (6.6) формалізується так:

$$\begin{cases} f = y_1 - y_2 + y_3 \rightarrow \max, \\ y_1 - y_2 + 3y_3 - 8y_0 = 0, \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 - 4y_0 = 0, \\ y_0 + 2y_1 + y_3 = 1, \\ y_j \geq 0, j = \overline{0,3}. \end{cases} \quad (6.7)$$

Оскільки задача лінійного програмування (6.7) не містить початкового опорного плану, то перейдемо до розширеної М-задачі, ввівши невід'ємні штучні змінні z_1, z_2, z_3 :

$$\begin{cases} f = y_1 - y_2 + y_3 - Mz_1 - Mz_2 - Mz_3 \rightarrow \max, \\ y_1 - y_2 + 3y_3 - 8y_0 + z_1 = 0, \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 - 4y_0 + z_2 = 0, \\ y_0 + 2y_1 + y_3 + z_3 = 1, \\ y_j \geq 0, z_j \geq 0, j = \overline{0,3}. \end{cases} \quad (6.8)$$

Розв'яжемо М-задачу (6.8) симплекс-методом. Процес розв'язування наведений у табл. 6.1, яка складається з п'яти симплекс-таблиць.

Таблиця 6.1

i	Бз	c_i^0	x_i^0	0	1	-1	1	-M	-M	-M
				y_0	y_1	y_2	y_3	z_1	z_2	z_3
1	z_1	-M	0	-8	1	-1	3	1	0	0
2	z_2	-M	0	-4	-1	2	-1	0	1	0
3	z_3	-M	1	1	2	0	1	0	0	1
m+1	σ_j		0	0	-1	1	-1	0	0	0
m+2			-1	11	-2	-1	-3	0	0	0
1	y_3	1	0	-8/3	1/3	-1/3	1		0	0
2	z_2	-M	0	-20/3	-2/3	5/3	0		1	0
3	z_3	-M	1	11/3	5/3	1/3	0		0	1
m+1	σ_j		0	-8/3	-2/3	2/3	0		0	0
m+2			-1	3	-1	-2	0		0	0
1	y_3	1	0	-4	3/15	0	1			0
2	y_2	-1	0	-4	-2/5	1	0			0
3	z_3	-M	1	5	9/5	0	0			1
m+1	σ_j		0	0	-2/5	0	0			0
m+2			-1	-5	-9/5	0	0			0
1	y_3	1	4/5	0	41/25	0	1			
2	y_2	-1	4/5	0	26/25	1	0			
3	y_0	0	1/5	1	9/25	0	0			
m+1	σ_j		0	0	-2/5	0	0			
1	y_1	1	20/41	0	1	0	25/41			
2	y_2	-1	12/41	0	0	1	-26/41			
3	y_0	0	1/41	1	0	0	-9/41			
m+1	σ_j		8/41	0	0	0	10/41			

Випишемо розв'язок М-задачі:

$$y_0^* = \frac{1}{41}, y_1^* = \frac{20}{41}, y_2^* = \frac{12}{41}, y_3^* = 0, \tilde{f}^* = \frac{8}{41}.$$

Враховуючи використану заміну змінних, уточнюємо оптимальний розв'язок задачі дробово-лінійного програмування (6.6):

$$x_1^* = \frac{y_1^*}{y_0^*} = \frac{20}{41} : \frac{1}{41} = 20, \quad x_2^* = \frac{y_2^*}{y_0^*} = \frac{12}{41} : \frac{1}{41} = 12, \quad x_3^* = \frac{y_3^*}{y_0^*} = 0 : \frac{1}{41} = 0,$$

$$x^* = (20; 12; 0)^T, \quad f^* = \tilde{f}^* = \frac{8}{41}. \blacksquare$$

Приклад 6.6. Розв'язати задачу квадратичного програмування:

$$\begin{cases} f = -x_1^2 - x_2^2 + 10x_1 + 15x_2 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 13, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 2}. \end{cases} \quad (6.9)$$

■ Цільова функція задачі (6.9) опукла вгору (угнута), бо вона є сумою угнутої та лінійної функцій. Для неї функція Лагранжа така:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = & -x_1^2 - x_2^2 + 10x_1 + 15x_2 + \\ & + \lambda_1(13 - 2x_1 - 3x_2) + \lambda_2(10 - 2x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Необхідні та достатні умови існування сідлової точки $(x^*, \lambda^*)^T$ для задачі квадратичного програмування [6] такі:

$$\begin{cases} \frac{\partial L^*}{\partial x_j} + \nu_j = 0, \quad j = \overline{1, n}, \\ \frac{\partial L^*}{\partial \lambda_i} - \omega_i = 0, \quad i = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (6.11)$$

$$\begin{cases} x_j^* \nu_j = 0, \quad j = \overline{1, n}, \\ \lambda_i^* \omega_i = 0, \quad i = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (6.12)$$

$$x_j^* \geq 0, \lambda_i^* \geq 0, \nu_j \geq 0, \omega_i \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}; i = \overline{1, m}), \quad (6.13)$$

де $\nu_j, \omega_i, j = \overline{1, n}; i = \overline{1, m}$, – допоміжні змінні.

Умови (6.11)-(6.13) для задачі (6.9) конкретизуються у вигляді

$$\begin{cases} 2x_1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - \nu_1 = 10, \\ 2x_2 + 3\lambda_1 + \lambda_2 - \nu_2 = 15, \\ 2x_1 + 3x_2 + \omega_1 = 13, \\ 2x_1 + x_2 + \omega_2 = 10, \end{cases} \quad (6.14)$$

$$\begin{cases} x_1 \nu_1 = 0, x_2 \nu_2 = 0, \\ \lambda_1 \omega_1 = 0, \lambda_2 \omega_2 = 0, \end{cases} \quad (6.15)$$

$$x_j \geq 0, \lambda_i \geq 0, \nu_j \geq 0, \omega_i \geq 0, i = \overline{1, 2}; j = \overline{1, 2}. \quad (6.16)$$

Розв'яжемо систему співвідношень (6.14), (6.16), поставивши їй у відповідність таку задачу ЛП:

$$\begin{cases} -z_1 - z_2 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - \nu_1 + z_1 = 10, \\ 2x_2 + 3\lambda_1 + \lambda_2 - \nu_2 + z_2 = 15, \\ 2x_1 + 3x_2 + \omega_1 = 13, \\ 2x_1 + x_2 + \omega_2 = 10, \\ x_j \geq 0, \lambda_i \geq 0, \nu_j \geq 0, \omega_i \geq 0, z_i \geq 0, i = \overline{1, 2}; j = \overline{1, 2}. \end{cases} \quad (6.17)$$

Процес розв'язування задачі (6.17) проілюстрований у табл. 6.2.

Таблица 6.2

i	бз	c_i^δ	x_i^δ	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1
				x_1	x_2	λ_1	λ_2	ν_1	ν_2	ω_1	ω_2	z_1	z_2
1	z_1	-1	10	2	0	2	2	-1	0	0	0	1	0
2	z_2	-1	15	0	2	3	1	0	-1	0	0	0	1
3	ω_1	0	13	2	3	0	0	0	0	1	0	0	0
4	ω_2	0	10	2	1	0	0	0	0	0	1	0	0
$m+1$	σ_j		-25	-2	-2	-5	-3	1	1	0	0	0	0
1	λ_1	0	5	1	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0
2	z_2	-1	0	-3	2	0	-2	$\frac{3}{2}$	-1	0	0	$-\frac{3}{2}$	1
3	ω_1	0	13	2	3	0	0	0	0	1	0	0	0
4	ω_2	0	10	2	1	0	0	0	0	0	1	0	0
$m+1$	σ_j		0	3	-2	0	2	$-\frac{3}{2}$	1	0	0	$\frac{3}{2}$	0
1	λ_1	0	5	1	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0
2	x_2	0	0	$-\frac{3}{2}$	1	0	-1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
3	ω_1	0	13	$\frac{13}{2}$	0	0	3	$-\frac{9}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	0	$\frac{9}{4}$	$-\frac{3}{2}$
4	ω_2	0	10	$\frac{7}{2}$	0	0	1	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$
$m+1$	σ_j		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1

Оптимальним розв'язком задачі (6.17) буде вектор $(x_1^*, x_2^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \nu_1^*, \nu_2^*, \omega_1^*, \omega_2^*, z_1^*, z_2^*)^T = (0, 0, 5, 0, 0, 0, 13, 10, 0, 0)^T$, однак цей розв'язок не єдиний, що впливає з останньої симплекс-таблиці. Отже, одним із невід'ємних розв'язків системи (6.14) є:

$$\begin{cases} x_1^* = 0, x_2^* = 0, \lambda_1^* = 5, \lambda_2^* = 0, \\ \nu_1^* = 0, \nu_2^* = 0, \omega_1^* = 13, \omega_2^* = 10. \end{cases} \quad (6.18)$$

Проте розв'язок (6.18) не задовольняє умови (6.15). Щоб знайти інший розв'язок задачі (6.17) (а отже, і системи (6.14)), потрібно ввести у базис змінну x_1 замість ω_1 (табл. 6.3).

Результати перерозрахунку зафіксовані у таблиці 6.3, причому ще одним оптимальним розв'язком задачі (6.17) буде вектор: $(x_1^*, x_2^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \nu_1^*, \nu_2^*, \omega_1^*, \omega_2^*, z_1^*, z_2^*)^T = (2, 3, 3, 0, 0, 0, 3, 0, 0)^T$. Відповідний йому розв'язок системи (6.14) такий:

$$x_1^* = 2, x_2^* = 3, \lambda_1^* = 3, \lambda_2^* = 0, \nu_1^* = 0, \nu_2^* = 0, \omega_1^* = 0, \omega_2^* = 3.$$

Таблиця 6.3

i	бз	c_i^{σ}	x_i^{σ}	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1
				x_1	x_2	λ_1	λ_2	ν_1	ν_2	ω_1	ω_2	z_1	z_2
1	λ_1	0	3	0	0	1	$\frac{7}{13}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{13}$	$-\frac{2}{13}$	0	$\frac{2}{13}$	$\frac{3}{13}$
2	x_2	0	3	0	1	0	$-\frac{4}{13}$	$\frac{3}{13}$	$-\frac{2}{13}$	$\frac{3}{13}$	0	$-\frac{3}{13}$	$\frac{2}{13}$
3	x_1	0	2	1	0	0	$\frac{6}{13}$	$-\frac{9}{26}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{2}{13}$	0	$\frac{9}{26}$	$-\frac{3}{13}$
4	ω_2	0	3	0	0	0	$-\frac{8}{13}$	$\frac{6}{13}$	$-\frac{4}{13}$	$-\frac{7}{13}$	1	$-\frac{6}{13}$	$\frac{4}{13}$
$m+1$	σ_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Очевидно, що цей розв'язок задовольняє умови (6.15), тому $(x_1^*, x_2^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*)^T = (2, 3, 3, 0)^T$ – сідлова точка функції Лагранжа (6.10) для задачі (6.9). Отже, $x^* = (2, 3)^T$ – оптимальний розв'язок задачі (6.9) і $f_{\max}^* = 52$. ■

6.2. Завдання для самостійної роботи

Завдання 6.1. Розв'язати графічним методом запропоновані задачі нелінійного програмування 6.1.1–6.1.30 (знайти максимальне і мінімальне значення функції $f = f(x_1, x_2)$):

6.1.1

$$\begin{cases} f = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2, \\ x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

6.1.2

$$\begin{cases} f = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2, \\ x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

6.1.3

$$\begin{cases} f = \frac{1}{4}(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 6)^2, \\ x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

6.1.4

$$\begin{cases} f = (x_1 - 1)(x_2 - 1), \\ x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

6.1.5

$$\begin{cases} f = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 8)^2, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 28, \\ 2x_1 + x_2 \leq 16, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

6.1.6

$$\begin{cases} f = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 28, \\ 2x_1 + x_2 \leq 16, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

6.1.7

$$\begin{cases} f = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 7)^2, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 28, \\ 2x_1 + x_2 \leq 16, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

6.1.8

$$\begin{cases} f = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 2)^2, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 28, \\ 2x_1 + x_2 \leq 16, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

6.1.9

$$\begin{cases} f = 2x_1 + x_2, \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 25, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

6.1.10

$$\begin{cases} f = -x_1 + 2x_2, \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 16, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

6.1.11

$$\begin{cases} f = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2, \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 9, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

6.1.12

$$\begin{cases} f = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ 0 \leq x_1 \leq 5, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

6.1.13

$$\begin{cases} f = 2x_1 + 3x_2, \\ (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \leq 9, \\ x_1 \geq 1, x_2 \geq 1. \end{cases}$$

6.1.14

$$\begin{cases} f = x_1^2 + x_2^2, \\ x_1 x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

6.1.15

$$\begin{cases} f = \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{9}x_2^2, \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \\ x_1^2 + 2x_2^2 \leq 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

6.1.16

$$\begin{cases} f = x_1 x_2, \\ 2x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

6.1.17

$$\begin{cases} f = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2, \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) \leq 9, \\ 0 \leq x_1 \leq 7, \\ 0 \leq x_2 \leq 5. \end{cases}$$

6.1.18

$$\begin{cases} f = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2, \\ 0 \leq x_1 \leq 10, \\ 0 \leq x_2 \leq 4. \end{cases}$$

6.1.19

$$\begin{cases} f = x_1 x_2, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 12, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 1. \end{cases}$$

6.1.20

$$\begin{cases} f = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2, \\ x_2 - |x_1 - 1| \leq 2, \\ 1 \leq x_1 \leq 4, \\ 0 \leq x_2. \end{cases}$$

6.1.21

$$\begin{cases} f = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ 0 \leq x_1 \leq 5, \\ 0 \leq x_2. \end{cases}$$

6.1.22

$$\begin{cases} f = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2, \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

6.1.23

$$\begin{cases} f = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2, \\ x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ 0 \leq x_1 \leq 4, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

6.1.24

$$\begin{cases} f = x_1 + x_2, \\ (x_1 - 2)(x_2 + 2) \leq 16, \\ 0 \leq x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

6.1.25

$$\begin{cases} f = x_1 + 2x_2, \\ (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 \geq 16, \\ (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 \leq 25, \\ x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

6.1.26

$$\begin{cases} f = 2x_1 + x_2, \\ (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 \geq 4, \\ (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 25, \\ x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

6.1.27

$$\begin{cases} f = \frac{1}{9}x_1^2 + x_2^2, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 - 2x_2 \leq 8, \\ x_j \geq 0, \ j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

6.1.28

$$\begin{cases} f = x_1 + x_2, \\ x_1^2 - \frac{1}{4}x_2^2 \leq 1, \\ \frac{1}{4}x_1^2 + x_2^2 \leq 1, \\ x_j \geq 0, \ j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

6.1.29

$$\begin{cases} f = x_1 + x_2, \\ (x_1 - 1)(x_2 - 2) \leq 4, \\ 0 \leq x_1 \leq 4, \\ 0 \leq x_2 \leq 5. \end{cases}$$

6.1.30

$$\begin{cases} f = -x_1 + x_2, \\ (x_1 - 1)(x_2 - 1) \leq 5, \\ 0 \leq x_1 \leq 5, \\ 0 \leq x_2 \leq 6. \end{cases}$$

Завдання 6.2. Розв'язати задачі дробово-лінійного програмування 6.2.1–6.2.30:

6.2.1

$$\begin{cases} f = \frac{-3x_1 + 3x_2}{3 + x_3} \rightarrow \min, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

6.2.2

$$\begin{cases} f = \frac{x_1 - x_2 + x_3}{2x_1 + x_3 + 1} \rightarrow \max, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 8, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

6.2.3

$$\begin{cases} f = \frac{2x_1 - 3x_2}{3x_1 + x_2} \rightarrow \max, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

6.2.4

$$\begin{cases} f = \frac{x_1 + 3x_2}{2 + x_1 + x_2} \rightarrow \min, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 3, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

6.2.5

$$\begin{cases} f = \frac{x_1 + 2x_2 - x_3}{3x_1 + x_2 + 5x_3} \rightarrow \max, \\ -3x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 12, \\ -x_1 + 7x_2 + 2x_3 \leq 12, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

6.2.6

$$\begin{cases} f = \frac{x_1 - x_2}{2x_1 + 3x_2} \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ 2x_1 - x_2 \leq 10, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

6.2.7

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \frac{x_1 + x_2}{2x_1 + 3x_2} \rightarrow \max, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ 2x_1 - x_2 \leq 10, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{array} \right.$$

6.2.8

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \frac{x_1 - 2x_2}{3x_1 + x_2 + 2} \rightarrow \max, \\ 3x_1 + x_2 \geq 7, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 5, \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 17, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{array} \right.$$

6.2.9

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2} \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 \geq 5, \\ 2x_1 - x_2 \geq 1, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{array} \right.$$

6.2.10

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \frac{4x_1 + 2x_2}{1 + x_1 + x_2} \rightarrow \max, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 9, \\ 3x_1 - x_2 \leq 15, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{array} \right.$$

6.2.11

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \frac{-2x_1 - x_2 + x_3}{3x_2 + x_3} \rightarrow \max, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{array} \right.$$

6.2.12

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \frac{x_1 - 2x_2}{3 + x_2} \rightarrow \max, \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 - 4x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{array} \right.$$

6.2.13

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \frac{2x_1 + 3x_2 - x_3}{x_1 + x_3} \rightarrow \max, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_5 = 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}. \end{array} \right.$$

6.2.14

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 - x_2} \rightarrow \max, \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 - 4x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{array} \right.$$

6.2.15

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \frac{-2x_2 - 4x_3}{x_3 + 20} \rightarrow \max, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 29, \\ x_1 + 5x_2 + x_4 = 5, \\ x_1 + 6x_2 = 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{array} \right.$$

6.2.16

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \frac{2x_1 + x_2}{x_2 + 10} \rightarrow \max, \\ -4x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ x_1 - 4x_4 \leq 4, \\ 6x_1 + 5x_2 \geq 30, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{array} \right.$$

6.2.17

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \frac{2x_1 - 3x_2 - 4}{x_1 + x_2 + 3} \rightarrow \max, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 10, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 55, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}. \end{array} \right.$$

6.2.18

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1 + x_3} \rightarrow \min, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \geq 6, \\ -x_1 + x_3 \leq 2, \\ 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 \leq 8, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{array} \right.$$

6.2.19

$$\begin{cases} f = \frac{x_1 - 2x_2}{2x_1 + 10} \rightarrow \min, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 - 2x_2 \geq 12, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

6.2.20

$$\begin{cases} f = \frac{2x_1 - x_2 + 3x_3}{x_1 + x_2 + x_3} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 7, \\ -3x_1 - 2x_2 + x_5 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

6.2.21

$$\begin{cases} f = \frac{-x_1 + x_2 - x_3}{3x_2 + 10} \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 6, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

6.2.22

$$\begin{cases} f = \frac{x_1 + 8x_2 + 3x_3}{4x_1 + 2x_3} \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_4 = 12, \\ x_2 + x_3 = 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

6.2.23

$$\begin{cases} f = \frac{2x_1 - x_2 + 4x_3}{x_1 + x_2 - x_3} \rightarrow \max, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_4 \leq 15, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \geq -4, \\ x_2 + 3x_3 - x_4 \geq 0, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

6.2.24

$$\begin{cases} f = \frac{5x_1 + x_2 + x_3}{x_3 + 20} \rightarrow \max, \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 16, \\ 6x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

6.2.25

$$\begin{cases} f = \frac{3x_1 + x_2 + x_3}{x_2 + x_3} \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

6.2.26

$$\begin{cases} f = \frac{2x_1 - x_2 + 4x_3}{x_1 + x_3} \rightarrow \max, \\ 2x_1 - x_3 + 2x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_3 + 3x_4 = 13, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

6.2.27

$$\begin{cases} f = \frac{x_1 + 3x_2 + 2x_3}{x_1 + 10} \rightarrow \min, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 5, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 10, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

6.2.28

$$\begin{cases} f = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \rightarrow \max, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

6.2.29

$$\begin{cases} f = \frac{2x_1 - 3x_2 + 1}{x_1 + x_2 + 3} \rightarrow \min, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 10, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_5 = 35, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

6.2.30

$$\begin{cases} f = \frac{16x_1 + 4x_2 - 6}{x_2 - 5} \rightarrow \min, \\ 4x_1 + 6x_2 \geq 5, \\ x_1 - x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Завдання 6.3. Розв'язати задачі квадратичного програмування 6.3.1–6.3.30:

6.3.1

$$\begin{cases} f = -2x_1^2 - 3x_2^2 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

6.3.2

$$\begin{cases} f = -2x_1^2 - x_2^2 + \\ + x_1 - 4x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ -x_1 + x_2 \geq -4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

6.3.3

$$\begin{cases} f = -x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 + \\ + x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ 3x_1 + x_2 \leq 15, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

6.3.4

$$\begin{cases} f = -x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2 - \\ - x_1 - 2x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ 3x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

6.3.5

$$\begin{cases} f = -x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + x_1 \rightarrow \max, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = \frac{1}{2}, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

6.3.6

$$\begin{cases} f = x_1^2 + x_2^2 - x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

6.3.7

$$\begin{cases} f = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 8x_2 \rightarrow \min, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

6.3.8

$$\begin{cases} f = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 30, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

6.3.9

$$\begin{cases} f = x_1^2 + 2x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 30, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

6.3.10

$$\begin{cases} f = -x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_1 \rightarrow \max, \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 80, \\ 2x_1 + x_2 \leq 34, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

6.3.11

$$\begin{cases} f = -3x_1^2 - x_2^2 + 2x_2 + x_2 \rightarrow \max, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

6.3.12

$$\begin{cases} f = -2x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 8, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

6.3.13

$$\begin{cases} f = (x_1 + x_2)^2 \rightarrow \min, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

6.3.14

$$\begin{cases} f = -2x_1^2 + 3x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

6.3.15

$$\begin{cases} f = -4x_1^2 - 25x_2^2 + \\ + 28x_1 + 100x_2 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 20, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 12, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

6.3.16

$$\begin{cases} f = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

6.3.17

$$\begin{cases} f = x_1^2 + x_2^2 + 2x_2 \rightarrow \min, \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 80, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

6.3.18

$$\begin{cases} f = x_1^2 + x_2^2 - \\ -2x_1 - 2x_2 \rightarrow \min, \\ 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

6.3.19

$$\begin{cases} f = 4x_1^2 + 9x_2^2 + \\ +6x_1 + 4 \rightarrow \min, \\ x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

6.3.20

$$\begin{cases} f = -2x_1^2 - 2x_2^2 + \\ +5x_1 + 8x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

6.3.21

$$\begin{cases} f = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + x_1 \rightarrow \min, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 15, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

6.3.22

$$\begin{cases} f = -x_1^2 - x_2^2 + \\ +6x_1 + x_2 - 9 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 24, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

6.3.23

$$\begin{cases} f = -x_1^2 - 2x_2^2 - \\ -2x_1 - 2x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 - x_2 \leq 8, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

6.3.24

$$\begin{cases} f = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 + x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ 2x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

6.3.25

$$\begin{cases} f = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + \\ + x_2 + x_3 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 18, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

6.3.26

$$\begin{cases} f = 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_1 \rightarrow \min, \\ 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

6.3.27

$$\begin{cases} f = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_2 \rightarrow \min, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 5, \\ x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

6.3.28

$$\begin{cases} f = 4x_1^2 + 4x_2^2 + \\ + 8x_1 - 4x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 \leq 1, \\ 2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

6.3.29

$$\begin{cases} f = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - \\ - 2x_1 + x_2 + 10 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 18, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

6.3.30

$$\begin{cases} f = x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 \rightarrow \min, \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 = 80, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Тема 7. ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Опрацювання теми дає можливість:

- розв'язувати багатоетапні задачі оптимізації;
- застосовувати метод динамічного програмування для розв'язування сепарабельних задач математичного програмування.

Ключові поняття:

- принцип оптимальності Беллмана;
- функції та рівняння Беллмана;
- стани системи;
- умовна та безумовна оптимізація;
- допустимі та оптимальні управління та траєкторії.

Практичне застосування: інвестиційне планування, розподіл ресурсів у часі, стратегічне планування.

7.1. Приклади виконання завдань

Приклад 7.1. *Методом динамічного програмування розв'язати задачу про оптимальний розподіл інвестицій обсягом $s=5$ од. між $m=3$ підприємствами, який забезпечить максимальний сумарний прибуток інвестору, якщо $u^{(i)}$ – обсяг інвестицій, вкладених у i -те підприємство, $k^{(i)} = k^{(i)}(u^{(i)})$ – прибуток i -го підприємства від вкладених інвестицій $u^{(i)}$ ($u^{(i)}, k^{(i)}$ задані у табл. 7.1):*

Таблиц 7.1

$k^{(i)} \backslash u^{(i)}$	0	1	2	3	4	5
$k^{(1)}$	0	4	8	10	11	13
$k^{(2)}$	0	3	6	11	13	14
$k^{(3)}$	0	6	7	9	10	11

■ Математична модель задачі про оптимальний розподіл s од. інвестицій між m має вигляд:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m k^{(i)}(u^{(i)}) \rightarrow \max, \\ \sum_{i=1}^m u^{(i)} = s, \\ u^{(i)} \geq 0, i = \overline{1, m}. \end{cases} \quad (7.1)$$

Задача (7.1) є задачею нелінійного програмування, тому вона може бути розв'язана методами нелінійного програмування. Однак її можна звести до так званої багатоетапної або багатокрокової оптимізації, специфіка якої дозволяє ефективно використати метод динамічного програмування. Справа у тому, що оцінювання ефективності допустимих варіантів розподілу інвестицій між m підприємствами можна замінити дослідженням ефективності інвестицій спочатку на одному підприємстві, потім на двох підприємствах і т.д., на m підприємствах. Такий підхід і дозволяє перейти до m етапної задачі оптимізації

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m k^{(i)}(u^{(i)}) \rightarrow \max, \\ x^{(i)} = x^{(i-1)} + u^{(i)}, i = \overline{1, m}, \\ u^{(i)} \in [0, s - x^{(i-1)}], i = \overline{1, m}, \\ x^{(0)} = 0, x^{(m)} = s. \end{cases} \quad (7.2)$$

У задачі (7.2) $x^{(i)}$ – обсяг інвестицій, вкладений у підприємства з номерами від 1 до i включно, а $u^{(i)}$ – керування (управління) на i -му етапі.

Задачу (7.2) розв'язуємо методом динамічного програмування, в основі якого і складає принцип оптимальності Беллмана. Його можна сформулювати так:

1) *оптимальне керування у довільний момент часу (чи період часу для дискретного процесу) не залежить від передісторії системи і визначається тільки станом системи у цей момент часу (чи станом системи на початок періоду) та метою керування;*

2) *яким би не був стан системи перед наступним кроком, керування на цьому кроці потрібно вибрати так, щоб сума ефективності процесу на цьому кроці й оптимальної ефективності процесу на всіх наступних кроках була максимальною.*

Перше формулювання встановлює принцип відсутності післядії – майбутнє системи залежить лише від поточного стану, а не від її предісторії. Друге формулювання дає конструктивний алгоритм застосування цього принципу через рекурентні співвідношення Беллмана:

$$B_m(x^{(m-1)}) = \max_{u^{(m)} \in \tilde{U}^{(m)}(x^{(m-1)})} k^{(m)}(x^{(m-1)}, u^{(m)}), \quad (7.3)$$

$$B_i(x^{(i-1)}) = \max_{u^{(i)} \in \tilde{U}^{(i)}(x^{(i-1)})} \left\{ k^{(i)}(x^{(i-1)}, u^{(i)}) + \right.$$

$$+B_{i+1}(f^{(i)}(x^{(i-1)}, u^{(i)}))\}, \quad i = \overline{1, m-1}. \quad (7.4)$$

Цей алгоритм реалізується у два етапи.

Етап 1. Умовна оптимізація

Крок 1. Розв'язуємо задачу (7.3), тобто задачу

$$B_3(x^{(2)}) = \max_{u^{(3)} \in [0, 5-x^{(2)}]} k^{(3)}(u^{(3)}),$$

зміст якої полягає у тому, щоб x_2 од. інвестицій, які залишаються після інвестування перших двох підприємств оптимально вкласти у третє підприємство, тобто вибрати управління $u^{(3)*}(x_2) = x_2$ і досягти максимального прибутку від інвестування

$$B_3(x_2) = k^{(3)}(u_3) = k^{(3)}(x_2), \quad x \in \{0, 1, \dots, 5\}.$$

Результати першого кроку подані у таблиці 7.2.

Таблиця 7.2

$x^{(2)}$	0	1	2	3	4	5
$B_3(x^{(2)})$	11	10	9	7	6	0
$u^{(3)*}(x^{(2)})$	5	4	3	2	1	0

Крок 2. Розв'язуємо задачу (7.4), тобто знаходимо

$$B_2(x^{(1)}) = \max_{u^{(2)} \in [0, 5-x^{(1)}]} \{k^{(2)}(u^{(2)}) + B_3(x^{(1)} + u^{(2)})\} \text{ та } u^{(2)*}(x^{(1)}).$$

Сформуємо таблицю (7.3) для знаходження суми

$$\{k^{(2)}(u^{(2)}) + B_3(x^{(1)} + u^{(2)})\}.$$

з урахуванням даних таблиці (7.1) і (7.2).

Таблиця 7.3

$u^{(2)} \backslash x^{(1)}$	0	1	2	3	4	5
0	11	13	15	18	19	14
1	10	12	13	17	13	—
2	9	10	12	11	—	—
3	7	9	6	—	—	—
4	6	3	—	—	—	—
5	0	—	—	—	—	—

У обведених клітинках табл. 7.3 позначені максимальні значення суми $\{k^{(2)}(u^{(2)}) + B_3(x^{(1)} + u^{(2)})\}$ по $u^{(2)}$ при різних значеннях $x^{(1)}$. На основі табл. 7.3 сформуємо табл. 7.4.

Таблиця 7.4

$x^{(1)}$	0	1	2	3	4	5
$B_2(x^{(1)})$	19	17	12	9	6	0
$u^{(2)*}(x^{(1)})$	4	3	2	1	0	0

Крок 3. Розв'язуємо задачу (7.4), тобто знаходимо

$$B_1(x^{(0)}) = \max_{u^{(1)} \in [0,5]} \{k^{(1)}(u^{(1)}) + B_2(u^{(1)})\} \quad \text{та} \quad u^{(1)*}(x^{(0)}) \quad \text{з}$$

урахуванням того, що $x^{(0)} = 0$ ($X^{(0)} = \{0\}$). Результати реалізації цього кроку відображено у табл. 7.5.

$u^{(1)}$	0	1	2	3	4	5
$k^{(1)}(u^{(1)}) + B_2(u^{(1)})$	19	$\boxed{21}$	20	19	17	13

Приклад 7.2 (задача про розподіл інвестицій заданого обсягу s од. між двома підприємствами Π_1 і Π_2 на m років планового періоду).

Нехай u од. інвестицій, вкладених у підприємство Π_j у кінці року приносять йому прибуток $k^{(j)}(u)$ од. і зменшуються до $f^{(j)}(u)$ од. ($j = \overline{1,2}$), які знову будуть використовуватися для розподілу інвестицій між підприємствами на наступний рік.

Необхідно знайти такий варіант розподілу інвестицій між підприємствами Π_1 і Π_2 , який забезпечує їм максимальний сумарний прибуток за m років.

◀ Позначимо через $u^{(i)}$ – обсяг інвестицій, виділених підприємству Π_1 у i -ому році запланованого періоду, а через $x^{(i-1)}$ – обсяг інвестицій, який залишився у кінці $(i-1)$ -го року (або на початку i -го року) для інвестування підприємств у i -му році. Е означає, що обсяг інвестицій, виділений підприємству Π_2 у i -му році, дорівнює $(x^{(i-1)} - u^{(i)})$ од., а сумарний прибуток – $[k^{(1)}(u^{(i)}) + k^{(2)}(x^{(i-1)} - u^{(i)})]$ од. Враховуючи, що $0 \leq u^{(i)} \leq x^{(i-1)}$, а рівняння станів формалізуються співвідношеннями $x^{(i)} = f^{(1)}(u^{(i)}) + f^{(2)}(x^{(i-1)} - u^{(i)})$ ($i = \overline{1,m}$), то математична модель цієї задачі про m -етапний розподіл інвестицій обсягом s од. між двома підприємствами Π_1 і Π_2 набуде вигляду:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m [k^{(1)}(u^{(i)}) + k^{(2)}(x^{(i-1)} - u^{(i)})] \rightarrow \max, \\ x^{(i)} = f^{(1)}(u^{(i)}) + f^{(2)}(x^{(i-1)} - u^{(i)}), i = \overline{1,m}, \\ u^{(i)} \in [0, x^{(i-1)}], i = \overline{1,m}, \\ x^{(0)} = s, x^{(m)} \geq 0. \end{cases} \quad (7.6)$$

Уточнимо, що умова $x^{(m)} \geq 0$ підкреслює, що в кінці планового періоду (m -го року) ще може залишитись деякий обсяг інвестицій, який можна використати для подальшого інвестування підприємств Π_1 і Π_2 .

Розв'яжемо задачу (7.6) методом динамічного програмування для випадку, коли $m=4$, $s=200$, $k^{(1)}(u)=0,3u$, $k^{(2)}(u)=0,4u$, $f^{(1)}(u)=0,8u$, $f^{(2)}(u)=0,5u$.

Очевидно, що задача (7.6) буде неперервною у сенсі її постановки.

Умовна оптимізація

Крок 1. Враховуючи (7.3) і $m=4$, маємо:

$$\begin{aligned} B_4(x^{(3)}) &= \max_{u^{(4)} \in [0, x^{(3)}]} [k^{(1)}(u^{(4)}) + k^{(2)}(x^{(3)} - u^{(4)})] = \\ &= \max_{u^{(4)} \in [0, x^{(3)}]} [0,3u^{(4)} + 0,4(x^{(3)} - u^{(4)})] = \\ &= \max_{u^{(4)} \in [0, x^{(3)}]} [0,4x^{(3)} - 0,1u^{(4)}] = 0,4x^{(3)}. \end{aligned}$$

Отже, умовне оптимальне керування $u^{(4)*}(x^{(3)}) = 0$.

Крок 2. Для $i = m-1 = 3$ згідно із (7.4)

$$\begin{aligned} B_3(x^{(2)}) &= \max_{u^{(3)} \in [0, x^{(2)}]} [k^{(1)}(u^{(3)}) + k^{(2)}(x^{(2)} - u^{(3)}) + B_4(x^{(3)})] = \\ &= \max_{u^{(3)} \in [0, x^{(2)}]} [k^{(1)}(u^{(3)}) + \\ &+ k^{(2)}(x^{(2)} - u^{(3)}) + B_4(f^{(1)}(u^{(3)}) + f^{(2)}(x^{(2)} - u^{(3)}))] = \\ &= \max_{u^{(3)} \in [0, x^{(2)}]} [0,3u^{(3)} + \\ &+ 0,4(x^{(2)} - u^{(3)}) + 0,4(0,8u^{(3)} + 0,5(x^{(2)} - u^{(3)}))] = \\ &= \max_{u^{(3)} \in [0, x^{(2)}]} [0,02u^{(3)} + 0,6x^{(2)}] = 0,62x^{(2)}. \end{aligned}$$

Відповідне умовне оптимальне керування $u^{(3)*}(x^{(2)}) = x^{(2)}$.

Крок 3. Для $i = m - 2 = 2$ згідно із (7.4)

$$\begin{aligned}
 B_2(x^{(1)}) &= \max_{u^{(2)} \in [0, x^{(1)}]} [k^{(1)}(u^{(2)}) + k^{(2)}(x^{(1)} - u^{(2)}) + B_3(x^{(2)})] = \\
 &= \max_{u^{(2)} \in [0, x^{(1)}]} [k^{(1)}(u^{(2)}) + \\
 &+ k^{(2)}(x^{(1)} - u^{(2)}) + B_3(f^{(1)}(u^{(2)}) + f^{(2)}(x^{(1)} - u^{(2)}))] = \\
 &= \max_{u^{(2)} \in [0, x^{(1)}]} [0, 3u^{(2)} + \\
 &+ 0, 4(x^{(1)} - u^{(2)}) + 0, 62(0, 8u^{(2)} + 0, 5(x^{(1)} - u^{(2)}))] = \\
 &= \max_{u^{(2)} \in [0, x^{(1)}]} [0, 71x^{(1)} + 0, 086u^{(2)}] = 0, 796x^{(1)}.
 \end{aligned}$$

Умовне оптимальне керування $u^{(2)*}(x^{(1)}) = x^{(1)}$.

Крок 4. Для $i = m - 3 = 1$ згідно із (7.4)

$$\begin{aligned}
 B_1(x^{(0)}) &= \max_{u^{(1)} \in [0, x^{(0)}]} [k^{(1)}(u^{(1)}) + k^{(2)}(x^{(0)} - u^{(1)}) + B_2(x^{(1)})] = \\
 &= \max_{u^{(1)} \in [0, x^{(0)}]} [k^{(1)}(u^{(1)}) + \\
 &+ k^{(2)}(x^{(0)} - u^{(1)}) + B_2(f^{(1)}(u^{(1)}) + f^{(2)}(x^{(0)} - u^{(1)}))] = \\
 &= \max_{u^{(1)} \in [0, x^{(0)}]} [0, 3u^{(1)} + \\
 &+ 0, 4(x^{(0)} - u^{(1)}) + 0, 796(0, 8u^{(1)} + 0, 5(x^{(0)} - u^{(1)}))] = \\
 &= \max_{u^{(1)} \in [0, x^{(0)}]} [0, 798x^{(0)} + 0, 1388u^{(1)}] = 0, 9368x^{(0)}.
 \end{aligned}$$

Умовне оптимальне керування $u^{(1)*}(x^{(0)}) = x^{(0)}$.

Безумовна оптимізація

Крок 1. Враховуючи, що $x^{(0)} = s = 200$, розв'язком задачі

$$B_1(x^{(0)*}) = \max_{x^{(0)} \in X^{(0)}} B_1(x^{(0)}),$$

$$\in x^{(0)*} = 200 \text{ і } B_1(200) = 0, 9368 \cdot 200 = 187, 36,$$

$$u^{(1)*} = 200, \quad x^{(1)*} = f^{(1)}(u^{(1)*}) + f^{(2)}(x^{(0)*} - u^{(1)*}) =$$

$$= 0 \cdot 8 \cdot 200 + 0,5 \cdot (200 - 200) = 160.$$

Крок 2. Із (7.5) випливає, що $u^{(2)*} = u^{(2)*}(x^{(1)*}) = x^{(1)*} = 160$,

$$\begin{aligned} x^{(2)*} &= f^{(1)}(u^{(2)*}) + f^{(2)}(x^{(1)*} - u^{(2)*}) = \\ &= 0,8 \cdot 160 + 0,5 \cdot (160 - 160) = 128. \end{aligned}$$

Крок 3. Підставивши у (7.5) отримане $x^{(2)*}$, знайдемо $u^{(3)*} = u^{(3)*}(x^{(2)*}) = x^{(2)*} = 128$,

$$\begin{aligned} x^{(3)*} &= f^{(1)}(u^{(3)*}) + f^{(2)}(x^{(2)*} - u^{(3)*}) = \\ &= 0,8 \cdot 128 + 0,5 \cdot (128 - 128) = 102,4. \end{aligned}$$

Крок 4. На основі отриманих вище результатів із (7.5) одержимо $u^{(4)*} = u^{(4)*}(x^{(3)*}) = 0$,

$$\begin{aligned} x^{(4)*} &= f^{(1)}(u^{(4)*}) + f^{(2)}(x^{(3)*} - u^{(4)*}) = \\ &= 0,8 \cdot 0 + 0,5 \cdot (102,4 - 0) = 51,2. \end{aligned}$$

У підсумку, $\{u^{(1)*}, u^{(2)*}, u^{(3)*}, u^{(4)*}\} = \{200, 160, 128, 0\}$ і $\{v^{(1)*}, v^{(2)*}, v^{(3)*}, v^{(4)*}\} = \{0; 0; 0; 102,4\}$ – оптимальні розподіли інвестицій відповідно для першого та другого підприємств, а оптимальна траєкторія

$$\{x^{(0)*}, x^{(1)*}, x^{(2)*}, x^{(3)*}, x^{(4)*}\} = \{200; 160; 128; 102,4; 51,2\}.$$

При цьому оптимальний прибуток $k^* = 187,36$ од. ■

7.2. Завдання для самостійної роботи

Завдання 7.1. Методом динамічного програмування розв'язати задачі 7.1.1–7.1.30 про розподіл інвестицій заданого обсягу $S=5$ од. між $m=3$ підприємствами для різних варіантів значень $u^{(i)}$, $k^{(i)}(u^{(i)})$ ($u^{(i)}$ – обсяг інвестицій, вкладених у i -те підприємство, $k^{(i)} = k^{(i)}(u^{(i)})$ – прибуток i -го підприємства від вкладених інвестицій $u^{(i)}$), заданих табличним способом:

7.1.1

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	2	3	4
2	4	5	6
3	6	7	8
4	7	9	9
5	9	10	11

7.1.2

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	1	2	3
2	3	4	5
3	4	6	7
4	5	7	8
5	6	8	10

7.1.3

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	8	6	10
2	10	8	12
3	11	10	15
4	12	14	17
5	14	15	20

7.1.4

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	10	12	15
2	11	16	20
3	12	17	21
4	13	22	23
5	14	24	25

7.1.5

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	7	20	11
2	9	22	15
3	15	28	17
4	20	30	20
5	27	31	21

7.1.6

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	2	3	4
2	7	8	9
3	10	11	12
4	12	13	14
5	15	16	17

7.1.7

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	17	11	8
2	18	15	10
3	20	19	12
4	21	25	14
5	22	27	16

7.1.8

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	20	27	22
2	22	28	26
3	23	29	27
4	24	32	28
5	25	33	29

7.1.9

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	25	15	10
2	30	20	20
3	40	30	30
4	45	40	40
5	50	45	50

7.1.10

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	11	12	15
2	21	22	17
3	31	32	22
4	41	33	30
5	50	43	40

7.1.11

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	31	42	25
2	35	44	27
3	37	47	29
4	38	48	30
5	42	49	31

7.1.12

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	15	21	15
2	17	25	25
3	20	27	30
4	28	30	31
5	29	38	32

7.1.13

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	22	33	15
2	32	36	18
3	42	43	21
4	44	46	24
5	46	50	51

7.1.14

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	8	10	12
2	15	16	23
3	22	22	34
4	29	28	45
5	36	34	56

7.1.15

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	17	20	9
2	20	40	19
3	23	60	24
4	26	65	39
5	29	68	43

7.1.16

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	31	22	18
2	42	40	26
3	53	41	40
4	64	42	52
5	75	57	65

7.1.17

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	52	61	70
2	55	64	73
3	56	67	74
4	57	68	75
5	59	69	78

7.1.18

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	35	20	15
2	36	31	32
3	45	47	33
4	56	48	39
5	65	51	54

7.1.19

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	60	62	61
2	71	73	66
3	72	74	69
4	81	83	76
5	82	84	89

7.1.20

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	5	12	13
2	6	14	18
3	9	37	23
4	10	49	39
5	51	62	50

7.1.21

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	3	6	14
2	4	7	24
3	7	30	61
4	8	40	62
5	44	50	64

7.1.22

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	2	4	12
2	5	3	21
3	25	43	32
4	52	48	41
5	55	60	44

7.1.23

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	80	90	100
2	82	92	102
3	84	94	104
4	89	99	106
5	90	101	108

7.1.24

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	72	80	88
2	92	90	98
3	98	100	99
4	99	101	100
5	102	103	106

7.1.25

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	61	79	82
2	81	80	92
3	101	109	98
4	103	112	100
5	105	115	110

7.1.26

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	100	105	120
2	110	106	125
3	120	118	130
4	130	210	140
5	133	125	144

7.1.27

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	90	80	100
2	95	100	115
3	100	120	130
4	105	140	145
5	110	150	148

7.1.28

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	70	80	50
2	78	88	80
3	100	90	110
4	108	98	140
5	140	150	145

7.1.29

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	40	50	70
2	90	100	75
3	140	150	90
4	148	155	105
5	150	160	155

7.1.30

$u^{(i)}$	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$k^{(3)}$
0	0	0	0
1	20	50	80
2	80	65	90
3	120	95	140
4	140	135	145
5	160	145	150

Завдання 7.2. Методом динамічного програмування розв'язати задачі 3.2.1–3.2.30 про t -етапний (етап – це рік планового періоду) розподіл інвестицій заданого обсягу S між двома підприємствами ($k^{(j)} = k^{(j)}(u)$ – прибуток j -го підприємства в кінці року від вкладених у нього на початку поточного року u од. інвестицій, $f^{(j)} = f^{(j)}(u)$ – залишковий обсяг вкладених інвестицій в кінці того ж року):

	t	S	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$	$f^{(1)}$	$f^{(2)}$
7.2.1.	4	100	$0,2u$	$0,4u$	$0,8u$	$0,6u$
7.2.2.	4	200	$0,3u$	$0,6u$	u	$0,8u$
7.2.3.	4	300	$0,4u$	$0,8u$	$0,5u$	$0,2u$
7.2.4.	4	400	$0,5u$	$0,4u$	$0,6u$	$0,3u$
7.2.5.	4	500	$1,6u$	$1,2u$	$0,2u$	$0,5u$
7.2.6.	4	400	$1,7u$	$1,4u$	$0,22u$	$0,2u$
7.2.7.	4	300	$1,8u$	$1,6u$	$0,2u$	$0,7u$
7.2.8.	4	200	$0,9u$	$0,88u$	$0,3u$	$0,8u$
7.2.9.	4	100	$2u$	$4u$	$0,1u$	$0,8u$
7.2.10.	4	500	$0,5u$	$0,6u$	$0,8u$	$0,7u$
7.2.11.	4	600	$0,4u$	$0,8u$	$0,16u$	$0,09u$
7.2.12.	4	700	$0,15u$	$0,1u$	$0,15u$	$0,11u$
7.2.13.	4	800	$0,16u$	$0,12u$	$0,2u$	$0,23u$
7.2.14.	4	900	$1,7u$	$1,4u$	$0,21u$	$0,29u$
7.2.15.	4	700	$8u$	$8,1u$	$0,26u$	$0,21u$
7.2.16.	4	800	$0,9u$	$0,18u$	$0,24u$	$0,22u$
7.2.17.	4	600	u	$1,1u$	$0,2u$	$0,1u$
7.2.18.	4	500	$1,8u$	$1,6u$	$0,6u$	$0,7u$
7.2.19.	4	400	$1,6u$	$1,4u$	$0,1u$	$0,2u$
7.2.20.	4	300	$0,6u$	$1,2u$	$0,8u$	$0,4u$
7.2.21.	4	200	$0,5u$	u	$0,8u$	$0,6u$
7.2.22.	4	100	$0,7u$	$0,8u$	$0,4u$	$0,28u$
7.2.23.	4	700	$0,3u$	$0,6u$	$0,2u$	$0,3u$
7.2.24.	4	800	$1,2u$	$1,4u$	$0,6u$	$0,3u$
7.2.25.	4	900	$1,2u$	$1,4u$	$0,5u$	$0,4u$
7.2.26.	4	400	$1,3u$	$1,6u$	$0,4u$	$0,2u$

7.2.27.	4	300	$1,4u$	$1,8u$	$0,8u$	$0,6u$
7.2.28.	4	200	$0,5u$	u	$0,7u$	$0,3u$
7.2.29.	4	100	$1,6u$	$1,2u$	$0,5u$	$0,8u$
7.2.30.	4	300	$1,7u$	$1,4u$	$0,8u$	$0,9u$

ВІДПОВІДІ

1.1.1. $x_1 = 0$ – точка максимуму, $f(0) = 1$, $x_2 = 1$ – точка мінімуму, $f(1) = 0$.

1.1.2. $x_1 = 1$ – точка максимуму, $f(1) = 1$, $x_2 = 3$ – точка мінімуму, $f(3) = -3$.

1.1.3. $x_1 = 0$ – точка мінімуму, $f(0) = 0$, $x_2 = 1$ – точка максимуму, $f(1) = 7/3$, $x_3 = 4$ – точка мінімуму, $f(4) = -\frac{128}{3}$.

1.1.4. $x_1 = -1$ – точка максимуму, $f(-1) = 0$, $x_2 = -\frac{1}{5}$ – точка мінімуму, $f\left(-\frac{1}{5}\right) = -1\frac{331}{3125}$, $x_3 = 1$ – не є точкою екстремуму.

1.1.5. $x = 0$ – точка мінімуму, $f(0) = 0$.

1.1.6. $x = \pm 2$ – точка мінімуму, $f(\pm 2) = 4$.

1.1.7. $x_1 = 0$ – точка мінімуму, $f(0) = 0$, $x_2 = 2$ – точка максимуму, $f(2) = \frac{4}{e^2}$.

1.1.8. $x = e$ – точка мінімуму, $f(e) = e$.

1.1.9. $x = -1$ – точка мінімуму, $f(-1) = \ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}$.

1.1.10. $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ – точка, максимуму,
 $f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) - \frac{3-\sqrt{5}}{4}$.

1.1.11. $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ - точка мінімуму, $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{2e}$.

1.1.12. $x_1 = -3$ - точка, максимуму, $f(-3) = 3\sqrt[3]{3}$, $x_2 = 2$ - точка мінімуму, $f(2) = -\sqrt[3]{44}$.

1.1.13. $x_1 = -1 - \sqrt{19}$ - точка максимуму, $f(-1 - \sqrt{19}) \approx -8,87$, $x_2 = -1 + \sqrt{19}$ - точка мінімуму, $f(-1 + \sqrt{19}) \approx 4,39$.

1.1.14. $x_1 = 0$ - точка максимуму, $f(0) = 0$, $x_2 = 1$ - точка мінімуму, $f(1) = -\frac{2}{3}$.

1.1.15. $x_1 = 1$ - точка максимуму, $f(1) = 2,5$, $x_2 = e$ - точка мінімуму, $f(e) = \frac{e(4-e)}{2}$.

1.1.16. $x_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{6}$ - точка мінімуму, $f\left(\frac{5 - \sqrt{13}}{6}\right) \approx -0,76$, $x_2 = 1$ - точка максимуму, $f(1) = 0$, $x_3 = \frac{5 + \sqrt{13}}{6}$ - точка мінімуму, $f\left(\frac{5 + \sqrt{13}}{6}\right) \approx -0,05$, $x_4 = 2$ - не є точкою екстремуму.

1.1.17. $x_1 = -1$ - точка максимуму, $f(-1) = -2$, $x_2 = 1$ - точка мінімуму, $f(1) = 2$.

1.1.18. $x_1 = -1$ - точка мінімуму, $f(-1) = -1$, $x_2 = 1$ - точка максимуму, $f(1) = 1$.

1.1.19. $x_1 = \frac{7}{5}$ - точка мінімуму, $f\left(\frac{7}{5}\right) = -\frac{1}{24}$.

1.1.20. $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ - точка максимуму, $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \approx 1,04$.

1.1.21. $x_1 = \frac{3}{4}$ – точка мінімуму, $f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{8}\sqrt[3]{2}$, $x_2 = 1$ – не

є точкою екстремуму.

1.1.22. $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) – точки максимуму,

$f(k\pi) = (-1)^k + \frac{1}{2}$, $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) – точки

мінімуму, $f\left(\pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = -\frac{3}{4}$.

1.1.23. $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) – точки мінімуму,

$f\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k}$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) –

точки максимуму, $f\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}$.

1.1.24. $x_1 = 1$ – точка мінімуму, $f(1) = 0$, $x_2 = e^2$ – точка

максимуму, $f(e^2) = \frac{4}{e^2}$.

1.1.25. $x_1 = \frac{1}{3}$ – точка максимуму, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{31}{27}$, $x_2 = 1$ –

точка мінімуму, $f(1) = 1$.

1.1.26. $x = 1$ – точка мінімуму, $f(1) = 0$.

1.1.27. $x_1 = 0$ – не є точкою екстремуму, $x_2 = 1$ – точка

мінімуму, $f(1) = \frac{55}{2}$, $x_3 = 2$ – точка максимуму, $f(2) = 44$,

$x_4 = 3$ – точка мінімуму, $f(3) = -\frac{9}{2}$.

1.1.28. $x = 0$ – точка мінімуму, $f(0) = 0$.

1.1.29. $x_1 = \frac{1}{e^2}$ - точка максимуму, $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{4}{e^2}$, $x_2 = 1$ -

точка мінімуму, $f(1) = 0$.

1.1.30. $x = 1$ - точка мінімуму, $f(1) = e$.

1.2.1. $f_{\max} = 32$, $f_{\min} = \frac{1}{2}$.

1.2.2. $f_{\max} = 66$, $f_{\min} = 2$.

1.2.3. $f_{\max} = 100,01$, $f_{\min} = 2$.

1.2.4. $f_{\max} = 3$, $f_{\min} = 1$.

1.2.5. $f_{\max} = 13$, $f_{\min} = 4$.

1.2.6. $f_{\max} = 6$, $f_{\min} = 0$.

1.2.7. $f_{\max} = e^2 - e^{-2}$, $f_{\min} = e^{-4} - e^4$.

1.2.8. $f_{\max} = 9$, $f_{\min} = -3$.

1.2.9. $f_{\max} = 11$, $f_{\min} = 2$.

1.2.10. $f_{\max} = 1$, $f_{\min} = -\frac{5}{13}$.

1.2.11. $f_{\max} = 40$, $f_{\min} = -41$.

1.2.12. $f_{\max} = 10$, $f_{\min} = -10$.

1.2.13. $f_{\max} = 1$, $f_{\min} = 2(1 - \ln 2)$.

1.2.14. $f_{\max} = e^2$, $f_{\min} = 0$.

1.2.15. $f_{\max} = 3$, $f_{\min} = 1$.

1.2.16. $f_{\max} = 9$, $f_{\min} = -7$.

1.2.17. $f_{\max} = 80$, $f_{\min} = 0$.

1.2.18. $f_{\max} = 3$, $f_{\min} = -13$.

1.2.19. $f_{\max} = 2$, $f_{\min} = -10$.

1.2.20. $f_{\max} = 1$, $f_{\min} = \frac{3}{5}$.

1.2.21. $f_{\max} = 1$, $f_{\min} = 2\sqrt{2} - 2$.

$$1.2.22. f_{\max} = 5 - 2\sqrt{5}, f_{\min} = -1.$$

$$1.2.23. f_{\max} = e - 2, f_{\min} = 2 - 2\ln 2.$$

$$1.2.24. f_{\max} = 0, f_{\min} = -\frac{5}{e}.$$

$$1.2.25. f_{\max} = -2, f_{\min} = -3.$$

$$1.2.26. f_{\max} = 5, f_{\min} = 3.$$

$$1.2.27. f_{\max} = \frac{1}{2}, f_{\min} = 0.$$

$$1.2.28. f_{\max} = 5, f_{\min} = 0.$$

$$1.2.29. f_{\max} = 1, f_{\min} = 0,5.$$

$$1.2.30. f_{\max} = \sqrt[3]{9}, f_{\min} = 0.$$

1.3.1. Ширина вікна повинна бути у два рази більша за висоту.

$$1.3.2. x = \frac{2}{3}a, V = \frac{2}{27}a^3.$$

$$1.3.3. 3, 6 \text{ і } 4 \text{ см.}$$

$$1.3.4. \text{Радіус основи дорівнює висоті: } R = H = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

$$1.3.5. \text{Довжина сторінки } 24 \text{ см, а ширина - } 22 \text{ см.}$$

$$1.3.6. \frac{a}{h} = 2.$$

$$1.3.7. BD = a - \frac{l}{\sqrt{m^2 - 1}}.$$

$$1.3.8. \frac{2\pi}{3}.$$

$$1.3.9. x = \frac{d}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{\frac{2}{3}}d.$$

$$1.3.10. \text{До точки відрізка } AB, \text{ віддаленого від } B \text{ на } 1 \text{ км.}$$

1.3.11. Сторона ділянки, що прилягає до стіни, повинна бути вдвічі більша іншої сторони.

- 1.3.12. $\frac{23}{410}$ год.
- 1.3.13. 10,5; 14 і 12 см.
- 1.3.14. 6, 12 і 4 м.
- 1.3.15. $8a$ гр. од.
- 1.3.16. Квадрат зі стороною $\sqrt{S}$.
- 1.3.17. Квадрат зі стороною $\sqrt{S}$.
- 1.3.18. Радіус основи $R = \frac{10}{\sqrt[3]{4\pi}}$, висота $H = 10\sqrt[3]{\frac{2}{\pi}}$.
- 1.3.19. $\alpha = \frac{\pi}{3}$.
- 1.3.20. Сторони паралелограма – середні лінії трикутника.
- 1.3.21. Прямокутний трикутник з гіпотенузою $a\sqrt{2}$.
- 1.3.22. У круг з радіусом $R = 7\sqrt{2}$.
- 1.3.23. $\alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} = \arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- 1.3.24. Розміри ділянки: 14 м х 21 м.
- 1.3.25. Швидкість пішохода $v = 6$ км/год.
- 1.3.26. Довжини сторін прямокутника 12 см і $3\sqrt{3}$ см.
- 1.3.27. Довжини сторін прямокутника 12 см і 9 см.
- 1.3.28. $\alpha = \frac{\pi}{3}$, найбільше значення відношення 0,5.
- 1.3.29. Довжини сторін прямокутника 12 см і 9 см.
- 1.3.30. $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2.1.1. $x = (1; 0)$ – точка мінімуму, $f(x) = -1$.

2.1.2. $x = \left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ – точка максимуму, $f(x) = \frac{21}{9}$.

2.1.3. Екстремумів немає.

2.1.4. $x = \left(0; -\frac{2}{3}\right)$ – точка мінімуму, $f(x) = -\frac{4}{3}$.

2.1.5. $x^{(1)} = (1; 2)$ – точка мінімуму, $f(x^{(1)}) = -25$,
 $x^{(2)} = (-1; -2)$ – точка максимуму, $f(x^{(2)}) = 31$.

2.1.6. $x^{(1)} = (0; 0)$ – точка мінімуму, $f(x^{(1)}) = 0$,
 $x^{(2)} = \left(-\frac{5}{3}; 0\right)$ – точка максимуму, $f(x^{(2)}) = \frac{125}{27}$.

2.1.7. $x^{(1)} = \left(\frac{1}{3}; 2\right)$ – точка мінімуму, $f(x^{(1)}) = -\frac{47}{9}$,
 $x^{(2)} = \left(-\frac{1}{3}; 0\right)$ – точка максимуму, $f(x^{(2)}) = -\frac{7}{9}$.

2.1.8. При $a > 0$ $x = (-a; -a)$ – точка максимуму,
 $f(x) = a^3$; при $a < 0$ $x = (-a; -a)$ – точка мінімуму, при $a = 0$
екстремумів немає.

2.1.9. $x = (1; 3)$ – точка максимуму, $f(x) = 9$.

2.1.10. $x^{(1)} = (1; 0)$, $x^{(2)} = (-1; 0)$ – точки мінімуму,
 $f(x^{(1)}) = f(x^{(2)}) = -1$, $x^{(3)} = (0; 0)$ – точка максимуму,
 $f(x^{(3)}) = 0$.

2.1.11. $x^{(1)} = (\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $x^{(2)} = (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ – точки мінімуму,
 $f(x^{(1)}) = f(x^{(2)}) = -8$.

- 2.1.12.** $x^{(1)} = \left(\frac{1}{2}; 1\right)$, $x^{(2)} = \left(\frac{1}{2}; -1\right)$, $x^{(3)} = \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$,
 $x^{(4)} = \left(-\frac{1}{2}; -1\right)$ – точки мінімуму, $f(x^{(j)}) = -\frac{9}{8}$, $j = \overline{1, 4}$,
 $x^{(5)} = (0; 0)$ – точка максимуму, $f(x^{(5)}) = 0$.
- 2.1.13.** $x = (3; 6)$ – точка максимуму, $f(x) = 324$.
- 2.1.14.** $x = (-1; -1)$ – точка максимуму, $f(x) = -3$.
- 2.1.15.** $x = (4; 2)$ – точка мінімуму, $f(x) = 6$.
- 2.1.16.** $x = (-3; -3)$ – точка максимуму, $f(x) = -81$.
- 2.1.17.** $x = (2; 4)$ – точка мінімуму, $f(x) = -8$.
- 2.1.18.** Екстремумів немає.
- 2.1.19.** $x = (0; -2)$ – точка мінімуму, $f(x) = 1$.
- 2.1.20.** Екстремумів немає.
- 2.1.21.** $x = (-2; 0)$ – точка мінімуму, $f(x) = -\frac{2}{e}$.
- 2.1.22.** $x = (-4; -2)$ – точка максимуму, $f(x) = \frac{8}{e^2}$.
- 2.1.23.** $x = (0; 0)$ – точка мінімуму, $f(x) = 0$.
- 2.1.24.** Екстремумів немає.
- 2.1.25.** $x = (0; -4)$ – точка мінімуму, $f(x) = -\frac{4}{e}$.
- 2.1.26.** $x^{(1)} = (1; 3)$ – точка мінімуму, $f(x^{(1)}) = -e^{-13}$,
 $x^{(2)} = \left(-\frac{1}{26}; -\frac{3}{26}\right)$ – точка максимуму, $f(x^{(2)}) = 26e^{-\frac{1}{52}}$.
- 2.1.27.** $x = (1; 2)$ – точка мінімуму, $f(x) = 7 - 10\ln 2$.
- 2.1.28.** Екстремумів немає.
- 2.1.29.** $x^{(1)} = (4; 4)$, $x^{(2)} = (-4; -4)$ – точки мінімуму,
 $f(x^{(1)}) = f(x^{(2)}) = 32(1 - 4\ln 2)$.

2.1.30. $x^{(1)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}; \frac{1}{\sqrt{2e}} \right)$, $x^{(2)} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}; -\frac{1}{\sqrt{2e}} \right)$ - точки мінімуму, $f(x^{(1)}) = f(x^{(2)}) = -\frac{1}{2e}$, $x^{(3)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}; -\frac{1}{\sqrt{2e}} \right)$, $x^{(4)} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}; \frac{1}{\sqrt{2e}} \right)$ - точки максимуму, $f(x^{(3)}) = f(x^{(4)}) = \frac{1}{2e}$.

2.2.1. $y(x) = 3 + 3x$, $y(25) = 78$.

2.2.2. $y(x) = 4 + 3,25x$, $y(25) = 85,25$.

2.2.3. $y(x) = 11 + 2,25x$, $y(25) = 67,25$.

2.2.4. $y(x) = 3 + 3,75x$, $y(25) = 96,75$.

2.2.5. $y(x) = -1 + 4,5x$, $y(25) = 111,5$.

2.2.6. $y(x) = 10 + 2,25x$, $y(25) = 66,25$.

2.2.7. $y(x) = -3 + 5,25x$, $y(25) = 128,25$.

2.2.8. $y(x) = -5 + 6x$, $y(25) = 145$.

2.2.9. $y(x) = 4 + 3,75x$, $y(25) = 97,75$.

2.2.10. $y(x) = 5 + 3x$, $y(25) = 80$.

2.2.11. $y(x) = 2 + 3,75x$, $y(25) = 95,75$.

2.2.12. $y(x) = 5 + 4,5x$, $y(25) = 117,5$.

2.2.13. $y(x) = 2 + 4,25x$, $y(25) = 108,25$.

2.2.14. $y(x) = 8 + 3,25x$, $y(25) = 89,25$.

2.2.15. $y(x) = -2 + 5x$, $y(25) = 123$.

2.2.16. $y(x) = 2 + 5x$, $y(25) = 127$.

2.2.17. $y(x) = 1 + 3,5x$, $y(25) = 88,5$.

2.2.18. $y(x) = 6 + 3,25x$, $y(25) = 87,25$.

2.2.19. $y(x) = 2 + 4,25x$, $y(25) = 108,25$.

$$\mathbf{2.2.20.} \quad y(x) = 13 + 1,25x, \quad y(25) = 44,25.$$

$$\mathbf{2.2.21.} \quad y(x) = 5 + 3,75x, \quad y(25) = 98,75.$$

$$\mathbf{2.2.22.} \quad y(x) = 1 + 4,5x, \quad y(25) = 113,5.$$

$$\mathbf{2.2.23.} \quad y(x) = 2 + 3,5x, \quad y(25) = 89,5.$$

$$\mathbf{2.2.24.} \quad y(x) = 6 + 3x, \quad y(25) = 81.$$

$$\mathbf{2.2.25.} \quad y(x) = 14 + 1,75x, \quad y(25) = 57,75.$$

$$\mathbf{2.2.26.} \quad y(x) = -2 + 6,25x, \quad y(25) = 154,25.$$

$$\mathbf{2.2.27.} \quad y(x) = 5 + 4x, \quad y(25) = 105.$$

$$\mathbf{2.2.28.} \quad y(x) = 4 + 4x, \quad y(25) = 104.$$

$$\mathbf{2.2.29.} \quad y(x) = 8 + 2,5x, \quad y(25) = 70,5.$$

$$\mathbf{2.2.30.} \quad y(x) = 7 + 3,75x, \quad y(25) = 100,75.$$

$$\mathbf{2.3.1.} \quad x_1 = (2; 1) \quad - \quad \text{точка максимуму,} \quad f(x_1) = 5, \\ x_2 = (-2; -1) \quad - \quad \text{точки мінімуму,} \quad f(x_2) = -5.$$

$$\mathbf{2.3.2.} \quad x = \left(\frac{18}{13}; \frac{12}{13} \right) \quad - \quad \text{точка мінімуму,} \quad f(x) = \frac{36}{13}.$$

$$\mathbf{2.3.3.} \quad x = (2; 1) \quad - \quad \text{точка максимуму,} \quad f(x) = 3.$$

$$\mathbf{2.3.4.} \quad x = \left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6} \right) \quad - \quad \text{точка максимуму,} \quad f(x) = \frac{25}{24}.$$

$$\mathbf{2.3.5.} \quad x^{(1)} = (1; 0) \quad - \quad \text{точка мінімуму,} \quad f(x^{(1)}) = 0, \\ x^{(2)} = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right) \quad - \quad \text{точка максимуму,} \quad f(x^{(2)}) = \frac{1}{27}.$$

$$\mathbf{2.3.6.} \quad x = \left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2} \right) \quad - \quad \text{точка мінімуму,} \quad f(x) = \frac{1}{4}.$$

$$\mathbf{2.3.7.} \quad x = (0; 0) \quad - \quad \text{точка мінімуму,} \quad f(x) = 2.$$

$$\mathbf{2.3.8.} \quad x = \left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5} \right) \quad - \quad \text{точка мінімуму,} \quad f(x) = \frac{1}{5}.$$

2.3.9. $x^{(1)} = (3; 4)$ – точка мінімуму, $f(x^{(1)}) = -20$,
 $x^{(2)} = (-3; -4)$ – точка максимуму, $f(x^{(2)}) = 30$.

2.3.10. $x^{(1)} = (-4; 1)$ – точка мінімуму, $f(x^{(1)}) = 9$,
 $x^{(2)} = (4; -1)$ – точка максимуму, $f(x^{(2)}) = -7$.

2.3.11. $x^{(1)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $x^{(2)} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ – точки
 мінімуму, $f(x^{(1)}) = f(x^{(2)}) = \frac{1}{2}$, $x^{(3)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$,
 $x^{(4)} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ – точки максимуму, $f(x^{(3)}) = f(x^{(4)}) = \frac{3}{2}$.

2.3.12. $x^{(1)} = (3; -2)$, $x^{(2)} = (-3; 2)$ – точки мінімуму,
 $f(x^{(1)}) = f(x^{(2)}) = -50$, $x^{(3)} = \left(4; \frac{3}{2}\right)$, $x^{(4)} = \left(-4; -\frac{3}{2}\right)$ – точки
 максимуму, $f(x^{(3)}) = f(x^{(4)}) = \frac{425}{4}$.

2.3.13. $x^{(1)} = (-4; -4)$ – точка мінімуму, $f(x^{(1)}) = \frac{1}{2}$,
 $x^{(2)} = (4; 4)$ – точка максимуму, $f(x^{(2)}) = \frac{3}{2}$.

2.3.14. $x = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ – точка максимуму, $f(x) = -2 \ln 2$.

2.3.15. $x = (6; 4; 3)$ – точка мінімуму, $f(x) = 156$.

2.3.16. $x = (2; 4; 6)$ – точка максимуму, $f(x) = 6912$.

2.3.17. $x = (2; 2; 2)$ – точка максимуму, $f(x) = 512$.

2.3.18. $x = \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$ – точка максимуму, $f(x) = \frac{1}{8}$.

2.3.19. $x^{(1)} = (-1; 2; -2)$ – точка мінімуму, $f(x^{(1)}) = -9$,

$x^{(2)} = (1; -2; 2)$ – точка максимуму, $f(x^{(2)}) = 9$.

2.3.20. $x^{(1)} = (-2; 2; -2)$ – точка мінімуму, $f(x^{(1)}) = -8$,
 $x^{(2)} = (2; -2; 2)$ – точка максимуму, $f(x^{(2)}) = 8$.

2.3.21. $x^{(1)} = (1; 1; -1)$, $x^{(2)} = (1; -1; 1)$, $x^{(3)} = (-1; 1; 1)$,
 $x^{(4)} = (-1; -1; -1)$ – точки мінімуму, $f(x^{(j)}) = -1$, $j = \overline{1, 4}$,
 $x^{(5)} = (1; 1; 1)$, $x^{(6)} = (1; -1; -1)$, $x^{(7)} = (-1; -1; 1)$, $x^{(8)} = (-1; 1; -1)$ –
точки максимуму, $f(x^{(j)}) = 1$, $j = \overline{5, 8}$.

2.3.22. $x = (6; 6; 3)$ – точка мінімуму, $f(x) = 108$.

2.3.23. $x^{(1)} = (0; 0; c)$, $x^{(2)} = (0; 0; -c)$ – точки мінімуму,
 $f(x^{(1)}) = f(x^{(2)}) = c^2$, $x^{(3)} = (a; 0; 0)$, $x^{(4)} = (-a; 0; 0)$ – точки
максимуму, $f(x^{(3)}) = f(x^{(4)}) = a^2$.

2.3.24. $x = (d\sqrt{a}; d\sqrt{b}; d\sqrt{c})$, $d = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ – точка
мінімуму, $f(x) = d^2$.

2.3.25. $x = \left(\frac{11}{4}; -\frac{5}{2}; -\frac{11}{4}\right)$ – точка максимуму, $f(x) = \frac{605}{32}$.

2.3.26. $x^{(1)} = (2; 2; 1)$, $x^{(2)} = (2; 1; 2)$, $x^{(3)} = (1; 2; 2)$ – точки
мінімуму, $f(x^{(j)}) = 4$, $j = \overline{1, 3}$, $x^{(4)} = \left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right)$, $x^{(5)} = \left(\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; \frac{4}{3}\right)$,
 $x^{(6)} = \left(\frac{7}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$ – точки максимуму, $f(x^{(j)}) = \frac{112}{27}$, $j = \overline{4, 6}$.

2.3.27. $x^{(1)} = (-1; 1; 1)$ – точка мінімуму, $f(x^{(1)}) = 0$,
 $x^{(2)} = (1; 1; 1)$ – точка максимуму, $f(x^{(2)}) = 2$.

2.3.28. $x^{(1)} = \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $x^{(2)} = \left(0; -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ - точки мінімуму, $f(x^{(1)}) = f(x^{(2)}) = 1$, $x^{(3)} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $x^{(4)} = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ - точки максимуму, $f(x^{(3)}) = f(x^{(4)}) = 2$.

2.3.29. $x^{(1)} = (-2; 1; 4)$ - точка мінімуму, $f(x^{(1)}) = 11$, $x^{(2)} = (2; -1; -4)$ - точка максимуму, $f(x^{(2)}) = 59$.

2.3.30. $x^{(1)} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}; \frac{6}{\sqrt{70}}; \frac{3}{\sqrt{70}}\right)$, $x^{(2)} = \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}; -\frac{6}{\sqrt{70}}; -\frac{3}{\sqrt{70}}\right)$ - точки мінімуму, $f(x^{(1)}) = f(x^{(2)}) = \frac{41}{56}$, $x^{(3)} = \left(0; \frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $x^{(4)} = \left(0; -\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ - точки максимуму, $f(x^{(3)}) = f(x^{(4)}) = 1$.

3.1.1

$$\begin{cases} f = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 7, \\ 7x_1 \leq 8, \\ x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ 4x_2 \leq 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

3.1.2

$$\begin{cases} f = 0,8x_1 + 0,6x_2 \rightarrow \max, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 900, \\ x_1 \geq 100, \\ x_2 \geq 200, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

3.1.3

$$\begin{cases} f = 0,2x_1 + 0,3x_2 \rightarrow \min, \\ 0,2x_1 + 0,1x_2 \geq 120, \\ 0,075x_1 + 0,1x_2 \geq 70, \\ 0,1x_2 \geq 10, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

3.1.4

$$\begin{cases} f = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1 \leq 4, \quad x_2 \leq 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

3.1.5

$$\begin{cases} f = 7x_1 + 5x_2 \rightarrow \max, \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 280, \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 300, \\ 10x_1 + 2,5x_2 \leq 300, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

3.1.6

$$\begin{cases} f = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, \\ 100x_1 + 60x_2 + 200x_3 \leq 200, \\ 400x_1 + 200x_2 + 800x_3 \leq 600, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.1.7

$$\begin{cases} f = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 28, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 10, \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 14, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.1.8

$$\begin{cases} f = 2x_1 + 3x_2 + 2,5x_3 \rightarrow \min, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6, \\ x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 \geq 8, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 12, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.1.9

$$\begin{cases} f = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + 3x_2 \leq 300, \\ x_1 + x_2 \leq 150, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

3.1.10

$$\begin{cases} f = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 100, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 20, \\ x_2 + 4x_3 \leq 80, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.1.11

$$\begin{cases} f = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 100, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 20, \\ x_2 + 4x_3 \leq 80, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.1.12

$$\begin{cases} f = 80x_1 + 70x_2 + 60x_3 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 780, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 850, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 790, \\ x_1 \geq 90, x_2 \geq 70, x_3 \geq 60, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.1.13

$$\begin{cases} f = 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 300, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \leq 70, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 340, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3.1.14

$$\begin{cases} f = 2x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + 2x_{14} + \\ + 2x_{21} + 3x_{22} + 3x_{23} + x_{24} + 3x_{31} + \\ + 3x_{32} + 2x_{33} + x_{34} \rightarrow \min, \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 90, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 70, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 50, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 60, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 40, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30, \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,4}, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.1.15

$$\begin{cases} f = 7x_1 + 5x_2 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 19, \\ 2x_1 + x_2 \leq 13, \\ x_2 \leq 5, \\ x_1 \leq 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

3.1.16

$$\begin{cases} f = 10x_{11} + 14x_{22} + 12x_{33} \rightarrow \max, \\ 2x_{11} + 4x_{12} + 5x_{13} \leq 120, \\ x_{21} + 8x_{22} + 6x_{23} \leq 280, \\ 2x_{31} + 4x_{32} + 5x_{33} \leq 240, \\ 4x_{41} + 6x_{42} + 7x_{43} \leq 360, \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,4}, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.1.17

$$\begin{cases} f = 3x_1 + 5x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + 0,5x_2 \geq 5, \\ 800x_1 + 200x_2 \geq 560, \\ x_1 + 8x_2 \geq 20, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

3.1.18

$$\begin{cases} f = 9x_{11} + 3x_{12} + 6x_{13} + \\ + 10x_{21} + 4x_{22} + 8x_{23} \rightarrow \min, \\ 0,3x_{11} + 0,1x_{12} + 0,2x_{13} \leq 20, \\ 0,5x_{21} + 0,2x_{22} + 0,4x_{23} \leq 22, \\ x_{11} + x_{21} = 30, x_{12} + x_{22} = 80, \\ x_{13} + x_{23} = 70, \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,2}, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.1.19

$$\begin{cases} f = 2x_1 + 3x_2 + 2,5x_3 \rightarrow \min, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6, \\ x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 \geq 8, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 12, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.1.20

$$\begin{cases} f = 2x_{11} + 6x_{12} + 5x_{21} + 3x_{22} \rightarrow \min, \\ x_{11} + x_{12} = 70, x_{21} + x_{22} = 3, \\ x_{11} + x_{21} = 40, x_{12} + x_{22} = 50, \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,2}, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

3.1.21

$$\begin{cases} f = 50x_1 + 30x_2 \rightarrow \max, \\ 30x_1 + 15x_2 \leq 2400, \\ 12x_1 + 26x_2 \leq 2160, \\ x_1 - x_2 \leq 30, x_2 \leq 80, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

3.1.22

$$\begin{cases} f = 0,4x_1 + 0,9x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 \geq 500, \\ -10x_1 + 30x_2 \geq 0, \\ -3x_1 + 3x_2 \leq 0, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

3.1.23

$$\begin{cases} f = 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 \rightarrow \max, \\ 4x_1 + 8x_2 + x_3 \leq 42, \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 56, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 38, \\ 5x_1 + 7x_2 + 3x_3 \leq 40, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

3.1.24

$$\begin{cases} f = 12x_1 + 18x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ x_1 + x_2 \geq 7, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 18, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

3.1.25

$$\begin{cases} f = x_1 + 30x_2 \rightarrow \max, \\ 5x_1 + 90x_2 \leq 10000, \\ x_1 \geq 2x_2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

3.1.26

$$\begin{cases} f = 3000x_1 + 4000x_2 \rightarrow \max, \\ 150x_1 + 400x_2 \leq 6000, \\ 500x_1 + 300x_2 \leq 9000, \\ x_1 + x_2 = 20, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

3.1.27

$$\begin{cases} f = 30x_1 + 40x_2 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 1200, \\ 12x_1 + 30x_2 \leq 9600, \\ x_1 + x_2 \leq 550, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

3.1.28

$$\begin{cases} f = 20x_1 + 30x_2 \rightarrow \max, \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 600, \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 600, \\ x_1 + 4x_2 \leq 600, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

3.1.29

$$\begin{cases} f = 10x_1 + 40x_2 \rightarrow \max, \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 210, \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 240, \\ 0,35x_2 - 0,65x_1 \leq 0, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

3.1.30

$$\begin{cases} f = 35x_1 + 25x_2 \rightarrow \max, \\ 10x_1 + 8x_2 \leq 1000, \\ x_1 \leq 60, \\ x_2 \leq 70, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

3.2.1

$$\begin{cases} f = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ 7x_1 + x_4 = 8, \\ x_1 + 5x_2 + x_5 = 10, \\ 4x_2 + x_6 = 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

3.2.2

$$\begin{cases} f = 3x_1 - 2x_2 \rightarrow \max, \\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 = 14, \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 = 2, \\ 7x_1 + 10x_2 + x_5 = 28, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

3.2.3

$$\begin{cases} f = x_1 + 2x_2 \rightarrow \min, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_5 = 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

3.2.4

$$\begin{cases} f = x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

3.2.5

$$\begin{cases} f = u_1 - v_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ u_1 - v_1 - x_2 - x_3 = -2, \\ u_1 - v_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ u_1 - v_1 + 3x_2 + x_5 = 1, \\ u_1 - v_1 + x_6 = 5, \\ u_1 \geq 0, v_1 \geq 0, x_j \geq 0, j = \overline{2, 6}. \end{cases}$$

3.2.6

$$\begin{cases} f = x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_5 = 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

3.2.7

$$\begin{cases} f = 2u_1 - 2v_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ u_1 - v_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2u_1 - 2v_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ -3u_1 + 3v_1 + x_2 + x_5 = 0, \\ 2u_1 - 2v_1 - x_2 + x_6 = 0, \\ 2u_1 - 2v_1 - 3x_2 - x_7 = 3, \\ u_1 \geq 0, v_1 \geq 0, x_j \geq 0, j = \overline{2, 7}. \end{cases}$$

3.2.8

$$\begin{cases} f = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_5 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_6 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_7 = 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 7}. \end{cases}$$

3.2.9

$$\begin{cases} f = x_1 + 2x_2 \rightarrow \min, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 12, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_5 = 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

3.2.10

$$\begin{cases} f = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 12, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 16, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

3.2.11

$$\begin{cases} f = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - x_5 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_6 = 5, \\ x_1 + x_7 = 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 7}. \end{cases}$$

3.2.12

$$\begin{cases} f = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 8, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 6, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_5 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + x_6 = 12, \\ x_1 + x_2 + x_7 = 8, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 7}. \end{cases}$$

3.2.13

$$\begin{cases} f = x_1 - x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - x_5 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_6 = 3, \\ 2x_1 - x_2 - x_7 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_8 = 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 8}. \end{cases}$$

3.2.14

$$\begin{cases} f = x_1 + x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_3 = 1, \\ x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_6 = 3, \\ x_1 - x_2 - x_7 = -1, \\ x_1 - x_2 + x_8 = 0, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 8}. \end{cases}$$

3.2.15

$$\begin{cases} f = x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_6 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_7 = 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 7}. \end{cases}$$

3.2.16

$$\begin{cases} f = x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_5 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_6 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_7 = 0, 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 7}. \end{cases}$$

3.2.17

$$\begin{cases} f = x_1 - 4x_2 \rightarrow \max, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_5 = 1, \\ x_2 - x_6 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

3.2.18

$$\begin{cases} f = 2x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + 3x_2 - x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_6 = 0, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

3.2.19

$$\begin{cases} f = x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_5 = 3, \\ x_1 + x_6 = 1, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

3.2.20

$$\begin{cases} f = 2x_1 - 10x_2 \rightarrow \min, \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_6 = 5, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

3.2.21

$$\begin{cases} f = -x_1 - 2x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 14, \\ x_1 - x_2 - x_5 = -4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

3.2.22

$$\begin{cases} f = 5x_1 - x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 4, \\ -5x_1 + x_2 + x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 8, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

3.2.23

$$\begin{cases} f = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \\ 4x_1 + x_3 = 16, \\ 4x_2 + x_4 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_6 = 6, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

3.2.24

$$\begin{cases} f = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \max, \\ x_1 + x_3 = 12, \\ x_2 + x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 24, \\ x_1 + x_2 + x_6 = 18, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

3.2.25

$$\begin{cases} f = 2u_1 - 2v_1 + 5u_2 - 5v_2 \rightarrow \max, \\ 5u_1 - 5v_1 + 2u_2 - 2v_2 - x_3 = 10, \\ 2u_1 - 2v_1 + 5u_2 - 5v_2 - x_4 = 10, \\ u_1 - v_1 + x_5 = 4, \\ u_2 - v_2 + x_6 = 5, \\ u_1 \geq 0, v_1 \geq 0, u_2 \geq 0, v_2 \geq 0, \\ x_j \geq 0, j = \overline{3,6}. \end{cases}$$

3.2.26

$$\begin{cases} f = 3u_1 - 3v_1 + 5x_2 \rightarrow \min, \\ 3u_1 - 3v_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ u_1 - v_1 + 2x_2 + x_4 = 10, \\ u_1 \geq 0, v_1 \geq 0, \\ x_j \geq 0, j = \overline{2,4}. \end{cases}$$

3.2.27

$$\begin{cases} f = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max, \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 5, \\ x_1 + x_5 = 4, \\ x_2 + x_6 = 2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

3.2.28

$$\begin{cases} f = 2u_1 - 2v_1 - u_2 + v_2 \rightarrow \min, \\ 4u_1 - 4v_1 + 3u_2 - 3v_2 + x_3 = 9, \\ u_1 - v_1 - u_2 + v_2 + x_4 = 3, \\ 4u_1 - 4v_1 + 6u_2 - 6v_2 + x_5 = 12, \\ 3u_1 - 3v_1 + 2u_2 - 2v_2 - x_6 = 4, \\ u_1 \geq 0, v_1 \geq 0, u_2 \geq 0, v_2 \geq 0, \\ x_j \geq 0, j = \overline{3,6}. \end{cases}$$

3.2.29

$$\begin{cases} f = -4u_1 + 4v_1 + 2u_2 - 2v_2 \rightarrow \max, \\ u_1 - v_1 - u_2 + v_2 + x_3 = 5, \\ 4u_1 - 4v_1 + u_2 - v_2 - x_4 = 3, \\ -2u_1 + 2v_1 + 3u_2 - 3v_2 + x_5 = 6, \\ 3u_1 - 3v_1 + 2u_2 - 2v_2 + x_6 = 12, \\ u_1 \geq 0, v_1 \geq 0, u_2 \geq 0, v_2 \geq 0, \\ x_j \geq 0, j = \overline{3, 6}. \end{cases}$$

3.2.30

$$\begin{cases} f = 2x_1 - 4x_2 \rightarrow \min, \\ -3x_1 + 4x_2 + x_3 = 24, \\ 3x_1 + 8x_2 + x_4 = 48, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 5, \\ x_1 - x_6 = 4, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

3.3.1. $x = (8; 4); \quad f(x) = 20.$

3.3.2. $x = \left(\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right); \quad f(x) = 1.$

3.3.3. Задача розв'язку не має, оскільки область допустимих розв'язків є порожньою множиною ($\text{ОДР} = \emptyset$).

3.3.4. Задача розв'язку не має, оскільки цільова функція необмежена знизу на ОДР.

3.3.5. $x = (1; 0); \quad f(x) = 1.$

3.3.6. $\text{ОДР} = \emptyset.$

3.3.7. Задача розв'язку не має, оскільки цільова функція необмежена зверху на ОДР.

3.3.8. $x = (2; 2); \quad f(x) = 14.$

3.3.9. $x = (3; 0); \quad f(x) = 3.$

3.3.10. $x = (4.8; 3.6); \quad f(x) = 12.$

3.3.11. $\text{ОДР} = \emptyset.$

3.3.12. $x = (0; 0); \quad f(x) = 0.$

3.3.13. $x = \left(4 - \frac{5}{2}\alpha; \frac{5}{4}\alpha + 4\right); \quad \alpha \in [0, 1]; \quad f(x) = 12.$

3.3.14. $x = (0; 0); \quad f(x) = 0.$

$$3.3.15. x = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right); \quad f(x) = \frac{2}{3}.$$

$$3.3.16. x = \left(0; \frac{2}{3}\right); \quad f(x) = -\frac{2}{3}.$$

$$3.3.17. \text{ОДР} = \emptyset.$$

$$3.3.18. x = (0; 6); \quad f(x) = -6.$$

3.3.19. Задача розв'язку не має, оскільки цільова функція необмежена зверху на ОДР.

$$3.3.20. x = \left(-\frac{35}{12}\alpha + \frac{25}{6}; -\frac{7}{12}\alpha + \frac{11}{6}\right); \quad \alpha \in [0, 1]; \quad f(x) = -10.$$

$$3.3.21. x = (8 - 6\alpha; 3 + 3\alpha); \quad \alpha \in [0, 1]; \quad f(x) = -14.$$

$$3.3.22. x = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha; -\frac{5}{2}\alpha + \frac{15}{2}\right); \quad \alpha \in [0, 1]; \quad f(x) = -5.$$

$$3.3.23. x = (4; 2); \quad f(x) = 14.$$

$$3.3.24. x = (12; 6); \quad f(x) = 84.$$

$$3.3.25. x = (4; 5); \quad f(x) = 33.$$

$$3.3.26. x = (1; 0); \quad f(x) = 3.$$

$$3.3.27. x = (3; 2); \quad f(x) = 14.$$

$$3.3.28. x = (0; 2); \quad f(x) = -2.$$

$$3.3.29. x = \left(\frac{3}{14}; \frac{15}{7}\right); \quad f(x) = \frac{24}{7}.$$

$$3.3.30. x = \left(4; \frac{9}{2}\right); \quad f(x) = -10.$$

$$3.4.1. \quad x = \left(-\frac{1}{5}; \frac{8}{5}; 2 \right).$$

3.4.2. Система несумісна.

$$3.4.3. \quad x = \left(9 + \frac{1}{5}C_1 - C_2, 2 - \frac{2}{5}C_1 + C_2, C_1, C_2 \right), \text{ де } C_1, C_2 -$$

довільна стала.

$$3.4.4. \quad x = (56 - 77C, -30 + 40C, C, -20 + 30C), \text{ де } C -$$

довільна стала.

$$3.4.5. \quad x = \left(\frac{31}{6}, \frac{53}{36}, -\frac{1}{36}, -\frac{17}{9} \right).$$

$$3.4.6. \quad x = \left(0, -3, -\frac{16}{3}, 6 \right).$$

$$3.4.7. \quad x = \left(1, -\frac{175}{9}, \frac{25}{9}, \frac{13}{3} \right).$$

$$3.4.8. \quad x = \left(-\frac{2}{11} - \frac{9}{11}C, \frac{1}{11}C + \frac{10}{11}, 0, C \right), \text{ де } C - \text{ довільна}$$

стала.

$$3.4.9. \quad x = \left(81, -\frac{51}{5}, -\frac{236}{5}, 21 \right).$$

3.4.10. Система несумісна.

$$3.4.11. \quad x = (0, -13 - 13C, -7 - 9C, C), \text{ де } C - \text{ довільна стала.}$$

$$3.4.12. \quad x = \left(\frac{1}{2}C, C, -1, 0, 1 \right), \text{ де } C - \text{ довільна стала.}$$

$$3.4.13. \quad x = \left(C, \frac{158}{3} - \frac{112}{3}C, \frac{79C}{3} - \frac{110}{3}, \frac{1}{3}C - \frac{8}{5} \right), \text{ де } C -$$

довільна стала.

$$3.4.14. \quad x = \left(-9 - \frac{3}{13}C, -5 - \frac{5}{13}C, \frac{3}{13}C, C \right), \text{ де } C - \text{ довільна}$$

стала.

$$3.4.15. \quad x = \left(\frac{1}{3} - \frac{14}{3}C, -\frac{2}{3} + \frac{7}{3}C, 2 - 2C, C \right), \text{ де } C - \text{ довільна}$$

стала.

$$\mathbf{3.4.16.} \quad x = \left(\frac{29}{26} - \frac{31}{26}C, \frac{25}{26}C - \frac{15}{26}, C, \frac{9}{26} + \frac{37}{26}C \right), \quad \text{де } C -$$

довільна стала.

$$\mathbf{3.4.17.} \quad x = \left(\frac{2}{7}, -\frac{30}{7}, \frac{8}{7}, \frac{1}{7} \right).$$

$$\mathbf{3.4.18.} \quad x = \left(-\frac{214}{7}, -\frac{44}{7}, \frac{131}{7}, \frac{10}{7} \right).$$

3.4.19. Система несумісна.

$$\mathbf{3.4.20.} \quad x = \left(4 - 3C, -\frac{8}{7} - \frac{3}{7}C, \frac{5}{7} + \frac{8}{7}C, C \right), \quad \text{де } C - \text{довільна}$$

стала.

$$\mathbf{3.4.21.} \quad x = \left(\frac{17}{7} - C, C - \frac{22}{7}, C, \frac{8}{7} \right), \quad C - \text{довільна стала.}$$

$$\mathbf{3.4.22.} \quad x = \left(\frac{112}{9} - 10C, C, -\frac{40}{9} + 4C, \frac{13}{9} \right), \quad C - \text{довільна}$$

стала.

$$\mathbf{3.4.23.} \quad x = \left(-\frac{11}{3} - C, -\frac{2}{3} - C, \frac{7}{3}, C \right), \quad C - \text{довільна стала.}$$

$$\mathbf{3.4.24.} \quad x = (-6, 4, 61, 105).$$

$$\mathbf{3.4.25.} \quad x = \left(6 + \frac{1}{5}C, 24 - \frac{2}{5}C, -62 + \frac{3}{5}C, C \right), \quad C - \text{довільна}$$

стала.

$$\mathbf{3.4.26.} \quad x = \left(\frac{49}{40}, \frac{69}{40}, -\frac{61}{40}, \frac{59}{40} \right).$$

$$\mathbf{3.4.27.} \quad x = (-22, 54, -42, 12).$$

$$\mathbf{3.4.28.} \quad x = \left(\frac{72}{23}, \frac{40}{23}, \frac{21}{23}, \frac{8}{23} \right).$$

$$\mathbf{3.4.29.} \quad x = \left(-\frac{11}{30}, \frac{5}{2}, -\frac{23}{30}, \frac{9}{5} \right).$$

$$\mathbf{3.4.30.} \quad x = \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{2}, \frac{23}{25}, -\frac{13}{25} \right).$$

$$\mathbf{3.5.1.} \quad x^{(1)} = (0, 2, 0, 6, 4), \quad x^{(2)} = \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{9}{2}, 5 \right),$$

$$x^{(3)} = \left(\frac{10}{7}, 0, \frac{1}{7}, \frac{19}{7}, 0 \right), \quad x^{(4)} = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{10}{3}, 0 \right).$$

$$\mathbf{3.5.2.} \quad x^{(1)} = (4, 6, 2, 0, 0); \quad x^{(2)} = (6, 6, 0, 0, 2); \quad x^{(3)} = (8, 0, 0, 2, 0).$$

$$\mathbf{3.5.3.} \quad x^{(1)} = (0, 2, 0, 3, 4), \quad x^{(2)} = \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}, 4 \right),$$

$$x^{(3)} = (2, 0, 1, 0, 0), \quad x^{(4)} = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 0, 0, 1 \right).$$

$$\mathbf{3.5.4.} \quad x^{(1)} = (0, 0, 3, 6, 2), \quad x^{(2)} = (0, 2, 9, 2, 0).$$

$$\mathbf{3.5.5.} \quad x^{(1)} = (0, 0, 9, 31, 21), \quad x^{(2)} = (0, 3, 0, 16, 24),$$

$$x^{(3)} = (3, 5, 0, 0, 17), \quad x^{(4)} = (8, 3, 16, 0, 0), \quad x^{(5)} = (7, 0, 23, 17, 0).$$

$$\mathbf{3.5.6.} \quad x^{(1)} = (0, 0, 2, 36, 5), \quad x^{(2)} = (0, 2, 0, 26, 3),$$

$$x^{(3)} = (1, 4, 0, 13, 0), \quad x^{(4)} = (5, 0, 12, 21, 0).$$

$$\mathbf{3.5.7.} \quad x^{(1)} = (0, 0, 4, 4), \quad x^{(2)} = (0, 10, 0, 2), \quad x^{(3)} = \left(\frac{20}{3}, 0, \frac{8}{3}, 0 \right),$$

$$x^{(4)} = (4, 8, 0, 0).$$

$$\mathbf{3.5.8.} \quad x^{(1)} = (0, 0, 3, 9), \quad x^{(2)} = (0, 12, 0, 0), \quad x^{(3)} = (4, 0, 4, 0).$$

$$\mathbf{3.5.9.} \quad x^{(1)} = (0, 0, 6, 33, 6), \quad x^{(2)} = (0, 6, 0, 21, 12),$$

$$x^{(3)} = (7, 6, 0, 0, 5), \quad x^{(4)} = (9, 3, 3, 0, 0), \quad x^{(5)} = (6, 0, 6, 15, 0).$$

$$\mathbf{3.5.10.} \quad x^{(1)} = (3, 21, 21, 0, 0), \quad x^{(2)} = (0, 9, 24, 0, 3),$$

$$x^{(3)} = (0, 0, 15, 3, 6), \quad x^{(4)} = (3, 0, 0, 7, 7), \quad x^{(5)} = \left(\frac{33}{4}, \frac{105}{4}, 0, \frac{21}{4}, 0 \right).$$

$$\mathbf{3.5.11.} \quad x^{(1)} = (0, 6, 0, 7, 2), \quad x^{(2)} = (2, 6, 0, 5, 0), \quad x^{(3)} = (0, 9, 1, 6, 0).$$

$$\mathbf{3.5.12.} \quad x^{(1)} = (2, 5, 3, 0, 0), \quad x^{(2)} = (0, 3, 7, 0, 2), \quad x^{(3)} = (0, 7, 1, 2, 0).$$

$$\mathbf{3.5.13.} \quad x^{(1)} = (0, 10, 16, 0), \quad x^{(2)} = (8, 2, 0, 0).$$

$$\mathbf{3.5.14.} \quad x^{(1)} = (0, 0, 9, 5), \quad x^{(2)} = \left(0, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 0\right), \quad x^{(3)} = \left(\frac{9}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right),$$

$$x^{(4)} = (3, 1, 0, 0).$$

$$\mathbf{3.5.15.} \quad x^{(1)} = (4, 6, 8, 0, 0), \quad x^{(2)} = (2, 0, 4, 0, 2),$$

$$x^{(3)} = (1, 0, 11, 3, 0).$$

$$\mathbf{3.5.16.} \quad x^{(1)} = (0, 0, 2, 14), \quad x^{(2)} = (7, 0, 2, 0).$$

$$\mathbf{3.5.17.} \quad x^{(1)} = (0, 12, 6, 0), \quad x^{(2)} = (4, 0, 2, 0).$$

$$\mathbf{3.5.18.} \quad x^{(1)} = (0, 0, 10, 5), \quad x^{(2)} = \left(\frac{50}{3}, 0, 0, \frac{25}{3}\right).$$

$$\mathbf{3.5.19.} \quad x^{(1)} = (0, 0, 8, 15, 4), \quad x^{(2)} = (0, 5, 13, 0, 14),$$

$$x^{(3)} = \left(\frac{39}{14}, \frac{22}{7}, 0, 0, \frac{15}{2}\right), \quad x^{(4)} = (2, 0, 0, 11, 2).$$

$$\mathbf{3.5.20.} \quad x^{(1)} = \left(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}\right), \quad x^{(2)} = (0, 2, 3, 0), \quad x^{(3)} = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 0, 0\right).$$

$$\mathbf{3.5.21.} \quad x^{(1)} = (0, 0, 4, 8), \quad x^{(2)} = \left(\frac{32}{7}, \frac{12}{7}, 0, 0\right), \quad x^{(3)} = (2, 0, 0, 6).$$

$$\mathbf{3.5.22.} \quad x^{(1)} = (0, 0, 4, 12), \quad x^{(2)} = (0, 6, 40, 0), \quad x^{(3)} = (3, 0, 4, 0).$$

$$\mathbf{3.5.23.} \quad x^{(1)} = \left(0, 0, 8, \frac{11}{3}\right), \quad x^{(2)} = (0, 11, 41, 0), \quad x^{(3)} = (8, 0, 0, 1),$$

$$x^{(4)} = \left(\frac{41}{4}, \frac{3}{4}, 0, 0\right).$$

$$\mathbf{3.5.24.} \quad x^{(1)} = \left(0, 0, \frac{19}{5}, \frac{2}{5}\right), \quad x^{(2)} = (0, 2, 3, 0), \quad x^{(3)} = \left(\frac{19}{8}, 0, 0, \frac{7}{8}\right),$$

$$x^{(4)} = \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 0, 0\right).$$

$$\mathbf{3.5.25.} \quad x^{(1)} = (0, 0, 15, 21), \quad x^{(2)} = \left(0, \frac{15}{4}, 0, \frac{69}{4}\right),$$

$$x^{(3)} = \left(\frac{21}{5}, 0, \frac{54}{5}, 0 \right), \quad x^{(4)} = \left(\frac{69}{19}, \frac{54}{19}, 0, 0 \right).$$

$$\mathbf{3.5.26.} \quad x^{(1)} = (0, 0, 18, 4), \quad x^{(2)} = \left(0, \frac{20}{11}, \frac{86}{11}, 0 \right),$$

$$x^{(3)} = (45, 0, 0, 13), \quad x^{(4)} = \left(\frac{43}{5}, \frac{13}{5}, 0, 0 \right).$$

$$\mathbf{3.5.27.} \quad x^{(1)} = (0, 0, 2, 13, 13), \quad x^{(2)} = (0, 13, 28, 26, 0),$$

$$x^{(3)} = \left(\frac{2}{3}, 0, 0, \frac{31}{3}, \frac{31}{3} \right), \quad x^{(4)} = \left(\frac{28}{11}, \frac{31}{11}, 0, \frac{62}{11}, 0 \right).$$

$$\mathbf{3.5.28.} \quad x^{(1)} = \left(0, \frac{25}{2}, \frac{93}{2}, 0, \frac{45}{2} \right), \quad x^{(2)} = (0, 0, 9, 25, 0),$$

$$x^{(3)} = \left(\frac{9}{2}, 0, 0, 16, 1 \right), \quad x^{(4)} = \left(\frac{21}{4}, \frac{1}{2}, 0, \frac{27}{2}, 0 \right), \quad x^{(5)} = \left(\frac{15}{2}, 5, 9, 0, 0 \right).$$

$$\mathbf{3.5.29.} \quad x^{(1)} = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{35}{2}, 24 \right), \quad x^{(2)} = \left(\frac{9}{8}, 8, 0, \frac{75}{2}, 0 \right).$$

$$\mathbf{3.5.30.} \quad x^{(1)} = (0, 0, 3, 27, 4), \quad x^{(2)} = \left(0, \frac{3}{2}, 0, 24, \frac{11}{2} \right),$$

$$x^{(3)} = \left(6, \frac{9}{2}, 0, 0, \frac{5}{2} \right), \quad x^{(4)} = (4, 0, 7, 15, 0), \quad x^{(5)} = (7, 3, 4, 0, 0).$$

$$\mathbf{3.6.1.} \quad x = (3 + 2\alpha; 2 - 2\alpha; 4\alpha; 0); \quad \alpha \in [0, 1]; \quad f(x) = 10.$$

$$\mathbf{3.6.2.} \quad x = (1, 0, 2, 0, 1); \quad f(x) = 9.$$

$$\mathbf{3.6.3.} \quad x = \left(\frac{71}{10}, 0, 0, \frac{13}{10}, 0, \frac{2}{5}\right); \quad f(x) = \frac{71}{10}.$$

$$\mathbf{3.6.4.} \quad x = \left(\frac{100}{3}, 100, 0, \frac{25}{2}, 0, 0\right); \quad f(x) = \frac{775}{6}.$$

$$\mathbf{3.6.5.} \quad x = \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\alpha, \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\alpha, 2 + 2\alpha, \alpha, 0\right); \quad \alpha \in [0, 1]; \quad f(x) = 10.$$

$$\mathbf{3.6.6.} \quad x = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0, 0\right); \quad f(x) = \frac{5}{2}.$$

$$\mathbf{3.6.7.} \quad x = \left(\frac{10}{11}, \frac{72}{11}, 0, 0, 0, \frac{456}{11}\right); \quad f(x) = \frac{226}{11}.$$

$$\mathbf{3.6.8.} \quad x = (18, 0, 6, 66, 0, 0); \quad f(x) = 66.$$

$$\mathbf{3.6.9.} \quad x = \left(\frac{6}{11}, \frac{90}{11}, 0, 0, \frac{254}{11}\right); \quad f(x) = \frac{282}{11}.$$

$$\mathbf{3.6.10.} \quad x = (23, 4, 0, 1, 0, 0); \quad f(x) = 39.$$

$$\mathbf{3.6.11.} \quad x = (4, 1, 9, 0, 0); \quad f(x) = -3.$$

$$\mathbf{3.6.12.} \quad x = (10, 0, 3, 0, 0, 1); \quad f(x) = -9.$$

$$\mathbf{3.6.13.} \quad x = (9, 4, 0, 0, 1); \quad f(x) = 3.$$

$$\mathbf{3.6.14.} \quad x = (2, 2, 0, 0, 6); \quad f(x) = 6.$$

$$\mathbf{3.6.15.} \quad x = \left(\frac{2}{11}, \frac{34}{11}, 0, \frac{105}{11}, 0, 0\right); \quad f(x) = -\frac{100}{11}.$$

$$\mathbf{3.6.16.} \quad x = \left(0, \frac{10}{3}, 0, 2, 5\right); \quad f(x) = \frac{50}{3}.$$

$$\mathbf{3.6.17.} \quad x = (4, 1, 0, 4, 0, 0); \quad f(x) = 11.$$

$$\mathbf{3.6.18.} \quad x = \left(\frac{7}{2}, 0, 12, \frac{3}{2}, 0\right); \quad f(x) = \frac{31}{2}.$$

$$3.6.19. x = \left(\frac{1}{2}, 1, 0, 0, \frac{1}{2}\right); \quad f(x) = \frac{1}{2}.$$

$$3.6.20. x = (2, 0, 0, 0, 0, 5); \quad f(x) = 3.$$

3.6.21. Задача не має розв'язку, бо цільова функція необмежена зверху на ОДР.

3.6.22. Задача не має розв'язку, бо цільова функція необмежена знизу на ОДР.

3.6.23. Задача не має розв'язку, бо цільова функція необмежена зверху на ОДР.

$$3.6.24. x = (2, 2, 0, 0); \quad f(x) = 6.$$

$$3.6.25. x = (2, 4, 0, 0, 0); \quad f(x) = 14.$$

$$3.6.26. x = (2, 2, 0, 0, 5); \quad f(x) = 6.$$

$$3.6.27. x = \left(0, \frac{9}{5}, \frac{96}{5}, 0, \frac{31}{5}\right); \quad f(x) = -\frac{9}{5}.$$

$$3.6.28. x = \left(\frac{5}{4}, \frac{23}{4}, 0, 0, \frac{65}{4}\right); \quad f(x) = \frac{5}{2}.$$

$$3.6.29. x = (0, 4, 18, 0); \quad f(x) = 10.$$

$$3.6.30. x = (6, 0, 9, 0); \quad f(x) = 15.$$

$$3.7.1. x = \left(0; 0; \frac{11}{2}; 35; 0; 1\right), \quad f(x) = 68.$$

$$3.7.2. x = \left(\frac{7}{3}; 0; 0; \frac{2}{3}\right), \quad f(x) = 3.$$

$$3.7.3. \text{ОДР} = \emptyset.$$

$$3.7.4. x = (1; 2; 0; 3), \quad f(x) = 6.$$

$$3.7.5. x = \left(\frac{14}{5}; \frac{12}{5}; \frac{2}{5}\right), \quad f(x) = \frac{36}{5}.$$

$$3.7.6. x = (2; 0; 0), \quad f(x) = 10.$$

$$3.7.7. x = (1; 0; 2), \quad f(x) = 3.$$

3.7.8. ОДР = $\emptyset$.

3.7.9. $x = \left(0; 0; \frac{9}{2}\right), \quad f(x) = 18.$

3.7.10. $x = (2; 0; 5), \quad f(x) = 54.$

3.7.11. $x = \left(\frac{9}{2}; \frac{1}{2}; 0; 0\right), \quad f(x) = 1.$

3.7.12. $x = \left(\frac{5}{2}; 0; \frac{1}{2}\right), \quad f(x) = -\frac{1}{2}.$

3.7.13. $x = \left(\frac{6}{7}; 0; \frac{24}{7}; \frac{20}{7}\right), \quad f(x) = -\frac{10}{7}.$

3.7.14. $x = (1; 8; 0; 3), \quad f(x) = -3.$

3.7.15. $x = \left(0; 0; \frac{4}{5}\right), \quad f(x) = \frac{4}{5}.$

3.7.16. $x = (0; 1; 0), \quad f(x) = 2.$

3.7.17. $x = (12; 0; 0; 4), \quad f(x) = 104.$

3.7.18. $x = \left(0; \frac{4}{3}\alpha; 3 - \frac{4}{3}\alpha\right), \quad \alpha \in [0, 1], \quad f(x) = 3.$

3.7.19. $x = \left(\frac{4}{3}; 1\right), \quad f(x) = 53.$

3.7.20. $x = (8; 2; 0; 10), \quad f(x) = 2.$

3.7.21. ОДР = $\emptyset$.

3.7.22. $x = (10; 0), \quad f(x) = -10.$

3.7.23. ОДР = $\emptyset$.

3.7.24. Задача не має розв'язку, бо цільова функція необмежена зверху на ОДР.

3.7.25. Задача не має розв'язку, бо цільова функція необмежена знизу на ОДР.

3.7.26. $x = \left(\frac{7}{3}; \frac{16}{9}; \frac{17}{9}; 0; 0\right), \quad f(x) = \frac{41}{3}.$

3.7.27. $x = (0; 2; 1; 0), \quad f(x) = 2.$

$$\mathbf{3.7.28.} \quad x = \left(0; \frac{1}{4}; \frac{9}{4}\right), \quad f(x) = \frac{45}{4}.$$

3.7.29. Задача не має розв'язку, бо цільова функція необмежена знизу на ОДР.

$$\mathbf{3.7.30.} \quad x = \left(0; \frac{10}{3}; \frac{1}{3}; 0\right), \quad f(x) = \frac{5}{3}.$$

$$\mathbf{3.8.1.} \quad x = (2, 6); \quad \lambda = (1, 4); \quad f(x) = 46.$$

$$\mathbf{3.8.2.} \quad x = (0, 4, 0, 0); \quad \lambda = \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\alpha, \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\alpha\right); \quad \alpha \in [0, 1]; \quad f(x) = 4.$$

$$\mathbf{3.8.3.} \quad x = \left(0, \frac{10}{3}\right); \quad \lambda = \left(\frac{5}{3}, 0\right); \quad f(x) = \frac{50}{3}.$$

$$\mathbf{3.8.4.} \quad x = (0, 8); \quad \lambda = (1, 0); \quad f(x) = 8.$$

$$\mathbf{3.8.5.} \quad x = (1, 0, 0, 4); \quad \lambda = (3, -2); \quad f(x) = -3.$$

$$\mathbf{3.8.6.} \quad x = (2, 0, 3, 0); \quad \lambda = (1, 0); \quad f(x) = 5.$$

$$\mathbf{3.8.7.} \quad x = (0, 0); \quad \lambda = (0, 0); \quad f(x) = 0.$$

$$\mathbf{3.8.8.} \quad \text{У двоїстій задачі } ОДР = \emptyset.$$

$$\mathbf{3.8.9.} \quad x = \left(3\alpha, \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\alpha, 0, \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\alpha\right); \quad \alpha \in [0, 1]; \quad \lambda = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \quad f(x) = 4.$$

$$\mathbf{3.8.10.} \quad x = (1, 0, 1, 0); \quad \lambda = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right); \quad f(x) = 2.$$

$$\mathbf{3.8.11.} \quad x = \left(\frac{8}{5}, \frac{1}{5}, 0, 0\right); \quad \lambda = (0, 1); \quad f(x) = 2.$$

$$\mathbf{3.8.12.} \quad x = (0, 0, 15, 14); \quad \lambda = (3, -1); \quad f(x) = 31.$$

$$\mathbf{3.8.13.} \quad x = \left(\frac{7}{3}, 0, 0, \frac{2}{3}\right); \quad \lambda = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right); \quad f(x) = \frac{16}{3}.$$

$$\mathbf{3.8.14.} \quad x = \left(\frac{4}{13}, \frac{22}{13}, 0, 0\right); \quad \lambda = \left(-\frac{16}{13}, \frac{3}{13}\right); \quad f(x) = \frac{40}{13}.$$

$$\mathbf{3.8.15.} \quad x = \left(\frac{22}{5}, \frac{8}{5}, 0, 0 \right); \quad \lambda = \left(\frac{7}{5}, -\frac{1}{5} \right); \quad f(x) = \frac{38}{5}.$$

$$\mathbf{3.8.16.} \quad x = (25, 42, 0, 0); \quad \lambda = (-10, -7); \quad f(x) = -143.$$

$$\mathbf{3.8.17.} \quad \text{У двоїстій задачі ОДР} = \emptyset.$$

$$\mathbf{3.8.18.} \quad x = (0, 2, 0, 4); \quad \lambda = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2} \right); \quad f(x) = 10.$$

$$\mathbf{3.8.19.} \quad \text{У двоїстій задачі ОДР} = \emptyset.$$

$$\mathbf{3.8.20.} \quad \text{У двоїстій задачі ОДР} = \emptyset.$$

$$\mathbf{3.8.21.} \quad x = \left(\frac{16}{5}, 0, 0, \frac{2}{5} \right); \quad \lambda = \left(-\frac{14}{5}, -\frac{3}{5} \right); \quad f(x) = -\frac{74}{5}.$$

$$\mathbf{3.8.22.} \quad x = \left(0, \frac{260}{9}, 0, \frac{2}{9} \right); \quad \lambda = \left(\frac{8}{9}, \frac{10}{9} \right); \quad f(x) = \frac{520}{9}.$$

$$\mathbf{3.8.23.} \quad x = \left(\frac{4}{3}, 0, 0, \frac{1}{3} \right); \quad \lambda = \left(\frac{8}{9}, \frac{10}{9} \right); \quad f(x) = \frac{20}{3}.$$

$$\mathbf{3.8.24.} \quad x = (3, 0, 0, 0); \quad \lambda = \left(\frac{19}{7} + \frac{9}{7}\alpha, -\frac{15}{7} - \frac{6}{7}\alpha \right); \quad \alpha \in [0, 1];$$

$$f(x) = -6.$$

$$\mathbf{3.8.25.} \quad x = \left(\frac{38}{7}, 0, \frac{4}{21}, 0 \right); \quad \lambda = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right); \quad f(x) = \frac{32}{3}.$$

$$\mathbf{3.8.26.} \quad x = (4\alpha, 5 - 4\alpha, 0, 4 - 4\alpha); \quad \lambda = (0, -1); \quad \alpha \in [0, 1]; \quad f(x) = -9.$$

$$\mathbf{3.8.27.} \quad x = (14, 0, 2, 0); \quad \lambda = \left(-\frac{1}{5}, -\frac{8}{5} \right); \quad f(x) = -40.$$

$$\mathbf{3.8.28.} \quad x = \left(\frac{22}{9}, \frac{8}{9}, 0, 0 \right); \quad \lambda = \left(-\frac{5}{9}, -\frac{2}{9} \right); \quad f(x) = -\frac{38}{9}.$$

$$\mathbf{3.8.29.} \quad x = (1 - \alpha, \alpha, 0, \alpha); \quad \alpha \in [0, 1]; \quad \lambda = (1, 1); \quad f(x) = 2.$$

$$\mathbf{3.8.30.} \quad \text{У двоїстій задачі ОДР} = \emptyset.$$

$$\mathbf{4.1.1.} \quad X = \begin{pmatrix} 10+10\alpha & 10 & 40-10\alpha & 0 \\ 10-10\alpha & 0 & 10\alpha & 110 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in [0,1],$$

$$F(X) = 760.$$

$$\mathbf{4.1.2.} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 60 & 0 & 50 \\ 20 & 0 & 170 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}, \quad F(X) = 1280.$$

$$\mathbf{4.1.3.} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 20-10\alpha & 10\alpha \\ 20+10\alpha & 0 & 20-10\alpha \\ 10-10\alpha & 20+10\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in [0,1],$$

$$F(X) = 270.$$

$$\mathbf{4.1.4.} \quad X = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 13 \end{pmatrix}, \quad F(X) = 149.$$

$$\mathbf{4.1.5.} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(X) = 89.$$

$$\mathbf{4.1.6.} \quad X = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(X) = 205.$$

$$\mathbf{4.1.7.} \quad X = \begin{pmatrix} 10\alpha & 0 & 10-10\alpha & 70 & 0 \\ 10-10\alpha & 50 & 40+10\alpha & 0 & 40 \\ 70 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in [0,1],$$

$$F(X) = 720.$$

$$\mathbf{4.1.8.} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 110 & 60 & 0 & 5 \\ 125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 55 & 0 & 0 & 40 & 45 \end{pmatrix}, \quad F(X) = 1675.$$

$$\mathbf{4.1.9.} \quad X = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 20 & 10 \\ 0 & 30 & 0 & 20 \end{pmatrix}, \quad F(X) = 170.$$

$$\mathbf{4.1.10.} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 30 \\ 15 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(X) = 205.$$

$$\mathbf{4.1.11.} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 120 & 0 & 65 \\ 90 & 0 & 10 & 65 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(X) = 1270.$$

$$\mathbf{4.1.12.} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 6-6\alpha & 2+6\alpha & 0 \\ 6\alpha & 12-6\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in [0,1], \quad F(X) = 52.$$

$$\mathbf{4.1.13.} \quad X = \begin{pmatrix} 90 & 10 & 0 \\ 0 & 70 & 0 \\ 20 & 0 & 40 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}, \quad F(X) = 790.$$

$$\mathbf{4.1.14.} \quad X = \begin{pmatrix} 20\alpha & 20-20\alpha & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 30 & 0 \\ 30-20\alpha & 10+20\alpha & 0 & 0 & 30 \\ 30 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in [0,1],$$

$$F(X) = 480.$$

$$\mathbf{4.1.15.} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 90 \\ 0 & 0 & 80 \\ 80-40\alpha & 40\alpha & 0 \\ 60+40\alpha & 40-40\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in [0,1], \quad F(X) = 1080.$$

$$\mathbf{4.1.16.} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 65 & 0 & 55 \\ 0 & 0 & 80-5\alpha & 5\alpha \\ 85 & 0 & 40-40\alpha & 5-5\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in [0,1], \quad F(X) = 1815.$$

$$\mathbf{4.1.17.} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 20 \end{pmatrix}, \quad F(X) = 270.$$

$$\mathbf{4.1.18.} \quad X = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 10 & 30 \\ 10 & 20 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(X) = 260.$$

$$\mathbf{4.1.19.} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 16 & 7 \\ 0 & 18 & 0 & 0 \\ 15 & 10 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(X) = 183.$$

$$\mathbf{4.1.20.} \quad X = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 & 40 \\ 0 & 10 & 30 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 40 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(X) = 350.$$

$$\mathbf{4.1.21.} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 40 & 10 \\ 0 & 0 & 70 \\ 40 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}, \quad F(X) = 890.$$

$$\mathbf{4.1.22.} \quad X = \begin{pmatrix} 88 & 12 & 0 \\ 112 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 98 \\ 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad F(X) = 866.$$

$$\mathbf{4.1.23.} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 \\ 45-10\alpha & 10\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 40 \\ 15+10\alpha & 10-10\alpha & 10 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in [0,1], \quad F(X) = 920.$$

$$\mathbf{4.1.24.} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 15 & 5 & 0 \\ 0 & 10 & 30 \end{pmatrix}, \quad F(X) = 180.$$

$$\mathbf{4.1.25.} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 0 & 40 \\ 40 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 30 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(X) = 380.$$

$$\mathbf{4.1.26.} \quad X = \begin{pmatrix} 50 & 10 + 40\alpha & 1 & 50 - 40\alpha \\ 0 & 0 & 99 & 0 \\ 0 & 40 - 40\alpha & 0 & 40\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in [0, 1],$$

$$F(X) = 919.$$

$$\mathbf{4.1.27.} \quad X = \begin{pmatrix} 70 & 0 & 80 & 50 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}, \quad F(X) = 1100.$$

$$\mathbf{4.1.28.} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \\ 50 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(X) = 2150.$$

$$\mathbf{4.1.29.} \quad X = \begin{pmatrix} 101 - 30\alpha & 0 & 30\alpha \\ 19 + 30\alpha & 0 & 30 - 30\alpha \\ 0 & 46 & 105 \\ 0 & 89 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in [0, 1],$$

$$F(X) = 1235.$$

$$\mathbf{4.1.30.} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 90 \\ 0 & 0 & 80 \\ 40 & 40 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(X) = 1080.$$

$$4.2.1. X = \begin{pmatrix} 15 & 25 & 0 \\ 20 & 20 & 10 \\ 35 & 35 & 0 \\ 30 & 40 & 20 \end{pmatrix}, F(X) = 2235.$$

$$4.2.2. X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 30 \\ 40 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 45 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F(X) = 360.$$

4.2.3. Задача розв'язків не має.

$$4.2.4. X = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 80 & 110 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 & 50 \end{pmatrix}, F(X) = 1210.$$

$$4.2.5. X = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}, F(X) = 80.$$

$$4.2.6. X = \begin{pmatrix} 60 & 30 & 0 & 90 & 0 \\ 60 & 50 & 60 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F(X) = 1160.$$

$$4.2.7. X = \begin{pmatrix} 90 & 60 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 70 & 20 \\ 0 & 0 & 70 & 0 & 70 \end{pmatrix}, F(X) = 1300.$$

$$4.2.8. X = \begin{pmatrix} 90 & 60 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 70 & 30 & 40 \end{pmatrix}, F(X) = 1330.$$

$$4.2.9. X = \begin{pmatrix} 15 & 25 & 0 \\ 20 & 0 & 30 \\ 35 & 35 & 0 \\ 30 & 60 & 0 \end{pmatrix}, F(X) = 2155.$$

$$4.2.10. X = \begin{pmatrix} 0 & 40 & 0 \\ 30 & 15 & 5 \\ 70 & 0 & 0 \\ 0 & 65 & 25 \end{pmatrix}, F(X) = 1910.$$

$$4.2.11. X = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 0 & 50 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 50 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F(X) = 450.$$

$$4.2.12. X = \begin{pmatrix} 10 & 70 & 0 & 0 & 90 \\ 90 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 90 & 80 & 10 \end{pmatrix}, F(X) = 1970.$$

$$4.2.13. X = \begin{pmatrix} 65 & 70 & 10 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 45 \\ 0 & 0 & 95 & 15 \end{pmatrix}, F(X) = 1805.$$

4.2.14. Задача розв'язків не має.

$$4.2.15. X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F(X) = 150.$$

$$4.2.16. X = \begin{pmatrix} 70 & 0 & 70 \\ 10 & 50 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \\ 0 & 20 & 50 \end{pmatrix}, F(X) = 2980.$$

$$4.2.17. X = \begin{pmatrix} 105 & 45 & 0 & 0 \\ 95 & 0 & 60 & 5 \\ 0 & 85 & 0 & 50 \\ 0 & 65 & 35 & 5 \end{pmatrix}, F(X) = 1925.$$

$$4.2.18. X = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \\ 5 & 20 & 5 \end{pmatrix}, F(X) = 155.$$

$$4.2.19. X = \begin{pmatrix} 100 & 40 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \\ 0 & 110 & 0 \\ 0 & 0 & 140 \end{pmatrix}, F(X) = 5240.$$

$$4.2.20. X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F(X) = 18.$$

$$4.2.21. X = \begin{pmatrix} 90 & 10 \\ 50 & 100 \\ 10 & 40 \\ 100 & 0 \end{pmatrix}, F(X) = 2355.$$

4.2.22. Задача розв'язків не має.

$$4.2.23. X = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 30 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 20 & 15 \end{pmatrix}, F(X) = 190.$$

$$4.2.24. X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 55 \\ 0 & 50 & 40 & 5 \\ 45 & 35 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F(X) = 740.$$

$$4.2.25. X = \begin{pmatrix} 42 & 53 & 105 & 35 & 0 \\ 0 & 75 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 120 & 0 \\ 63 & 0 & 85 & 45 & 12 \end{pmatrix}, F(X) = 2581.$$

$$4.2.26. X = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 80 & 70 \\ 25 & 75 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 20 & 55 \end{pmatrix}, F(X) = 1060.$$

$$4.2.27. X = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 35 & 10 \\ 20 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}, F(X) = 305.$$

$$4.2.28. X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F(X) = 33.$$

$$4.2.29. X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 75 \\ 15 & 0 & 135 & 0 \\ 50 & 95 & 0 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}, F(X) = 1445.$$

4.2.30. Задача розв'язків не має.

$$4.3.1. X = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T = 5.$$

$$4.3.2. X = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 140 \\ 20 & 60 & 0 \\ 180 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T = 8.$$

$$4.3.3. X = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 15 & 10 \end{pmatrix}, T = 12.$$

$$4.3.4. X = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 15 & 15 \end{pmatrix}, T = 10.$$

$$4.3.5. X = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 10 \\ 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T = 10.$$

$$4.3.6. X = \begin{pmatrix} 32 & 38 & 0 \\ 0 & 2 & 28 \\ 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, T = 16.$$

$$\mathbf{4.3.7.} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 40 \\ 20 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad T=5.$$

$$\mathbf{4.3.8.} \quad X = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 26 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}, \quad T=12.$$

$$\mathbf{4.3.9.} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 10 \\ 5 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 5 \end{pmatrix}, \quad T=3.$$

$$\mathbf{4.3.10.} \quad X = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad T=9.$$

$$\mathbf{4.3.11.} \quad X = \begin{pmatrix} 5 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{pmatrix}, \quad T=11.$$

$$\mathbf{4.3.12.} \quad X = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 15 & 15 & 4 \end{pmatrix}, \quad T=15.$$

$$\mathbf{4.3.13.} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 10 \\ 10 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}, \quad T=5.$$

$$\mathbf{4.3.14.} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 13 & 4 & 1 \\ 7 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad T=7.$$

$$\mathbf{4.3.15.} \quad X = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 15 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad T = 8.$$

$$\mathbf{4.3.16.} \quad X = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 20 \end{pmatrix}, \quad T = 7.$$

$$\mathbf{4.3.17.} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 20 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 12 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}, \quad T = 13.$$

$$\mathbf{4.3.18.} \quad X = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}, \quad T = 8.$$

$$\mathbf{4.3.19.} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 10 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}, \quad T = 8.$$

$$\mathbf{4.3.20.} \quad X = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 20 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}, \quad T = 9.$$

$$\mathbf{4.3.21.} \quad X = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 20 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = 4.$$

$$\mathbf{4.3.22.} \quad X = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 25 \\ 0 & 10 & 15 & 0 \\ 25 & 25 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = 5.$$

$$\mathbf{4.3.23.} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 30 & 0 & 0 \\ 20 & 10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \end{pmatrix}, \quad T=8.$$

$$\mathbf{4.3.24.} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 0 \\ 200 & 0 & 100 & 0 \end{pmatrix}, \quad T=6.$$

$$\mathbf{4.3.25.} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 9 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad T=4.$$

$$\mathbf{4.3.26.} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 30 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}, \quad T=5.$$

$$\mathbf{4.3.27.} \quad X = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 17 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}, \quad T=8.$$

$$\mathbf{4.3.28.} \quad X = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad T=11.$$

$$\mathbf{4.3.29.} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 30 & 70 \\ 30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}, \quad T=5.$$

$$\mathbf{4.3.30.} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 20 & 10 & 70 \\ 0 & 40 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 30 & 20 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = 5.$$

$$\mathbf{5.1.1.} \quad x = (0; 6; 1; 12), \quad f(x) = 12.$$

$$\mathbf{5.1.2.} \quad x = \left(9, 0, \frac{1}{2}, 40\right), \quad f(x) = 9.$$

$$\mathbf{5.1.3.} \quad x = \left(0, 9, \frac{1}{2}, 60\right), \quad f(x) = 9.$$

$$\mathbf{5.1.4.} \quad x = (0, 2), \quad f(x) = 4.$$

$$\mathbf{5.1.5.} \quad x^{(1)} = (1, 2, 1, 0), \quad x^{(2)} = (2, 1, 1, 1), \quad x^{(3)} = (3, 0, 1, 2), \\ f(x^{(1)}) = f(x^{(2)}) = f(x^{(3)}) = 3.$$

$$\mathbf{5.1.6.} \quad x = (9, 1), \quad f(x) = 9.$$

$$\mathbf{5.1.7.} \quad x = \left(11, 0, \frac{1}{2}, 3\right), \quad f(x) = 11.$$

$$\mathbf{5.1.8.} \quad x^{(1)} = (2, 1), \quad x^{(2)} = (1, 2), \quad f(x^{(1)}) = f(x^{(2)}) = 3.$$

$$\mathbf{5.1.9.} \quad x = (3, 0, 4, 0), \quad f(x) = 18.$$

$$\mathbf{5.1.10.} \quad x = \left(0, 1, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right), \quad f(x) = 10.$$

$$\mathbf{5.1.11.} \quad x = \left(1, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right), \quad f(x) = \frac{5}{4}.$$

$$\mathbf{5.1.12.} \quad x = (1, 3, 8), \quad f(x) = -2.$$

$$\mathbf{5.1.13.} \quad x = (0, 8), \quad f(x) = 8.$$

$$\mathbf{5.1.14.} \quad x = \left(0, 38, \frac{71}{8}, \frac{1}{8}\right), \quad f(x) = -38.$$

$$\mathbf{5.1.15.} \quad x = \left(4, 0, 5, \frac{1}{2}\right), \quad f(x) = \frac{43}{2}.$$

$$\mathbf{5.1.16.} \quad x^{(1)} = (4, 0, 1, 20), \quad x^{(2)} = (4, 1, 0, 13), \\ f(x^{(1)}) = f(x^{(2)}) = 4.$$

$$\mathbf{5.1.17.} \quad x^{(1)} = (2, 1, 0, 2), \quad x^{(2)} = (1, 2, 1, 1), \quad x^{(3)} = (0, 3, 2, 0), \\ f(x^{(1)}) = f(x^{(2)}) = f(x^{(3)}) = 6.$$

$$\mathbf{5.1.18.} \quad x^{(1)} = (3, 0, 0, 3), \quad x^{(2)} = (2, 1, 1, 2), \quad x^{(3)} = (1, 2, 2, 1), \\ x^{(4)} = (0, 3, 3, 0), \quad f(x^{(1)}) = f(x^{(2)}) = f(x^{(3)}) = f(x^{(4)}) = 3.$$

$$\mathbf{5.1.19.} \quad x = \left(4, 0, \frac{25}{6}, \frac{1}{6}\right), \quad f(x) = 8.$$

$$\mathbf{5.1.20.} \quad x = (1, 3), \quad f(x) = 9.$$

$$\mathbf{5.1.21.} \quad x = (3, 1), \quad f(x) = 2.$$

$$\mathbf{5.1.22.} \quad x = (0, 4), \quad f(x) = 8.$$

$$\mathbf{5.1.23.} \quad x = (2, 1), \quad f(x) = 10.$$

$$\mathbf{5.1.24.} \quad x = (2, 0, 5, 0), \quad f(x) = 16.$$

$$\mathbf{5.1.25.} \quad x = (1, 2, 1, 1), \quad f(x) = 11.$$

$$\mathbf{5.1.26.} \quad x = \left(0, 0, 8, \frac{3}{2}\right), \quad f(x) = \frac{45}{2}.$$

$$\mathbf{5.1.27.} \quad x = (1, 3, 1, 0), \quad f(x) = 0.$$

$$\mathbf{5.1.28.} \quad x^{(1)} = (3, 1, 1, 0), \quad x^{(2)} = \left(5, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad x^{(3)} = \left(4, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \\ f(x^{(1)}) = f(x^{(2)}) = f(x^{(3)}) = 7.$$

$$\mathbf{5.1.29.} \quad x = \left(1, 0, \frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad f(x) = 5.$$

$$\mathbf{5.1.30.} \quad x = \left(0, 1, \frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right), \quad f(x) = 10.$$

У завданнях 6.1.1 – 6.1.30 x^* – точка мінімуму, x^{**} – точка максимуму, f^* – мінімальне значення функції, f^{**} – максимальне значення функції.

$$6.1.1. x^* = (2; 3), f^* = 0, x^{**} = (9; 0), f^{**} = 58.$$

$$6.1.2. x^* = (3, 2), f^* = 0, x^{**} = (10, 0), f^{**} = 53.$$

$$6.1.3. x^* = \left(\frac{7}{2}, \frac{21}{4}\right), f^* = \frac{9}{8}, x^{(1)**} = (0, 0), x^{(2)**} = (10, 0), f^{**} = \frac{169}{4}.$$

$$6.1.4. x^* = (6, 1), f^* = 0, x^{**} = (0, 0), f^{**} = 6.$$

$$6.1.5. x^* = \left(\frac{101}{29}, \frac{122}{29}\right), f^* = \frac{14036}{841}, x^{**} = (0, 0), f^{**} = 89.$$

$$6.1.6. x^* = (3, 4), f^* = 0, x^{**} = (8, 0), f^{**} = 41.$$

$$6.1.7. x^* = \left(\frac{136}{29}, \frac{108}{29}\right), f^* = \frac{10469}{841}, x^{**} = (0, 0), f^{**} = 85.$$

$$6.1.8. x^* = (5, 2), f^* = 0, x^{**} = \left(0, \frac{28}{5}\right), f^{**} = \frac{949}{25}.$$

$$6.1.9. x^* = (0, 0), f^* = 0, x^{**} = (2\sqrt{5}, \sqrt{5}), f^{**} = 5\sqrt{5}.$$

$$6.1.10. x^* = (4, 0), f^* = -4, x^{**} = (0, 4), f^{**} = 8.$$

$$6.1.11. x^* = (2, 2), f^* = 0, x^{**} = (0, 0), f^{**} = 8.$$

$$6.1.12. x^* = \left(\frac{19}{5}, \frac{12}{5}\right), f^* = \frac{9}{5}, x^{**} = (0, 10), f^{**} = 74.$$

$$6.1.13. x^* = (1, 1), f^* = 5, x^{**} = \left(2 + \frac{6}{\sqrt{13}}, 3 + \frac{9}{\sqrt{13}}\right), f^{**} = 13 + 3\sqrt{13}.$$

$$6.1.14. x^* = (0, 0), f^* = 0, x^{**} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), f^{**} = \frac{1}{2}.$$

$$6.1.15. x^* = (0, 0), f^* = 0, x^{**} = (1, 0), f^{**} = \frac{1}{4}.$$

$$6.1.16. x^* = (0, 0), f^* = 0, x^{**} = \left(\frac{14}{5}, \frac{8}{5}\right), f^{**} = \frac{112}{25}.$$

$$6.1.17. x^* = (2, 2), f^* = 0, x^{**} = (7, 0), f^{**} = 29.$$

$$6.1.18. x^* = (3, 3), f^* = 0, x^{**} = (10, 0), f^{**} = 58.$$

$$6.1.19. x^* = \left(\frac{10}{3}, 1\right), f^* = \frac{10}{3}, x^{**} = \left(5, \frac{5}{2}\right), f^{**} = \frac{25}{2}.$$

$$6.1.20. x^* = (3, 3), f^* = 0, x^{**} = (1, 0), f^{**} = 13.$$

$$6.1.21. x^* = (2, 3), f^* = 0, x^{**} = (0, 10), f^{**} = 53.$$

$$6.1.22. x^* = \left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right), f^* = 9, x^{**} = (0, 0), f^{**} = 25.$$

$$6.1.23. x^* = (3, 3), f^* = 0, x^{(1)**} = (0, 0), x^{(2)**} = (0, 6), \\ f^{**} = 18.$$

$$6.1.24. x^* = (0, 0), f^* = 0, x^{**} = (4, 6), f^{**} = 10.$$

$$6.1.25. x^* = (6, 0), f^* = 6, x^{**} = (4 + \sqrt{5}, 3 + 2\sqrt{5}), f^{**} = 10 + 5\sqrt{5}.$$

$$6.1.26. x^* = (0, 5), f^* = 5, x^{**} = (4 + 2\sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}), f^{**} = 10 + 5\sqrt{5}.$$

$$6.1.27. x^* = (0, 0), f^* = 0, x^{**} = (0, 3), f^{**} = 9.$$

$$6.1.28. x^* = (0, 0), f^* = 0, x^{**} = \left(2\sqrt{\frac{5}{17}}, 2\sqrt{\frac{3}{17}}\right), f^{**} = \frac{2(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{\sqrt{17}}.$$

$$6.1.29. x^* = (0, 0), f^* = 0, x^{(1)**} = \left(4, \frac{10}{3}\right), x^{(2)**} = \left(\frac{7}{3}, 5\right), f^{**} = \frac{22}{3}.$$

$$6.1.30. x^* = (5, 1), f^* = -4, x^{**} = (1, 6), f^{**} = 5.$$

6.2.1. Розв'язку немає.

$$6.2.2. x = (20, 12, 0); f(x) = \frac{8}{41}.$$

$$6.2.3. x = (2, 0, 0, 4); f(x) = \frac{2}{3}.$$

$$6.2.4. x = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right); f(x) = \frac{4}{5}.$$

$$6.2.5. \ x = \left(0, \frac{12}{7}, 0\right); \ f(x) = 2.$$

$$6.2.6. \ x = (5, 0); \ f(x) = \frac{1}{2}.$$

$$6.2.7. \ x = (5, 0); \ f(x) = \frac{1}{2}.$$

$$6.2.8. \ x = \left(\frac{23}{13}, \frac{22}{13}\right); \ f(x) = -\frac{21}{117}.$$

6.2.9. Розв'язку немає.

$$6.2.10. \ x = (5, 0); \ f(x) = \frac{10}{3}.$$

$$6.2.11. \ x = \left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0\right); \ f(x) = -3.$$

$$6.2.12. \ x = (6, 1); \ f(x) = 1.$$

6.2.13. Розв'язку немає.

6.2.14. Розв'язку немає.

$$6.2.15. \ x = (2, 0, 27, 3); \ f(x) = -\frac{108}{47}.$$

6.2.16. Розв'язку немає.

$$6.2.17. \ x = \left(\frac{10}{3}, 0, 0, \frac{13}{3}, \frac{145}{3}\right); \ f(x) = \frac{8}{19}.$$

$$6.2.18. \ x = (2 + 4\lambda, 0, 0, 4 - 4\lambda), \ \lambda \in [0, 1]; \ f(x) = 1.$$

6.2.19. Розв'язку немає.

$$6.2.20. \ x = \left(7, 0, \frac{4}{3}, 0, \frac{83}{3}\right); \ f(x) = \frac{54}{25}.$$

$$6.2.21. \ x = \left(\frac{28}{11}, \frac{24}{11}, \frac{10}{11}, 0\right); \ f(x) = -\frac{1}{13}.$$

6.2.22. Розв'язку немає.

6.2.23. Розв'язку немає.

$$6.2.24. \ x = (4, 5, 0, 0); \ f(x) = \frac{5}{4}.$$

$$6.2.25. \ x = \left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, 0\right); \quad f(x) = 13.$$

$$6.2.26. \ x = (0, 9, 7, 9); \quad f(x) = \frac{19}{7}.$$

$$6.2.27. \ x = \left(\frac{65}{7}, \frac{80}{7}, 0\right); \quad f(x) = \frac{61}{27}.$$

$$6.2.28. \ x = \left(\frac{14}{5}, \frac{2}{5}, 0, 0\right); \quad f(x) = \frac{26}{23}.$$

$$6.2.29. \ x = (5, 5, 0, 16, 0); \quad f(x) = -\frac{4}{13}.$$

6.2.30. Розв'язку немає.

$$6.3.1. \ x = (0, 0); \quad f(x) = 0.$$

$$6.3.2. \ x = \left(\frac{1}{4}, 0\right); \quad f(x) = \frac{1}{8}.$$

$$6.3.3. \ x = \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right); \quad f(x) = \frac{7}{3}.$$

$$6.3.4. \ x = (0, 0); \quad f(x) = 0.$$

$$6.3.5. \ x = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right); \quad f(x) = \frac{1}{4}.$$

$$6.3.6. \ x = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right); \quad f(x) = -\frac{1}{2}.$$

$$6.3.7. \ x = (1, 2, 0); \quad f(x) = -17.$$

$$6.3.8. \ x = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{57}{2}\right); \quad f(x) = -\frac{1}{4}.$$

$$6.3.9. \ x = (0, 10, 0); \quad f(x) = -10.$$

$$6.3.10. \ x = (1, 0); \quad f(x) = 1.$$

$$6.3.11. \ x = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 8\right); \quad f(x) = \frac{7}{12}.$$

$$\mathbf{6.3.12.} \quad x = (0, 0, 8); \quad f(x) = 0.$$

$$\mathbf{6.3.13.} \quad x = (0, 0, 4, 2); \quad f(x) = 0.$$

$$\mathbf{6.3.14.} \quad x = \left(\frac{3}{4}, \frac{21}{4}, 0, \frac{17}{2}\right); \quad f(x) = \frac{51}{8}.$$

$$\mathbf{6.3.15.} \quad x = \left(\frac{7}{2}, 2, 5, 7\right); \quad f(x) = 149.$$

$$\mathbf{6.3.16.} \quad x = (0, 0, 6); \quad f(x) = 0.$$

$$\mathbf{6.3.17.} \quad x = (0, 0, 80); \quad f(x) = 0.$$

$$\mathbf{6.3.18.} \quad x = (1, 1); \quad f(x) = -2.$$

$$\mathbf{6.3.19.} \quad x = (0, 0); \quad f(x) = 4.$$

$$\mathbf{6.3.20.} \quad x = \left(\frac{5}{4}, 2\right); \quad f(x) = \frac{89}{8}.$$

$$\mathbf{6.3.21.} \quad x = (0, 0, 0); \quad f(x) = 0.$$

$$\mathbf{6.3.22.} \quad x = \left(3, \frac{1}{2}\right); \quad f(x) = \frac{1}{4}.$$

$$\mathbf{6.3.23.} \quad x = (0, 0); \quad f(x) = 0.$$

$$\mathbf{6.3.24.} \quad x = (1, 0); \quad f(x) = -1.$$

$$\mathbf{6.3.25.} \quad x = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right); \quad f(x) = \frac{3}{8}.$$

$$\mathbf{6.3.26.} \quad x = \left(\frac{1}{4}, 0\right); \quad f(x) = -\frac{1}{8}.$$

$$\mathbf{6.3.27.} \quad x = (0, 2); \quad f(x) = -4.$$

$$\mathbf{6.3.28.} \quad x = \left(0, \frac{1}{2}\right); \quad f(x) = -1.$$

$$\mathbf{6.3.29.} \quad x = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right); \quad f(x) = \frac{41}{4}.$$

$$\mathbf{6.3.30.} \quad x = (0, 1, 85); \quad f(x) = -1.$$

7.1.1. $u^{(1)} = (0, 2, 3)$; $u^{(2)} = (0, 3, 2)$; $u^{(3)} = (0, 4, 1)$; $u^{(4)} = (1, 1, 3)$;
 $u^{(5)} = (1, 2, 2)$; $u^{(6)} = (1, 3, 1)$; $u^{(7)} = (2, 1, 2)$; $u^{(8)} = (2, 2, 1)$; $u^{(9)} = (3, 1, 1)$; $k(u) = 13$.

7.1.2. $u^{(1)} = (0, 2, 3)$; $u^{(2)} = (0, 3, 2)$; $k(u) = 11$.

7.1.3. $u = (1, 1, 3)$; $k(u) = 29$.

7.1.4. $u = (1, 2, 2)$; $k(u) = 46$.

7.1.5. $u^{(1)} = (1, 3, 1)$; $u^{(2)} = (3, 1, 1)$; $k(u) = 46$.

7.1.6. $u = (0, 2, 3)$; $k(u) = 20$.

7.1.7. $u = (1, 3, 1)$; $k(u) = 44$.

7.1.8. $u = (2, 1, 2)$; $k(u) = 75$.

7.1.9. $u = (1, 1, 3)$; $k(u) = 70$.

7.1.10. $u^{(1)} = (1, 3, 1)$; $u^{(2)} = (2, 2, 1)$; $u^{(3)} = (3, 1, 1)$; $k(u) = 58$.

7.1.11. $u^{(1)} = (2, 1, 2)$; $u^{(2)} = (2, 2, 1)$; $u^{(3)} = (3, 1, 1)$; $k(u) = 104$.

7.1.12. $u = (1, 1, 3)$; $k(u) = 66$.

7.1.13. $u = (3, 1, 1)$; $k(u) = 90$.

7.1.14. $u = (0, 0, 5)$; $k(u) = 56$.

7.1.15. $u = (1, 3, 1)$; $k(u) = 86$.

7.1.16. $u = (2, 2, 1)$; $k(u) = 100$.

7.1.17. $u^{(1)} = (1, 2, 2)$; $u^{(2)} = (1, 3, 1)$; $u^{(3)} = (2, 1, 2)$; $u^{(4)} = (2, 2, 1)$;
 $k(u) = 189$.

7.1.18. $u = (1, 2, 2)$; $k(u) = 98$.

7.1.19. $u = (2, 2, 1)$; $k(u) = 205$.

7.1.20. $u^{(1)} = (0, 4, 1)$; $u^{(2)} = (0, 5, 0)$; $k(u) = 62$.

7.1.21. $u = (1, 1, 3)$; $k(u) = 70$.

7.1.22. $u^{(1)} = (0, 3, 2)$; $u^{(2)} = (4, 0, 1)$; $k(u) = 64$.

7.1.23. $u^{(1)} = (1, 1, 3)$; $u^{(2)} = (1, 2, 2)$; $u^{(3)} = (1, 3, 1)$; $u^{(4)} = (2, 1, 2)$;
 $u^{(5)} = (2, 2, 1)$; $u^{(6)} = (3, 1, 1)$; $k(u) = 274$.

- 7.1.24.** $u^{(1)} = (2, 1, 2)$; $u^{(2)} = (2, 2, 1)$; $k(u) = 270$.
7.1.25. $u = (3, 1, 1)$; $k(u) = 262$.
7.1.26. $u = (3, 1, 1)$; $k(u) = 345$.
7.1.27. $u = (1, 3, 1)$; $k(u) = 310$.
7.1.28. $u = (1, 1, 3)$; $k(u) = 260$.
7.1.29. $u^{(1)} = (1, 3, 1)$; $u^{(2)} = (2, 2, 1)$; $u^{(3)} = (3, 1, 1)$; $k(u) = 260$.
7.1.30. $u = (3, 1, 1)$; $k(u) = 250$.

- 7.2.1.** $u = (0, 0, 0, 0)$; $v = (100, 60, 36, 21.6)$; $k = 87, 04$.
7.2.2. $u = (0, 0, 0, 0)$; $v = (200, 160, 128, 102.4)$; $k = 354, 24$.
7.2.3. $u = (0, 0, 0, 0)$; $v = (300, 60, 12, 2.4)$; $k = 299, 52$.
7.2.4. $u = (400, 240, 144, 86.4)$; $v = (0, 0, 0, 0)$; $k = 435, 2$.
7.2.5. $u = (0, 0, 0, 62.5)$; $v = (500, 250, 125, 0)$; $k = 1150$
7.2.6. $u = (400, 88, 19.36, 4.2592)$; $v = (0, 0, 0, 0)$; $k = 869, 75264$.
7.2.7. $u = (0, 0, 0, 102.9)$; $v = (300, 210, 147, 0)$; $k = 1236, 42$.
7.2.8. $u = (0, 0, 0, 102.4)$; $v = (200, 160, 128, 0)$; $k = 521, 6$.
7.2.9. $u = (0, 0, 0, 0)$; $v = (100, 80, 64, 51.2)$; $k = 1180, 8$.
7.2.10. $u = (500, 400, 0, 0)$; $v = (0, 0, 320, 224)$; $k = 776, 4$.
7.2.11. $u = (0, 0, 0, 0)$; $v = (600, 54, 4.86, 0.4374)$; $k = 527, 44$.
7.2.12. $u = (700, 105, 15.75, 2.3625)$; $v = (0, 0, 0, 0)$; $k = 123, 47$.
7.2.13. $u = (800, 160, 32, 6.4)$; $v = (0, 0, 0, 0)$; $k = 159, 744$.
7.2.14. $u = (900, 189, 36.69, 8.3349)$; $v = (0, 0, 0, 0)$; $k = 1932, 94233$.
7.2.15. $u = (700, 182, 47.32, 0)$; $v = (0, 0, 0, 12.3032)$; $k = 7534, 21592$.
7.2.16. $u = (800, 192, 46.08, 11.0592)$; $v = (0, 0, 0, 0)$; $k = 944, 22528$.
7.2.17. $u = (600, 120, 24, 0)$; $v = (0, 0, 0, 48)$; $k = 749, 28$.
7.2.18. $u = (0, 0, 245, 147)$; $v = (500, 350, 0, 0)$; $k = 2065, 6$.
7.2.19. $u = (400, 40, 4, 0.4)$; $v = (0, 0, 0, 0)$; $k = 711, 04$.

- 7.2.20.** $u = (300, 240, 0, 0)$; $v = (0, 0, 192, 76.8)$; $k = 646, 56$.
- 7.2.21.** $u = (0, 0, 0, 0)$; $v = (200, 120, 72, 43.2)$; $k = 435, 2$.
- 7.2.22.** $u = (100, 40, 0, 0)$; $v = (0, 0, 16, 4.48)$; $k = 114, 384$.
- 7.2.23.** $u = (0, 0, 0, 0)$; $v = (700, 210, 63, 18.9)$; $k = 595, 14$.
- 7.2.24.** $u = (800, 480, 288, 0)$; $v = (0, 0, 0, 172.8)$; $k = 2123, 52$.
- 7.2.25.** $u = (900, 0, 0, 0)$; $v = (0, 450, 180, 72)$; $k = 2062, 8$.
- 7.2.26.** $u = (400, 160, 64, 0)$; $v = (0, 0, 0, 25.6)$; $k = 852, 16$.
- 7.2.27.** $u = (300, 240, 0, 0)$; $v = (0, 0, 192, 115.2)$; $k = 1308, 96$.
- 7.2.28.** $u = (200, 140, 0, 0)$; $v = (0, 0, 98, 29.4)$; $k = 297, 4$.
- 7.2.29.** $u = (0, 0, 0, 51.2)$; $v = (100, 80, 64, 0)$; $k = 374, 72$.
- 7.2.30.** $u = (0, 0, 243, 194.4)$; $v = (300, 270, 0, 0)$; $k = 1541, 58$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Григорків В.С., Григорків М.В. Економічна кібернетика: практикум: навч. посіб. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2024. 200 с.
2. Григорків В. С. Оптимальне керування в економіці : навч. посібник. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича: 2011. 200 с.
3. Григорків В. С. Моделювання економіки: підручник. Чернівці : Чернівецьк. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2019. 360 с.
4. Григорків В.С., Григорків М.В. Моделі прийняття рішень в економіці: вибрані завдання для тематичного контролю : навч. посіб. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т і м. Ю. Федьковича, 2021. 48 с.
5. Григорків В.С., Григорків М.В. Моделювання економіки: практикум : навч. посіб. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2023. 208 с.
6. Григорків В.С., Григорків М.В., Ярошенко О.І. Оптимізаційні методи та моделі : підручник. 2-ге вид., випр. і доп. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2024. 464 с.
7. Григорків В.С., Григорків М.В. Економічна кібернетика: практикум: навч. посіб. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2024. 200 с.
8. Григорків В.С., Григорків М.В. Моделі прийняття рішень в економіці: навч. посібник. 2-ге вид., випр. і доп. Чернівці : Чернівец. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2025. 264 с.
9. Лавренчук В.П., Настасієв П.П., Мартинюк О.В., Кондур О.С. Вища математика. Загальний курс. Частина 2. Математичний аналіз і диференціальні рівняння : навчальний посібник. Чернівці : Книги-XXI, 2010. 556 с.
10. Вища математика для економістів: підручник / за ред. О.І. Ляшенко. Київ: Наукова столиця, 2024. 552 с.

Навчальне видання

**В.С. Григорків, М.В. Григорків,
О.І. Ярошенко, Л.В. Скращук**

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ: ПРАКТИКУМ

Навчальний посібник

Літературний редактор

Колодій О.В.

Технічна редакторка
та дизайн обкладинки

Кудрінська О.М.

Підписано до друку 03.02.2026. Формат 60x84/16.

Папір офсетний. Друк цифровий.

Умов.-друк. арк. 13,1. Обл. вид. арк. 14,1. Зам. Н-007.

Видавництво та друкарня Чернівецького національного університету
58002. Чернівці, вул. Коцюбинського, 2.

e-mail: ruta@chnu.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 891 від 08.04.2002.