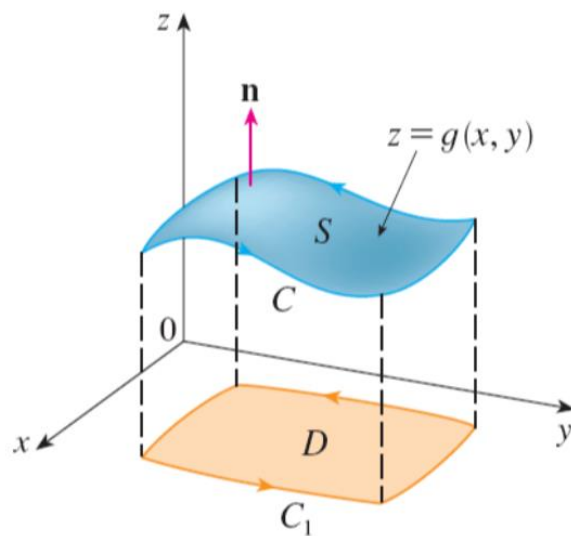
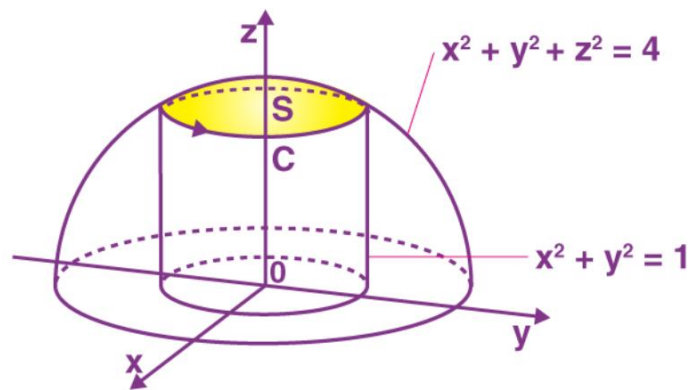


Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

В. А. Головацький, О. М. Маханець, Р. Р. Кобилянський, М. М. Іваночко

ВИКОРИСТАННЯ WOLFRAM MATHEMATICA В КУРСІ ВЕКТОРНОГО І ТЕНЗОРНОГО АНАЛІЗУ

Навчальний посібник



Чернівці
Чернівецький національний університет
2025

УДК
ББК

Друкується за ухвалою вченої ради навчально-наукового
інституту фізико-технічних та комп'ютерних наук
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича
(протокол №11 від 19.06.2025)

Використання Wolfram Mathematica в курсі векторного і тензорного аналізу:
Навчальний посібник: В. А. Головацький, О. М. Маханець, Р. Р. Кобилянський,
М. М. Іваночко. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2025. – 176с.

В посібнику викладено методи виконання основних операцій векторного та тензорного аналізу в системі Wolfram Mathematica. Розглянуто велику кількість прикладів аналітичних та числових розрахунків з різних розділів фізики.

Потужні графічні можливості системи комп'ютерної алгебри за допомогою різних методів візуалізації суттєво допомагають в освоєнні векторного та тензорного аналізу. З іншої сторони, розв'язання великої кількості фізичних задач дозволяє студентам познайомитися з методами комп'ютерного моделювання, які їм знадобляться при вивченні інших фізико-математичних дисциплін.

Для студентів та аспірантів фізико-математичних спеціальностей.

© Чернівецький національний університет, 2025

Зміст

Частина 1. ВЕКТОРНИЙ АНАЛІЗ	5
Вступ.....	5
1. Вектори та дії над ними.....	5
2. Скалярний добуток векторів.....	13
3. Векторний добуток векторів.....	19
4. Мішаний добуток векторів.	22
5. Базис. Розклад вектора за векторами базису.....	25
6. Поворот декартової системи координат	27
7. Інверсія декартової системи координат.....	31
8. Скалярні поля	34
9. Градієнт. Похідна по напрямку	40
10. Векторні поля. Характеристики векторного поля	47
11. Похідна від векторної функції за напрямком	54
12. Різні види симетрій векторних полів	56
13. Потік векторного поля через поверхню	59
14. Дивергенція векторного поля	68
15. Лінійний інтеграл та циркуляція векторного поля.....	72
16. Ротор векторного поля	76
17. Теорема Остроградського-Гаусса	79
18. Теорема Стокса	81
19. Формула Гріна.....	86
20. Потенціальне векторне поле	90
21. Соленоїдальне векторне поле	93
22. Розклад векторного поля на потенціальну та соленоїдальну частини.....	96
23. Криволінійні координати. Основний та взаємний косокутний базиси.....	98
24. Ортогональна криволінійна система координат.....	107
25. Диференціальні операції в криволінійних координатах.....	112
26. Сферичні координати	114
27. Циліндричні координати.....	122

Частина 2. ТЕНЗОРИ	129
1. Визначення тензора. Основи тензорної алгебри	129
2. Симетрія тензорів	136
3. Ізотропні тензори. Тензор Леві-Чивіти.....	139
4. Обернений тензор	142
5. Головні осі симетричного тензора	146
6. Характеристична поверхня симетричного тензора 2-го рангу	154
7. Інваріанти тензорів другого рангу	156
8. Операції інверсії. Псевдотензори.....	160
9. Тензорна форма фізичних законів. Тензори фізичних величин	162
10. Тензор інерції	167
11. Тензор деформацій	174
Список літератури	176

Частина 1. ВЕКТОРНИЙ АНАЛІЗ

Вступ

Поняття вектора є одним із фундаментальних понять сучасної математики. Його можна визначити по-різному: як напрямлений відрізок, як упорядковану пару точок, що є кінцями напрямленого відрізка чи іншими методами.

Уперше поняття вектора як напрямленого відрізка знайшло застосування в механіці для зображення фізичних векторних величин: швидкості, прискорення, сили, моменту сили тощо. Наочність зображення та простота геометричних операцій над векторами як напрямленими відрізками сприяли тому, що поняття вектора знайшло загальне визнання і застосування в інших розділах фізики. Пізніше поняття вектора увійшло в математичні та нематематичні науки і було узагальнене на випадок n вимірного простору.

Якщо у звичному 3-вимірному просторі операції з векторами мають зручну геометричну інтерпретацію, то у загальному випадку n -вимірного простору дослідники більше використовують аналітичні методи досліджень. Наприклад, якщо до 3 просторових координат додати ще одну координату – час, то операції з векторами у 4-вимірному просторі не матимуть простого геометричного представлення у звичному нам тривимірному просторі. Багато сучасних фізичних теорій потребують значно більшої вимірності простору, наприклад, Гільбертів простір – нескінченновимірний. Вивченням математичних властивостей таких просторів займається векторний та тензорний аналіз. Саме тому вивчення поняття вектора є дуже важливим у сучасних умовах розвитку математичних наук.

Для можливості використання графічного представлення векторних полів ми обмежимося лише 2D та 3D просторами. Але для виконання операцій з векторними величинами система Wolfram Mathematica не має обмежень на розмірність простору

1. Вектори та дії над ними.

Вектор – математичний об'єкт, який характеризується числовою величиною і напрямком. Числове значення вектора називають

довжиною або модулем вектора. Довжину вектора $\vec{a}$ позначають символом $|\vec{a}|$. Напрямок вектора задається ортом – вектором одиничної довжини (одиничним вектором), що лежить на тій самій прямій, що і вектор, або на паралельній до неї.

Нехай $Oxyz$ – права система координат. Тоді кожен вектор $\vec{a}$ можна розкласти на три складові, що є проекціями вектора $\vec{a}$ на координатні осі і вони називаються координатами вектора

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad (1.1)$$

Тут a_x, a_y, a_z – проекції (координати) вектора $\vec{a}$ відповідно на координатні осі Ox, Oy і Oz . При цьому довжина вектора визначається формулою

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.2)$$

Означення. Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *рівними*, якщо вони мають однакову довжину й однакові напрямки. Позначають $\vec{a} = \vec{b}$. У рівних векторів рівні їхні відповідні координати.

Означення. Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *співнаправленими*, якщо їхні напрями збігаються. Позначають $\vec{a} \uparrow \vec{b}$.

Означення. Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *колінеарними* (паралельними), якщо вони лежать на паралельних прямих. Позначають $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Означення. Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *протилежнонаправленими*, якщо вони колінеарні, але не співнаправлені. Позначають $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$.

Означення. Три вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називаються *компланарними*, якщо вони лежать у одній площині або паралельні до однієї площини.

Вектор, початок і кінець якого збігаються, називається *нульовим вектором*. Вважається, що нульовий вектор не має напрямку, тому його вважають перпендикулярним, паралельним, співнаправленим і протилежнонаправленим будь-якому вектору. Всі координати нульового вектора дорівнюють нулю.

Сумою двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, що визначається за правилом паралелограма. Позначають

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) \quad (1.3)$$

Різницею двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який є сумою вектора $\vec{a}$ і вектора $-\vec{b}$, що рівний за модулем вектору $\vec{b}$, але протилежнонаправлений до $\vec{b}$.

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z) \quad (1.4)$$

Добутком вектора $\vec{a}$ на скалярну величину λ називається вектор $\vec{c}$, що колінеарний до вектора $\vec{a}$, модуль якого дорівнює $|\lambda||a|$, співнаправлений з $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, протилежнонаправлений до $\vec{a}$, якщо $\lambda < 0$, і дорівнює нулю, якщо $\lambda = 0$.

$$\vec{c} = \lambda \vec{a} = \lambda(a_x, a_y, a_z) = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z) \quad (1.5)$$

В системі Mathematica n -вимірні вектори задаються у вигляді списку довжиною n . Наприклад, вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ при $n=3$ можна задати у загальному вигляді списком трьох координат, тоді вектори $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ та $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ отримаємо у вигляді списку 3 елементів, що є сумою та різницею відповідних координат векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$:

```
a = {ax, ay, az}; b = {bx, by, bz};
```

```
c = a + b
```

```
d = a - b
```

```
{ax + bx, ay + by, az + bz}
```

```
{ax - bx, ay - by, az - bz}
```

До кожного елемента списку можна звернутися за його порядковим номером. Тому координату x вектора $\mathbf{c}$ отримаємо звернувшись до першого елемента, наприклад $\mathbf{c}[[1]]$, або використавши функцію **First**[$\mathbf{c}$]. Координату z вектора $\mathbf{d}$ відповідно отримаємо $\mathbf{d}[[3]]$ або **Last**[$\mathbf{d}$]. Якщо номер елемента – від’ємне число, то підрахунок ведеться з кінця списку, тобто $\mathbf{d}[-1]$ – третій елемент списку.

```

c[[1]]
First[c]
Last[d]
ax + bx
ax + bx
az - bz

```

$$\left. \begin{array}{l} \\ \text{First}[c] \\ \text{Last}[d] \\ ax + bx \\ ax + bx \\ az - bz \end{array} \right\}$$

Довжина 3D вектора (норма) визначається як квадратний корінь з суми квадратів усіх координат, за формулою $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. В *Mathematica* для розрахунку довжини вектора можна використати функцію **Norm**

```

Norm[{2, 3, 4}]
 $\sqrt{29}$ 

```

$$\left. \begin{array}{l} \text{Norm}[\{2, 3, 4\}] \\ \sqrt{29} \end{array} \right\}$$

Для визначеного раніше вектора **a** отримаємо:

```

Norm[a]
 $\sqrt{\text{Abs}[ax]^2 + \text{Abs}[ay]^2 + \text{Abs}[az]^2}$ 

```

$$\left. \begin{array}{l} \text{Norm}[a] \\ \sqrt{\text{Abs}[ax]^2 + \text{Abs}[ay]^2 + \text{Abs}[az]^2} \end{array} \right\}$$

Як видно з результату, що елементи списку **a** вважаються у загальному випадку комплексними. У даному курсі ми будемо працювати лише з дійсними числами, тому функція **Abs** тут зайва. Для спрощення виразу можна використати **Simplify** вказавши, що значення координат вектора **a** – дійсні числа.

```

Simplify[Norm[a], Assumptions -> {ax, ay, az} ∈ Reals]
 $\sqrt{ax^2 + ay^2 + az^2}$ 

```

$$\left. \begin{array}{l} \text{Simplify}[\text{Norm}[a], \text{Assumptions} \rightarrow \{ax, ay, az\} \in \text{Reals}] \\ \sqrt{ax^2 + ay^2 + az^2} \end{array} \right\}$$

Орти декартової системи координат (**i**, **j**, **k**) задаються векторами одиничної довжини

```

i = {1, 0, 0}; j = {0, 1, 0}; k = {0, 0, 1};
Norm[i]

```

1

$$\left. \begin{array}{l} i = \{1, 0, 0\}; j = \{0, 1, 0\}; k = \{0, 0, 1\}; \\ \text{Norm}[i] \\ 1 \end{array} \right\}$$

В *Mathematica* одиничні вектори для *n*-вимірного простору можна отримати за допомогою функції **UnitVector**

?? UnitVector

UnitVector[k] gives the two-dimensional unit vector in the k^{th} direction.
UnitVector[n, k] gives the n -dimensional unit vector in the k^{th} direction. >>

Attributes[UnitVector] = {Protected}

Options[UnitVector] = {WorkingPrecision $\rightarrow \infty$ }

UnitVector[2]

{0, 1}

UnitVector[5, 4]

{0, 0, 0, 1, 0}

Вектор можна множити на дійсне число α і в результаті отримаємо вектор паралельний до початкового та з довжиною в α раз більшою. Наприклад, $\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z)$, або $a_x \vec{i} = \{a_x, 0, 0\}$. Це дозволяє представити раніше уведений вектор $\vec{a}$ через лінійну комбінацію базисних векторів $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

i = UnitVector[3, 1];

j = UnitVector[3, 2];

k = UnitVector[3, 3];

a = {ax, ay, az}; α a

{ax α , ay α , az α }

ax i + **ay j** + **az k**

{ax, ay, az}

Якщо вектор помножити на число $1/L$, де L – довжина (норма) вектора, то ми отримаємо одиничний вектор, який паралельний до початкового. В *Mathematica* цю операцію можна здійснити за допомогою функції **Normalize**

Normalize[{3, 4}]

Normalize[{2, 3, 6}]

$\left\{\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\}$

$\left\{\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right\}$

$$\text{Normalize}[a] = \left\{ \frac{ax}{\sqrt{\text{Abs}[ax]^2 + \text{Abs}[ay]^2 + \text{Abs}[az]^2}}, \frac{ay}{\sqrt{\text{Abs}[ax]^2 + \text{Abs}[ay]^2 + \text{Abs}[az]^2}}, \frac{az}{\sqrt{\text{Abs}[ax]^2 + \text{Abs}[ay]^2 + \text{Abs}[az]^2}} \right\}$$

Щоб перевірити, чи два вектори паралельні достатньо порівняти їх одиничні вектори:

```
a = {2.4, 5.8, 7.1}; b = {4.08, 9.86, 12.07};
```

```
Normalize[a]
```

```
Normalize[b]
```

```
{0.25325, 0.61202, 0.749197}
```

```
{0.25325, 0.61202, 0.749197}
```

Кількість елементів вектора (розмірність простору) можна отримати за допомогою функції **Length**. А логічна функція **VectorQ** виконує перевірку виразу на те, чи результат є вектором.

```
{Length[a], VectorQ[a + b], VectorQ[Length[a]]}
{3, True, False}
```

В *Mathematica* для зображення векторів використовують функцію зображення стрілок **Arrow** у відповідній графічній оболонці: **Graphics** – 2D графіка та **Graphics3D** – 3D графіка. Для функції **Arrow** необхідно вказати координати початку та кінця стрілки

? Arrow

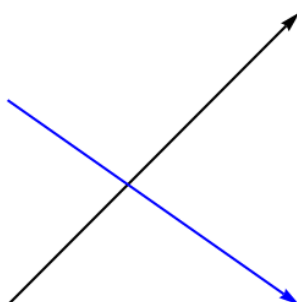
Arrow[{*pt*₁, *pt*₂}] is a graphics primitive that represents an arrow from *pt*₁ to *pt*₂.

Arrow[{*pt*₁, *pt*₂}, *s*] represents an arrow with its ends set back from *pt*₁ and *pt*₂ by a distance *s*.

Arrow[{*pt*₁, *pt*₂}, {*s*₁, *s*₂}] sets back by *s*₁ from *pt*₁ and *s*₂ from *pt*₂.

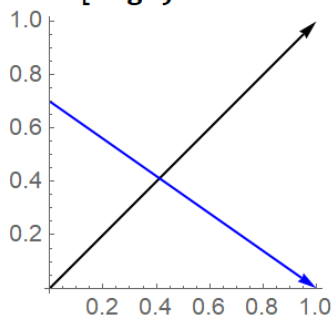
Arrow[*curve*, ...] represents an arrow following the specified *curve*. >>

```
fig1 = Graphics[{Arrowheads[0.07], Arrow[{{0, 0}, {1, 1}}],
  Blue, Arrow[{{0, 0.7}, {1, 0}}]}]
```

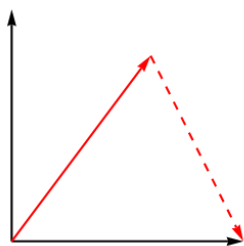


Для відображення осей координат можна використати функцію **Show** з опцією **Axes → True**.

```
Show[fig1, Axes → True]
```

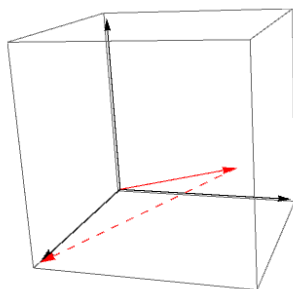


```
origin = {0, 0}; i = UnitVector[1]; j = UnitVector[2];
a = {0.6, 0.8};
i0 = Arrow[{origin, i}]; j0 = Arrow[{origin, j}];
a0 = Arrow[{origin, a}]; b0 = Arrow[{a, i}];
Graphics[{Arrowheads[0.07], i0, j0, Red, a0, Dashed, b0}]
```



Приклад використання функції **Graphics3D** для 3D графіки:

```
origin = {0, 0, 0};
i = UnitVector[3, 1];
j = UnitVector[3, 2];
k = UnitVector[3, 3];
a = {0.4, 0.8, 0.3};
i0 = Arrow[{origin, i}];
j0 = Arrow[{origin, j}];
k0 = Arrow[{origin, k}];
a0 = Arrow[{origin, a}]; b0 = Arrow[{a, i}];
fig3 = Graphics3D[{Arrowheads[0.04], i0, j0, k0, Red, a0, Dashed, b0}]
```



7. Інваріанти тензорів другого рангу

Подібно до того, як при повороті декартової системи координат змінюються компоненти векторів, але їх довжини залишаються незмінними, для тензорів другого рангу також існують свої інваріанти. Для отримання явного виду цих виразів представимо характеристичне рівняння (5.7) у явному вигляді, привівши подібні доданки з однаковими степенями λ :

$$\lambda^3 + b \lambda^2 + c \lambda = d, \quad (7.1)$$

$$b = T_{11} + T_{22} + T_{33} \quad (7.2)$$

$$c = \begin{vmatrix} T_{22} & T_{32} \\ T_{23} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{31} \\ T_{13} & T_{33} \end{vmatrix} \quad (7.3)$$

$$d = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} \quad (7.4)$$

Тензор T_{ij} може бути записаний у різних системах координат, але при цьому корені характеристичного рівняння – його власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – від системи координат не залежать. А так може бути лише тоді, коли коефіцієнти характеристичного рівняння b, c та d не змінюються при повороті системи координат, тобто є *інваріантами*. Їх ще називають *головними інваріантами* тензора, випишемо їх:

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} = inv \quad (7.5)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{22} & T_{32} \\ T_{23} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{31} \\ T_{13} & T_{33} \end{vmatrix} = inv \quad (7.6)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = inv \quad (7.7)$$

Зауважимо, що I_1 є лінійною функцією компонент тензора, I_2 – квадратичною, а I_3 – кубічною. Відповідно до цього їх також називають інваріантами першого, другого і третього порядку. Величини цих інваріантів можна виразити через власні значення

тензора, скориставшись тим, що у системі координат головних осей тензор має діагональний вигляд з такими значеннями діагональних елементів $T_{11} = \lambda_1, T_{22} = \lambda_2, T_{33} = \lambda_3$

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{inv} \quad (7.8)$$

$$I_2 = \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 = \text{inv} \quad (7.9)$$

$$I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \text{inv} \quad (7.10)$$

Крім розглянутих інваріантів існує безліч інших, оскільки довільна їх функція є також інваріантом.

Розглянемо процес отримання загальних формул (7.1)–(7.10) аналітичними методами системи *Mathematica*.

Створимо тензор T_{ij} у загальному вигляді, у якому кожний елемент задаймо змінною з індексами – $T_{i,j}$. Слід пам'ятати, що при використанні індексів, змінна T повинна залишатись невизначеною (інакше система підставить у вираз $T_{i,j}$ значення T). Якщо у даній сесії роботи змінна T була визначена, то зняти визначення можна так: $T = .$

```

T = 5; T1,1
51,1

T = . ; T1,1
T1,1

T = .; Tij = Table[Ti,j, {i, 1, 3}, {j, 1, 3}]

{{T1,1, T1,2, T1,3}, {T2,1, T2,2, T2,3}, {T3,1, T3,2, T3,3}}

λ = .; Tij - λ IdentityMatrix[3] // MatrixForm
MatrixForm=
(
  -λ + T1,1   T1,2   T1,3
    T2,1   -λ + T2,2   T2,3
    T3,1     T3,2   -λ + T3,3
)

Collect[Det[Tij - λ IdentityMatrix[3]], λ] == 0

-λ3 - T1,3 T2,2 T3,1 + T1,2 T2,3 T3,1 + T1,3 T2,1 T3,2 - T1,1 T2,3 T3,2 -
  T1,2 T2,1 T3,3 + T1,1 T2,2 T3,3 + λ2 (T1,1 + T2,2 + T3,3) + λ
  (T1,2 T2,1 - T1,1 T2,2 + T1,3 T3,1 + T2,3 T3,2 - T1,1 T3,3 - T2,2 T3,3) == 0

```

Отже, отримано рівняння для визначення власних значень та інваріантів тензора другого рангу у загальному вигляді.

Коефіцієнти біля величин λ^2 , λ та вільний доданок визначають інваріанти тензора I_1, I_2, I_3 відповідно.

Вираз у вигляді поліному за змінною λ отримано за допомогою функції **Collect**. Для отримання списку коефіцієнтів біля різних степенів змінної λ використаємо функцію **CoefficientList**.

?Collect

Collect[*expr*, *x*] collects together terms involving the same powers of objects matching *x*.
 Collect[*expr*, {*x*₁, *x*₂, ...}] collects together terms that involve the same powers of objects matching *x*₁, *x*₂,
 Collect[*expr*, *var*, *h*] applies *h* to the expression that forms the coefficient of each term obtained. >>

?CoefficientList

CoefficientList[*poly*, *var*] gives a list of coefficients of powers of *var* in *poly*, starting with power 0.
 CoefficientList[*poly*, {*var*₁, *var*₂, ...}] gives an array of coefficients of the *var*_{*i*}.
 CoefficientList[*poly*, {*var*₁, *var*₂, ...}, {*dim*₁, *dim*₂, ...}] gives
 an array of dimensions {*dim*₁, *dim*₂, ...}, truncating or padding with zeros as needed. >>

```
inv = CoefficientList[Det[Tij - λ IdentityMatrix[3]], λ];
```

```
inv[[3]]
```

```
T1,1 + T2,2 + T3,3
```

```
inv[[2]]
```

```
T1,2 T2,1 - T1,1 T2,2 + T1,3 T3,1 + T2,3 T3,2 - T1,1 T3,3 - T2,2 T3,3
```

```
inv[[1]]
```

```
-T1,3 T2,2 T3,1 + T1,2 T2,3 T3,1 + T1,3 T2,1 T3,2 -  

  T1,1 T2,3 T3,2 - T1,2 T2,1 T3,3 + T1,1 T2,2 T3,3
```

Для того щоб спростити отримані вирази потрібно записати їх у системі координат власних осей, тобто записати їх через власні значення тензора. Зробимо це, задавши недіагональним елементам нульові значення.

```
Table[If[i == j, Ti,j = λi, Ti,j = 0], {i, 1, 3}, {j, 1, 3}]  

{{λ1, 0, 0}, {0, λ2, 0}, {0, 0, λ3}}
```

```
inv // TableForm
```

```
λ1 λ2 λ3
```

```
-λ1 λ2 - λ1 λ3 - λ2 λ3
```

```
λ1 + λ2 + λ3
```

```
-1
```

Інваріанти тензорів вищих порядків можна знайти подібним методом, але це значно складніша задача.

Задача 7.1. Перетворити до діагонального вигляду тензор

$$\|M_{ik}\| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}. \quad (7.11)$$

Розрахувати перший та третій інваріанти цього тензора. Розрахунки виконати як для діагонального та і недиагонального тензорів.

Розв'язок. Запишемо цей тензор у діагональному вигляді через його власні значення і розрахуємо інваріанти для обох випадків.

Власні значення знайдемо двома способами.

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \\ \text{Solve}[\text{Det}[M - \lambda \text{IdentityMatrix}[3]] == 0, \lambda] \\ \lambda &= \text{Eigenvalues}[M] \\ \{\{\lambda \rightarrow 2\}, \{\lambda \rightarrow 3 - \sqrt{11}\}, \{\lambda \rightarrow 3 + \sqrt{11}\}\} \\ \{3 + \sqrt{11}, 2, 3 - \sqrt{11}\} \end{aligned}$$

Власні значення однакові, лише записані у різному порядку.

Розрахуємо інваріанти через елементи тензора (7.11) та через його власні значення:

$$\begin{aligned} I1 &= \lambda[[1]] + \lambda[[2]] + \lambda[[3]] \\ I1 &= M[[1, 1]] + M[[2, 2]] + M[[3, 3]] \\ 8 \\ 8 \\ I3 &= \text{Det}[M] \\ I3 &= \lambda[[1]] \lambda[[2]] \lambda[[3]] // \text{FullSimplify} \\ -4 \\ -4 \end{aligned}$$

8. Операції інверсії. Псевдотензори

У розділі 7 (частина 1) розглядалися перетворення компонент векторів при інверсії декартової системи координат. Тепер розглянемо це питання ширше для тензора довільного рангу.

Операція інверсії полягає в переході від правої до лівої системи координат. У переважній більшості випадків користуються правою системою координат. У теоретичній фізиці операція інверсії тісно пов'язана з проблемою дзеркальної симетрії природи.

Інверсію декартових координат можна виконувати за допомогою матриці інверсії

$$M_I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

Розглянемо як перетворюються скаляри, вектори та тензори при інверсії системи координат.

Для векторів, як зазначалося в §7, у залежності від того чи змінюється напрямок вектора при інверсії координат, вектори поділяють на *істинні вектори (полярні)* та *псевдовектори (аксіальні)*.

До істинних векторів належать швидкість, прискорення, сила, напруженість електричного поля (сила, що діє на одиничний заряд). Незалежно від вибраної системи координат вони мають незмінний напрямок (при інверсії координат компоненти цих векторів змінюються $P'_i = -P_i$).

Псевдовектори (аксіальні) вектори при інверсії координат змінюють напрямок на протилежний, оскільки їх компоненти не змінюють знаку $A'_i = A_i$. Такими векторами є вектори, що є результатом векторного добутку двох полярних векторів і їх напрямок визначається за певним правилом. Псевдовекторами є такі вектори, напрямок яких визначається певною угодою. Наприклад, кутова швидкість, магнітна індукція, момент сили і т.п.

По відношенню до операції інверсії скаляри також діляться на *істинні*, або *чисті скаляри* та *псевдоскаляри*. Істинні скаляри це числа, які не залежать від довільних операцій над системою координат. Наприклад, температура, маса, тиск. Псевдоскаляри також визначаються одним числом, однак їхній знак змінюється при інверсії на протилежний. Наприклад, скалярний добуток вектора на

псевдовектор є псевдоскаляром. Скалярний добуток двох полярних чи двох аксіальних векторів є чистим скаляром.

Розглянемо тензор другого рангу, який є тензорним добутком двох полярних векторів $\vec{P}$ та $\vec{B}$:

$$T_{ij} = P_i B_j . \quad (8.2)$$

Для полярних векторів справедливі наступні перетворення при інверсії $P'_i = -P_i$, $B'_i = -B_i$, а отже

$$T'_{ij} = P'_i B'_j = P_i B_j = T_{ij} \quad (8.3)$$

Якщо тензор другого рангу є тензорним добутком полярного вектора $\vec{P}$ та аксіального $\vec{A}$, то враховуючи перетворення при інверсії аксіального вектора $A'_i = A_i$, отримуємо

$$T'_{ij} = A'_i B'_j = -A_i B_j = -T_{ij} \quad (8.4)$$

Отже, якщо при інверсії тензори перетворюються за правилом

$$T'_{ik\dots l} = -\alpha_{im}\alpha_{kn} \dots \alpha_{lr} T_{mn\dots r}, \quad (8.5)$$

то їх називають *псевдотензорами*.

Оскільки при інверсії $\alpha_{ij} = -\delta_{ij}$, то для псевдотензорів справедливе співвідношення

$$T'_{ik\dots l} = (-1)^{R+1} T_{mn\dots r}, \quad (8.6)$$

де R – ранг тензора.

Тензорний добуток двох векторів у системі *Mathematica* можна виконати за допомогою функції **TensorProduct**:

```
? TensorProduct

TensorProduct[tensor1, tensor2, ...]
represents the tensor product of the tensori. >>

A = {a1, a2, a3}; B = {b1, b2, b3};
TensorProduct[A, B] // MatrixForm
MatrixForm=
( a1 b1  a1 b2  a1 b3
  a2 b1  a2 b2  a2 b3
  a3 b1  a3 b2  a3 b3 )
```

9. Тензорна форма фізичних законів. Тензори фізичних величин

Фізичні закони, записані в тензорній формі, мають однаковий вигляд у довільній системі координат. Такі рівняння називають *коваріантними*.

Прикладом фізичних законів, на які суттєво впливає те, в якій системі координат вони записані є рівняння Максвела, в які входять напруженість електричного та магнітного поля. Наприклад, в системі координат, в якій заряд нерухомий існує лише електричне поле, а в рухомій системі координат з'являється ще й магнітне поле.

Проблема вирішується після введення тензора електромагнітного поля в 4-вимірній системі координат простору-часу.

Всі доданки законів, які записані у тензорній формі, містять тензори однакового рангу, які однаковим чином перетворюються при переході до нової системи координат, і тому форма закону залишається коваріантною.

Ще приклад – ефект Холла, який полягає в тому, що протікання струму в металі чи напіпровіднику, поміщеному в магнітне поле, супроводжується виникненням поперечного електричного поля. При цьому зв'язок між компонентами вектора густини струму $\vec{j}$ і напруженості електричного поля $\vec{E}$ визначається тензором питомого опору ρ_{ik} : $E_i = \rho_{ik} j_k$.

Спеціальна (СТВ) і загальна (ЗТВ) теорії відносності - це дві галузі фізики, саме існування яких було б неможливим без тензорного обчислення. У той час як математичний апарат СТВ зводиться до теорії тензорних полів в чотиривимірному псевдоевклідовому просторі, в ЗТВ простір подій псевдориманів. У квантовій теорії поля, що є основою для опису взаємодій елементарних частинок, також широко використовуються поняття і методи тензорного аналізу. Нарешті, фізичні властивості кристалів як анізотропних середовищ найприродніше описуються саме тензорами, приклади яких ми розглянемо нижче. Дійсно, анізотропія (тобто залежність властивостей від вибраного напрямку) висуває вимоги до форми запису фізичних співвідношень. Так, наприклад, для однорідних ізотропних середовищ закон Ома в диференціальній формі має вигляд $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, за яким вектор густини електричного струму $\vec{j}$ і напруженості електричного поля $\vec{E}$

паралельні. У анізотропному середовищі закон Ома набуває іншого вигляду:

$$j_i = \sigma_{ik} E_k. \quad (9.1)$$

Тут компоненти векторів $\vec{j}$ і $\vec{E}$ пов'язані через складові тензора питомої електропровідності σ_{ik} . Це означає, що в загальному випадку напрямок протікання електричного струму відрізняється від напрямку прикладеного електричного поля.

В розгорнутому вигляді співвідношення (9.1) записується так

$$\begin{aligned} j_1 &= \sigma_{11}E_1 + \sigma_{12}E_2 + \sigma_{13}E_3 \\ j_2 &= \sigma_{21}E_1 + \sigma_{22}E_2 + \sigma_{23}E_3 \\ j_3 &= \sigma_{31}E_1 + \sigma_{32}E_2 + \sigma_{33}E_3 \end{aligned} \quad (9.2)$$

Тензор σ_{ik} симетричний, і тому в системі координат головних осей має діагональний вигляд

$$\|\sigma_{ik}\| = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}, \quad (9.3)$$

де $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – головні значення тензора. У системі головних осей співвідношення (9.2) матимуть вигляд

$$\begin{aligned} j_1 &= \sigma_1 E_1 \\ j_2 &= \sigma_2 E_2 \\ j_3 &= \sigma_3 E_3 \end{aligned} \quad (9.4)$$

тобто провідність вдовж різних координатних осей різна і визначається головними значеннями тензора електропровідності. Тому є зміст говорити про електропровідність в певному напрямку.

Розглянемо електропровідність у напрямку одиничного вектора $\vec{l}$. Направимо вектор напруженості електричного поля в цьому напрямку $\vec{E} = E\vec{l}$. В анізотропному середовищі вектор $\vec{j}$ не збігатиметься з цим напрямком. За визначенням електропровідність в напрямку $\vec{l}$ визначатиметься виразом

$$\sigma(\vec{l}) = \frac{j_E}{E} \quad (9.5)$$

j_E – густина струму в цьому напрямку, тобто проекція $\vec{j}$ на напрямок $\vec{E}$

$$j_E = (\vec{j}, \vec{l}) = j_1 l_1 + j_2 l_2 + j_3 l_3, \quad (9.6)$$

l_1, l_2, l_3 – проекції вектора $\vec{l}$ на осі x_1, x_2, x_3 декартової системи координат, тобто косинуси кутів між вектором $\vec{l}$ та відповідною віссю.

Підставимо (9.1) в (9.6), отримаємо $j_E = \sigma_{ik} E_k l_i$. А з (9.5)

$$\sigma(\vec{l}) = \frac{j_E}{E} = \frac{\sigma_{ik} E_k l_i}{E} = \sigma_{ik} l_k l_i \quad (9.7)$$

У системі головних осей матимемо

$$\sigma(\vec{l}) = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 l_2^2 + \sigma_3 l_3^2 \quad (9.8)$$

Існує інший вигляд закону Ома, записаний через тензор питомого опору $E_i = \rho_{ik} j_k$. Тензор питомого опору ρ_{ik} – обернений до тензора провідності σ_{ik} і дорівнює

$$\rho_{ik} = \frac{(-1)^{i+k}}{\Delta} M_{ki} \quad (9.9)$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \quad (9.10)$$

– визначник з елементів тензора електропровідності. M_{ki} – мінор елемента σ_{ik} визначника (9.10)

Як зазначалося в §4 $\rho_{ik} \neq \frac{1}{\sigma_{ik}}$, але в системі головних осей тензора

$$\rho_{11} = \frac{1}{\sigma_{11}}, \rho_{22} = \frac{1}{\sigma_{22}}, \rho_{33} = \frac{1}{\sigma_{33}}$$

Для ізотропного середовища

$$\sigma_{ik} = \sigma \delta_{ik}, \Delta = \sigma^3, \rho_{ik} = \rho \delta_{ik}, \rho = 1/\sigma.$$

Для зображення тензорів другого порядку використовують характеристичні поверхні (6.1), які називають *індикатрисами*. У системі головних осей тензора рівняння індикатриси має вигляд

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 1, \quad (9.11)$$

Для тензорів, що описують більшість фізичних властивостей (діелектричну проникність, електричну провідність, тощо) усі власні значення $\lambda_i > 0$ ($i = 1, 2, 3$). Тоді рівняння (9.11) описує еліпсоїд.

Головні осі цього еліпсоїда називають *осями індикатрис*, вони збігаються з головними осями тензора. Півосі еліпсоїда визначаються співвідношеннями

$$a = 1/\sqrt{\lambda_1}, \quad b = 1/\sqrt{\lambda_2}, \quad c = 1/\sqrt{\lambda_3} \quad (9.12)$$

Характеристичний еліпсоїд широко використовують для опису анізотропії діелектричних властивостей кристалів. Застосовують його і для опису оптичних властивостей. Тоді характеристичну поверхню тензора ε_{ij} називають *оптичною індикатрисою* або *еліпсоїдом Френеля* і використовують її для визначення оптичної анізотропії, пов'язаної з подвійним променезаломленням.

Характер оптичних явищ у кристалі істотно залежить від співвідношення власних значень тензора ε_{ij} . Розрізняють три основні випадки:

- 1) $\varepsilon_{11} \neq \varepsilon_{22} \neq \varepsilon_{33}$ – кристали нижчої категорії;
- 2) $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} \neq \varepsilon_{33}$ – кристали середньої категорії;
- 3) $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon$ – кристали вищої категорії.

Із оптичної індикатрис

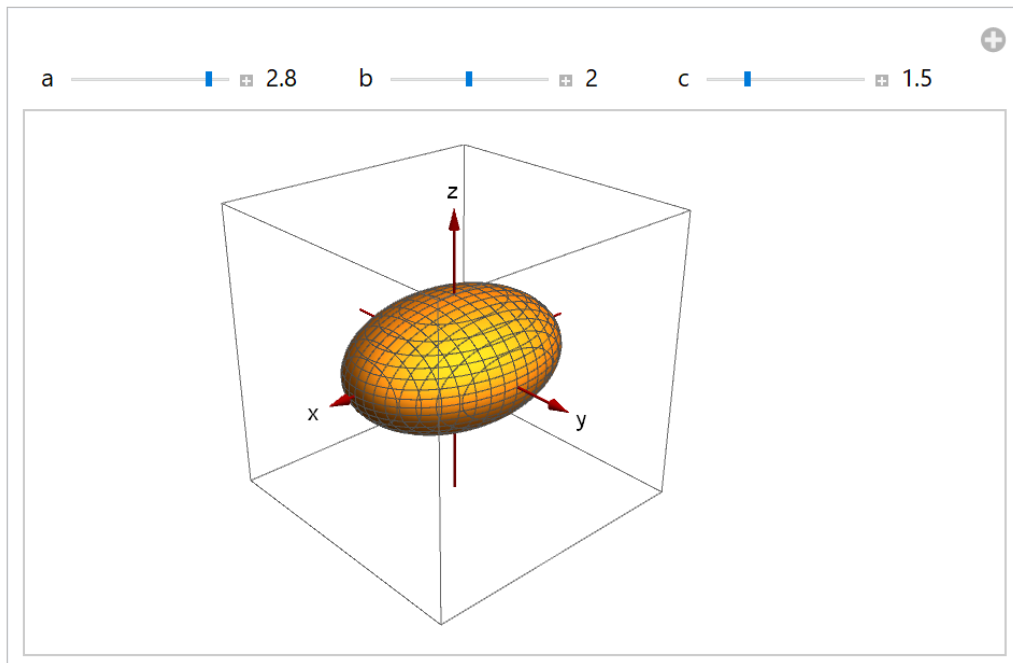
 можна визначити характер поширення поляризованого світла в кристалі. Для цього спочатку обирають напрямок поширення світла (хвильову нормаль). Особливе значення мають центральні перетини оптичної індикатрис, що проходять крізь початок координат. Потрібно зробити такий переріз, перпендикулярний до заданого напрямку поширення світла. Загалом ці перетини виявляються еліптичними (хоча бувають і колові перерізи). Тоді півосі відповідного еліпса задаватимуть напрямки коливань електричного вектора двох світлових хвиль, які поширюються вздовж цієї хвильової нормалі, а фазові швидкості цих хвиль (чи показники заломлення) визначатимуться довжинами згаданих півосей.

За допомогою функції **Manipulate** створимо в системі *Mathematica* демонстрацію еліпсоїда з можливістю керувати розмірами його півосей.

```

Manipulate[s = 1.25 Max[a, b, c];
Show[Graphics3D[{Darker[Red], Arrowheads[0.04],
  Arrow[Tube[{{0, -s, 0}, {0, s, 0}}, .03]],
  Arrow[Tube[{{-s, 0, 0}, {s, 0, 0}}, .03]],
  Arrow[Tube[{{0, 0, -s}, {0, 0, s}}, .03]], Black, Text["x", {1.1 s, 0, 0}],
  Text["y", {0, 1.1 s, 0}], Text["z", {0, 0, 1.1 s}]]],
ContourPlot3D[x^2 / a^2 + y^2 / b^2 + z^2 / c^2, {x, -3.5, 3.5},
  {y, -3.5, 3.5}, {z, -3.5, 3.5}, Contours -> {1}, MeshStyle -> GrayLevel[0.3],
  PlotPoints -> 40], ImageSize -> {250, 150},
PlotRange -> {{-3.5, 3.5}, {-3.5, 3.5}, {-3.5, 3.5}}],
Row[{Control[{{a, 2.8, "a"}, 1, 3, Appearance -> "Labeled", ImageSize -> Tiny}],
  Control[{{b, 2, "b"}, 1, 3, Appearance -> "Labeled", ImageSize -> Tiny}],
  Control[{{c, 1.5, "c"}, 1, 3, Appearance -> "Labeled", ImageSize -> Tiny}]]],
TrackedSymbols -> {a, b, c}]

```



10. Тензор інерції

Розглянемо тепер *тензор інерції*. Момент інерції I матеріальної точки маси m відносно деякої осі дорівнює

$$I = md^2, \quad (10.1)$$

де d – віддаль до осі.

Розглянемо матеріальну точку маси m , яка знаходиться в точці з радіус-вектором $\vec{r}(x_1, x_2, x_3)$. Її момент інерції відносно осей x_1, x_2, x_3 визначаються відповідними виразами

$$I_1 = m(x_2^2 + x_3^2), \quad I_2 = m(x_1^2 + x_3^2), \quad I_3 = m(x_1^2 + x_2^2) \quad (10.2)$$

Введемо тензор

$$I_{ik} = m[(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\delta_{ik} - x_i x_k] = m(x_r x_r \delta_{ik} - x_i x_k), \quad (10.3)$$

який називається *тензором моменту інерції* або *тензором інерції*

$$\|I_{ik}\| = \begin{vmatrix} m(x_2^2 + x_3^2) & -m x_1 x_2 & -m x_1 x_3 \\ -m x_1 x_2 & m(x_1^2 + x_3^2) & -m x_2 x_3 \\ -m x_1 x_3 & -m x_2 x_3 & m(x_1^2 + x_2^2) \end{vmatrix} \quad (10.4)$$

Діагональні елементи цього тензора дорівнюють моментам інерції відносно координатних осей, а недіагональні елементи не мають наочного фізичного змісту.

Якщо маємо систему N матеріальних точок з масами $m^{(n)}$ та координатами $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}$ ($n = 1, 2, \dots, N$), то тензор інерції системи дорівнює сумі тензорів інерції окремих матеріальних точок.

$$I_{ik} = \sum_{n=1}^N m^{(n)} (x_r^{(n)} x_r^{(n)} \delta_{ik} - x_i^{(n)} x_k^{(n)}) \quad (10.5)$$

Від системи матеріальних точок можна перейти до тіла з неперервно розподіленою масою. Нехай $\rho(x_1, x_2, x_3)$ – густина твердого тіла. Розділимо це тіло на елементарні об'єми $\Delta V^{(n)} = \Delta x_1^{(n)} \Delta x_2^{(n)} \Delta x_3^{(n)}$, які достатньо малі, щоб можна було вважати їх маси $\Delta m^{(n)} = \rho(x_1, x_2, x_3) \Delta x_1^{(n)} \Delta x_2^{(n)} \Delta x_3^{(n)}$ матеріальними точками.

При $\Delta V^{(n)} \rightarrow 0$ можна перейти до інтегрування і отримати вираз

$$I_{ik} = \iiint_V \rho(x_1, x_2, x_3) (x_r x_r \delta_{ik} - x_i x_k) dx_1 dx_2 dx_3 \quad (10.6)$$

Задача 10.1. Розрахувати тензор інерції однорідної кулі радіусом R та густиною ρ_0 .

Розв'язок. Для компоненти I_{33}

$$I_{33} = \rho_0 \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz \quad (10.7)$$

У сферичній системі координат

$$\begin{aligned} I_{33} &= \rho_0 \iiint_V (r^2 \sin^2 \theta) r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi \rho_0 \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \\ &= \frac{8\pi \rho_0}{15} R^5 = \frac{2}{5} m R^2 \end{aligned}$$

Легко переконатися, що $I_{11} = I_{22} = I_{33}$, а недіагональні елементи дорівнюють нулю. Отже тензор інерції вироджується в скаляр.

Задача 10.2. Розрахувати тензор інерції суцільного однорідного циліндра радіусом R та довжиною L , вважати, що вісь циліндра збігається з віссю Oz , а густина циліндра ρ_0 .

Розв'язок. Для компоненти I_{33}

$$I_{33} = \rho_0 \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$$

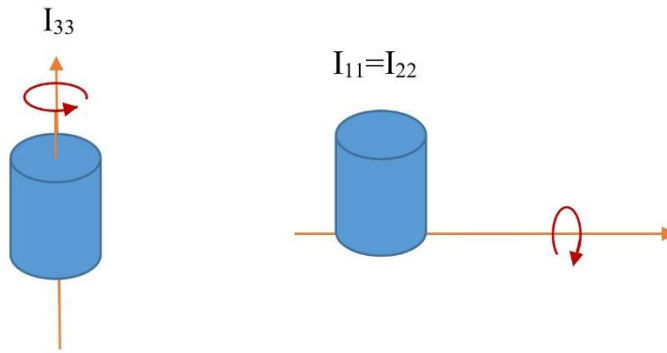
У циліндричній системі координат

$$\begin{aligned} I_{33} &= \rho_0 \iiint_V (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi) \rho d\rho d\varphi dz = \\ &= \rho_0 \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^L dz = \frac{\pi \rho_0}{2} R^4 L \end{aligned} \quad (10.8)$$

$$I_{11} = \rho_0 \iiint_V (y^2 + z^2) dx dy dz$$

$$\begin{aligned} I_{22} &= I_{11} = \rho_0 \iiint_V (\rho^2 \sin^2 \varphi + z^2) \rho d\rho d\varphi dz = \\ &= \rho_0 \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^L dz + \rho_0 \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^L z^2 dz = \\ &= \frac{\pi \rho_0}{4} R^4 L + \frac{\pi \rho_0}{3} R^2 L^3 \end{aligned}$$

$$\|I_{ik}\| = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\pi \rho_0}{4} R^4 L + \frac{\pi \rho_0}{3} R^2 L^3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\pi \rho_0}{4} R^4 L + \frac{\pi \rho_0}{3} R^2 L^3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\pi \rho_0}{2} R^4 L \end{array} \right\| \quad (10.9)$$



У випадку $L \gg R$, $I_{22} = I_{11} = \frac{\pi \rho_0}{3} R^2 L^3 = \frac{1}{3} m L^2$ – момент інерції стрижня довжиною L навколо перпендикулярної осі, що проходить через його кінець.

Розглянемо способи розрахунку тензора інерції у системі *Mathematica*.

У системі *Mathematica* крім функцій аналітичного інтегрування, які дозволяють розраховувати момент інерції існує функція **MomentOfInertia**:

?? MomentOfInertia

`MomentOfInertia[reg, pt, v]` computes the moment of inertia for the region *reg* rotating around an axis through the point *pt* in direction *v*.
`MomentOfInertia[reg]` computes the moment of inertia matrix for the region *reg* relative to the center of mass.
`MomentOfInertia[reg, pt]` computes the moment of inertia matrix relative to the point *pt*. >>

`Attributes[MomentOfInertia] = {Protected}`

`Options[MomentOfInertia] = {Assumptions -> $Assumptions}`

Наприклад, розрахуємо тензор інерції однорідної кулі радіусом R відносно її центра мас

`MomentOfInertia[Ball[{0, 0, 0}, R], {0, 0, 0},
Assumptions -> {R > 0}]`

$\left\{ \left\{ \frac{8 \pi R^5}{15}, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, \frac{8 \pi R^5}{15}, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, \frac{8 \pi R^5}{15} \right\} \right\}$

Функція **Ball** визначає кулю, з заданим центром та радіусом.

Отриманий результат необхідно помножити та об'ємну густину ρ_0 .

$$I = \frac{8\pi\rho_0}{15}R^5 = \frac{2}{5}mR^2 \quad (10.10)$$

Цей же результат можна отримати і в результаті інтегрування

```

M = {{y^2 + z^2, -x y, -y z}, {-y x, x^2 + z^2, -y z},
      {-z x, -z y, x^2 + y^2}};
M // MatrixForm
Integrate[M, {x, y, z} ∈ Ball[{0, 0, 0}, R], Assumptions → {R > 0}]
'MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -x y & -y z \\ -x y & x^2 + z^2 & -y z \\ -x z & -y z & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

:

$$\left\{ \left\{ \frac{8 \pi R^5}{15}, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, \frac{8 \pi R^5}{15}, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, \frac{8 \pi R^5}{15} \right\} \right\}$$


```

Якщо задати функцію **Sphere**, то отримаємо момент інерції сфери, тобто порожнистої фігури, маса якої рівномірно розподілена на поверхні.

```

MomentOfInertia[Sphere[{0, 0, 0}, R], Assumptions → {R > 0}]

$$\left\{ \left\{ \frac{8 \pi R^4}{3}, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, \frac{8 \pi R^4}{3}, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, \frac{8 \pi R^4}{3} \right\} \right\}$$


```

Отриманий результат помножимо на поверхневу густину σ_0

$$I = \frac{8\pi\sigma_0}{3}R^4 = \frac{2}{3}mR^2 \quad (10.11)$$

Момент інерції сфери майже у 2 рази більший ніж у кулі. Для обидвох фігур момент інерції відносно довільної осі, що проходить через центр мас однаковий, тому тензор вироджується в скаляр.

Розглянемо випадок, коли куля зміщена від центра координат на величину h в напрямку осі Oz. Розрахуємо тензор інерції відносно початку координат

```

MomentOfInertia[Ball[{0, 0, h}, R], {0, 0, 0},
Assumptions -> {h ∈ Reals, R > 0}]

```

$$\left\{ \left\{ \frac{4}{15} (5 h^2 \pi R^3 + 2 \pi R^5), 0, 0 \right\}, \right. \\ \left. \left\{ 0, \frac{4}{15} (5 h^2 \pi R^3 + 2 \pi R^5), 0 \right\}, \left\{ 0, 0, \frac{8 \pi R^5}{15} \right\} \right\}$$

Такий же результат можна отримати інтегруванням за об'ємом кулі.

```

M = {{y^2 + z^2, -x y, -y z}, {-y x, x^2 + z^2, -y z},
      {-z x, -z y, x^2 + y^2}};
Integrate[M, {x, y, z} ∈ Ball[{0, 0, h}, R],
Assumptions -> {R > 0, h ∈ Reals}]

```

$$\left\{ \left\{ \frac{4}{15} (5 h^2 \pi R^3 + 2 \pi R^5), 0, 0 \right\}, \right. \\ \left. \left\{ 0, \frac{4}{15} (5 h^2 \pi R^3 + 2 \pi R^5), 0 \right\}, \left\{ 0, 0, \frac{8 \pi R^5}{15} \right\} \right\}$$

Або в декартовій системі координат, вказуючи явно усі межі інтегрування

```

Integrate[M, {z, -R + h, R + h}, {y, -sqrt[R^2 - (z - h)^2], sqrt[R^2 - (z - h)^2]},
           {x, -sqrt[R^2 - y^2 - (z - h)^2], sqrt[R^2 - y^2 - (z - h)^2]}]

```

$$\left\{ \left\{ \frac{4}{15} \pi R^3 (5 h^2 + 2 R^2), 0, 0 \right\}, \left\{ 0, \frac{4}{15} \pi R^3 (5 h^2 + 2 R^2), 0 \right\}, \left\{ 0, 0, \frac{8 \pi R^5}{15} \right\} \right\}$$

Моменти інерції відносно осей Ох та Оу при зміщенні кулі на відстань h зросли на величину

$$\Delta I = \frac{4\pi\rho_0}{3} h^2 R^3 = m h^2 \quad (10.12)$$

Це узгоджується з відомою у фізиці *теоремою Штейнера*, за допомогою якої розраховують моменти інерції тіл відносно зміщених осей обертання.

Розглянемо тепер випадок циліндра. Для визначення циліндра необхідно задати координати центрів нижньої та верхньої основи, а також його радіус.

? Cylinder

Cylinder[{{x₁, y₁, z₁}, {x₂, y₂, z₂}}, r] represents
a cylinder of radius r around the line from (x₁, y₁, z₁) to (x₂, y₂, z₂).
Cylinder[{{x₁, y₁, z₁}, {x₂, y₂, z₂}}] represents a cylinder of radius 1. >>

Нехай координати центра нижньої основи циліндра збігаються з початком координат

**MomentOfInertia[Cylinder[{{0, 0, 0}, {0, 0, L}}, R], {0, 0, 0},
Assumptions → {R > 0, L > 0}]**

$$\left\{ \left\{ \frac{1}{12} L R^2 (4 L^2 \pi + 3 \pi R^2), 0, 0 \right\}, \right. \\ \left. \left\{ 0, \frac{1}{12} L R^2 (4 L^2 \pi + 3 \pi R^2), 0 \right\}, \left\{ 0, 0, \frac{1}{2} L \pi R^4 \right\} \right\}$$

Для порівняння виконаємо розрахунки моменту інерції прямим інтегруванням у циліндричній системі координат відносно осі, що проходить через центр циліндра та перпендикулярна до його осі

**Integrate[(ρ² (Sin[φ])² + z²) ρ, {z, -L/2, L/2}, {ρ, 0, R},
{φ, 0, 2 π}]**

$$\frac{1}{12} L \pi R^2 (L^2 + 3 R^2)$$

Отриманий результат також узгоджується з теоремою Штейнера.

Розрахуємо тензор інерції циліндра відносно точки, що зміщена від його центра мас вздовж осі Oz на величину h методом інтегрування в декартовій системі координат.

$$\begin{aligned}
M = & \left\{ \left\{ y^2 + z^2, -xy, -yz \right\}, \left\{ -yx, x^2 + z^2, -yz \right\}, \right. \\
& \left. \left\{ -zx, -zy, x^2 + y^2 \right\} \right\}; \\
\text{Integrate} & \left[M, \{z, -L/2 + h, L/2 + h\}, \{y, -R, R\}, \right. \\
& \left. \left\{ x, -\sqrt{R^2 - y^2}, \sqrt{R^2 - y^2} \right\}, \text{Assumptions} \rightarrow \{R > 0, L \in \text{Reals}\} \right] \\
& \left\{ \left\{ \frac{1}{12} L \pi R^2 (12 h^2 + L^2 + 3 R^2), 0, 0 \right\}, \right. \\
& \left. \left\{ 0, \frac{1}{12} L \pi R^2 (12 h^2 + L^2 + 3 R^2), 0 \right\}, \left\{ 0, 0, \frac{1}{2} L \pi R^4 \right\} \right\}
\end{aligned}$$

При $h=L/2$ та $h=0$ отриманий результат збігається з попередніми.

Тензор інерції для циліндра заданих розмірів ($L = 1, R = 1$) :

$$\begin{aligned}
M = & \left\{ \left\{ y^2 + z^2, -xy, -yz \right\}, \left\{ -yx, x^2 + z^2, -yz \right\}, \right. \\
& \left. \left\{ -zx, -zy, x^2 + y^2 \right\} \right\}; \\
\text{Integrate} & [M, \\
& \{x, y, z\} \in \text{Cylinder}[\{\{0, 0, -1/2\}, \{0, 0, 1/2\}\}, 1]] \\
& \left\{ \left\{ \frac{\pi}{3}, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, \frac{\pi}{3}, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, \frac{\pi}{2} \right\} \right\}
\end{aligned}$$

11. Тензор деформацій

Розглянемо у пружному тілі дві довільні точки A та B , які внаслідок деформації тіла зайняли положення A' і B' (рис.11.1). До деформації їх радіус-вектори – $\vec{r}$ та $\vec{r} + \Delta\vec{r}$, після деформації – $\vec{r} + \vec{u}(\vec{r})$ та $\vec{r} + \Delta\vec{r} + \vec{u}(\vec{r} + \Delta\vec{r})$. Величини $\vec{u}(\vec{r})$ та $\vec{u}(\vec{r} + \Delta\vec{r})$ називають векторами зміщень точок A та B . Відносний радіус-вектор до деформації становив $\Delta\vec{r}$, після деформації – став $\Delta\vec{r}'$. Обчислимо зміну відстані між точками $(\Delta\vec{r}')^2 - (\Delta\vec{r})^2$, припускаючи, що вектор зміщень є неперервно-диференційованою функцією точки $\vec{r} + \vec{u}(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - \vec{u}(\vec{r})$, або в проекціях

$$\Delta x'_i = \Delta x_i + u_i(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - u_i(x_1, x_2, x_3).$$

Зберігаючи лише головні за Δx_i доданки, знаходимо $\Delta x'_i \approx \Delta x_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_k$ звідки

$$\begin{aligned} (\Delta\vec{r}')^2 - (\Delta\vec{r})^2 &= \Delta x'_i \Delta x'_i - \Delta x_i \Delta x_i \approx 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_i \Delta x_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \Delta x_k \Delta x_l = \\ &= \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right) \Delta x_i \Delta x_k = 2\varepsilon_{ik} \Delta x_i \Delta x_k, \end{aligned}$$

де позначено

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right). \quad (11.1)$$

Цей симетричний тензор називають *тензором деформацій*. У лінійній теорії пружності нехтують останнім доданком і (11.1) спрощується до вигляду

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (11.2)$$

Діагональні елементи тензора деформації (11.2) описують лінійні деформації розтягу чи стиску, недіагональні — деформацію зсуву.

Закон Гука в тензорній формі має вигляд

$$\sigma_{ik} = c_{iklm} \varepsilon_{lm}, \quad (11.3)$$

де σ_{ik} – *тензор напружень*, c_{iklm} – *тензор модулів пружності* або *тензор пружності*. Тензор пружності c_{iklm} є тензором четвертого рангу, який симетричний відносно перших двох індексів за рахунок

симетричності тензора напружень $c_{iklm} = c_{kilm}$ та симетричний відносно останніх двох індексів за рахунок симетричності тензора деформацій $c_{iklm} = c_{ikml}$.

Загальна кількість компонент тензора четвертого рангу дорівнює $3^4=81$. За рахунок властивостей симетрії кількість незалежних компонент зменшується до 21. В ізотропному середовищі кількість незалежних компонент дорівнює двом: це *модуль Юнга* та *модуль зсуву*.

Список літератури

1. Валь О.Д., Королюк С.Л., Мельничук С.В. *Основи векторного і тензорного аналізу*. – Чернівці: Книги ХХІ, 2006. – 228 с.
2. М. А. Разумова and М. М. Хотяїнцев, *Основи векторного і тензорного аналізу*. Київ: ВПЦ “Київський університет,” 2011.
3. Ф. М. Лиман, *Основи векторного та тензорного аналізу*. Суми: СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2005.
4. Ж. В. Худа, *Конспект лекцій з дисципліни «Основи векторного і тензорного аналізу»*. Кам’янське, 2019.
5. R. C. Wrede, *Introduction to vector and tensor analysis*. New York: Dover Publication, 1972.
6. Jerrold E. Marsden and Anthony Tromba, *Vector Calculus*, Sixth Edition. New York: W.H. Freeman and Company, 2011.
7. C. Beasley, “Vector Calculus in Mathematica,” Department of Electrical and Systems Engineering Washington University in St. Louis, St. Louis, 2012.