

В.Й. КУШНІРЧУК

ЗБІРНИК ВПРАВ І ЗАВДАНЬ
З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА
МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРНІВЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЮРІЯ ФЕДЬКОВИЧА**

В.Й. КУШНІРЧУК

**ЗБІРНИК ВПРАВ І ЗАВДАНЬ
З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ
ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ**

Чернівці
2023

УДК – 519.21(076)
ББК – 22.171я7
К 965

Рецензенти:

Малик І.В., доктор фіз-мат.наук, доцент кафедри математичних проблем управління і кібернетики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

Лукашів Т.О., кандидат фіз-мат.наук, доцент кафедри математичних проблем управління і кібернетики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

В.Й.Кушнірчук

К 965 Збірник вправ і завдань з теорії ймовірностей та математичної статистики. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2023. – 108 с.

У збірнику містяться вправи і завдання з курсу „Теорія ймовірностей та математична статистика”. До кожної теми наведено теоретичні відомості і умови задач для розв’язування на практичних заняттях, для самостійної та індивідуальної роботи студентів і для всіх вивід модульних контролів.

Для студентів різних спеціальностей, які вивчають курс „Теорія ймовірностей та математична статистика” і викладачів.

Друкується за ухвалою Вченої ради
факультету математики та інформатики
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича
(протокол №6 від 25 січня 2023 року)

© В.Й.Кушнірчук, 2023
© Чернівецький нац. ун-т, 2023

Вступ

У збірнику містяться завдання з курсу „Теорія ймовірностей і математична статистика” для розв’язування на практичних заняттях, самостійної та індивідуальної роботи студентів і для проведення всіх видів контролю.

До кожної теми наведено необхідний теоретичний матеріал і приклади для розв’язування. Ці приклади пропонуються для практичних аудиторних занять. Ті з прикладів, що не були розв’язані на практичних заняттях виносяться на самостійну роботу студентів. З цих прикладів також будуть сформовані завдання для індивідуальної роботи студентів (до них увійдуть приклади підвищеної складності) та для всіх видів модульних контролів (у тому числі і до підсумкового модульного контролю – екзамену). Практичні заняття, консультації, самостійна та індивідуальна робота студентів дають змогу краще засвоїти теоретичний лекційний матеріал та набути навичок розв’язування практичних задач. Контроль виконання самостійної та індивідуальної роботи студентів проводиться на самостійних та контрольних роботах і оцінюється відповідною кількістю балів.

Тема „Елементи комбінаторики”

Основний принцип комбінаторики (правило множення). Нехай необхідно послідовно виконати n дій. Якщо першу дію можна виконати k_1 способами, після чого другу дію k_2 способами, потім третю дію k_3 способами і т.д. до n -ої дії, яку можна виконати k_n способами, то всі n дій разом можна виконати $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \dots \cdot k_n$ способами.

Комбінації (сполучення) з n елементів по k елементів. Нехай множина A містить n елементів. Тоді кількість підмножин множини A , що містять k елементів, дорівнює

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Комбінаціями з n елементів $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ по k називаються k -елементні підмножини множини $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Число таких підмножин дорівнює

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Упорядковані множини. Множина з n елементів називається упорядкованою, якщо кожному елементу цієї множини поставлено у відповідність деяке число (номер елемента) від 1 до n , так, що різним елементам відповідають різні числа. Упорядковані множини вважають різними, якщо вони відрізняються або своїми елементами, або їх порядком.

Перестановки даної множини. Різні упорядковані множини, які відрізняються тільки порядком елементів (тобто можуть бути утворені з однієї і тієї ж множини), називаються перестановками цієї множини. Число перестановок множини з n елементів дорівнює $P_n = n!$.

Розміщення з n по k . Упорядковані k -елементні підмножини множини, що містить n елементів, називається розміщенням з n по k . Число розміщень з n по k дорівнює

$$A_n^k = k! \cdot C_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1).$$

Число способів розбиття множини з n елементів на m груп. Нехай $k_1, k_2, k_3, \dots, k_m$ — цілі невід’ємні числа, причому $k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_m = n$. Число способів, з допомогою яких можна представити множину A з n елементів у вигляді об’єднання множин $B_1, B_2, \dots, B_m$, що містять відповідно $k_1, k_2, \dots, k_m$ елементів, дорівнює

$$C_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}.$$

Перестановки з повторенням. Число різних перестановок, які можна одержати з n елементів, серед яких k_1 елементів першого типу, k_2 елементів другого типу, ..., k_m елементів m -го типу, дорівнює

$$C_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}.$$

**Приклади для розв'язування на практичних заняттях,
самостійної та індивідуальної роботи студентів**

1. З міста A у місто B ведуть n доріг, з міста B у місто C – m доріг. Скількома способами можна здійснити подорож за маршрутом $A-B-C$?
2. На вершину гори ведуть 7 доріг. Скількома способами турист може піднятися на гору і опуститися з неї? А якщо підйом і спуск здійснювати різними шляхами?
3. У розиграші першості країни з футболу беруть участь 16 команд. Скількома способами можуть бути розподілені золота, срібна і бронзова нагороди?
4. Скільки тризначних чисел можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4?
5. Скільки тризначних чисел можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, якщо кожна з цифр використовувати не більше одного разу?
6. Скількома способами 7 осіб можуть розміститися у черзі до каси?
7. У класі вивчають 10 предметів. У понеділок 6 уроків, причому всі уроки різні. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок?
8. Скільки є п'ятизначних чисел, кратних 5?
9. На одній з бічних сторін трикутника вибрано n точок, на другій – m точок. Кожна вершина при основі трикутника з'єднана прямими з точками, вибраними на протилежній бічній стороні. На скільки частин поділиться трикутник проведеними прямими?
10. У турнірі беруть участь n шахістів. Скільки партій буде зіграно у шаховому турнірі, якщо кожен два учасники грають між собою один раз?
11. Скільки діагоналей можна провести в опуклому багатокутнику, що має n сторін?

12. На площині проведено n прямих ліній, причому ніякі дві з них не паралельні і ніякі три не перетинаються в одній точці. Скільки точок перетину утворюється при цьому?
13. Скількома способами можна розкласти на шахівниці розмірами $n \times n$ дві різнокольорові тури, так, щоб вони не „били” одна одну?
14. Автомобільний номер складається з двох букв і чотирьох цифр. Скільки різних номерів можна утворити, використовуючи 26 букв?
15. Якщо повернути листок паперу на 180° , то цифри 0, 1, 8 не змінюються, 6 і 9 переходять одна в одну, а інші цифри втрачають зміст. Скільки існує семизначних чисел, величина яких не зміниться при повороті листка паперу на 180° ?
16. У розигранні першості країни з футболу беруть участь 16 команд. Команди, які займуть 1-е, 2-е і 3-є місця нагороджуються, відповідно, золотими, срібними і бронзовими медалями, а команди, що опиняться на двох останніх місцях, залишають вищу лігу. Скільки різних результатів першості може бути?
17. Скількома способами можна з дев'яти осіб вибрати комісію, яка складається з чотирьох осіб?
18. Скількома способами читач може бибрати три книги з шести?
19. У скількох точках перетинаються діагоналі опуклого n -кутника, якщо кожні три з них не перетинаються в одній точці?
20. Скільки підмножин має множина, що містить n елементів? (Вважати, що порожня множина є підмножиною кожної множини).
21. У кімнаті n лампочок. Скільки всього є різних способів освітлення кімнати?
22. Скількома способами можна розмістити на полиці 4 книги?
23. Скількома способами можна упорядкувати множину $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ так, щоб кожне парне число мало парний номер?
24. Скількома способами можна розкласти на шахівниці 8 тур так, щоб вони не „били” одна одну?
25. Скількома способами можна розсадити чотирьох учнів на 25 місцях?
26. Скількома способами можна розмістити n гостей за круглим столом?
27. Скільки різних слів можна утворити перестановкою букв у слові „математика”?

Тема „Простір елементарних подій. Операції над подіями.”

Нехай задано простір елементарних подій Ω .

Означення. Випадковою подією в стохастичному експерименті називається будь-яка підмножина множини елементарних подій.

Нехай задана подія A .

Означення. Протилежною до події A називається подія $\bar{A}$, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли подія A не відбувається.

Якщо події A відповідає якась множина, то події $\bar{A}$ відповідає доповнення цієї множини до множини Ω .

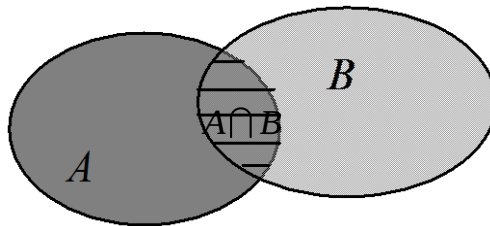
Нехай задано події A і B .

Означення. Сумою подій A і B називається така подія C , яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається хоча б одна з подій A або B .

Події C відповідає об'єднання множин A і B . Тому природно позначити суму подій так: $C = A \cup B$.

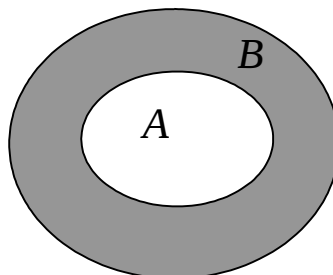
Означення. Добутком подій A і B називається подія C , яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбуваються і подія A і подія B .

Події C відповідає перетин множин A і B . Тому добуток подій позначають так: $C = A \cap B$.



Означення. Різницею подій A і B називається подія C , яка полягає в тому, що подія A відбувається і подія B не відбувається. Прийнято записувати $C = A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

Означення. Кажуть, що подія A викликає (спричиняє) подію B , якщо виконання події A приводить до виконання події B . Записують це так: $A \subset B$. Якщо подія A спричиняє подію B ($A \subset B$) і подія B спричиняє подію A ($B \subset A$), то події A і B вважають однаковими (рівними), тобто $A = B$.



Приклади для розв'язування на практичних заняттях, самостійної та індивідуальної роботи студентів

1. Монету підкидають двічі. Описати простір елементарних подій. Описати такі події:
 A – по крайній мірі один раз випаде герб; B – при другому підкиданні випаде герб.
2. Гральний кубик підкидають два рази. Описати простір елементарних подій. Описати події
 A – сума очок, що випали, дорівнює 8;
 B – по крайній мірі один раз випаде 6.
3. Підкидають монету, а після цього підкидають гральний кубик. Описати простір елементарних подій.
4. Побудувати множину елементарних подій у такому експерименті: підкидають монету і фіксують, чи випав герб; підкидання триває поки герб не випаде двічі.
5. Нехай експеримент полягає у вимірюванні двох величин, які приймають значення з відрізка $[0, 1]$. Описати простір елементарних подій.
6. A і B – підмножини площини $\Omega = \mathbb{R}^2$, причому
 $A = \{(x, y) : x + y \leq 10\}$, $B = \{(x, y) : y \leq 2x + 5\}$.
Описати множини $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{A} \cap \bar{B}$.
7. На відрізку $[a, b]$ навмання вибирають дві точки. Нехай x і y – координати цих точок. Зобразити на площині Oxy області, що відповідають подіям Ω , A , B , $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \cup B$, де подія A полягає у тому, що друга точка ближче до лівого кінця відрізка, ніж перша до правого, а B – відстань між точками менша половини довжини відрізка.
8. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 спочатку вибирають одну, а потім з чотирьох цифр, що залишилися, вибирають другу. Описати простір елементарних подій. Описати події
 A – першою вибрана непарна цифра;
 B – другою вибрана непарна цифра;
 C – обидва рази вибрана непарна цифра.
9. Монету підкидають до тих пір, поки вона не впаде двічі підряд однією стороною. Описати простір елементарних подій. Описати події

A – експеримент закінчиться до шостого підкидання;

B – буде зроблено парну кількість підкидань.

10. Три гравці a, b, c проводять шаховий турнір за такою схемою: у першому турі грають a і b , гравець c вільний, у другому турі грають переможець першого туру і гравець c , а гравець, котрий програв у першому турі вільний, у третьому турі грають переможець другого туру і гравець, що відпочивав у другому турі, а переможений у другому турі вільний. Турнір триває до тих пір, поки один з гравців не виграє підряд дві партії (він і оголошується переможцем турніру). Нічийх немає. Описати простір елементарних подій. Описати події

A – переможцем турніру стане гравець a ;

B – переможцем турніру стане гравець b ;

C – переможцем турніру стане гравець c .

11. Двоє грають у шахи. Подія A означає, що виграв перший гравець, подія B – що виграв другий гравець. Що означають такі події: $\bar{A} \setminus B$, $\bar{B} \setminus A$, $\bar{A} \cap \bar{B}$?

12. Дві різні кулі кладуть у два ящики. Описати простір елементарних подій. Описати подію – є порожний ящик.

13. Дві однакові кулі кладуть у два ящики. Описати простір елементарних подій. Описати подію – є порожний ящик.

14. Вказати події, протилежні до таких подій:

A – поява герба при двох підкиданнях монети;

B – три попадання при трьох пострілах;

C – по крайній мірі одне попадання при трьох пострілах.

15. Здійснено три постріли по мішені. Нехай A_i – подія, яка полягає у тому, що при i -му пострілі є попадання ($i = 1, 2, 3$). Виразити через події A_i такі події:

A – є три попадання;

B – не було жодного попадання;

C – тільки одне попадання;

D – не менше двох попадань.

16. Нехай A, B, C – три випадкові події. Записати події, які полягають у тому, що з подій A, B, C

а) відбулася тільки подія A ;

б) відбулися A і B і не відбулася C ;

в) відбулися всі три події;

г) відбулася по крайній мірі одна подія;

- д) відбулася тільки одна подія;
- е) відбулося не більше двох подій;
- є) не відбулась жодна подія.

17. Мішень складається з десяти кругів, обмежених концентричними колами з радіусами $\rho_1 < \rho_2 < \dots < \rho_{10}$. Подія A_i означає попадання у круг радіуса ρ_i . Що означають події $B_1 = A_1 \cup A_3 \cup A_6$, $B_2 = A_2 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_8$, $B_3 = (A_1 \cup A_3) \cap A_6$?

18. З ящика, що містить чорні і білі кулі, дістали n куль. Нехай A_i – подія, яка полягає у тому, що i -та куля біла ($1 \leq i \leq n$). Визначити через A_i такі події:

- а) всі кулі білі;
- б) хоча б одна куля біла;
- в) тільки одна куля біла;
- г) не більше m куль білих ($1 \leq m \leq n$);
- д) по крайній мірі m куль білі;
- е) рівно m куль білі;
- є) всі n куль одного кольору.

19. Серед студентів, що зібралися на лекцію з теорії ймовірностей, вибирають навмання одного. Нехай подія A полягає у тому, що вибрано юнака, подія B – у тому, що він не палить, а подія C – у тому, що він мешкає у гуртожитку.

- а) описати подію $A \cap B \cap C$;
- б) при якій умові має місце тотожність $A \cap B \cap C = B$;
- в) коли можливі включення: $A \cap B \cap C \supset (A \cap B) \cup C$, $C \subset B$;
- г) чи буде мати місце рівність $\bar{A} = B$, якщо всі юнаки палять?

20. Нехай A, B – довільні події. Доведіть такі рівності:

- а) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A$;
- б) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B$.

21. За якої умови будуть сумісними в сукупності події $A \cup B$, $\bar{A} \cup B$ і $A \cup \bar{B}$

22. Доведіть, що подія

$$(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$$

є неможливою.

Тема „Класичне означення ймовірності”

За класичним означенням **ймовірність події А** дорівнює відношенню кількості сприятливих події А елементарних подій до загальної кількості елементарних подій:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Приклад. Із ретельно перемішаної колоди карт (24 листи) навмання виймають 3 карти. Яка ймовірність того що вийнята 1 дама і 2 тузи?

Розв’язування. У цьому прикладі загальна кількість можливих випадків (вибрати 3 карти з 24-х)

$$n = C_{24}^3 = \frac{24!}{3! \cdot 21!} = \frac{22 \cdot 23 \cdot 24}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 23 \cdot 22.$$

Кількість способів вибрати одну даму – 4, а кількість способів вибрати з чотирьох тузів два тузи – C_4^2 . Тому кількість сприятливих для настання події А випадків $m = 4 \cdot C_4^2 = 4 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 4 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} = 24$.

$$\text{Тоді } P(A) = \frac{m}{n} = \frac{24}{4 \cdot 22 \cdot 23} = \frac{3}{11 \cdot 23} = \frac{3}{253}.$$

Приклади для розв’язування на практичних заняттях, самостійної та індивідуальної роботи студентів

1. Монету підкидають двічі. Обчислити ймовірності подій
А – по крайній мірі один раз випаде герб;
В – при другому підкиданні випаде герб.
2. Гральний кубик підкидають двічі. Обчислити ймовірності подій
А – сума очок, що випали, дорівнює 8;
В – по крайній мірі один раз випаде 6.
3. Дві різні кулі кладуть у два ящики. Знайти ймовірність того, що є порожній ящик. А якщо кулі однакові?
4. В ящику a білих і b чорних куль. З ящика виймають одну кулю. Вона виявилася білою. Цю кулю відкладають. Після цього з ящика беруть ще одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля також буде білою.

5. В ящику a білих і b чорних куль ($a \geq 2$). З ящика виймають відразу дві кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі будуть білі.
6. Гральний кубик підкидають двічі. Знайти ймовірність того, що обидва рази появиться однакова кількість очок.
7. Кидають одночасно два гральні кубики. Знайти ймовірності подій
 A – сума очок, що випали, дорівнює 8;
 B – добуток очок, що випали, дорівнює 8;
 C – сума очок більша, ніж їх добуток.
8. Гральний кубик підкидають тричі. Нехай x – сума очок, одержаних при всіх підкиданнях. Що більш імовірно: $x=12$ чи $x=11$?
9. Учасники жеребкування тягнуть жетони з номерами від 1 до 100. Знайти ймовірність того, що номер першого навмання витягнутого жетона, не містить цифри 5.
10. Троє гравців грають у карти. Кожному з них здано по 10 карт і дві залишено у прикупі. Один з гравців бачить, що у нього на руках 6 карт бубнових і 4 – не бубнових. Він скидає дві карти з цих чотирьох і бере собі прикуп. Знайти ймовірність того, що він прикупить дві бубнові карти.
11. З ящика, що містить n перенумерованих куль, виймають навмання одну за одною всі кулі. Знайти ймовірність того, що номери вийнятих куль будуть йти по-порядку.
12. Яка ймовірність того, що дитина, яка не вміє читати, складе з букв o, n, p, c, t , розрізної азбуки слово „спорт”?
13. Яка ймовірність того, що з букв a, a, a, n, n, c буде складено слово „ананас”?
14. Яка ймовірність того, що з букв $a, a, a, e, u, k, m, m, t, t$ буде складено слово „математика”?
15. Знайти ймовірність того, що серед n вибраних навмання цифр
 - а) немає цифри 5;
 - б) немає цифри 2;
 - в) немає цифр 5 і 2;
 - г) немає цифри 5 або немає цифри 2.
16. Гральний кубик кидають 6 разів. Обчислити ймовірність того, що випадуть всі шість граней.
17. У ліфті 5 пасажирів; ліфт зупиняється на 9 поверхах. Яка ймовірність того, що всі пасажери вийдуть з ліфта на різних поверхах?

18. Довести, що більш імовірно одержати, по крайній мірі, одну одиницю при підкиданні чотирьох гральних кубиків, ніж при 24 підкиданнях двох гральних кубиків, по крайній мірі, один раз одержати дві одиниці? (Парадокс де Маре).

Вказівка: скористатися нерівністю $(1+x)^n \geq 1+nx$, для $x > -1$.

19. Обчислити ймовірність того, що дні народження 12 осіб виявляться у різних місяцях року.

20. Обчислити ймовірність того, що для даних тридцяти осіб з 12 місяців року на 6 місяців припадають по два дні народження і на 6 – по три дні народження.

Відповідь: $\frac{C_{12}^6 \cdot 30!}{6^6 \cdot 2^6 \cdot 12^{30}}$.

21. Є п'ять відрізків довжини яких відповідно дорівнюють 1, 3, 5, 7 і 9 одиниць. Визначити ймовірність того, що з трьох вибраних відрізків можна побудувати трикутник.

22. У турнірі хокеїстів беруть участь 16 команд, з яких випадковим чином формуються дві групи по 8 команд у кожній. Серед учасників турніру є 5 команд екстракласу. Знайти ймовірності подій

A – всі команди екстракласу попадуть в одну і ту ж групу;

B – дві команди екстракласу попадуть в одну з груп, а три – в іншу.

23. Учасник лотереї „Спортлото” з 36 назв видів спорту (позначених числами від 1 до 36) повинен назвати п'ять. Повний виграш отримає той, хто правильно вкаже всі п'ять назв. Виграш отримають і ті, хто вкаже не менше трьох назв. Обчислити ймовірність виграшу у „Спортлото”. Обчислити ймовірність того, що учасник „Спортлото” відгадає 4 і 3 назви. Яка ймовірність отримати виграш у „Спортлото”?

24. Повна колода карт (52 листи) ділиться навмання на дві рівні частини по 26 листів. Знайти ймовірності подій

A – у кожній з частин виявиться по два тузи;

B – в одній з частин не буде тузів, а в іншій – всі чотири;

C – в одній з частин буде один туз, а в іншій – три.

25. У турнірі $2n$ команд спортсменів розбиваються на дві підгрупи. Визначити ймовірність того, що дві найсильніші команди виявляться а) у різних підгрупах; б) в одній підгрупі.

26. У партії, що складається з N деталей є M бракованих. Навмання вибрали n деталей ($n \leq N$). Яка ймовірність того, що серед них m бракованих ($m \leq M$)?

27. Монету підкидають до тих пір, поки вона не впаде двічі підряд однією стороною. Описати простір елементарних подій. Знайти ймовірності подій

A – експеримент закінчиться до шостого підкидання;

B – буде зроблено парну кількість підкидань, а також ймовірність того, що експеримент триватиме нескінченно довго.

28. Три гравці a, b, c проводять шаховий турнір за такою схемою: у першому турі грають a і b , гравець c вільний, у другому турі грають переможець першого туру і гравець c , а гравець, котрий програв у першому турі вільний, у третьому турі грають переможець другого туру і гравець, що відпочивав у другому турі, а переможений у другому турі вільний. Турнір триває до тих пір, поки один з гравців не виграє підряд дві партії (він і оголошується переможцем турніру). Нічийїх немає. Описати простір елементарних подій. Знайти ймовірності подій

A – переможцем турніру стане гравець a ;

B – переможцем турніру стане гравець b ;

C – переможцем турніру стане гравець c ;

N – переможець не виявиться до n -го туру;

D – турнір ніколи не завершиться.

29. У гості прийшли n осіб, причому всі були у галошах. Розходячись, гості вибрали галоші навмання. Яка ймовірність того, що кожний візьме праву і ліву галоші?

$$\text{Відповідь: } \frac{2^n}{C_{2n}^n}.$$

30. Є n пар черевиків. З них випадково вибирають $2r$ черевиків ($2r < n$).

Яка ймовірність того, що серед вибраних черевиків

а) відсутні парні;

б) є рівно одна комплектна пара;

в) є рівно дві комплектні пари?

$$\text{Відповіді: а) } \frac{C_n^{2r} \cdot 2^{2r}}{C_{2n}^{2r}}, \text{ б) } \frac{n \cdot C_{n-1}^{2r-2} \cdot 2^{2r-2}}{C_{2n}^{2r}}, \text{ в) } \frac{C_n^2 \cdot C_{n-2}^{2r-4} \cdot 2^{2r-4}}{C_{2n}^{2r}}.$$

Тема „Геометрична ймовірність”

Якщо простором елементарних подій є деякий відрізок прямої або область площини, або 3-вимірний простору, а події, які розглядаються мають таку властивість, що їм можна поставити у відповідність певну „міру”, то **ймовірністю події** A називають міру множини A поділену на міру множини Ω , тобто

$$P(A) = \frac{\text{mes}(A)}{\text{mes}(\Omega)}.$$

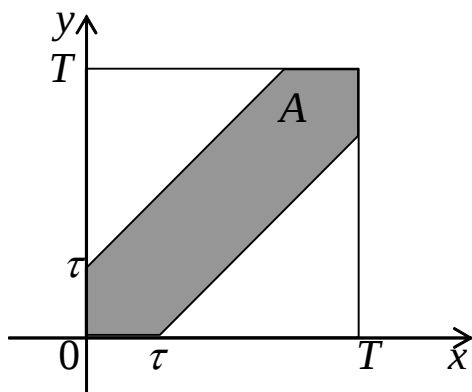
Так визначається **геометрична ймовірність**.

Приклад (задача про зустріч).

Двоє домовилися про зустріч в якийсь фіксований час. Домовленість така: зустріч може відбутися протягом часу T (наприклад однієї години). Перший хто прийде чекає другого протягом часу $\tau < T$. Яка ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо моменти приходу учасників зустрічі рівноправні (однаково можливий прихід учасників на протязі часу T).

Розв’язування. Введемо такі позначення: x – момент приходу першого учасника зустрічі (кількість одиниць часу від початку обумовленого часу),

y – момент приходу другого учасника зустрічі. Тоді елементарним результатом цього експерименту буде пара чисел (x, y) . Простором



елементарних подій є такі пари чисел (x, y) , що $0 \leq x \leq T$ і $0 \leq y \leq T$, тобто

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq T, 0 \leq y \leq T\}.$$

Геометрично (на площині) Ω – точки відповідного квадрату. Кожна точка визначає моменти приходу учасників зустрічі. Опишемо подію A – зустріч відбудеться:

$$\Omega \supset A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq T, 0 \leq y \leq T, |x - y| \leq \tau\}.$$

Тому

$$\text{mes } \Omega = T^2 \quad \text{mes } A = T^2 - (T - \tau)^2.$$

Тоді за означенням імовірність того, що зустріч відбудеться, буде дорівнювати

$$P(A) = \frac{T^2 - (T - \tau)^2}{T^2} = 1 - \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2.$$

Приклади для розв'язування на практичних заняттях, самостійної та індивідуальної роботи студентів

1. У круг радіуса R навмання кидають точку. Яка ймовірність того, що відстань від цієї точки до центра круга не перевищує r ?
2. Два кораблі повинні підійти до одного причалу. Появи кораблів – незалежні події, рівноможливі протягом доби. Знайти ймовірність того, що одному з кораблів прийдеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого корабля – одна година, а другого – дві години.
3. На площині проведені паралельні прямі, відстань між якими дорівнює $2a$. На площину навмання кидають круг радіуса r ($r < a$). Яка ймовірність того, що круг не перетинає жодну з прямих?
4. Яка ймовірність того, що сума двох навмання взятих додатних чисел, кожне з яких не перевищує одиниці, не перевищує одиниці, а їх добуток не перевищує $\frac{2}{9}$?
5. На площині проведені паралельні прямі, відстань між якими дорівнює $2a$. На цю площину навмання кидають голку довжиною $2l$ ($l < a$). Яка ймовірність того, що голка перетне одну з прямих? (Задача Бюффона, 1777р.)
6. Випадкова точка $M(\xi, \eta)$ вибирається навмання у квадраті з вершинами $(0; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 1)$, $(1; 0)$. Знайти ймовірність того, що корені рівняння $x^2 + \xi x + \eta = 0$ дійсні.
7. У крузі радіуса R проводяться хорди паралельно до заданого напрямку. Яка ймовірність того, що довжина навмання взятої хорди не перевищує R , якщо рівно можливі довільні положення точок перетину хорди з діаметром, перпендикулярним до вибраного напрямку?
8. Стрижень довжиною l зламали на три частини, вибираючи навмання місця зламу. Знайти ймовірність того, що з отриманих трьох частин можна скласти (побудувати) трикутник.
9. Якої товщини повинна бути монета, щоб імовірність падіння на ребро дорівнювала $\frac{1}{3}$?

10. Вздож прямої розміщені голки на відстані 1 м одна від одної. Під прямим кутом до цієї прямої рухається гумова кулька діаметром 20 см. Яка ймовірність того, що, минувши голки, кулька не лопне?
11. В круг радіуса R навмання кинуто точку. Знайти ймовірність того, що вона опиниться за межами квадрата, вписаного у цей круг.
12. Два дійсних числа x і y вибирають навмання так, що $|x| \leq 3$, $|y| \leq 5$.
Яка ймовірність того, що дріб $\frac{x}{y}$ додатний?
13. Два дійсних числа x і y вибирають навмання так, що $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$.
Яка ймовірність того, що $|x| < |y|$?
14. Два дійсних числа x і y вибирають навмання так, що $|x| \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.
Яка ймовірність того, що $x^2 < y$?
15. Парабола дотикається півкола і проходить через границі його діаметра. Яка ймовірність того, що точка, навмання кинута всередину півкола, попаде в область, що обмежена дугою півкола і параболою?
16. На одиничному відрізку навмання вибрано дві точки B і C . Знайти ймовірність того, що довжина відрізка BC буде менша, ніж відстань від початку відріку до найближчої точки.
17. В одиничний квадрат навмання кинуто точку. Яка ймовірність того, що точка буде віддалена від центра квадрата на відстань, меншу, ніж $1/3$, якщо відомо, що від кожної зі сторін вона віддалена більше, ніж на $1/6$?
18. На відрізок навмання кидають три точки, одна за одною. Яка ймовірність того, що третя точка впаде між двома першими?
19. У квадрат з вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ навмання кинуто точку. Нехай (ξ, η) – її координати. Знайти для $0 < z < 1$ ймовірність $P\{|\xi - \eta| < z\}$.
20. У квадрат з вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ навмання кинуто точку. Нехай (ξ, η) – її координати. Знайти для $0 < z < 1$ ймовірність $P\{\min(\xi, \eta) < z\}$.
21. У квадрат з вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ навмання кинуто точку. Нехай (ξ, η) – її координати. Знайти для $0 < z < 1$ ймовірність $P\{\max(\xi, \eta) < z\}$.

Тема „Основні теореми теорії ймовірностей”

Нехай A – деяка подія, ймовірність якої $0 \leq P(A) \leq 1$. Тоді ймовірність протилежної події $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. Ймовірність неможливої події $P(\emptyset) = 0$.

Теорема додавання ймовірностей. Нехай A і B – випадкові події. Тоді ймовірність суми подій $A \cup B$ дорівнює

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Узагальнення теореми додавання ймовірностей.

Ймовірність суми трьох подій A , B і C дорівнює

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Ймовірність суми n подій дорівнює

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \dots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right).$$

Зауваження. Теорема додавання ймовірностей у випадку коли події несумісні формулюється так: ймовірність суми подій дорівнює сумі їх ймовірностей, тобто

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{при} \quad A \cap B = \emptyset.$$

Означення. Нехай B така подія, що $P(B) > 0$. Тоді **умовною ймовірністю події A** , за умови, що подія B відбулася (позначається $P_B(A)$ або $P(A/B)$), називається відношення ймовірності добутку подій A і B до ймовірності події B :

$$P_B(A) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Теорема множення ймовірностей. Ймовірність добутку подій дорівнює добутку їх ймовірностей, один із співмножників якого є умовною ймовірністю, тобто якщо $P(A) > 0$ і $P(B) > 0$, то

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

Узагальнення теореми множення ймовірностей:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P\left(\frac{A_3}{A_1 \cap A_2}\right) \times$$

$$\times P\left(\frac{A_4}{A_1 \cap A_2 \cap A_3}\right) \cdot \dots \cdot P\left(\frac{A_n}{A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{n-1}}\right),$$

при $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$.

Означення. Події A і B називаються **незалежними**, якщо

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Приклади для розв'язування на практичних заняттях, самостійної та індивідуальної роботи студентів

1. В ящику a білих і b червоних куль. З ящика виймають дві кулі. Яка ймовірність того, що ці кулі
 - а) різних кольорів;
 - б) обидві білі?
2. Монету підкидають двічі. Описати такі події:
 A – при першому підкиданні випав герб;
 B – при другому підкиданні випав герб.
 Обчислити ймовірності $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(B / A)$.
3. Монету підкидають тричі. Описати такі події:
 A – двічі випав герб;
 B – по крайній мірі один раз випав герб.
 Обчислити ймовірності $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A / B)$.
4. З множини сімей, у яких двоє дітей, вибрана одна сім'я. Всі елементарні події рівноможливі. Яка ймовірність того, що
 - а) у цій сім'ї два хлопчики, якщо відомо, що в ній є один хлопчик;
 - б) у цій сім'ї два хлопчики, якщо відомо, що старша дитина – хлопчик?
5. Студент прийшов на екзамен, знаючи відповіді лише на 20 з 25 питань програми. Екзаменатор задав студенту 3 питання. Знайти ймовірність того, що студент знає відповіді на всі ці питання.
6. Кидають два гральних кубики. Яка ймовірність того, що випаде, по крайній мірі, одна шістка, якщо відомо, що сума очок дорівнює вісім?
7. Кидають три гральних кубики. Яка ймовірність того, що хоча б на одному з них випаде одне очко, якщо на всіх трьох кубиках випали різні грані?

8. В ящику лежать 12 червоних, 8 зелених і 10 синіх куль. Навмання виймають дві кулі. Яка ймовірність того, що дістали кулі різного кольору, якщо відомо, що не вийняли синю кулю?
9. Нехай для однієї торпеди ймовірність потопити корабель дорівнює $\frac{1}{3}$. Яка ймовірність того, що чотири торпеди потоплять корабель, якщо для його затоплення досить одного попадання торпеди у ціль?
10. Кидають шість гральних кубиків. Знайти ймовірність того, що випадуть всі шість граней.
11. Відомо, що при підкиданні 10 гральних кубиків випала по крайній мірі одна одиниця. Яка ймовірність того, що випали дві або більше одиниць?
12. Гардеробниця видала одночасно номерки чотирьом особам, які здали у гардероб свої капелюхи. Після цього вона переплутала всі капелюхи і повісила їх навмання. Знайти ймовірності таких подій:
 А – кожній з чотирьох осіб гардеробниця видасть його власний капелюх;
 В – рівно три особи одержать свої капелюхи;
 С – рівно дві особи одержать свої капелюхи;
 D – рівно одна особа одержить свій капелюх;
 E – жодна з осіб не одержить свого капелюха.
13. У коробці 9 нових тенісних м'ячів. Для гри беруть три м'ячі, після гри їх знову кладуть у коробку. М'ячі, якими грали і ті, якими не грали не відрізняються. Яка ймовірність того, що після трьох ігор у коробці не залишиться м'ячів, якими не грали (нових м'ячів)?
14. Кидають дві монети. Розглядають події
 А – випадання герба на першій монеті;
 В – випадання герба на другій монеті.
 Знайти ймовірність події $C = A \cup B$.
15. У партії, що складається з N деталей є M дефектних. З партії навмання вибирають для контролю n деталей ($n \leq N$). Якщо серед контрольних виявиться більше ніж m дефектних ($m \leq M$), то бракується вся партія. Знайти ймовірність того, що партія
 а) буде забракована;
 б) не буде забракована.
16. З колоди карт (36 листів) виймають чотири карти. Розглядаються події
 А – серед цих карт буде хоча б одна бубнова;

B – серед цих карт буде хоча б один король.

Знайти ймовірність події $C = A \cup B$.

17. При одному циклі огляду радіолокаційної станції, що слідує за космічним об'єктом, об'єкт може бути виявлений з імовірністю p . Пошук об'єкта у кожному циклі проходить незалежно від інших. Знайти ймовірність того, що при n циклах об'єкт виявлять.
18. З повної колоди карт (52 листи) виймають відразу чотири карти. Знайти ймовірність того, що всі чотири карти будуть різних мастей.
19. З повної колоди карт (52 листи) виймають по одній карті чотири карти. Після виймання кожна карта повертається в колоду. Яка ймовірність того, що всі чотири карти будуть різних мастей?
20. По цілі стріляють ракетами. Імовірність попадання кожної ракети в ціль дорівнює p . Попадання окремих ракет – незалежні події. Кожна ракета, яка попала в ціль, знищує її з імовірністю p_1 . Стріляють до знищення цілі або до використання всього боєзапасу ракет. Є n ракет. Яка ймовірність того, що
- а) не увесь боєзапас буде використано;
 - б) після знищення цілі залишиться не менше двох ракет;
 - в) буде використано не більше двох ракет?
21. Скільки разів треба підкинути два гральних кубики, щоб імовірність хоча б однієї появи пари (6, 6) була більша, ніж 0,5?
22. З ящика, що містить 3 білих і 2 чорних кулі, за схемою випадкового вибору без повернення послідовно виймають кулі. Знайти ймовірності p_k того, що чорна куля вперше з'явиться при k -ому випробуванні ($k = 1, 2, 3, 4$).
23. Серед 25 екзаменаційних білетів є 5 „щасливих”. Два студенти по черзі беруть по одному білету. Знайти ймовірність того, що:
- а) перший студент взяв „щасливий” білет;
 - б) другий студент взяв „щасливий” білет;
 - в) обидва студенти взяли „щасливі” білети.
24. Два мисливці стріляють у зайця, причому кожен робить по одному пострілу. Для першого мисливця ймовірність попадання в ціль дорівнює 0,7, для другого – 0,8. Яка ймовірність попадання у зайця (хоча б при одному пострілі)? Як зміниться результат, якщо мисливці виконають по два постріли?
25. З колоди карт (36 листів) навмання виймають три карти. Знайти ймовірність того, що серед них буде хоч один туз.

Тема „Формула повної ймовірності. Формули Бейєса”

Нехай задано ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Проводиться стохастичний експеримент, у якому спостерігається деяка подія B з $\mathcal{F}$. Нехай також задано деякі події $H_1, H_2, \dots, H_n$, $H_i \in \mathcal{F}$, які є попарно несумісними, тобто $H_i \cap H_j = \emptyset$, $i \neq j$. Якщо B викликає суму подій $\bigcup_{i=1}^n H_i$, тобто $B \subset \bigcup_{i=1}^n H_i$, то кажуть що події $H_1, H_2, \dots, H_n$ є **гіпотезами** відносно події B (складають систему гіпотез відносно події B). Якщо $\bigcup_{i=1}^n H_i = \Omega$, то кажуть, що **система гіпотез повна**.

Припустимо, що задана система гіпотез відносно події B і ймовірності $P(H_i) > 0$, $i = \overline{1, n}$. Тоді

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(B / H_i)$$

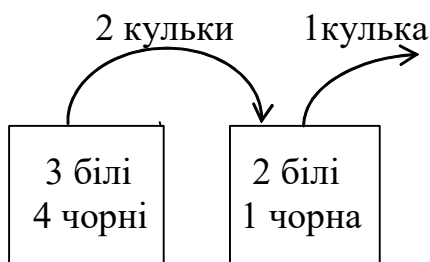
– **формула повної ймовірності.**

Якщо ще й $P(B) > 0$, то

$$P(H_k / B) = \frac{P(H_k) \cdot P(B / H_k)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(B / H_i)}, \quad k = \overline{1, n}$$

– **формули Бейєса.**

Приклад. У двох ящиках є білі і чорні кульки. У першому з них 3 білих і 4 чорних кульки, у другому 2 білих і 1 чорна. З першого ящика навмання перекладають 2 кульки у другий, після цього з другого ящика виймають одну кульку. Ставляться питання: а) яка ймовірність того, що вийнята біла кулька, б) яка ймовірність того, що з першого ящика в другий перекладено 2 білих кульки, якщо вийнята з другого ящика кулька виявилася білою?



Розв’язування:

Позначимо подію B – з другого ящика вийнята біла кулька. Висунемо такі гіпотези:

H_1 – з першого ящика у другий переклали дві білі кульки;

H_2 – з першого ящика у другий переклали одну білу і одну чорну кульки;

H_3 – з першого ящика у другий переклали дві чорні кульки.

Ці гіпотези несумісні і утворюють повну групу подій (гіпотез). Враховуючи прийняті позначення у пункті а) треба обчислити $P(B)$, а у пункті б) $P(H_1 / B)$.

$$P(H_1) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 6} = \frac{1}{7}, \quad P(H_2) = \frac{C_3^1 \cdot C_4^1}{C_7^2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{7 \cdot 6} = \frac{4}{7},$$

$$P(H_3) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 6} = \frac{2}{7}, \quad P(B / H_1) = \frac{4}{5}, \quad P(B / H_2) = \frac{3}{5}, \quad P(B / H_3) = \frac{2}{5},$$

$$P(B) = \frac{1}{7} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}, \quad P(H_1 / B) = \frac{1}{5}.$$

Зауважимо, що ймовірність першої гіпотези дорівнювала $P(H_1) = \frac{1}{7}$, а у результаті експерименту, коли стало відомо, що з другого ящика вийняли білу кульку, переоцінили її й одержали $P(H_1 / B) = \frac{1}{5}$.

При розв'язування пункту а) задачі можна висунути й іншу систему гіпотез:

H_1 – куля, яку вийняли з другого ящика спочатку знаходилась у першому ящику;

H_2 – куля, яку вийняли з другого ящика спочатку знаходилась у другому ящику.

Ці гіпотези також несумісні і утворюють повну групу подій. Тоді

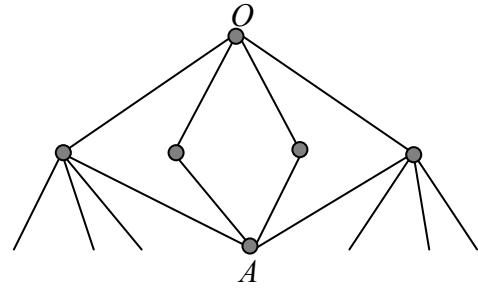
$$P(H_1) = \frac{2}{5}, \quad P(H_2) = \frac{3}{5}, \quad P(B / H_1) = \frac{3}{7}, \quad P(B / H_2) = \frac{2}{3},$$

$$P(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{7}.$$

Приклади для розв'язування на практичних заняттях, самостійної та індивідуальної роботи студентів

1. У тирі є 5 гвинтівок, ймовірності попадання у мішень з яких відповідно дорівнюють 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 і 0,9. Визначити ймовірність попадання у мішень при одному пострілі, якщо гвинтівку буде вибрано навмання.
2. Є дві партії виробів по 12 і 10 штук, причому у кожній партії один виріб бракований. Виріб, взятий навмання з першої партії перекладають у другу. Після цього з другої партії вибирають один виріб. Визначити ймовірність вибору бракованого виробу з другої партії.

3. Мандрівник виходить з пункту O і на кожному перехресті вибирає намання один зі шляхів. Яка ймовірність того, що мандрівник потрапить у пункт A ?



4. Є три однакові ящики. У першому a білих і b чорних куль; у другому – c білих і d чорних куль; у третьому – лише білі кулі. Навмання вибирають один ящик і з нього виймають одну кулю. Яка ймовірність того, що ця куля біла?
5. В N ящиках є, відповідно, $n_1, n_2, \dots, n_N$ куль, серед яких $m_1, m_2, \dots, m_N$ білих. Навмання вибирають ящик, а з нього – кулю. Яка ймовірність того, що ця куля виявиться білою?
6. З повного набору доміно беруть дві кісточки. Визначити ймовірність того, що другу можна приставити до першої.
7. У першому ящику 10 куль, з них 8 білих; у другому ящику 20 куль, з яких 4 білих. З кожного ящика намання взяли по одній кулі, а потім з цих куль намання вибрали одну кулю. Знайти ймовірність того, що вибрали білу кулю.
8. У коробці є 15 тенісних м'ячів, з них 9 нових. Для першої гри навання беруть три м'ячі, які після гри повертають у коробку. Для другої гри також навання беруть три м'ячі. Знайти ймовірність того, що всі м'ячі, взяті для другої гри, нові.
9. Два автомати виготовляють однакові деталі, які складають на спільний конвеєр. Продуктивність першого автомата удвічі більша продуктивності другого автомата. Перший автомат виготовляє 60% деталей відмінної якості, а другий – 84%. З конвеєра взяли деталь, яка виявилась відмінної якості. Знайти ймовірність того, що ця деталь виготовлена першим автоматом.
10. В ящику одна куля (біла або чорна). В ящик кидають білу кулю. Потім з ящика навання виймають кулю. Вона виявилась білою. Яка ймовірність того, що в ящику залишилась біла куля? (Задача Гартнера).
11. У піраміді 10 гвинтівок, з них 4 мають оптичний приціл. Імовірність того, що стрілок попаде у мішень при пострілі з гвинтівки з оптичним прицілом дорівнює 0,95; без оптичного прицілу – 0,8. Стрілок попав у мішень з навання взятої гвинтівки. Що більш імовірно: стрілок стріляв з гвинтівки з оптичним прицілом, чи без оптичного прицілу?

12. В ящику n куль. Всі можливі припущення щодо кількості білих куль в ящику – рівноможливі. Навмання з ящика беруть одну кулю.
- Яка ймовірність того, що ця куля біла?
 - Ця куля виявилася білою. Обчислити ймовірності всіх припущень про кількість білих куль в ящику. Яке з цих припущень найвірогідніше?
13. В ящик, що містить n куль, кинули білу кулю. Яка ймовірність вийняти після цього з ящика білу кулю, якщо всі можливі припущення про початкову кількість білих куль у ящику рівноможливі?
14. У правій кишені є 3 монети по 50 коп. і 4 монети по 5 коп., у лівій кишені 6 монет по 50 коп. і 3 монети по 5 коп. З правої кишені у ліву кладуть 5 монет. Після цього з лівої кишені виймають одну монету. Яка ймовірність того, що це буде монета достоїнством у 50 коп.?
15. Є два ящики: у першому a білих і b чорних куль; у другому – c білих і d чорних куль. З першого ящика у другий перекладають три кулі ($a \geq 3$, $b \geq 3$). Після цього з другого ящика виймають одну кулю. Яка ймовірність того, що це буде біла куля?
16. У рибалки є три улюблених місця для ловлі риби, які він відвідує з однаковою ймовірністю кожне. Якщо він закине вудочку на першому місці, то риба клює з ймовірністю p_1 ; на другому з ймовірністю p_2 ; на третьому – p_3 . Відомо, що рибалка, вийшовши ловити рибу, три рази закинув вудочку і риба клюнула один раз. Знайти ймовірність того, що він ловив рибу на першому місці.
17. У групі з 10 студентів, що прийшли на екзамен, три студенти підготовлені відмінно, чотири – добре, два – посередньо і один – погано. В екзаменаційних білетах є 20 питань. Відмінно підготовлений студент може відповісти на всі 20 питань, добре підготовлений – на 16, посередньо – на 10, погано – на 5 питань. Викликаний навмання студент відповів на три довільно задані питання. Знайти ймовірність того, що цей студент підготовлений
- відмінно;
 - погано.
18. Один володар, якому набрид його провидець зі своїми хибними передбаченнями, вирішив стратити його. Але будучи добрим володарем, він вирішив дати провидцеві останній шанс. Йому наказали розподілити по двох ящиках чотири кулі: дві чорні і дві білі (не залишаючи порожнього ящика). Кат вибере навмання один з

ящиків і з нього дістане одну кулю. Якщо ця куля буде чорною, то провидця стратять, якщо білою, то його життя буде врятоване. Яким чином провидець повинен розмістити кулі в ящиках, щоб забезпечити собі максимальну ймовірність бути врятованим? (*Задача жарт*).

19. Є два ящики: у першому a білих і b чорних куль; у другому – c білих і d чорних куль. Вибирається навмання ящик і з нього виймають одну кулю. Вона виявилася білою. Знайти ймовірність того, що наступна куля, яку виймають з цього ж ящика, теж буде білою.
20. Пасажир може звернутися за квитком в одну з трьох кас. Імовірності звертання в кожну касу залежать від їх розташування і відповідно дорівнюють p_1 , p_2 , p_3 . Імовірність того, що до моменту приходу пасажирів квитки будуть розпродані, дорівнюють: для першої каси P_1 , для другої – P_2 , для третьої – P_3 . Пасажир направився за квитком до однієї з кас і придбав квиток. Знайти ймовірність того, що це була перша каса.
21. У журі з трьох чоловік два члени незалежно один від одного приймають правильне рішення з імовірністю p , а третій для винесення рішення підкидає монету. Рішення виносяться більшістю голосів. Журі з однієї людини виносить справедливе рішення з імовірністю p . Яке з цих журі виносить справедливе рішення з більшою ймовірністю?
22. Троє мисливців одночасно вистрілили в кабана, який був вбитий однією кулею. Визначити ймовірність того, що кабан вбитий першим, другим або третім мисливцем, якщо ймовірності влучення для них дорівнюють відповідно 0,2, 0,4 й 0,6.
23. Три стрільці роблять постріл у мішень. Імовірності влучення в мішень при одному пострілі для кожного зі стрільців дорівнюють p_1 , p_2 , p_3 відповідно. Яка ймовірність того, що другий стрілець не влучив, якщо в мішень було два влучення?
24. Є урна з N білими та чорними кулями (кількість ξ білих куль невідома). Проводиться серія випробувань, у кожному з яких з урни навмання виймається з подальшим поверненням одна куля. Припустимо, що проведено n випробувань і у кожному з них з'явилася біла куля. Яка ймовірність того, що в $(n+1)$ -у випробуванні також з'явиться біла куля? (*Закон слідування Лапласа.*)

Тема „Схема незалежних випробувань: формула Бернуллі, найбільш імовірне число”

Нехай проводиться серія з n незалежних експериментів. Деяка подія A може відбутися у кожному з експериментів з імовірністю $P(A) = p$. Тоді кажуть, що має місце схема незалежних випробувань. Поставимо питання: яка ймовірність того, що в серії з n експериментів подія A відбудеться m разів, де $0 \leq m \leq n$? Позначимо цю ймовірність $P_n(m)$. Вона обчислюється так:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

– **формула Бернуллі** для $m = 0, 1, 2, \dots, n$.

Те значення m , для якого ймовірність $P_n(m)$ є найбільшою називається **найбільш імовірним числом**. Воно обчислюється за формулою

$$m_0 = [np - q] + 1, \text{ або } m_0 = [np + p],$$

тут $[.]$ – ціла частина.

Алгоритм знаходження найбільш імовірного числа:

- 1) обчислити np ; якщо np – ціле, то $m_0 = np$;
- 2) якщо np – не ціле, то обчислити $np - q$;
- 3) якщо $np - q$ – не ціле, то найбільш імовірне число

$$m_0 = [np - q] + 1;$$

- 4) якщо $np - q$ – ціле, то є два найбільш імовірних числа

$$m'_0 = np - q \text{ і } m''_0 = m'_0 + 1.$$

Приклади для розв’язування на практичних заняттях, самостійної та індивідуальної роботи студентів

1. Завод виготовляє вироби, кожен з яких з імовірністю r (незалежно від інших) виявляється дефектним. При огляді дефект, якщо він є, виявляється з імовірністю p . Для контролю продукції заводу вибирають n виробів. Знайти ймовірності подій
 A – ні в одному з виробів не буде виявлено дефект;
 B – серед n виробів рівно в одному буде виявлено дефект;
 C – серед n виробів не менше, ніж у двох буде виявлено дефект.
2. Монету підкидають m разів. Знайти ймовірність того, що герб з’явиться не менше k разів і не більше l разів ($k \leq l \leq m$).

3. Що більш імовірно, виграти у рівносильного противника:
- а) три партії з чотирьох, чи п'ять з восьми;
 - б) не менше трьох партій з чотирьох, чи не менше п'яти партій з восьми;
 - в) не більше n з $2n$ партій, чи більше n з тієї ж кількості партій;
 - г) не більше n з $(2n+1)$ партій, чи більше n з тієї ж кількості партій?
4. Людина, що належить до певної групи населення, з імовірністю 0,2 виявляється брюнетом, з імовірністю 0,3 – шатеном, з імовірністю 0,4 – блондином і з імовірністю 0,1 – рудим. Вибирається навмання група з шести людей. Знайти ймовірності таких подій:
- A – у складі групи не менше чотирьох блондинів;
 B – у складі групи хоча б один рудий;
 C – у складі групи однакова кількість блондинів і шатенів.

Вказівка. Якщо проводиться n незалежних випробувань в однакових умовах, причому кожне випробування може мати k наслідків $A_1, A_2, \dots, A_k$ (що виключають один одного) з імовірностями $p_1, p_2, \dots, p_k$,

$\sum_{j=1}^k p_j = 1$, то ймовірність того, що в m_1 випробуванні появиться

подія A_1 , в m_2 випробуваннях – подія A_2 і т.д., в m_k – подія A_k

$\left(\sum_{i=1}^k m_i = n \right)$ виражається формулою

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_k!} p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots \cdot p_k^{m_k} \quad \text{або}$$

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = n! \prod_{j=1}^k \frac{1}{m_j!} p_j^{m_j}.$$

Якщо умови випробувань різні, тобто в i -ому випробуванні подія A_j має ймовірність p_{ij} ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, k}$), то ймовірність $P_n(m_1, m_2, \dots, m_k)$ обчислюється як коефіцієнт при члені, що містить множник $z_1^{m_1} \cdot z_2^{m_2} \cdot \dots \cdot z_k^{m_k}$ у розкладі за степенями $z_1, z_2, \dots, z_k$ функції

$$\varphi_n(z_1, z_2, \dots, z_k) = \prod_{i=1}^n (p_{i1}z_1 + p_{i2}z_2 + \dots + p_{ik}z_k).$$

5. Проводиться стрільба по цілі трьома снарядами. Снаряди попадають у ціль незалежно один від одного. Для кожного снаряда ймовірність попадання у ціль дорівнює 0,4. Якщо у ціль попав один снаряд, він вражає її (виводить з ладу) з імовірністю 0,3; якщо два снаряди – з

імовірністю 0,7; якщо три снаряди – з імовірністю 0,9. Знайти повну ймовірність враження цілі.

6. Спостереженнями встановлено, що у деякій місцевості у вересні в середньому буває 12 дощових днів. Яка ймовірність того, що серед випадково вибраних у цьому місяці 8 днів 3 дні виявляться дощовими?
7. Батарея здійснила 14 пострілів по об'єкту, ймовірність попадання в який дорівнює 0,2. Знайти найвірогідніше число попадань і ймовірність цього числа попадань.
8. Імовірність попадання в ціль при кожному пострілі з гармати, дорівнює 0,8. Скільки потрібно здійснити пострілів, щоб найвірогідніше число попадань дорівнювало 20?
9. Імовірність хоча б однієї появи події A у чотирьох незалежних випробуваннях дорівнює 0,59. Яка ймовірність появи події A в одному випробуванні, якщо у кожному випробуванні ця ймовірність однакова?
10. Подія C відбудеться у тому випадку, якщо подія B з'явиться не менше трьох разів. Визначити ймовірність появи події C , якщо ймовірність появи події B в одному досліді дорівнює 0,3 і проведено
 - а) 5 незалежних випробувань;
 - б) 7 незалежних випробувань.
11. Один математик, який палить, носить з собою дві коробки сірників. Кожний раз, коли він хоче дістати сірник, він вибирає навмання одну з коробок. Знайти ймовірність того, що коли математик вибере перший раз порожню коробку, в іншій коробці виявиться r сірників ($r = 0, 1, 2, \dots, n$, де n – кількість сірників, що були у кожній коробці спочатку). (*Задача Банаха*).
12. Знайти ймовірність
 - а) появи, по крайній мірі, однієї шістки при підкиданні 6 гральних кубиків;
 - б) появи, по крайній мірі, двох шісток при підкиданні 12 гральних кубиків;
 - в) появи, по крайній мірі, трьох шісток при підкиданні 18 гральних кубиків.
13. Яка ймовірність попасти в ціль не менше двох разів, якщо ймовірність попадання дорівнює 0,2 і проведено 10 незалежних пострілів? Знайти ймовірність, по крайній мірі, двох попадань, при умові, що одне попадання відбулося.

14. У матчі на першість світу з шахів гра йде до шести перемог одного з учасників (нічий не враховуються, виграш – 1 очко, програш або нічия – 0 очок). Вважаючи учасників матчу однаковими по силі, знайти ймовірність того, що у момент закінчення матчу переможений набере k очок ($k = 0, 1, 2, \dots, 5$).
15. Два рівносильні шахісти домовилися зіграти матч з $2n$ результативних партій. Нічий не враховуються і вважається, що кожний з учасників може виграти наступну партію з імовірністю 0,5. Переможцем вважається той, хто переможе у більшій кількості партій. В якому матчі більше шансів виграти будь-якому з учасників: у матчі з 8 результативних партій, чи з 12?
16. Проводяться чотири незалежних постріли по деякій цілі. Імовірності попадання при різних пострілах дорівнюють $p_1 = 0,1$; $p_2 = 0,2$; $p_3 = 0,3$; $p_4 = 0,4$. Знайти ймовірності $P_4(1)$, $P_4(2)$, $P_4(3)$, $P_4(4)$, $P_4(0)$, $P_4(\geq 1)$, $P_4(\geq 2)$.
17. Завод виготовляє вироби, кожний з яких проходить чотири види випробувань. Перше випробування виріб проходить вдало з імовірністю 0,9; друге – 0,95; третє – 0,8; четверте – 0,85. Знайти ймовірність того, що виріб пройде вдало
- а) всі чотири випробування;
 - б) два випробування;
 - в) не менше двох випробувань.
18. При проході одного порога байдарка не отримує ушкоджень з імовірністю p_1 , повністю ламається з імовірністю p_2 , отримує серйозні ушкодження з імовірністю p_3 ($p_1 + p_2 + p_3 = 1$). Два серйозних ушкодження приводять до повної поломки. Знайти ймовірність того, що при проході n порогів байдарка не буде повністю зламана.
19. Скільки разів необхідно підкинути гральний кубик, щоб найімовірнішим числом появ шістки було 10?
20. Чому дорівнює ймовірність p появи події в кожному з 39 незалежних випробувань, якщо найімовірніша кількість появ цієї події дорівнює 25?
21. Двоє грають до перемоги, крім того, для цього першому необхідно виграти m партій, а другому – n партій. Імовірність виграшу кожної партії першим дорівнює p , а другим – $q = 1 - p$. Визначити ймовірність виграшу всієї гри першим гравцем.

Тема „Схема незалежних випробувань: формули Лапласа і Пуассона”

Теорема 1 (локальна теорема Муавра-Лапласа).

Нехай у схемі незалежних випробувань використовуються параметри p, q , $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p + q = 1$. Якщо $x_{n,m} = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ рівномірно обмежена сталою C , тобто $|x_{n,m}| \leq C$ і границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{npq} = \infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi} \sqrt{npq} P_n(m)}{e^{-\frac{1}{2}x_{n,m}^2}} = 1.$$

Висновок теореми рівносильний тому, що чисельник і знаменник еквівалентні, тобто

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{npq}} e^{-\frac{1}{2}x_{n,m}^2}.$$

Отже, алгоритм обчислення $P_n(m)$ при великих n такий:

1. Обчислити $x_{n,m}$.
2. Знайти $\varphi(x_{n,m})$ за таблицями значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$.
3. Обчислити $P_n(m)$ за формулою

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_{n,m}).$$

Теорема 2 (інтегральна теорема Муавра-Лапласа).

В умовах теореми 1 для будь-яких a, b ($-\infty < a < b < \infty$) імовірність того, що $a \leq x_{n,m} \leq b$ приблизно дорівнює

$$P_n\{a \leq x_{n,m} \leq b\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Проаналізуємо, як застосовувати теорему 2. Припустимо, що треба підрахувати таку ймовірність: $P_n\{k_1 \leq m \leq k_2\}$. Зрозуміло, що

$$P_n\{k_1 \leq m \leq k_2\} = P_n\{k_1 - np \leq m - np \leq k_2 - np\} = P_n\left\{\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \leq x_{n,m} \leq \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right\}.$$

Позначимо $a = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $b = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$ і тепер можна застосувати теорему 2.

Таким чином, для знаходження ймовірності $P_n\{k_1 \leq m \leq k_2\}$ потрібно

1. обчислити $a = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $b = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$;
2. Знайти $\Phi(a)$, $\Phi(b)$ за таблицями значень функції

$$\Phi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad x \geq 0.$$

3. застосувати теорему 2: $P_n\{k_1 \leq m \leq k_2\} = \Phi(b) - \Phi(a)$.

Приклад 1. Нехай проводиться 100 експериментів ($n=100$). Нехай у кожному експерименті ймовірність певної події дорівнює $p=0,5$. Тоді і $q=0,5$. Яка ймовірність того, що в серії зі 100 експериментів ця подія відбудеться 60 разів?

Розв'язування. З умови задачі $\sqrt{npq} = 10 \cdot 0,5 = 5$. Тому можна застосувати теорему 1. За умовою задачі $m=60$. Обчислимо

$$x_{n,m} = \frac{60 - 100 \cdot 0,5}{\sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = \frac{10}{5} = 2.$$

Тоді за теоремою 1

$$P_{100}(60) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{5} \cdot e^{-2} = \frac{1}{5} \cdot \varphi(2) = \frac{1}{5} \cdot 0,054 = 0,0108.$$

Приклад 2. Знайти ймовірність того, що в цьому ж експерименті подія відбудеться не менше 40 разів і не більше 60 разів.

$$\begin{aligned} P\{40 \leq m \leq 60\} &= P\left\{\frac{40 - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{60 - np}{\sqrt{npq}}\right\} = \\ &= P\left\{-2 \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq 2\right\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2}^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \end{aligned}$$

Такий інтеграл обчислюється за таблицями. Таблиці є різні, але найчастіше наводяться таблиці такої функції:

$$\Phi_0(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad x \geq 0.$$

Тоді

$$P\{40 \leq m \leq 60\} \approx 2\Phi_0(2) \approx 2 \cdot 0,4772 = 0,9544.$$

Теорема 3. Теорема Пуассона (теорема про рідкісні події).

Припустимо, що не виконується умова теореми 2, що $npq \rightarrow \infty$, при $n \rightarrow \infty$, але існує така стала C , що $a_n = np < C$. Тоді при $n \rightarrow \infty$ ймовірність

$$P_n(m) \approx \frac{a_n^m}{m!} e^{-a_n}.$$

Для функції $P_\lambda(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ складено таблиці для різних λ і m .

Часто затабульованою є функція $\sum_{m=0}^x \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$. Використовуючи ці таблиці можна просто розв'язувати задачі про знаходження $P_x(m)$.

Приклади для розв'язування на практичних заняттях, самостійної та індивідуальної роботи студентів

1. Ймовірність того, що пробіг автомобіля без ремонту складе не менше 20 тис. км дорівнює 0,75. У гаражі є 550 автомашин. Визначити ймовірність того, що таких машин виявиться:
а) 400;
б) не менше 400.
2. Є партія виробів об'ємом 250 одиниць. Ймовірність того, що навмання вибраний виріб відповідає вимогам стандарту дорівнює $\frac{14}{15}$. Знайти найвірогідніше число виробів, які відповідають вимогам стандарту і ймовірність того, що в цій партії виявиться найвірогідніша кількість стандартних виробів.
3. Ймовірність того, що покупцеві потрібне взуття 41-го розміру дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 100 покупців потребують взуття 41-го розміру:
а) 25 осіб;
б) від 10 до 30 покупців;
в) не більше 30 покупців;
г) не менше 35 осіб.

4. Імовірність виходу з ладу за час T одного конденсатора дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що за час T зі 100 конденсаторів, які працюють незалежно, вийдуть з ладу:
 - а) не менше 20 конденсаторів;
 - б) менше 28 конденсаторів;
 - в) від 14 до 26 конденсаторів.
5. Майстер і учень виготовляють однотипні деталі, причому продуктивність майстра у два рази вища за продуктивність учня. Деталі без маркування попадають на склад. Знайти ймовірність того, що серед 450 деталей, випадково відібраних на складі, виявляться виготовленими майстром
 - а) 300 деталей;
 - б) не менше 275 деталей;
 - в) 400 деталей;
 - г) від 250 до 300 деталей.
6. Імовірність появи позитивного результату в кожному з n дослідів дорівнює 0,9. Скільки потрібно провести дослідів, щоб з імовірністю 0,98 можна було очікувати, що не менше 150 дослідів дадуть позитивний результат?
7. Відділ технічного контролю перевіряє 900 деталей на стандартність. Імовірність того, що деталь стандартна, дорівнює 0,9. Знайти з імовірністю 0,9544 межі, в яких міститься число m стандартних деталей серед перевірених.
8. З конвеєра сходять у середньому 85% виробів першого ґатунку. Скільки виробів треба взяти, щоб з імовірністю 0,997 відхилення частоти виробів першого ґатунку в них від 0,85 за абсолютною величиною не перевищувало 0,01?
9. Посіяно 600 насінин гороху з імовірністю проростання $p = 0,9$ для кожної насінини. Знайти межу для абсолютної величини відхилення частоти насінин що проросли від імовірності p , якщо ця межа повинна гарантуватися з імовірністю $P = 0,995$.
10. У середньому лівші складають 1% студентів. Яка ймовірність того, що серед 200 студентів буде
 - а) рівно 4 лівші;
 - б) не менше ніж 4 лівші?
11. На факультеті налічується 500 студентів. Яка ймовірність того, що 1 вересня є днем народження одночасно для k студентів даного факультету? Обчислити вказану ймовірність для значень $k = 0, 1, 2, 3$.

12. Імовірність того, що навмання вибрана деталь з партії деталей виявиться нестандартною, дорівнює 0,05. Скільки потрібно випробувати деталей, щоб з імовірністю не меншою 0,95 виявити:
- а) хоча б одну нестандартну деталь;
 - б) не менше трьох нестандартних деталей?
13. Завод відправив на базу 5000 доброякісних виробів. Імовірність пошкодження кожного виробу у дорозі дорівнює 0,0002. Яка ймовірність того, що серед 5000 виробів у дорозі буде пошкоджено:
- а) рівно три вироби;
 - б) рівно один виріб;
 - в) не більше трьох виробів;
 - г) більше трьох виробів?
14. Збірник з теорії ймовірностей надруковано тиражем 100000 примірників. Імовірність неправильного брошурування збірника дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж має:
- а) рівно 5 бракованих книг;
 - б) не менше 5 і не більше 8 бракованих книг;
 - в) більше трьох бракованих книг?
15. Середня кількість замовлень таксі, що надходять до диспетчерського пункту щохвилини, дорівнює 3. Знайти ймовірність того, що за дві хвилини надійде:
- а) чотири замовлення;
 - б) менше чотирьох замовлень;
 - в) не менше чотирьох замовлень
16. Середня кількість замовлень, які надходять до магазину кожну годину, дорівнює 3. Знайти ймовірність того, що за дві години надійде:
- а) п'ять замовлень;
 - б) менше п'яти замовлень;
 - в) не менше п'яти замовлень?
17. Прилад складається з 1000 елементів, які працюють незалежно один від одного. Імовірність відмови будь-якого елемента на протязі часу T дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що за час T відмовлять рівно 3 елементи.
18. Знайти ймовірність того, що подія A настане рівно 80 разів у 400 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події у кожному випробуванні дорівнює 0,2.

19. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,52. Знайти ймовірність того, що серед 100 новонароджених виявиться рівно а) 40 хлопчиків; б) 50 хлопчиків; в) 30 дівчаток.
20. У звичайний навчальний день ймовірність присутності студента на лекції становить 0,8. Знайти ймовірність того, що зі 100 студентів на лекції будуть присутніми від 85% до 90% студентів.
21. В інституті навчається 1000 студентів. У їдальні є 105 посадкових місць. На великій перерві кожен студент йде у їдальню з ймовірністю 0,1. Яка ймовірність того, що у звичайний день їдальня буде заповнена не більше, ніж на $\frac{2}{3}$.

Вказівка до задач 22,23. Якщо проводиться n незалежних випробувань в однакових умовах у першому з яких ймовірність успіху дорівнює p_1 , у другому – p_2 і т.д., у n -ому – p_n , то ймовірність того, що успіх буде мати місце k разів дорівнює коефіцієнту при z^k функції

$$\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^n (p_i z + q_i) = (p_1 z + q_1)(p_2 z + q_2) \dots (p_n z + q_n), \quad \text{яка називається}$$

твірною функцією ймовірності. Сума всіх коефіцієнтів твірної функції ймовірності дорівнює одиниці.

22. Пристрій складається з трьох незалежно працюючих елементів. Ймовірності безвідмовної роботи елементів дорівнюють $p_1 = 0,7$, $p_2 = 0,8$, $p_3 = 0,9$. Знайти ймовірність того, що за час T а) всі елементи будуть працювати безвідмовно; б) два елементи будуть працювати безвідмовно; в) один елемент буде працювати безвідмовно; г) жоден з елементів не буде працювати безвідмовно.
23. Проводиться стрільба з гармати по цілі що віддаляється. При першому пострілі ймовірність влучення становить $p_1 = 0,8$. При кожному наступному ймовірність зменшується у два рази. Проведено чотири постріли. Визначити ймовірність того, що мало місце хоча б одне влучення.

Тема „Випадкові величини: закони розподілу випадкових величин, функція розподілу”

Нехай задано ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Означення 1. Відображення $\xi(\omega): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ називається **випадковою величиною** якщо для будь-якого дійсного x подія $\{\omega: \xi(\omega) < x\}$ належить σ -алгебрі $\mathcal{F}$.

Означення 2. Функція $F_\xi(x) = P\{\omega: \xi(\omega) < x\}$ називається **функцією розподілу випадкової величини $\xi(\omega)$** .

Нехай задана деяка випадкова величина $\xi(\omega): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Якщо випадкова величина $\xi(\omega)$ приймає не більше ніж зліченну кількість значень, то така випадкова величина називається **дискретною випадковою величиною**.

Приклад 1. Розглянемо випадкову величину $\xi(\omega)$, яка приймає два значення 0 і 1 з імовірностями q і p відповідно.

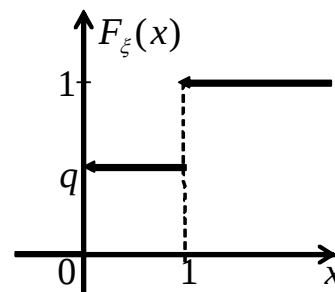
Тоді закон розподілу випадкової величини такий:

$$\xi(\omega):$$

0	1
q	p

$$p > 0, \quad q > 0, \quad p + q = 1.$$

У точці $x=0$ стрибок значення функції величиною q – це і є $P\{\xi(\omega)=0\}$, а в точці $x=1$ стрибок величиною p і відповідно $P\{\xi(\omega)=1\}=p$.



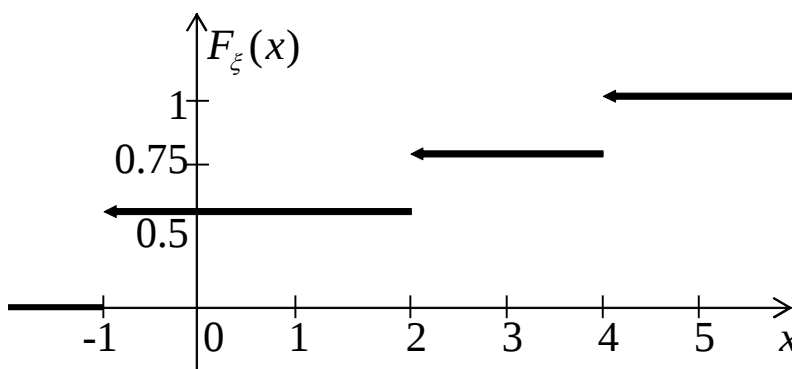
Приклад 2.

Нехай випадкова величина $\xi(\omega)$ розподілена за таким законом:

$$\xi(\omega):$$

-1	2	4
0.5	0.25	0.25

Тоді графік функції розподілу має такий вигляд:



Приклад 3.

Нехай випадкова величина $\xi(\omega)$ розподілена за таким законом:

$\xi(\omega):$	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

Тут $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Запишемо функцію розподілу випадкової величини $F_\xi(x)$:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1 \\ \sum_{i: x_i < x} p_i, & x_1 < x \leq x_n, \\ 1, & x > x_n. \end{cases}$$

Основні властивості функції розподілу:

1⁰. Функція розподілу $F_\xi(x)$ визначена на всій числовій осі (бо цього вимагає означення).

2⁰. Для будь-якого дійсного x функція розподілу $0 \leq F_\xi(x) \leq 1$.

3⁰. Функція розподілу $F_\xi(x)$ є неспадною.

4⁰. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_\xi(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_\xi(x) = 1$.

5⁰. Функція розподілу випадкової величини неперервна зліва, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} F_\xi(x) = F_\xi(x_0)$.

6⁰. Для будь-яких дійсних a і b , пов'язаних співвідношенням $a < b$, має місце рівність

$$P\{\omega: a \leq \xi(\omega) < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a).$$

7⁰. Імовірність того, що випадкова величина $\xi(\omega)$ приймає значення, яке не перевищує x_0 дорівнює значенню функції розподілу у точці x_0 справа, тобто

$$P\{\omega: \xi(\omega) \leq x_0\} = F_\xi(x_0 + 0).$$

8⁰. Імовірність того, що випадкова величина $\xi(\omega)$ приймає фіксоване значення x_0 дорівнює стрибку функції розподілу в точці x_0 , тобто

$$P\{\omega: \xi(\omega) = x_0\} = F_\xi(x_0 + 0) - F_\xi(x_0).$$

Приклади для розв'язування на практичних заняттях, самостійної та індивідуальної роботи студентів

1. У ящику 5 білих і 25 чорних куль. Виймають одну кулю. Випадкова величина ξ – кількість білих куль, які вийняли з ящика. Побудувати ряд розподілу і функцію розподілу $F_{\xi}(x)$ випадкової величини ξ .
2. Підкидають три монети. Потрібно:
 - а) задати випадкову величину ξ , яка дорівнює кількості „цифр”, що випадають;
 - б) побудувати ряд розподілу і функцію розподілу $F_{\xi}(x)$ величини ξ , якщо ймовірність випадання „герба” дорівнює $\frac{1}{2}$.
3. Два стрілки виконують по одному пострілу в одну мішень. Імовірність попадання для першого стрілка при одному пострілі дорівнює 0,5, для другого – 0,4. Випадкова величина ξ – кількість попадань в мішень. Знайти закон розподілу і функцію розподілу ξ і обчислити ймовірності подій $\{\xi < 2\}$, $\{\xi \geq 1\}$, $\{1 \leq \xi < 2\}$.
4. Проводяться послідовні випробування п'яти приладів на надійність. Кожен наступний прилад випробовується тільки у тому випадку, якщо попередній був надійним. Побудувати ряд розподілу випадкової величини ξ – кількості випробуваних приладів, якщо ймовірність витримати випробування для кожного з них дорівнює 0,9.
5. Мішень складається з круга номер 1 і двох концентричних кілець з номерами 2 і 3. Попадання в круг №1 дає 10 очок, в кільце №2 – 5 очок, кільце №3 – (-1) очко. Імовірності попадання в круг №1 і кільця №2 і №3 відповідно дорівнюють 0,2; 0,3; 0,5. Побудувати ряд розподілу випадкової величини ξ – суми очок, одержаної у результаті трьох пострілів.
6. В ящику 7 куль, з яких 4 білі. З ящика навмання виймають 3 кулі. Записати закон розподілу кількості білих куль серед вибраних.
7. З 25 студентів-дипломників тільки 5 захистились на „відмінно”. Навмання вибрали 3 дипломні роботи. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ – кількості робіт оцінених на „відмінно” серед вибраних. Обчислити ймовірність події $\{\xi > 0\}$.
8. Робітник обслуговує 4 станки, які працюють незалежно. Імовірність того, що протягом години станок не потребуватиме обслуговування

робітника, дорівнює для першого станка 0,7, для другого – 0,75, для третього 0,8, для четвертого – 0,9. Побудувати закон розподілу випадкового числа станків, які не потребуватимуть обслуговування робітника.

9. В партії з n деталей одна нестандартна. З партії навмання виймають деталі одну за одною до тих пір, поки не виймуть нестандартну деталь. Записати закон розподілу випадкової величини ξ – кількості вийнятих деталей. Побудувати функцію розподілу $F_{\xi}(x)$.
10. Абонент забув останню цифру номера телефону, але пам'ятає, що вона парна. Побудувати ряд (закон) і функцію розподілу випадкової величини ξ – кількості зроблених ним наборів номера телефону, якщо останню цифру він набирає навмання, а набрану цифру надалі не набирає.
11. У лотереї беруть участь 15% білетів з виграшем 10 грн., 5% білетів з виграшем 50 грн., а решта білетів без виграшу. Скласти закон розподілу суми виграшів на два білети. Побудувати функцію розподілу.
12. На двох автоматичних станках виготовляються однотипні деталі. Закони розподілу кількостей ξ та η бракованих деталей, які випускаються за зміну відповідно для першого і другого станків задані таблицями:

ξ	0	1	2	3
P	0,8	0,1	0,06	p_3

η	0	1	2
P	0,9	p'_1	0,04

Скласти закон розподілу і побудувати функцію розподілу кількості бракованих деталей, випущених за зміну на обох станках.

13. Незалежні випадкові величини ξ та η задані такими законами розподілу:

ξ	0	1	3
P	p_0	0,3	0,6

η	-2	2
P	$2p$	$3p$

Скласти закон і функцію розподілу випадкової величини $\theta = \xi^2 + 2\eta$.

14. Є n заготовок для однієї й тієї ж деталі. Імовірність виготовлення якісної деталі з кожної заготовки дорівнює p .
 - а) Скласти закон розподілу кількості заготовок, які залишилися після виготовлення першої якісної деталі.
 - б) Скласти закон розподілу кількості використаних заготовок.

15. Задана функція розподілу дискретної випадкової величини ξ :

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ 0,25, & 1 < x \leq 3, \\ 0,4, & 3 < x \leq 4, \\ 0,8, & 4 < x \leq 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

а) Знайти ймовірності таких подій: $\{\xi = 2\}$, $\{2 < \xi \leq 4\}$.

б) Скласти таблицю розподілу випадкової величини ξ .

16. Монету підкидають n разів. Побудувати закон розподілу і функцію розподілу а) кількості випадань герба;

б) відношення кількості випадань герба до кількості випадань цифри.

17. Гральну кістку кидають n разів. Знайти функцію розподілу кількості випадань шістки.

18. Імовірність того, що годинник потребує додаткового регулювання дорівнює 0,2. Скласти закон розподілу кількості годинників, які потребують додаткового регулювання, серед трьох випадково відібраних. Побудувати функцію розподілу.

19. Монету підкидають до першого випадіння герба. Нехай $\xi(\omega)$ – кількість підкидань. Знайти: а) розподіл випадкової величини ξ ; б) $P(\xi > 1)$; в) $P(\xi \leq n)$.

20. Знайти закон розподілу випадкової величини ξ – кількість таких підкидань трьох гральних кубиків, у кожному з яких на двох кубиках з'явиться по 6 очок, якщо загальна кількість підкидань дорівнює 15.

21. В урні n куль, з них n_1 чорних і $n - n_1$ білих. Проводиться вибірка без повернення об'ємом k . Яка ймовірність того, що у вибірці буде саме k_1 чорних куль?

22. Нехай ξ_1 і ξ_2 незалежні випадкові величини, які мають геометричний розподіл $P(\xi_i = k) = p_i q_i^k$, $i = 1, 2$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Показати, що випадкова величина $\xi = \min(\xi_1, \xi_2)$ має геометричний розподіл. Знайти параметр цього розподілу.

23. Дискретна випадкова величина ξ приймає значення k з імовірністю $p_k = P(\xi = k) = Ck^2$, $k = \overline{1, 5}$. Знайти: а) сталу C ; б) імовірність того, що $|\xi - 2| \leq 1$.

Тема „Неперервні випадкові величини: закони розподілу, функція і щільність розподілу”

Якщо функція розподілу випадкової величини є абсолютно неперервною, то відповідна випадкова величина називається **абсолютно неперервною**, або просто **неперервною**.

Абсолютно неперервну функцію розподілу можна представити у вигляді

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(u) du, \quad (*)$$

де $f_{\xi}(u) \geq 0$ – кусково неперервна функція.

Тому іноді означення неперервної випадкової величини дають так: випадкова величина називається **неперервною**, якщо її можна записати у вигляді (*).

Кусково неперервна функція $f_{\xi}(x)$ називається **щільністю розподілу** випадкової величини.

Основні властивості щільності розподілу:

$$1^0. \quad f_{\xi}(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^1.$$

$$2^0. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(u) du = 1.$$

$$3^0. \quad P\{a \leq \xi < b\} = \int_a^b f_{\xi}(x) dx.$$

$$4^0. \quad \text{Якщо функція розподілу } F_{\xi}(x) \text{ диференційовна в точці } x, \text{ то} \\ F'_{\xi}(x) = f_{\xi}(x).$$

**Приклади для розв'язування на практичних заняттях,
самостійної та індивідуальної роботи студентів**

1. Випадкова величина ξ задана функцією розподілу

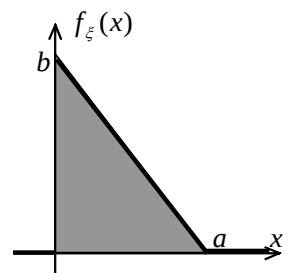
$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ (x-2)^2, & 2 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Знайти:

- а) щільність розподілу $f_{\xi}(x)$;
 - б) імовірність попадання величини ξ в інтервал $(1; 2,5)$;
 - в) імовірність попадання величини ξ в інтервал $(2,5; 3,5)$.
2. (Розподіл Коші). Функція розподілу випадкової величини ξ задана формулою $F_{\xi}(x) = A + B \operatorname{Arctg} x$ ($-\infty < x < \infty$). Знайти:
- а) константи A і B ;
 - б) щільність розподілу $f_{\xi}(x)$;
 - в) імовірність того, що величина ξ попаде на відрізок $[-1; 1]$.

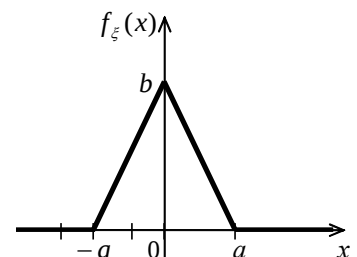
3. Випадкова величина ξ розподілена за „законом прямокутного трикутника” на інтервалі $[0; a]$.

- а) Записати вираз щільності розподілу $f_{\xi}(x)$.
- б) Знайти функцію розподілу $F_{\xi}(x)$.
- в) Знайти ймовірність попадання випадкової величини ξ на ділянку від $\frac{a}{2}$ до a .



4. Випадкова величина ξ підпорядковується закону Симпсона („закону рівнобедреного трикутника”) на відрізку $[-a; a]$.

- а) Написати вираз щільності розподілу $f_{\xi}(x)$.
- б) Побудувати графік функції розподілу $F_{\xi}(x)$.
- в) Знайти ймовірність попадання випадкової величини ξ в інтервал $\left(-\frac{a}{2}; a\right)$.



5. Кривою розподілу випадкової величини ξ є верхня дуга еліпса з півосями a і b . Величина a відома. Визначити величину b і побудувати функцію розподілу $F_{\xi}(x)$.

6. Функція розподілу випадкової величини ξ задана формулою

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 0,5(1 - \cos x), & 0 < x \leq \pi, \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

Знайти квантилі $x_{\frac{1}{4}}$, $x_{\frac{1}{2}}$, $x_{\frac{3}{4}}$, моду і медіану розподілу.

7. Випадкова величина ξ задана функцією розподілу

$F_{\xi}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$ ($-\infty < x < \infty$). Знайти можливе значення x_1 , яке задовольняє умову: з імовірністю $\frac{1}{4}$ випадкова величина ξ у результаті випробувань набуде значення, більшого за x_1 .

8. Випадкова величина ξ має щільність розподілу $f_{\xi}(x) = \frac{A}{1+x^2}$ (закон Коші). Знайти коефіцієнт A і функцію розподілу $F_{\xi}(x)$.

9. Дано щільність розподілу неперервної випадкової величини $f_{\xi}(x) = e^{2x-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Знайти моду цієї випадкової величини.

10. Щільність розподілу випадкової величини ξ задана формулою

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ x - 0,5, & 1 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Побудувати функцію розподілу $F_{\xi}(x)$ і її графік.

11. Випадкова величина ξ має щільність розподілу

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 0,5 \sin x, & 0 < x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

а) Побудувати функцію розподілу $F_{\xi}(x)$.

б) Знайти ймовірність того, що у результаті випробування величина ξ прийме значення з інтервалу $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

12. Щільність розподілу випадкової величини ξ задана так:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x \leq 0, x > 1. \end{cases}$$

а) Побудувати графік функції розподілу $F_{\xi}(x)$.

б) Знайти медіану і моду величини ξ .

13. Щільність розподілу випадкової величини ξ задана так:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} ax, & 0 < x \leq 2, \\ 0, & x \leq 0, x > 2. \end{cases}$$

а) Знайти коефіцієнт a і функцію розподілу $F_{\xi}(x)$.

б) Знайти ймовірність $P\left\{\left|\xi - \frac{4}{3}\right| < 0,5\right\}$.

14. Щільність розподілу випадкової величини ξ дорівнює $f_{\xi}(x) = Ax^2 e^{-\lambda x}$ ($\lambda > 0, 0 \leq x < \infty$). а) Знайти коефіцієнт A .

б) Побудувати функцію розподілу $F_{\xi}(x)$.

в) Обчислити ймовірність попадання величини ξ в інтервал $\left(0; \frac{1}{\lambda}\right)$.

15. (Закон гіперболічного секанса). Щільність розподілу випадкової величини ξ дорівнює $f_{\xi}(x) = \frac{A}{e^x + e^{-x}}$ ($-\infty < x < \infty$). Знайти:

а) коефіцієнт A ;

б) імовірність того, що у двох незалежних випробуваннях ξ прийме значення, менші одиниці.

16. Неперервна випадкова величина має функцію розподілу:

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ ax^2, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт a , $f_{\xi}(x)$, $P(-0,25 < \xi < 0,5)$. Побудувати графіки $F_{\xi}(x)$ і $f_{\xi}(x)$.

17. Чи можна підібрати сталу C так, щоб функція $\frac{C}{x^3}$ була щільністю розподілу ймовірностей на: а) промені $[1, +\infty)$; б) $[0, +\infty)$; в) відрізка $[-2, -1]$?

Тема „Числові характеристики дискретних випадкових величин”

Нехай розглядається скалярна випадкова величина ξ на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ з функцією розподілу $F_\xi(x)$.

Означення. Математичним сподіванням випадкової величини ξ називається число $M\xi$, яке дорівнює

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_\xi(x),$$

якщо такий інтеграл абсолютно збігається, тобто якщо існує інтеграл Стільтьєсса

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| dF_\xi(x) < \infty.$$

Якщо ж інтеграл не збігається абсолютно, то кажуть, що математичного сподівання не існує.

Припустимо, що ξ – дискретна випадкова величина. Тоді функція розподілу є кусково сталою і інтеграл Стільтьєсса тоді дорівнює:

$$\sum f(x_k)[F(x_{k+1}) - F(x_k)].$$

У випадку дискретної випадкової величини математичне сподівання дорівнює

$$M\xi = \sum_k x_k p_k.$$

Означення. Дисперсією випадкової величини ξ називається число $D\xi$, яке дорівнює квадрату відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2.$$

Отже, формула обчислення дисперсії така:

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 dF_\xi(x).$$

Якщо випадкова величина дискретна, то

$$D\xi = \sum_k x_k^2 p_k - (M\xi)^2 = \sum_k x_k^2 p_k - \left(\sum_k x_k p_k \right)^2.$$

Означення. Число $\sigma_{\xi} = \sqrt{D\xi}$ називається **середнім квадратичним відхиленням** випадкової величини ξ .

Означення. Моментом k -го порядку випадкової величини ξ відносно точки $x = a$ називається число

$$\nu_k(a) = M(\xi - a)^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Якщо $a = 0$, то $\nu_k(0) = \nu_k$ називається **початковим моментом** k -го порядку випадкової величини ξ .

Якщо $a = M\xi$, то число $\nu_k(M\xi) = \mu_k$ називається **центральною моментом** k -го порядку випадкової величини ξ .

Означення. Коефіцієнтом асиметрії або просто **асиметрією** випадкової величини ξ називається число As (якщо воно існує), яке дорівнює

$$As = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Означення. Ексцесом випадкової величини ξ називається число Ex (якщо воно існує), яке дорівнює

$$Ex = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Властивості числових характеристик:

1⁰. Якщо імовірність $P\{\xi = C\} = 1$, то $M\xi = C$.

2⁰. Якщо імовірність $P\{\xi \geq 0\} = 1$, то $M\xi \geq 0$.

3⁰. Математичне сподівання суми випадкових величин, у яких існують математичні сподівання, дорівнює сумі математичних сподівань цих випадкових величин: $M(\xi_1 + \xi_2) = M\xi_1 + M\xi_2$.

4⁰. $M(a\xi_1 + b\xi_2) = a \cdot M\xi_1 + b \cdot M\xi_2$.

5⁰. Якщо випадкові величини ξ_1 і ξ_2 **незалежні**, існують $M\xi_1$ і $M\xi_2$, то математичне сподівання добутку випадкових величин дорівнює добутку математичних сподівань: $M(\xi_1 \cdot \xi_2) = M\xi_1 \cdot M\xi_2$.

6⁰. Нехай ξ – випадкова величина, $\eta = \varphi(\xi)$ – функція від ξ . Тоді

математичне сподівання $M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dF_{\xi}(x)$.

7⁰. Для будь-якої випадкової величини ξ $D\xi \geq 0$.

8⁰. $D(a\xi + b) = a^2 \cdot D\xi$.

9⁰. Дисперсія суми або різниці незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій випадкових величин.

Приклади для розв'язування на практичних заняттях, самостійної та індивідуальної роботи студентів

1. Знайти математичне сподівання і дисперсію індикатора I_A події A , імовірність якої дорівнює p .
2. Знайти математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення випадкової величини, заданої таким законом розподілу

ξ	3	5	7	9
P	0,4	0,3	0,2	0,1

3. Проводяться три незалежних постріли по мішені, імовірність попасти при кожному пострілі дорівнює 0,4. Випадкова величина ξ – кількість попадань. Визначити математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення і асиметрію випадкової величини ξ .
4. У партії з 10 деталей є 3 нестандартних. Навмання відібрано дві деталі. Знайти математичне сподівання дискретної випадкової величини ξ – кількості нестандартних деталей серед відібраних, дисперсію $D\xi$ та середнє квадратичне відхилення σ_{ξ} .
5. Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини ξ відповідно дорівнюють 2 і 10. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $2\xi + 5$.
6. Дискретна випадкова величина ξ приймає три можливі значення: $\xi_1 = 4$ з імовірністю $p_1 = 0,5$; $\xi_2 = 6$ з імовірністю $p_2 = 0,3$ і ξ_3 з імовірністю p_3 . Знайти значення ξ_3 та ймовірність p_3 , якщо математичне сподівання $M\xi = 8$.

7. Кидають n гральних кубиків. Випадкова величина ξ – сума очок, що випадуть на всіх кубиках. Визначити математичне сподівання $M\xi$, дисперсію $D\xi$ та середнє квадратичне відхилення σ_ξ .
8. Довести, що математичне сподівання відхилення $\xi - M\xi$ дорівнює нулю.
9. Задано перелік можливих значень дискретної випадкової величини ξ : $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = -1$, $\xi_3 = -1$, а також дано математичні сподівання $M(\xi) = 0,1$ та $M(\xi^2) = 0,9$. Знайти ймовірності p_1 , p_2 , p_3 , що відповідають можливим значенням.
10. Дискретна випадкова величина ξ має тільки два можливих значення x_1 і x_2 , причому $x_2 > x_1$. Імовірність того, що ξ приймає значення x_1 дорівнює $0,6$. Знайти закон розподілу величини ξ , якщо $M\xi = 1,4$ і $D\xi = 0,24$.
11. Знайти математичне сподівання дискретної випадкової величини ξ – кількості таких підкидань п'яти гральних кубиків, у кожному з яких на двох кубиках випаде по одному очку, якщо загальна кількість підкидань (п'яти кубиків) дорівнює двадцять.
12. Прилад складається з n елементів. Імовірність відмови довільного елемента за час досліду дорівнює p . Знайти математичне сподівання кількості таких дослідів, у кожному з яких відмовлять рівно m елементів, якщо всього проведено N дослідів. Вважати, що досліді незалежні один від одного.
13. Довести, що математичне сподівання дискретної випадкової величини міститься між найменшим і найбільшим її можливими значеннями.
14. Довести, що дисперсія кількості успіхів в одному досліді не перевищує $0,25$.
15. Два стрілки виконують по два постріли по мішені незалежно один від одного. Імовірність попадання при кожному пострілі для першого стрілка дорівнює $0,3$, а для другого – $0,4$. Скласти закон розподілу загальної кількості попадань в мішень, знайти математичне сподівання і дисперсію цієї випадкової величини.
16. Радист тричі викликає кореспондента. Імовірність того, що буде прийнято перший виклик, дорівнює $0,2$, другий – $0,3$, третій – $0,4$. Скласти закон розподілу кількості неприйнятих викликів, якщо після

першого ж прийнятого виклику прийом завершується, а також знайти математичне сподівання цієї випадкової величини.

17. Снайпер починає стріляти по цілі до першого попадання, маючи чотири патрони. Імовірність попадання в ціль першим пострілом дорівнює 0,8, а з кожним наступним зменшується вдвічі. Скласти закон розподілу кількості проведених пострілів і знайти математичне сподівання цієї випадкової величини.
18. У партії з десяти деталей є 8 стандартних. Навмання вибрано одночасно дві деталі. Скласти закон розподілу кількості стандартних деталей серед відібраних і знайти математичне сподівання і дисперсію цієї випадкової величини.
19. Імовірність зв'язатися з абонентом по телефону дорівнює 0,7 (у кожній спробі). Скласти закон розподілу кількості спроб до першої відповіді абонента, якщо відомо, що вона не перевищує чотирьох. Знайти математичне сподівання і дисперсію цієї випадкової величини.
20. Серед 10 пар взуття 2 потребують ремонту. Скласти закон розподілу кількості пар взуття, які потребують ремонту серед трьох одночасно взятих пар. Знайти математичне сподівання і дисперсію цієї випадкової величини.
21. Пасажир забув останню цифру шифра автоматичної камери зберігання, але пам'ятає, що вона парна. Скласти закон розподілу випадкової величини – кількості здійснених ним наборів шифра до відкриття камери, якщо останню цифру він набирає навмання, а набрану цифру надалі не набирає. Знайти функцію розподілу цієї випадкової величини, її математичне сподівання і дисперсію.
22. Студент може скласти екзамен не більше трьох разів. Скласти закон розподілу випадкової величини – кількості спроб скласти екзамен, якщо ймовірність скласти його – 0,75 і надалі зростає на 0,1 у кожній наступній спробі. Знайти математичне сподівання і дисперсію цієї випадкової величини.
23. З шести білетів лотереї, з яких чотири безвиграшних, навмання виймають по одному білету до тих пір, поки не зустрінеться виграшний білет. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості вийнятих білетів, якщо кожний з них назад не повертається. Знайти математичне сподівання і дисперсію цієї випадкової величини.

24. Серед п'яти однотипних годинників, які є у майстерні, тільки в одному зміщений маятник. Майстер перевіряє навмання вибраний годинник. Перевірка завершується як тільки буде виявлено годинник зі зміщеним маятником (перевірені годинники повторно не перевіряються). Скласти закон розподілу кількості перевірених годинників і обчислити математичне сподівання і дисперсію цієї випадкової величини.
25. Стрілець на змаганнях має 4 патрони і стріляє в ціль до першого влучення. Ймовірність влучення при одному пострілі $p = 0,7$. Нехай ξ – число промахів. Знайти розподіл випадкової величини ξ . Записати вираз функції розподілу та побудувати її графік. Обчислити математичне сподівання і дисперсію цієї випадкової величини.
26. Кидають два гральних кубики. Нехай ξ – сума очок, які випадають на їх верхніх гранях. Знайти закон розподілу та функцію розподілу випадкової величини ξ . Обчислити математичне сподівання і дисперсію цієї випадкової величини.
27. Два стрілки стріляють по різних мішенях. Імовірність попадання в мішень для першого стрілка дорівнює p_1 , а для другого – p_2 . Розглядаються випадкові величини ξ – кількість попадань першого стрілка при одному пострілі, η – кількість попадань другого стрілка при одному пострілі. Побудувати ряд розподілу випадкової величини $z = \xi - \eta$. Знайти Mz .
28. (Біноміальний розподіл.) Випадкова величина ξ має біноміальний розподіл: $P\{\xi = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$. Знайти $M\xi$ та $D\xi$.
29. (Геометричний розподіл.) Імовірність появи події у кожному випробуванні дорівнює p ($0 < p < 1$). Випробування проводяться до першої появи події. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення кількості випробувань.
30. Монету підкидають n разів. Випадкова величина ξ – кількість гербів, що випали. Побудувати ряд розподілу і знайти $M\xi$ та $D\xi$.
31. Знайти математичне сподівання кількості лотерейних білетів, на які випадуть виграші, якщо куплено 40 білетів, причому ймовірність виграшу дорівнює 0,05.
32. Проводиться 20 незалежних випробувань, в кожному з яких імовірність успіху дорівнює 0,2. Знайти дисперсію кількості успіхів у цих випробуваннях.

33. При 10000 підкидань монети герб випав 5400 разів. Чи слід вважати, що монета несиметрична?
34. (Розподіл Пуассона.) Дискретна випадкова величина ξ розподілена за законом Пуассона: $P\{\xi = m\} = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Знайти а) $M\xi$ та $D\xi$; б) коефіцієнт асиметрії випадкової величини ξ .
35. Довести, що якщо випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ незалежні, додатні і однаково розподілені, то $M\left(\frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}\right) = \frac{1}{n}$.
36. Довести, що якщо випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ незалежні, додатні і однаково розподілені, то $M\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5}\right) = \frac{3}{5}$.
37. Нехай $\max \xi = b$, $\min \xi = a$. Довести, що $D\xi \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$.
38. Задано ряд розподілу випадкової величини ξ :
- | | | | | |
|-------|-----|-----|-----|-----|
| ξ | 2 | 4 | 6 | 8 |
| P | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,1 |
- Знайти: а) початкові і центральні моменти перших чотирьох порядків; б) асиметрію та ексцес цієї випадкової величини.
39. Імовірність появи події у кожному випробуванні дорівнює p ($0 < p < 1$). Випробування проводяться до першої появи події. Знайти математичне сподівання та дисперсію кількості випробувань.
40. Дискретна випадкова величина ξ приймає k додатніх значень $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ з імовірностями рівними відповідно $p_1, p_2, \dots, p_k$. Вважаємо, що можливі значення випадкової величини записані у порядку зростання. Довести, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M(\xi^{n+1})}{M(\xi^n)} = \xi_k$.
41. Скільки в середньому необхідно підкидати кубик до випадіння шістки?
42. Знайти математичне сподівання і дисперсію гіпергеометричного розподілу.

Тема „Числові характеристики неперервних випадкових величин”

Якщо випадкова величина ξ неперервна зі щільністю розподілу $f_\xi(x)$, то інтеграл Стільтьєсса дорівнює

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dF_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx.$$

Тобто, для **абсолютно неперервного типу випадкових величин математичне сподівання** дорівнює

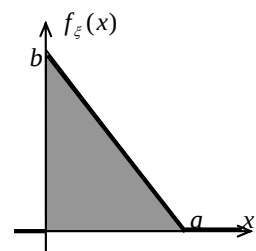
$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx.$$

Для випадкової величини абсолютно неперервного типу **дисперсія** дорівнює

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx \right)^2.$$

Приклади для розв’язування на практичних заняттях, самостійної та індивідуальної роботи студентів

1. Випадкова величина ξ розподілена за „законом прямокутного трикутника” на інтервалі $[0; a]$. Знайти: математичне сподівання $M\xi$, дисперсію $D\xi$, середнє квадратичне відхилення σ_ξ і третій центральний момент μ_3 цієї випадкової величини.



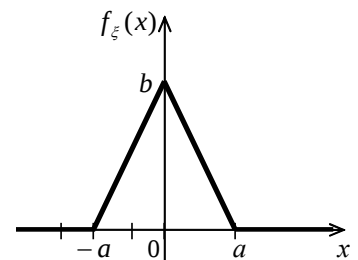
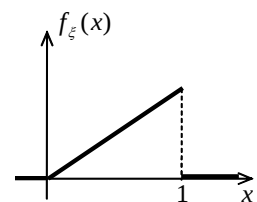
2. Ребро куба виміряне наближено, причому $a \leq x \leq b$. Розглядаючи довжину ребра куба як випадкову величину ξ , розподілену рівномірно в інтервалі $[a; b]$. Знайти математичне сподівання $M\xi^3$ об’єму куба.

3. (Показниковий розподіл.) Випадкова величина ξ має щільність розподілу

$$f_{\xi}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0. \end{cases}$$

Побудувати функцію розподілу $F_{\xi}(t)$ і знайти $M\xi$ та $D\xi$.

4. Випадкова величина ξ має щільність розподілу $f_{\xi}(x) = \frac{1}{2} \sin x$ в інтервалі $[0; \pi]$. Поза цим інтервалом $f_{\xi}(x) = 0$. Знайти математичне сподівання випадкової величини $\eta = \varphi(\xi) = \xi^2$ (не знаходячи попередньо щільності розподілу випадкової величини η).
5. Випадкові величини ξ та η незалежні. Знайти дисперсію випадкової величини $z = 3\xi + 2\eta$, якщо $D\xi = 5$, $D\eta = 6$.
6. Точку навмання кинули в круг радіуса R . Імовірність попадання точки в довільну область, розташовану всередині круга, пропорційна площі цієї області. Знайти функцію розподілу і дисперсію відстані від точки до центра круга.
7. Неперервна випадкова величина ξ підпорядковується закону розподілу зі щільністю $f_{\xi}(x) = A \cdot e^{-|x|}$. Визначити коефіцієнт A , математичне сподівання $M\xi$, дисперсію $D\xi$ та середнє квадратичне відхилення σ_{ξ} .
8. Випадкова величина ξ має такий закон розподілу: Визначити математичне сподівання $M\xi$, дисперсію $D\xi$ та середнє квадратичне відхилення σ_{ξ} .
9. Випадкова величина ξ підпорядковується закону Симпсона („закону рівнобедреного трикутника”) на відрізку $[-a; a]$. Визначити математичне сподівання $M\xi$, дисперсію $D\xi$, середнє квадратичне відхилення σ_{ξ} і третій центральний момент μ_3 цієї випадкової величини.
10. Кривою розподілу випадкової величини ξ є верхня дуга еліпса з півосями a і b . Величина a відома. Визначити математичне



сподівання $M\xi$, дисперсію $D\xi$ та середнє квадратичне відхилення σ_ξ цієї випадкової величини.

11. Щільність розподілу випадкової величини ξ задана формулою:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ ax, & 0 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти константу a , дисперсію випадкової величини ξ . Обчислити ймовірність того, що відхилення випадкової величини ξ від її математичного сподівання буде не більше 0,5.

12. Щільність розподілу випадкової величини ξ задана формулою:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 3x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти моду, медіану і математичне сподівання величини ξ .

13. Обчислити математичне сподівання і дисперсію визначника

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix},$$

елементи якого ξ_{ij} – незалежні випадкові величини з $M(\xi_{ij}) = 0$ і $D(\xi_{ij}) = \sigma^2$.

14. Випадкова величина ξ має щільність розподілу

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cos^2 x, & |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Знайти $M\xi$ і $D\xi$.

15. Довести, що якщо ξ та η незалежні випадкові величини, то

$$D(\xi \cdot \eta) = D\xi \cdot D\eta + (M\xi)^2 D\eta + (M\eta)^2 D\xi.$$

16. (Розподіл Коші.) Випадкова величина ξ розподілена за законом

Коші зі щільністю розподілу $f_\xi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ $-\infty < x < +\infty$. Знайти: а)

$M\xi$ і $D\xi$; б) моду і медіану випадкової величини ξ .

17. (Розподіл Релея.) Випадкова величина ξ ексцентриситета деталі має розподіл Релея: $F_{\xi}(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$, ($x \geq 0$). Знайти: а) щільність розподілу випадкової величини; б) її моду і медіану.

18. Задана щільність розподілу випадкової величини ξ :

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{3}{2}x^2, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{3}{2}(2-x)^2, & 1 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти: а) початкові і центральні моменти перших чотирьох порядків; б) асиметрію та ексцес цієї випадкової величини.

19. (Розподіл Лапласа.) Випадкова величина ξ розподілена за законом Лапласа зі щільністю розподілу $f_{\xi}(x) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{|x-a|}{\alpha}}$, де a – довільне дійсне число, $\alpha > 0$. Знайти математичне сподівання $M\xi$ і дисперсію $D\xi$ випадкової величини ξ .

20. Функція розподілу випадкової величини ξ , що має скінченне математичне сподівання дорівнює $F_{\xi}(x)$. Довести, що

$$M\xi = -\int_{-\infty}^0 F_{\xi}(x)dx + \int_0^{+\infty} (1 - F_{\xi}(x))dx.$$

21. Випадкова величина ξ розподілена за показниковим законом з параметром λ . Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $\eta = e^{\xi}$.

22. Випадкова величина ξ має закон арксинуса зі щільністю розподілу ймовірностей

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

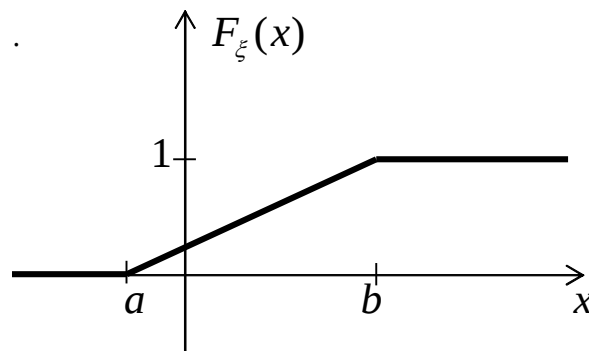
Знайти: а) функцію розподілу; б) $M\xi$ і $D\xi$; в) моду і медіану.

Тема „Рівномірний розподіл”

Якщо функція розподілу випадкової величини $\xi(\omega)$ має вигляд

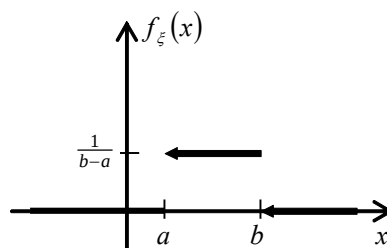
$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 1, & x > b, \end{cases}$$

то кажуть, що ця випадкова величина **розподілена рівномірно** на відрізку $[a, b]$.



Щільність розподілу рівномірно розподіленої на відрізку $[a, b]$ випадкової величини записується так:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ \frac{1}{b-a}, & a < x \leq b; \\ 0, & x > b. \end{cases}$$



Для випадкової величини, рівномірно розподіленої на відрізку $[a, b]$

$$M_{\xi} = \frac{a+b}{2}, \quad D_{\xi} = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad \sigma_{\xi} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

**Приклади для розв'язування на практичних заняттях,
самостійної та індивідуальної роботи студентів**

1. Щільність розподілу випадкової величини ξ задана формулою

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ \frac{1}{b-a}, & a < x \leq b; \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

Визначити: а) математичне сподівання $M\xi$, дисперсію $D\xi$ та середнє квадратичне відхилення σ_{ξ} цієї випадкової величини; б) імовірність того, що випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (α, β) ; в) моду і медіану випадкової величини ξ .

2. Випадкова величина ξ розподілена рівномірно. $M\xi = 4$, $D\xi = 3$. Знайти щільність розподілу випадкової величини ξ .
3. Нехай ξ – випадкова величина, рівномірно розподілена на відрізку $[-1, 1]$. Знайти розподіл випадкової величини $\eta = |\xi|$.
4. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[0, 1]$. Знайти щільність розподілу випадкових величин: а) $\eta = \xi^2$; б) $\eta = \frac{1}{\xi}$; в) $\eta = e^{\xi}$ і побудувати їх графіки.
5. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[0, 2]$. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = |\xi - 1|$.
6. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $[0, 2]$. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = |\xi|$.
7. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = \sin \xi$.
8. Нехай ξ рівномірно розподілена на $[0, 4\pi]$. Знайти функцію розподілу і щільність розподілу випадкової величини $\eta = \sin \xi$.
9. Випадкова величина ξ рівномірно розподілена на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $\eta = |\sin \xi|$.

10. Діаметр круга – випадкова величина ξ , рівномірно розподіленої на відрізку $[a, b]$. Знайти функцію розподілу площі круга.
11. Точка P рівномірно розподілена в крузі радіуса R . Нехай η – відстань від точки P до центра круга. Знайти функцію розподілу $F_\eta(x)$ і щільність розподілу $f_\eta(x)$ випадкової величини η . Побудувати графіки функцій $F_\eta(x)$ і $f_\eta(x)$. Обчислити $M\eta$, $D\eta$.
12. Точка A рівномірно розподілена на одиничному колі з центром у початку координат. Нехай ξ – проекція точки A на вісь Ox . Обчислити а) функцію розподілу ξ ; б) щільність розподілу ξ ; в) $M\xi$; г) $P\left\{\left|\xi\right|\geq\frac{1}{2}\right\}$.
13. На колі радіуса R навмання вибирають дві точки з рівномірним розподілом. Знайти функцію γ відстані між ними і обчислити $M\gamma$.
14. Точка P рівномірно розподілена на колі радіуса R з центром у початку координат. Знайти функцію розподілу і щільність розподілу довжини γ відрізка дотичної, проведеної в точці P до точки перетину з віссю Ox . Чи існує $M\gamma$?
15. На відрізок осі ординат з кінцями $(0, 0)$ і $(0, R)$ навмання кинули точку, ордината якої рівномірно розподілена на інтервалі $(0, R)$. Через цю точку проведена хорда кола $x^2 + y^2 = R^2$, перпендикулярна до осі Oy . Знайти функцію розподілу довжини цієї хорди.
16. На відрізку $[0, T]$ навмання вибрані дві точки з рівномірним розподілом. Ці точки розбивають відрізок $[0, T]$ на три відрізки. Знайти функцію розподілу кожного з трьох одержаних відрізків.
17. Нехай ξ – випадкова величина, рівномірно розподілена на відрізку $(0, 1)$. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = \ln \frac{1}{\xi}$. Обчислити $M\eta$.
18. Нехай ξ – випадкова величина, рівномірно розподілена на відрізку $[0, 1]$. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \xi)$.
19. Знайти середнє значення і дисперсію добутку двох незалежних випадкових величин ξ та η з рівномірними законами розподілу: ξ на інтервалі $[0, 1]$, η – на інтервалі $[1, 3]$.

Тема „Нормальний розподіл”

Якщо функція розподілу випадкової величини $\xi(\omega)$ має вигляд

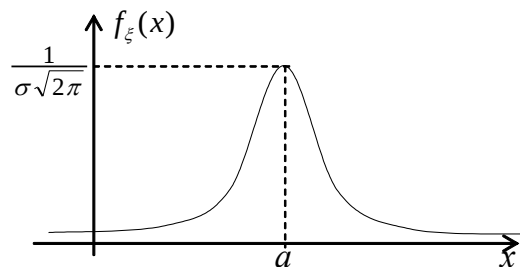
$$F_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{\frac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt,$$

то кажуть, що випадкова величина $\xi(\omega)$ **розподілена нормально** з параметрами a і σ ($a, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$).

Те, що випадкова величина розподілена нормально з параметрами a і σ записують так: $N(a, \sigma)$. Часто кажуть, що така випадкова величина **розподілена за законом Гаусса** з параметрами a і σ .

Для $N(a, \sigma)$ щільність розподілу записується так:

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$



Для нормально розподіленої випадкової величини з параметрами $N(a, \sigma)$

$$M\xi = a, \quad D\xi = \sigma^2, \quad \sigma_{\xi} = \sigma.$$

Приклади для розв’язування на практичних заняттях, самостійної та індивідуальної роботи студентів

1. Випадкова величина ξ має щільність розподілу

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \text{ Знайти: а) } M\xi \text{ і } D\xi; \text{ б) імовірність того, що}$$

випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (α, β) ;

в) моду і медіану випадкової величини ξ .

2. Випадкова величина ξ нормально розподілена з параметрами $N(0,1)$. Ймовірність якої з двох подій $\{|\xi| \leq 0,7\}$ чи $\{|\xi| \geq 0,7\}$ більша?
3. Випадкова величина ξ має нормальний розподіл з параметрами $N(0,1)$. Що більше $P\{-0,5 \leq \xi \leq -0,1\}$ чи $P\{1 \leq \xi \leq 2\}$?
4. Проводиться зважування деякої речовини без систематичних (одного знаку) похибок. Випадкові похибки зважування підпорядковуються нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 20$ г. Знайти ймовірність того, що зважування буде проведене з похибкою, яка не перевищує за абсолютною величиною 10 г.
5. (Правило 3σ). Випадкова величина ξ - похибка вимірювань – розподілена за нормальним законом. Знайти ймовірність того, ξ прийме значення між -3σ і 3σ , де σ - середнє квадратичне відхилення величини ξ (вважається, що систематичні похибки відсутні).
6. Коробки з цукерками упаковуються автоматично; їх середня маса дорівнює 1,06 кг. Знайти стандартне відхилення, якщо 5% коробок мають масу меншу 1 кг. Вважається, що маса коробок розподілена за нормальним законом.
7. Довести, що у випадку коли випадкова величина ξ розподілена за нормальним законом, то лінійна функція $\eta = A\xi + B$ ($A \neq 0$) також має нормальний розподіл.
8. Випадкова величина ξ має нормальний розподіл з математичним сподіванням 0 і дисперсією σ^2 . Знайти $M\xi^k$, $k = 1, 2, \dots$
9. Випадкова величина ξ має нормальний розподіл з параметрами $N(a, \sigma)$. Знайти: а) щільність розподілу випадкової величини $\eta_1 = \xi^2$ при $a = 0$; б) щільність розподілу випадкової величини $\eta_2 = e^\xi$ при довільних a і σ .
10. Випадкові величини ξ_1 і ξ_2 незалежні і мають нормальний розподіл з параметрами $N(0, \sigma^2)$. Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = \xi_1^2 + \xi_2^2$.

11. Розподілом χ^2 з n степенями вільності називається розподіл випадкової величини $\chi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2$, де $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - незалежні випадкові величини Ю розподілені нормально з параметрами $N(0,1)$. Знайти: а) щільність розподілу випадкової величини ξ_1^2 ; б) математичне сподівання і дисперсію випадкової величини χ^2 .
12. (Логарифмічно нормальний розподіл.) Щільність імовірності випадкової величини ξ дорівнює $f_\xi(x) = 0$ при $x \leq 0$ і
$$f_\xi(x) = \frac{1}{x\beta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \alpha)^2}{2\beta^2}}$$
 при $x > 0$, α - довільне дійсне число, β - додатне дійсне число. Знайти $M\xi$ і $D\xi$.
13. Певна категорія людей має середню вагу m кг і середнє квадратичне відхилення ваги 3 кг. Для випадків $m=60$ і $m=10$ визначити ймовірність того, що вага випадково вибраної людини відрізняється від m не більше, ніж на 5 кг; якщо а) вага має нормальний розподіл; б) вага має логарифмічний нормальний розподіл.
14. Випадкова величина ξ нормально розподілена з параметрами $N(0,1)$. Знайти $M\xi \cos \xi$, $M \frac{\xi}{1+\xi^2}$, $M \sin \xi$.
15. Випадкова величина ξ має нормальний розподіл з математичним сподіванням 0 і дисперсією 1. Знайти $M \cos \xi$, $D \cos \xi$.
16. Випадкова величина ξ має нормальний розподіл з математичним сподіванням 0 і дисперсією 1. Що більше $D \sin \xi$, $D \cos \xi$.
17. Знайти середню швидкість молекул газу і дисперсію швидкості, підпорядковану закону Максвелла: $f(v) = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} v^2 e^{-h^2 v^2}$ при $v \geq 0$ і $f(v) = 0$ при $v < 0$.
18. Знайти центральні моменти нормального розподілу.
19. Випадкова величина ξ має нормальний розподіл $N(0,1)$. Знайти щільність розподілу величин $\eta_1 = \xi^{-2}$, $\eta_2 = |\xi|$. Обчислити математичні сподівання тих величин, для яких воно визначене. Знайти розподіл величини $\eta = \text{sign} \xi$.

Тема „Двомірні випадкові величини. Нерівність Чебишова. Закон великих чисел”

Нехай задано ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ і n випадкових величин на ньому $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$. Тоді для будь якого $i = 1, 2, \dots, n$ випадкові події $\{\omega : \xi_i(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$. З випадкових величин $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$ можна скласти вектор $(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$ який називається **випадковим вектором** – це вектор, компоненти якого випадкові величини.

Ймовірність

$$P\{\omega : \xi_1(\omega) < x_1, \xi_2(\omega) < x_2, \dots, \xi_n(\omega) < x_n\} = F_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

називається **функцією сумісного розподілу** системи випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$.

Властивості функції сумісного розподілу

1°. $F_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ визначена для всіх $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

2°. $0 \leq F_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 1$.

3°. $F_{\xi_1 \xi_3 \xi_2}(x_1, x_3, x_2) = F_{\xi_1 \xi_2 \xi_3}(x_1, x_2, x_3)$.

4°. $\lim_{x_1 \rightarrow +\infty} F_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\xi_2 \xi_3 \dots \xi_n}(x_2, x_3, \dots, x_n)$.

Для двох випадкових величин цю властивість записують так:
 $F_{\xi_1 \xi_2}(\infty, x_2) = F_{\xi_2}(x_2)$, $F_{\xi_1 \xi_2}(x_1, \infty) = F_{\xi_1}(x_1)$. Зрозуміло, що $F_{\xi_1 \xi_2}(\infty, \infty) = 1$.

Для трьох змінних має місце, наприклад, така рівність:
 $F_{\xi_1 \xi_2 \xi_3}(x_1, \infty, x_3) = F_{\xi_1 \xi_3}(x_1, x_3)$.

Отже, якщо відома функція сумісного розподілу випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, то можна знайти функції розподілу кожної з випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ окремо, наприклад:

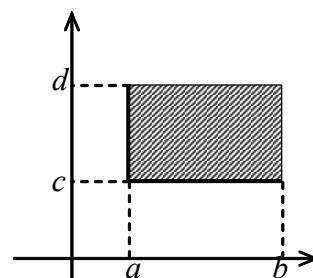
$$F_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}(x_1, \infty, \dots, \infty) = F_{\xi_1}(x_1).$$

5°. Функція сумісного розподілу неспадна по кожній із змінних.

6°. Функція сумісного розподілу неперервна зліва по кожній із змінних.

7°. Імовірність $P\{a \leq \xi_1(\omega) < b, \quad c \leq \xi_2(\omega) < d\} =$

$$\begin{aligned} &= P\{\xi_1 < b, \quad \xi_2 < d\} - P\{\xi_1 < a, \quad \xi_2 < d\} - \\ &- P\{\xi_1 < b, \quad \xi_2 < c\} + P\{\xi_1 < a, \quad \xi_2 < c\} = \\ &= F_{\xi_1 \xi_2}(b, d) - F_{\xi_1 \xi_2}(a, d) - F_{\xi_1 \xi_2}(b, c) + F_{\xi_1 \xi_2}(a, c) \end{aligned}$$



Означення. Якщо функція сумісного розподілу $F_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}(x_1, \dots, x_n)$ може бути представлена у вигляді

$$F_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n,$$

то $f_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}(x_1, \dots, x_n)$ називається **щільністю сумісного розподілу**.

Властивості щільності сумісного розподілу:

$$1^0. f_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}(x_1, \dots, x_n) \geq 0.$$

$$2^0. \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n = 1.$$

Нехай випадкова величина $\xi(\omega) \geq 0$, $a > 0$ – деяке дійсне число, існує математичне сподівання $M\xi$. Тоді виконується **нерівність Маркова**

$$P\{\xi \geq a\} \leq \frac{M\xi}{a}.$$

Цю нерівність називають ще **першою нерівністю Чебишова**

Для будь-якого $\varepsilon > 0$ імовірність того, що випадкова величина $\xi(\omega)$ відрізняється від свого математичного сподівання не менше, ніж на ε , не перевищує дисперсії випадкової величини ξ поділеної на ε^2 :

$$P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Ця нерівність називається **нерівністю Чебишова (другою нерівністю Чебишова)**.

Означення. Кажуть, що послідовність випадкових величин $\{\xi_n\}_1^\infty$ **збігається за імовірністю** до випадкової величини ξ , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ границя ймовірності

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\omega : |\xi_n - \xi| > \varepsilon\} = 0.$$

Використовуються такі позначення для збіжності за ймовірністю:

$$p \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi \quad \text{або} \quad \xi_n \xrightarrow[p]{n \rightarrow \infty} 0.$$

Теорема Чебишова (закон великих чисел у формі Чебишова).

Нехай випадкові величини ξ_n незалежні однаково розподілені, існують (для кожного n) математичні сподівання $M\xi_n$, а також існує стала $C > 0$, що для всіх n мають місце нерівності $D\xi_n < C$. Тоді $\xi_n \xrightarrow[p]{n \rightarrow \infty} 0$.

Приклади для розв'язування на практичних заняттях, самостійної та індивідуальної роботи студентів

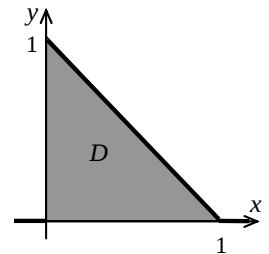
1. Кидають два гральних кубики. Нехай ξ – сума очок, що випали на їх верхніх гранях. Написати закон розподілу випадкової величини ξ .
2. Закони розподілу кількості очок, які вибиває кожен з двох стрілків, такі:

ξ	1	2	3
p	0,1	0,3	0,6

η	1	2	3
p	0,2	0,3	0,5

Знайти закон розподілу суми очок, вибитих обома стрілками.

3. По мішені проводиться один постріл. Імовірність попадання дорівнює p . Розглядаються дві випадкові величини: ξ – кількість попадань; η – кількість промахів. Побудувати функцію розподілу $F_{\xi\eta}(x, y)$ двовимірної випадкової величини (ξ, η) .
4. Двовимірний випадковий вектор (ξ, η) підпорядковується закону розподілу зі щільністю $f_{\xi\eta}(x, y) = Axy$ в області D та $f_{\xi\eta}(x, y) = 0$ поза областю D . Область D – трикутник, обмежений прямими $x + y - 1 = 0$, $x = 0$, $y = 0$. Знайти величину A , математичні сподівання $M\xi$ і $M\eta$, дисперсії $D\xi$ і $D\eta$, коваріацію $\text{cov}(\xi, \eta)$, коефіцієнт кореляції $\rho(\xi, \eta)$.



5. Дана щільність імовірності випадкового вектора (ξ, η) : $f_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{2} \sin(x + y)$, де $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Знайти функцію розподілу цього вектора.

6. Відповідно до схеми Бернуллі з імовірністю успіху p та ймовірністю поразки $q = 1 - p$ проводяться два випробування. Виписати розподіл двовимірного випадкового вектора (ξ, η) , де ξ, η – кількість успіхів в i -му випробуванні.

7. Кидають два симетричні гральні кубики. Випадкові величини: $\xi = 1$, якщо сума очок, що випали, парна і $\xi = 0$ в іншому випадку; $\eta = 1$, якщо добуток числа очок, що випали, парний і $\eta = 0$ в іншому

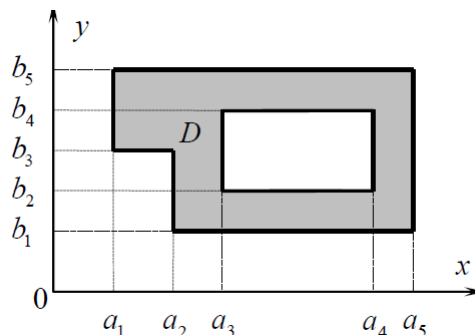
випадку. а) Описати закон розподілу випадкового вектора (ξ, η) .
 б) Побудувати функцію розподілу $F_{\xi\eta}(x, y)$.

8. Розподіл дискретного випадкового вектора (ξ, η) має такий вигляд:

ξ	η			
	10	20	30	40
0,5	0,05	0,12	0,08	0,04
2,5	0,09	0,30	0,11	0,21

Знайти: а) одновимірні закони розподілу випадкових величин ξ й η ;
 б) значення $F_{\xi\eta}(x, y)$ в точках $(3,2; 15)$ і $(2; 31)$; в) імовірність події $(0 \leq \xi \leq 2, 10 \leq \eta \leq 25)$. г) Перевірити, чи є величини ξ й η незалежними.

9. Визначити ймовірність потрапляння випадкової точки (ξ, η) в зображену на рисунку область D , якщо відома функція розподілу $F_{\xi\eta}(x, y)$.



10. Імовірність виходу з автомату стандартної деталі дорівнює 0,96. Оцінити імовірність того, що число нестандартних деталей серед 2000 виробів буде знаходитись в межах від 60 до 100?

11. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що випадкова величина ξ відхилиться від свого математичного сподівання менше ніж на 3σ .

12. Середнє значення швидкості вітру у даному пункті дорівнює 16 км/год. Оцінити за допомогою нерівності Чебишова (першої форми – нерівності Маркова) імовірність того, що у цьому пункті швидкість вітру не перевищує 80 км/год.

13. Імовірність деякої події A у кожному випробуванні з серії n незалежних випробувань $p = \frac{1}{3}$. Оцінити імовірність того, що частота цієї події відхилиться від її ймовірності за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,01, якщо буде проведено а) $n = 9000$ випробувань;

б) $n = 7500$ випробувань. Порівняти одержані оцінки з результатами використання інтегральної теореми Лапласа.

14. Випадкова величина η_n є сумою очок, що випали при n підкиданнях правильного грального кубика. За допомогою нерівності Чебишова оцінити зверху $P\left(\left|\frac{\eta_n}{n} - 3,5\right| \geq \varepsilon\right)$, $\varepsilon > 0$.

15. Нехай випадкова величина ξ – час запізнення студента на лекцію, крім того, відомо, що $M\xi = 1$ хв. Оцінити ймовірність того, що студент спізниться не менше, ніж на 5 хв.

16. Середній термін служби автомобіля без капітального ремонту – 4 роки. Оцінити знизу ймовірність того, що даний автомобіль не прослужить більше 20 років без капітального ремонту.

17. Послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ задана законом розподілу

ξ_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
p_n	$\frac{1}{2^n}$	$1 - \frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{1}{2^n}$

Чи застосовна до даної послідовності теорема Чебишова?

18. Послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ задана законом розподілу

ξ_n	a	$-a$
p_n	$\frac{n}{2n+1}$	$\frac{n+1}{2n+1}$

Чи застосовна до даної послідовності теорема Чебишова?

19. Послідовність незалежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ задана законом розподілу

ξ_n	$n+1$	$-n$
p_n	$\frac{n}{2n+1}$	$\frac{n+1}{2n+1}$

Чи застосовна до даної послідовності теорема Чебишова?

20. Нехай $\xi_1, \xi_2, \dots$ – послідовність незалежних випадкових величин, крім того, ξ_n набуває значення $\sqrt{n}$, 0, $-\sqrt{n}$ з імовірностями $\frac{1}{2n}$, $1 - \frac{1}{n}$, $\frac{1}{2n}$ відповідно. Чи виконується для цієї послідовності закон великих чисел?

Тема „Характеристична функція випадкової величини”

Нехай на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задана деяка випадкова величина ξ . **Характеристичною функцією** випадкової величини ξ називається функція

$$\varphi_{\xi}(t) \stackrel{\text{def}}{=} M e^{it\xi},$$

де $t \in R$ – параметр.

Властивості характеристичної функції:

1⁰. Для будь-якої випадкової величини ξ характеристична функція $\varphi_{\xi}(t)$ існує при кожному $t \in R$.

2⁰. Характеристична функція $\varphi_{\xi}(t)$ випадкової величини ξ

а) рівномірно неперервна на числовій осі,

б) $|\varphi_{\xi}(t)| \leq 1$,

в) $\varphi_{\xi}(0) = 1$.

3⁰. Характеристична функція суми двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх характеристичних функцій: якщо випадкові величини ξ_1 і ξ_2 незалежні, а $\varphi_{\xi_1}(t)$, $\varphi_{\xi_2}(t)$ – їх характеристичні функції, то характеристична функція $\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \varphi_{\xi_1}(t)\varphi_{\xi_2}(t)$.

4⁰. Нехай випадкова величина $\eta = a\xi + b$, де a і b – постійні. Тоді характеристична функція $\varphi_{\eta}(t)$ випадкової величини η дорівнює

$$\varphi_{\eta}(t) = \varphi_{a\xi+b}(t) = e^{itb} \varphi_{\xi}(at).$$

5⁰. Якщо існує абсолютний момент випадкової величини ξ порядку k $M|\xi|^k$, то характеристична функція $\varphi_{\xi}(t)$ диференційовна k разів і похідна k -го порядку у нулі дорівнює $\varphi_{\xi}^{(k)}(0) = i^k M \xi^k$.

**Приклади для розв'язування на практичних заняттях,
самостійної та індивідуальної роботи студентів**

1. Знайти характеристичну функцію випадкової величини, заданої таким законом розподілу:

ξ	-1	1
P	0,5	0,5

2. Випадкова величина ξ – кількість попадань при одному пострілі. Імовірність попадання дорівнює p . Знайти характеристичну функцію випадкової величини ξ .
3. Знайти характеристичну функцію випадкової величини ξ розподіленої за біноміальним законом.
4. Знайти характеристичну функцію випадкової величини ξ розподіленої за законом Пуассона з параметром λ .
5. Знайти характеристичну функцію випадкової величини ξ рівномірно розподіленої на відріжку $[0, a]$.
6. Знайти характеристичну функцію випадкової величини ξ рівномірно розподіленої на інтервалі $(-a, a)$.
7. Знайти характеристичну функцію випадкової величини ξ розподіленої нормально з параметрами 0 і 1: $N(0, 1)$.
8. Припустимо, що випадкова величина ξ розподілена нормально з параметрами $N(a, \sigma)$, тобто $M\xi = a$, $D\xi = \sigma^2$. Знайти її характеристичну функцію.
9. Знайти характеристичну функцію випадкової величини ξ розподіленої за показниковим розподілом зі щільністю

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

10. Знайти характеристичну функцію випадкової величини ξ розподіленої за показниковим розподілом зі щільністю $f_{\xi}(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

11. Знайти характеристичну функцію випадкової величини ξ розподіленої за законом Коші зі щільністю

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

12. Знайти характеристичну функцію випадкової величини ξ розподіленої за законом Симпсона („законом рівнобедреного трикутника”) зі щільністю

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} a(1-a|x|), & |x| \leq a^{-1}; \\ 0, & |x| > a^{-1}. \end{cases}$$

13. Нехай випадкова величина ξ_1 розподілена за законом Пуассона з параметром λ_1 , а випадкова величина ξ_2 за законом Пуассона з параметром λ_2 . Вважатимемо, що ξ_1 і ξ_2 – незалежні. За яким законом розподілена випадкова величина $\eta = \xi_1 + \xi_2$?

14. Нехай ξ_1 – нормально розподілена випадкова величина з параметрами $N(a_1, \sigma_1)$, ξ_2 – нормально розподілена випадкова величина з параметрами $N(a_2, \sigma_2)$, причому ξ_1, ξ_2 – незалежні. Як розподілена $\eta = \xi_1 + \xi_2$?

15. Чи може бути характеристичною функцією імовірнісного розподілу функція $e^{-|t|}$?

16. Чи може бути характеристичною функцією імовірнісного розподілу функція $\cos(t^2)$?

17. Знайти характеристичну функцію випадкової величини, рівномірно розподіленої на відрізку $[a, b]$.

18. У партії, що складається з n виробів, є m ($m < n$) неякісних. Для перевірки їхньої якості зроблена вибірка без повернення, що містить r виробів, де $m < r < n - m$. Знайти характеристичну функцію кількості неякісних виробів, що містяться у вибірці.

19. Випадкова величина має характеристичну функцію $\varphi_{\xi}(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

Знайти її щільність розподілу.

20. Знайти початкові моменти випадкової величини ξ , характеристична функція якої $\varphi_{\xi}(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

Тема „Математична статистика”

Лабораторна робота №1

Первинна обробка статистичної інформації

При виконанні лабораторної роботи №1 студенти повинні засвоїти основні ідеї вибіркового методу математичної статистики. Крім того, студентам необхідно розрізняти, які методи первинної обробки статистичної інформації і в якому випадку слід застосовувати.

Як відомо, при вивченні деякої ознаки випадкової величини проводяться вимірювання, в результаті яких визначаються варіанти вибірки. Серед варіант можуть бути й однакові.

Якщо кількісна ознака набуває лише окремих ізольованих значень, то вона називається дискретною (наприклад, кількість робітників зміни, кількість деталей технічного пристрою, що вийшли з ладу за певний проміжок часу, і ін.). Якщо кількісна ознака приймає довільні числові значення у певних межах, то вона називається неперервною (наприклад, час безвідмовної роботи певного пристрою, тривалість обробки деякої деталі, і ін.).

У першому випадку потрібно впорядкувати всі значення отриманої сукупності варіант вибірки об'єму n і напроти кожної вказати частоту, тобто одержуємо дискретний варіаційний ряд

x_1	x_2	$\dots$	x_k
n_1	n_2	$\dots$	n_k

причому необхідно мати на увазі, що $\sum_{i=1}^k n_i = n$. Зрозуміло, що при

великому об'ємі вибірки такий варіаційний ряд незручний для подальшого вивчення розподілу відповідної ознаки. У цьому випадку для виявлення закономірності розподілу рекомендується будувати інтервальный варіаційний ряд. Увесь діапазон зміни ознаки від найменшого значення $x_{\min} = \min\{x_1, \dots, x_n\}$ до найбільшого значення $x_{\max} = \max\{x_1, \dots, x_n\}$ розбивають на рівновеликі інтервали (або класи). Для визначення довжини інтервалів можна скористатися формулою Стерджеса

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3,322 \cdot \lg n}. \quad (1)$$

Якщо h виявляється дробовим числом, то за довжину інтервала потрібно взяти або найближче ціле число або найближчий зручний дріб. Але можна за довжину інтервала h взяти і $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{m}$, де m береться від 6 до 20 у залежності від об'єму вибірки. За початок першого інтервала можна прийняти величину, яка дорівнює $\alpha_1 = x_{\min} - \frac{h}{2}$; наступні числа α_i ($i = 2, 3, \dots$) – це границі інтервалів $\alpha_2 = \alpha_1 + h$, $\alpha_3 = \alpha_2 + h$ і т.д. Побудова інтервалів триває до тих пір, поки початок наступного інтервала не буде рівним або більшим $x_{\max}$. Далі підраховують кількість елементів сукупності, які попали в даний інтервал. Позначимо їх відповідно $n_1, n_2, \dots, n_l$. Це частоти, сума яких, як і раніше, повинна дорівнювати n , тобто $\sum_{i=1}^l n_i = n$. Розділивши всі частоти на об'єм сукупності, одержимо

відносні частоти $w_i = \frac{n_i}{n}$. Для них, очевидно, $\sum_{i=1}^l w_i = 1$.

Приклад 1. Дана сукупність (група) з 50 спостережень:

17 19 23 18 21 16 13 20 18 15
 20 14 20 16 20 19 15 19 16 19
 15 22 21 12 21 18 14 14 17 16
 13 19 18 20 16 20 19 17 18 18
 21 17 19 17 17 11 18 19 19 17

Зобразити її у вигляді інтервального варіаційного ряду.

Розв'язування. Обчислимо h за формулою (1):

$$h = \frac{23 - 11}{1 + 3,322 \cdot \lg 50} = \frac{12}{6,62} \approx 1,82. \text{ Візьмем } h = 2. \text{ Результати обробки}$$

запишемо у таблицю, яка називається інтервальним варіаційним рядом.

α_i	(10, 12)	(12, 14)	(14, 16)	(16, 18)	(18, 20)	(20, 22)	(22, 24)
n_i	1	3	6	12	16	10	2
w_i	0,02	0,06	0,12	0,24	0,32	0,2	0,04

Інтервальний варіаційний ряд доцільно будувати, якщо ознака, яку вивчають неперервна, але можна також будувати його для дискретної

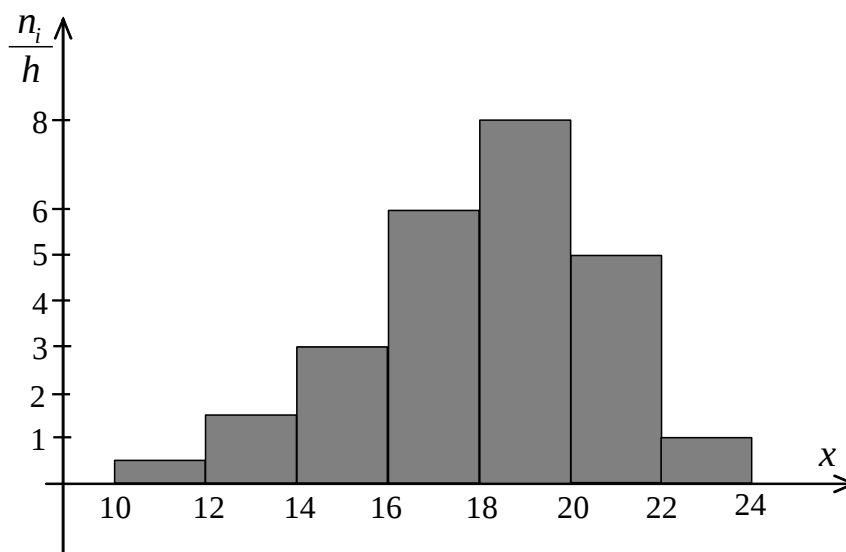
ознаки у випадку великої кількості варіант. Слід мати на увазі, що дискретний варіаційний ряд будують тільки для дискретної ознаки.

Для зручності подальшого аналізу варіаційні ряди зображають у вигляді полігона (при дискретному розподілі ознаки) і гістограми (для інтервальних варіаційних рядів).

Для побудови **полігона** розподілу в прямокутній системі координат наносять точки з координатами (x_i, n_i) , де x_i – варіанта, а n_i – відповідна їй частота. Потім ці точки з'єднують відрізками, а крайні точки, щоб замкнути ламану, з'єднують з віссю абсцис відрізками прямих, паралельних до осі ординат.

Гістограму будують так: на кожному інтервалі (класі) як на основі, будується прямокутник, площа якого дорівнює відповідній йому відносній частоті w_i . Але можна висоти цих прямокутників вибирати пропорційно до чисел n_i . Одержується фігура у вигляді прилеглих один до одного прямокутників різної висоти.

Побудуємо гістограму для прикладу 1.



Завдання до лабораторної роботи №1.

За даними вибірки побудувати інтервальний варіаційний ряд і відповідну гістограму частот.

Варіант 1.

6,7	9,2	10,8	10,4	12,1	10,0	8,7	12,6	11,4	8,3
4,8	11,4	8,3	12,6	10,8	11,4	10,4	14,1	19,0	10,4
10,0	12,6	7,1	15,4	14,1	9,2	12,1	19,8	15,4	14,1
11,8	8,7	12,1	11,4	2,5	8,3	25,0	11,4	51,6	19,4
14,6	10,8	14,1	18,4	13,4	7,1	12,6	10,4	16,1	26,0
17,4	13,4	11,8	14,6	16,1	10,4	31,8	9,2	14,6	11,4
14,1	19,4	12,6	10,8	11,4	3,7	11,8	4,8	13,4	10,0
8,3	16,1	30,2	14,1	5,6	10,8	15,4	40,4	12,1	9,2
10,8	21,0	11,4	9,2	10,4	19,4	14,6	17,4	12,6	8,7
12,6	15,4	10,0	8,7	11,8	14,1	11,4	26,0	10,4	7,1

Варіант 2.

1,8	4,5	6,8	4,9	2,6	3,2	6,8	6,2	4,1	5,5
3,2	6,2	3,3	7,6	5,7	4,5	9,1	11,1	7,6	8,0
5,7	8,0	0,5	1,8	4,1	6,8	1,2	3,2	4,5	6,2
9,9	1,2	4,5	6,2	7,6	2,6	4,9	7,6	9,1	3,2
8,6	4,9	3,2	5,4	6,8	8,0	5,4	12,3	4,1	6,8
4,1	16,5	7,6	11,7	4,5	6,2	1,8	4,5	12,3	7,6
12,3	24,4	6,2	21,0	14,4	5,4	7,6	13,1	6,2	4,5
14,4	15,6	16,5	3,2	8,6	2,3	6,2	0,5	8,6	4,1
7,6	9,1	13,1	4,5	6,2	12,3	11,7	6,8	11,1	1,2
6,2	2,6	4,1	6,8	9,9	7,6	4,5	5,4	1,8	2,3

Варіант 3.

4,2	5,6	6,3	7,4	11,6	8,3	17,4	12,4	9,3	2,7
3,8	8,1	10,3	6,8	9,8	6,3	2,2	16,5	10,8	6,0
7,0	12,4	9,3	8,2	3,8	5,6	7,4	4,2	9,8	7,7
8,3	6,3	10,8	1,8	7,0	7,7	14,4	8,1	6,3	3,2
13,4	16,5	4,7	8,1	6,0	2,7	8,2	5,6	7,4	8,2
20,8	19,4	7,7	4,2	9,3	6,8	4,2	19,4	13,4	9,3
10,3	4,7	8,2	12,4	10,3	7,4	15,4	8,2	23,4	4,2
7,7	2,2	14,4	27,0	8,2	22,4	24,6	7,4	14,4	8,1
6,3	9,8	23,4	25,4	3,8	32,4	12,4	6,8	16,5	6,3
5,6	8,2	17,4	20,8	7,4	13,4	9,8	4,2	8,3	7,0

Варіант 4.

4,9	12,6	16,8	19,8	23,4	85,1	50,8	31,2	70,2	18,4
10,2	15,4	53,8	9,4	30,3	12,4	5,8	12,7	42,4	26,6
64,7	52,5	33,8	24,6	73,1	57,6	47,2	38,6	31,8	25,5
22,6	18,6	76,2	64,7	33,6	29,0	26,0	33,2	40,2	49,6
16,0	22,2	25,0	34,7	44,9	53,8	70,2	74,2	61,3	49,6
40,2	6,2	13,0	17,2	23,2	73,1	57,6	61,3	64,7	47,2
38,6	34,7	43,5	47,2	61,3	6,0	14,4	33,0	25,0	22,6
16,0	22,2	64,7	43,5	15,2	38,6	47,2	16,8	18,2	17,4
47,2	38,6	24,6	22,2	16,0	18,2	20,8	20,0	52,5	7,7
33,8	23,6	17,2	22,0	20,0	18,6	43,5	8,9	34,7	38,6

Варіант 5.

17	6	20	23	18	22	20	17	12	20	11	7	19	20	7	21
19	11	21	13	17	22	22	14	20	20	15	19	20	19	13	21
21	6	14	6	19	18	23	12	19	16	12	9	14	12	24	29
17	12	13	15	14	12	8	13	12	24	29	11	18	10	16	10
15	7	18	24	29	11	10	18	18	14	17	17	23	29	12	12
17	11	11	16	14	13	9	28	28	14	11	10	18	10	14	19
17	24	26	19	17	12	17	17	18	19	12	25	17	12	19	19
16	12	25	26	15	12	10	14	11	20	15	19	26	15	15	12
15	23	16	20	15	15	16	23	24	16	18	21				

Варіант 6.

40,25	40,35	40,45	40,35	40,39	40,40	40,42	40,32	40,37	40,35
40,44	40,25	40,41	40,30	40,34	40,31	40,32	40,33	40,35	40,30
40,33	40,38	40,33	40,33	40,35	40,30	40,40	40,36	40,32	40,42
40,35	40,29	40,33	40,31	40,35	40,36	40,30	40,30	40,41	40,40
40,33	40,37	40,34	40,43	40,34	40,34	40,35	40,34	40,34	40,31
40,43	40,30	40,34	40,34	40,28	40,46	40,32	40,34	40,31	40,36
40,36	40,34	40,37	40,37	40,31	40,36	40,41	40,29	40,39	40,39
40,37	40,36	40,38	40,38	40,32	40,36	40,27	40,38	40,37	40,35

Варіант 7.

70	73	76	74	72	77	73	74	75	78	76	82	77	71
74	68	70	83	75	80	72	78	70	77	75	74	74	73
74	77	74	75	75	78	78	74	74	72	80	76	78	74
76	76	74	76	78	68	75	73	73	70	76	78	80	80
70	82	72	82	70	73	80	77	78	73	73	76	80	72
69	73	74	78	70	81	74	73	77	74	76	76	70	77
70	81	74	74	77	75	78	69	74	75	78	73	76	76
76	77	80	74	76	75	74	77	81	76	76	76	76	76
80	77	77	80	74	76	77	77	75	76	80	82	76	76
72	78	78	76	77	75	74	76	78	81	79	72	75	69

Варіант 8.

136	154	169	154	143	155	113	155	171	168	122	152
157	152	169	157	177	166	162	155	128	142	155	162
143	165	145	178	142	163	117	132	149	198	166	179
149	152	173	169	169	174	165	148	192	195	152	165
132	161	175	146	113	177	168	157	151	159	146	143

Варіант 9.

69	73	70	61	70	72	67	70	66	70	76	71	71	68	70	73
74	65	72	70	70	66	70	77	69	67	69	72	72	72	70	67
71	67	73	74	66	75	76	71	67	70	73	59	59	58	62	67
75	65	71	77	78	59	62	73	72	72	71	67	64	74	73	67

Варіант 10.

17	21	9	19	23	18	22	20	17	12	20	11	8	20	20	9	17
21	13	17	22	22	10	20	20	15	19	20	20	13	21	21	9	14
11	23	19	18	19	9	14	12	24	29	17	12	19	16	12	29	24
11	12	13	10	10	10	11	12	10	16	10	15	13	18	24	29	18
18	14	10	17	23	29	11	18	11	11	16	18	14	17	11	28	29
12	10	10	11	10	18	11	17	24	28	12	17	12	18	11	19	19
12	25	26	15	20	11	17	10	19	16	19	25	15	26	17	10	14
11	23	15	20	26	15	26	12	15	14	25	16	15	12	19	17	12

Варіант 11.

157	120	133	130	141	159	162	111	131	152
160	123	124	128	110	120	106	135	91	112
136	110	172	122	93	129	117	138	156	124
123	118	134	129	126	131	137	116	140	145
101	147	112	126	148	139	92	113	114	127
151	122	109	122	105	150	127	131	141	117
124	170	144	128	127	145	114	131	124	103
128	144	108	84	134	107	154	129	153	119
121	110	110	126	113	129	164	98	143	118
99	122	118	140	103	102	141	142	126	130

Варіант 12.

99	128	129	124	141	120	162	101	128	160
100	147	119	137	123	136	135	125	126	102
170	147	152	121	148	108	95	120	108	127
163	120	118	167	122	139	136	134	92	106
118	116	103	121	111	168	97	107	136	157
125	122	150	137	158	124	144	106	110	102
127	124	140	139	124	131	98	112	148	109
145	162	139	107	129	153	157	149	111	109
126	126	112	159	91	91	110	156	166	132
82	137	79	128	124	142	146	144	124	113

120	106	104	165	141	148	109	114	120	129
132	168	95	98	123	150	132	103	153	133
116	135	117	125	130	164	148	129	122	99
134	159	122	142	84	140	105	131	149	120
140	101	150	109	91	134	127	167	127	127
163	143	101	92	128	161	126	87	160	124
144	126	125	157	112	137	106	100	127	124
120	162	145	135	110	115	156	152	113	112
171	131	91	116	102	138	152	130	150	135
129	107	109	140	127	162	101	123	142	121

Варіант 13.

Варіант 14.

112	113	159	93	112	154	156	128	111	88
133	145	123	138	110	104	128	117	129	158
84	144	118	140	108	109	131	125	114	122
85	90	103	81	120	146	100	79	137	117
113	127	155	95	134	162	97	128	123	149
133	148	121	161	104	130	108	146	116	123
120	164	86	129	92	97	129	154	118	144
101	107	99	96	160	94	112	114	140	141
124	113	89	145	103	141	137	91	109	118
137	124	163	92	139	136	121	138	124	83

Варіант 15.

127	96	116	106	144	142	130	165	119	133
112	163	92	151	124	118	115	130	113	137
140	100	148	125	95	108	148	149	124	150
110	155	89	117	101	119	124	111	104	107
135	162	110	130	138	90	163	101	153	100
145	122	114	115	152	147	121	102	151	83
144	99	103	122	139	124	136	156	91	135
109	113	123	128	98	133	109	91	108	133
127	115	86	121	139	131	145	103	112	120
136	143	123	154	134	132	95	116	118	154

Варіант 16.

157	120	120	121	112	158	155	147	101	163
147	122	129	141	133	119	132	125	129	119
91	116	108	111	125	100	144	131	101	92
88	119	122	137	102	121	166	139	128	142
164	113	121	109	85	156	143	125	133	160
144	132	130	116	79	146	135	113	126	156
140	114	145	107	136	112	117	124	90	133
123	102	116	98	150	78	138	84	106	136
118	158	131	113	127	115	114	93	126	96
162	146	122	135	141	112	90	108	130	117

Варіант 17.

126	93	114	126	81	140	129	114	138	140
151	171	152	139	97	163	117	158	125	129
116	129	108	124	105	137	143	106	140	137
120	122	145	136	169	122	132	97	123	112
144	101	148	128	124	125	117	142	133	119
125	170	138	100	80	124	108	90	83	86
163	109	100	125	160	138	144	137	111	128
87	111	130	99	109	165	156	152	115	104
111	107	131	124	162	88	94	92	132	125
112	150	102	82	113	158	107	134	157	101

Варіант 18.

0,45	0,21	0,14	0,15	1,52	0,1	0,52	1,59	3,38	2,25
0,8	1,26	2,31	0,84	3,72	2,11	1,02	4,2	2,53	0,78
2,92	0,71	4,7	3,02	1,58	4,12	2,59	0,88	0,96	1,76
1,93	4,9	2,82	1,14	5,7	1,21	1,47	3,52	0,36	0,64
0,47	0,25	0,19	0,21	1,56	0,17	0,62	1,69	3,28	2,45
0,94	1,36	2,41	0,94	3,82	2,31	1,12	4,11	2,63	0,98
2,82	0,91	4,37	3,32	1,68	4,02	2,79	0,98	1,36	1,86
2,03	4,55	2,92	1,34	5,45	1,41	1,67	3,62	0,46	0,74
0,92	1,36	2,52	0,97	3,64	2,17	1,32	4,19	2,65	0,87
2,69	0,94	4,13	3,31	1,75	4,05	2,85	0,94	1,15	1,84

Варіант 19.

40,25	40,29	40,46	40,33	40,37	40,27	40,39	40,34	40,33	40,35
40,38	40,32	40,28	40,41	40,45	40,39	40,29	40,31	40,44	40,37
40,41	40,33	40,35	40,35	40,35	40,40	40,40	40,34	40,28	40,34
40,45	40,44	40,38	40,52	40,54	40,93	40,92	40,03	40,53	40,73
40,27	40,31	40,48	40,35	40,39	40,29	40,41	40,36	40,35	40,37
40,41	40,35	40,31	40,44	40,48	40,42	40,32	40,33	40,47	40,40
40,45	40,37	40,39	40,38	40,34	40,44	40,45	40,34	40,32	40,38
40,50	40,49	40,43	40,57	40,59	40,88	40,87	40,13	40,58	40,76
40,15	40,43	40,45	40,44	40,40	40,50	40,51	40,40	40,38	40,45
40,43	40,55	40,49	40,51	40,53	40,82	40,81	40,19	40,52	40,70

Варіант 20.

2,41	2,62	2,73	2,52	2,54	2,41	2,81	2,53	2,64	2,61
2,72	2,45	2,52	2,1	2,64	2,52	2,5	2,33	2,24	2,4
2,68	2,51	2,4	2,61	2,42	2,43	2,65	2,54	2,35	2,54
2,62	2,9	2,75	2,24	2,65	2,45	2,53	2,32	2,24	2,55
2,52	2,73	2,84	2,63	2,65	2,52	2,70	2,64	2,75	2,72
2,83	2,56	2,63	2,21	2,75	2,63	2,61	2,44	2,35	2,51
2,61	2,40	2,29	2,50	2,31	2,32	2,54	2,43	2,24	2,43
2,51	2,79	2,64	2,13	2,54	2,34	2,42	2,21	2,13	2,44
2,46	2,67	2,78	2,57	2,59	2,46	2,86	2,58	2,69	2,66
2,67	2,40	2,47	2,05	2,59	2,47	2,45	2,28	2,19	2,35

Лабораторна робота №2

Статистична оцінка параметрів розподілу

Задача полягає у тому, щоб за результатами, отриманими при вивченні даних вибірки, досить точно оцінити значення характеристик генеральної сукупності.

Спочатку необхідно обчислити статистичні характеристики вибірки, а саме – середнє арифметичне і середнє квадратичне відхилення (або дисперсію).

Якщо побудований інтервальний варіаційний ряд, то в якості оцінки математичного сподівання m^* можна використовувати ряд

$$m^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l x_i \cdot n_i,$$

а в якості оцінки дисперсії D^* можна використовувати ряд

$$D^* = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^l (x_i - m^*)^2 n_i.$$

Ці оцінки є незміщеними, суттєвими і ефективними.

Приклад 2. Перевірено 200 приладів на термін придатності до роботи. За результатами перевірки побудовано такий варіаційний ряд:

Інтервал	(0, 50)	(50, 100)	(100, 150)	(150, 200)	(200, 250)	(250, 300)	(300, 350)	(350, 400)	(400, 450)
n_i	1	7	24	30	71	31	21	13	2

Обчислимо

$$\begin{aligned} m^* &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l x_i \cdot n_i = \\ &= \frac{1}{200} (25 \times 1 + 75 \times 7 + 125 \times 24 + 175 \times 30 + 225 \times 71 + 275 \times 31 + \\ &\quad + 325 \times 21 + 375 \times 13 + 425 \times 2) = 229,25 \approx 229. \end{aligned}$$

Отже, середній термін придатності приладу до роботи дорівнює 229 годин.

Дисперсію випадкової ознаки, яка вивчається обчислимо за формулою

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l (x_i - m^*)^2 n_i = \frac{1}{200} ((25 - 229)^2 \times 1 + (75 - 229)^2 \times 7 + \\ &\quad + (125 - 229)^2 \times 24 + (175 - 229)^2 \times 30 + (225 - 229)^2 \times 71 + (275 - 229)^2 \times 31 + \\ &\quad + (325 - 229)^2 \times 21 + (375 - 229)^2 \times 13 + (425 - 229)^2 \times 2) = 5844,4375. \end{aligned}$$

Тепер можна обчислити виправлену дисперсію ознаки

$$D^* = \frac{n}{n-1} D \approx 5873,8.$$

Нехай θ – деякий параметр, що характеризує розподіл випадкової величини ξ . І нехай за певною вибіркою $x_1, x_2, \dots, x_n$ (отриманою після експериментів) побудована деяка оцінка θ^* . Це, взагалі кажучи, функція від значень $x_1, x_2, \dots, x_n$: $\theta^* = \theta^*(x_1, x_2, \dots, x_n)$. θ^* є випадковою величиною. Виникає таке питання: на скільки знайдене значення θ^* наближає невідоме значення θ ?

Питання можна поставити і так: чи можна визначити числа θ_1^* і θ_2^* ($\theta_1^* < \theta_2^*$) так, щоб невідомий параметр θ попадав між ними ($\theta_1^* < \theta < \theta_2^*$) з високою ймовірністю? Цей інтервал (θ_1^*, θ_2^*) є випадковим і його побудова здійснюється таким чином.

Зафіксуємо деяке число β : $0 < \beta < 1$, яке називають **довірчою ймовірністю**. Після цього визначимо таке $\varepsilon > 0$, щоб $P\{\theta^* - \varepsilon < \theta < \theta^* + \varepsilon\} = \beta$. Одержаний інтервал

$$(\theta^* - \varepsilon, \theta^* + \varepsilon),$$

в якому з ймовірністю не меншою, ніж β знаходиться невідомий параметр, називається **довірчими інтервалом**. Числа $\theta^* - \varepsilon$ і $\theta^* + \varepsilon$ називаються **довірчими границями**.

Так, **довірчий інтервал** для математичного сподівання m якщо **відомо** σ має вигляд:

$$(m^* - \sigma t_\beta, m^* + \sigma t_\beta),$$

Якщо ж σ – **невідоме**, то для побудови інтервала можна використати оцінку σ^* і тоді **довірчий інтервал**

$$(m^* - \sigma^* t_\beta, m^* + \sigma^* t_\beta).$$

Тут $t_\beta = \frac{1}{\sqrt{n}} \arg\Phi\left(\frac{\beta}{2}\right)$, $\arg\Phi\left(\frac{\beta}{2}\right)$ – аргумент x функції $\Phi(x)$ такий, що

$$\Phi(x) = \frac{\beta}{2}, \text{ де } \Phi(x) \text{ – функція Лапласа: } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \text{ Зауважимо,}$$

що при малих n ($n \leq 30$) слід використовувати розподіл Стюдента.

Довірчий інтервал для дисперсії має вигляд (D_1, D_2) . Його будують використовуючи рівність

$$P\left\{\frac{D^*(n-1)}{\chi_2^2} < D < \frac{D^*(n-1)}{\chi_1^2}\right\} = \beta.$$

За даною довірчою ймовірністю β одержуємо $\alpha = 1 - \beta$. За таблицями Стюдента знаходимо χ_1^2 з умови $P\{V > \chi_1^2\} = 1 - \frac{\alpha}{2}$ і χ_2^2 з умови $P\{V > \chi_2^2\} = \frac{\alpha}{2}$. Після цього можна записати довірчі границі $D_1 = \frac{D^*(n-1)}{\chi_2^2}$ і $D_2 = \frac{D^*(n-1)}{\chi_1^2}$ для дисперсії і $\sqrt{D_1}$ та $\sqrt{D_2}$ для середнього квадратичного відхилення.

Такий підхід застосовується при $n \leq 30$. У випадку $n > 30$ можна застосувати інший підхід для інтервальної оцінки, наприклад, середнього квадратичного відхилення σ . Для цього використовуються довірчі інтервали

$$\begin{aligned} \sigma^*(1-q) < \sigma < \sigma^*(1+q) & \text{ при } q < 1, \\ 0 < \sigma < \sigma^*(1+q) & \text{ при } q > 1, \end{aligned}$$

де $q = q(n, \beta)$ знаходиться за таблицями Стюдента при даних n і β .

Приклад 3. Побудувати довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання при невідомому середньому квадратичному відхиленні.

Нехай ознака m , яка нас цікавить, розподілена нормально. За вибіркою, об'єму $n = 9$ знайдено $m^* = 6$ і виправлена дисперсія $D^* = 3^2$.

Оцінимо невідоме математичне сподівання при допомозі довірчого інтервала з надійністю (довірчою ймовірністю) $\beta = 0,95$.

В таблиці розподілу Стюдента $S(n)$ при $n = 9$ і $\beta = 0,95$ знаходимо $t(\beta, n) = 2,31$. Тоді, оскільки

$$m^* - \sigma^* t_\beta < m < m^* + \sigma^* t_\beta,$$

і $t_\beta = \frac{1}{\sqrt{n}} t(\beta, n)$, то

$$6 - \frac{3}{\sqrt{9}} \cdot 2,31 < m < 6 + \frac{3}{\sqrt{9}} \cdot 2,31$$

або

$$3,69 < m < 8,31.$$

Одержали досить широкий довірчий інтервал. При необмеженому зростанні об'єму вибірки n розподіл Стюдента прямує до нормального. Тому при $n > 30$ можна замість нього користуватися нормальним розподілом.

Для оцінки дисперсії визначимо $\alpha = 1 - 0,95 = 0,05$. За таблицями розподілу Стюдента з $k = n - 2 = 7$ степенями вільності знаходимо

$\chi_1^2 = 1,66$ і $\chi_2^2 = 22,0$. Тоді довірчий інтервал для дисперсії D можна записати у вигляді

$$\frac{9 \cdot 8}{22,0} < D < \frac{9 \cdot 8}{1,66},$$

або

$$3,27 < D < 43,37.$$

Тепер легко виписується інтервальна оцінка для середнього квадратичного відхилення σ :

$$\sqrt{3,27} < \sigma < \sqrt{43,37},$$

або

$$1,81 < \sigma < 6,58.$$

Приклад 4. За даними прикладу 2 побудувати довірчий інтервал, в якому з надійністю 0,95 міститься математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення.

При розв'язуванні прикладу 2 одержали $m^* = 229$, $D^* = 5873,8$. Тому $\sigma^* = 76,64$. За таблицями функції Лапласа знаходимо $\Phi(1,96) = 0,475$. Тоді

$$229 - \frac{76,64}{\sqrt{200}} \cdot 1,96 < m < 229 + \frac{76,64}{\sqrt{200}} \cdot 1,96$$

або

$$218,38 < m < 239,62.$$

Тепер за таблицями Стюдента знаходимо $q = q(200, 0,95) = 0,099$. Тоді

$$76,64 \cdot (1 - 0,099) < \sigma < 76,64 \cdot (1 + 0,099),$$

або

$$69,05 < \sigma < 84,23.$$

Завдання до лабораторної роботи №2

За результатами виконання лабораторної роботи №1, визначити:

- а) вибіркові оцінки математичного сподівання і дисперсії;
- б) довірчі інтервали, в яких з надійністю 0,95 містяться математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення.

Лабораторна робота №3

Перевірка статистичних гіпотез про закон розподілу

Для перевірки гіпотези про узгодженість вибіркового розподілу з теоретичним використовують так звані критерії згоди, які дозволяють дати відповідь на питання: чи є розходження між дослідним і теоретичним розподілами настільки незначними, що їх можна пояснити чисто випадковими причинами, чи ні. Найчастіше висувається гіпотеза про нормальний розподіл. Основою для цього є виконання умов теореми Ляпунова, що обґрунтовує асимптотично нормальний розподіл.

Припущення про характер гіпотетичного розподілу може базуватися на аналізі графічного зображення варіаційного ряду. На основі такого аналізу можна висувати статистичну гіпотезу про теоретичний розподіл ознаки, яка вивчається. Але оскільки це гіпотеза, то її потрібно перевірити при допомозі критеріїв згоди. Для цього можна застосувати критерії χ^2 Пірсона, Колмогорова, Смирнова і ін. Найчастіше застосовується критерій χ^2 Пірсона для перевірки гіпотези про закон розподілу.

В якості міри розходження даних вибірки $n_1, n_2, \dots, n_l$ і теоретичних частот $np_1, np_2, \dots, np_l$, обчислених у припущенні вірності гіпотези про теоретичний закон розподілу $F_\xi(x)$, розглядають величину

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^l \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}.$$

За таблицями χ^2 – розподілу Пірсона знаходять ймовірність $P\{U \geq \chi^2\}$. Якщо ця ймовірність менша за 0,1, то гіпотеза відкидається, у протилежному випадку можна зробити висновок, що гіпотеза не суперечить результатам експерименту і цією гіпотезою можна користуватись.

Отже, **алгоритм** перевірки статистичної гіпотези про закон розподілу генеральної сукупності за даними вибірки такий:

1. Висунути гіпотезу про функцію $F_\xi(x)$ або щільність $f_\xi(x)$ розподілу (наприклад, „генеральна сукупність – нормально розподілена”).
2. Підрахувати за $F_\xi(x)$ чи $f_\xi(x)$ ймовірності $p_1, p_2, \dots, p_l$. Якщо висунуто гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності, то

$$p_i = \frac{h}{\sigma^*} \varphi(u_i),$$

де h – різниця між двома сусідніми варіантами;
 σ^* – вибіркове середнє квадратичне відхилення;

$$u_i = \frac{x_i - m^*}{\sigma^*}, \quad m^* - \text{вибіркове середнє};$$

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

3. Підрахувати число $\chi^2 = \sum_{i=1}^l \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$.

4. За таблицями знайти ймовірність $P\{U \geq \chi^2\}$.

5. Зробити висновок: якщо $P\{U \geq \chi^2\} \leq 0,1$, то гіпотеза відкидається, якщо $P\{U \geq \chi^2\} > 0,1$, то гіпотеза не суперечить результатам експерименту.

Приклад 5. За даними прикладу 2 перевірити, чи узгоджуються вони з гіпотезою про нормальний розподіл генеральної сукупності.

При розв'язуванні прикладу 2 одержали $m^* = 229$, $\sigma^* = 76,64$. Результати подальших обчислень записуємо в таблицю:

x_i	25	75	125	175	225	275	325	375	425
n_i	1	7	24	30	71	31	21	13	2
u_i	-2,66	-2,00	-1,36	-0,70	-0,05	0,60	1,25	1,91	2,56
$\varphi(u_i)$	0,0116	0,0540	0,1582	0,3123	0,3984	0,3332	0,1826	0,0644	0,0151

Обчислимо величину

$$\begin{aligned} \chi^2 = \sum_{i=1}^l \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = & \frac{(1 - 200 \cdot 0,0075)^2}{200 \cdot 0,0075} + \frac{(7 - 200 \cdot 0,0352)^2}{200 \cdot 0,0352} + \\ & + \frac{(24 - 200 \cdot 0,1032)^2}{200 \cdot 0,1032} + \frac{(30 - 200 \cdot 0,2037)^2}{200 \cdot 0,2037} + \frac{(71 - 200 \cdot 0,2599)^2}{200 \cdot 0,2599} + \\ & + \frac{(31 - 200 \cdot 0,2174)^2}{200 \cdot 0,2174} + \frac{(21 - 200 \cdot 0,1191)^2}{200 \cdot 0,1191} + \\ & + \frac{(13 - 200 \cdot 0,0420)^2}{200 \cdot 0,0420} + \frac{(2 - 200 \cdot 0,0099)^2}{200 \cdot 0,0099} = 16,94001 \approx 17. \end{aligned}$$

Тепер обчислимо кількість степенів вільності

$$r = l - 3 = 9 - 3 = 6.$$

За таблицями розподілу χ^2 Пірсона по $r=6$ і $\chi^2=17$ знаходимо ймовірність

$$P\{U \geq \chi^2\} = 0,0093.$$

Оскільки знайдена ймовірність менша за 0,1, то гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності не узгоджується з даними вибірки.

Завдання до лабораторної роботи №3

За критерієм χ^2 Пірсона перевірити, чи узгоджуються дані лабораторної роботи №1 з гіпотезою про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Лабораторна робота №4

Лінійна регресія

При розв'язуванні реальних задач статистики часто буває потрібно оцінити характер залежності між випадковими величинами (ξ, η) , за якими спостерігаємо.

Нехай реалізації випадкової величини $\xi - x_1, x_2, \dots, x_n$, а випадкової величини $\eta - y_1, y_2, \dots, y_n$ тобто реалізаціями (в результаті спостережень) будуть пари (x_i, y_i) , $i = \overline{1, n}$.

Як і для одновимірної випадкової величини треба провести попередню обробку результатів спостережень. Найчастіше використовується аналог варіаційного ряду. Для кожної з випадкових величин можна будувати варіаційний ряд. Не обов'язково з однаковим кроком, не обов'язково з однаковою кількістю інтервалів. У результаті одержується двовимірна таблиця

$\xi \backslash \eta$	$[x_0, x_1)$	$[x_1, x_2)$	$[x_2, x_3)$	$[x_3, x_4]$
	1	2	3	4
$[y_0, y_1)$ 1	n_{11}			
$[y_1, y_2)$ 2		n_{22}	n_{23}	
$[y_2, y_3)$ 3			n_{33}	n_{34}
$[y_3, y_4)$ 4				n_{44}

де, наприклад, n_{23} – кількість результатів експерименту, що попали в клітинку, тобто $[x_2, x_3) \times [y_1, y_2)$. Якщо клітинка не заповнена, то вважається, що відповідна $n_{ij} = 0$. За таблицею можна робити попередні висновки про зв'язок між випадковими величинами. Крім того можна підрахувати оцінки $M\xi \approx m_\xi^*$, $M\eta \approx m_\eta^*$, $D\xi \approx D_\xi^*$, $D\eta \approx D_\eta^*$. Для двовимірної випадкової величини важливими є характеристики аналогії змішаних моментів $K_{\xi\eta} \approx K_{\xi\eta}^*$, і коефіцієнта кореляції

$$\rho(\xi, \eta) \approx \rho_{\xi\eta}^* = \frac{K_{\xi\eta}^*}{\sigma_\xi^* \cdot \sigma_\eta^*}.$$

Тут виникають такі основні задачі:

1) визначення форми зв'язку, тобто знаходження за кореляційною таблицею функцій

$$Y = f(x) \text{ і } X = \varphi(y),$$

які називаються рівняннями регресії, тут $Y = M\left(\frac{\eta}{\xi = x}\right)$ – умовне математичне сподівання випадкової величини η , при фіксованому значенні випадкової величини $\xi = x$, $X = M\left(\frac{\xi}{\eta = y}\right)$ – умовне математичне сподівання випадкової величини ξ , при фіксованому значенні випадкової величини $\eta = y$;

2) встановлення сили і напрямку зв'язку, тобто оцінки ступеня розсіювання Y навколо лінії регресії для різних значень x і навпаки.

Графік зміни групових середніх – ламана лінія – є емпіричною лінією регресії. У залежності від її форми будується гіпотеза про прямолінійний або криволінійний зв'язок і, у відповідність з цією гіпотезою, методом найменших квадратів визначається рівняння теоретичної лінії регресії.

Якщо припустити, що регресія лінійна, то рівняння прямих регресії мають вигляд:

$$\eta \text{ на } \xi: Y - m_{\eta}^* = \frac{\sigma_{\eta}^*}{\sigma_{\xi}^*} \rho_{\xi\eta}^* (x - m_{\xi}^*), \quad (1)$$

$$\xi \text{ на } \eta: X - m_{\xi}^* = \frac{\sigma_{\xi}^*}{\sigma_{\eta}^*} \rho_{\xi\eta}^* (y - m_{\eta}^*). \quad (2)$$

Природно, що регресією ξ на η можна здійснювати прогноз значень η при фіксованих значеннях ξ . За рівнянням (2) можна здійснювати прогноз ξ при заданому η .

З рівнянь (1), (2) зрозуміло, що прямі проходять через точку (m_{ξ}^*, m_{η}^*) .

Якщо коефіцієнт кореляції більший нуля, то **зв'язок** називається **прямим** (при збільшенні ξ в середньому збільшується й η і навпаки – при збільшенні η – збільшується ξ).

Якщо коефіцієнт кореляції менший нуля, то **зв'язок** називається **оберненим**.

Якщо модуль коефіцієнта кореляції близький до одиниці, то зв'язок – **сильний**.

Якщо модуль коефіцієнта кореляції близький до нуля, то зв'язок – **слабкий**.

Вміння аналізувати силу і напрямок зв'язку, практично застосовувати отримані рівняння регресії є метою вивчення кореляційної залежності. Рівняння регресії використовують практично для прогнозу середніх значень однієї змінної величини за даними значеннями іншої.

Приклад 6. За даними кореляційної таблиці

$\xi \backslash \eta$	12	18	24	30	36	42	48	54	n_ξ
20	4	6							10
30		10	8	4	1				23
40		2	13	7	2				24
50			1	9	3	1			14
60			1	3	12	3			19
70				4	4	18			26
80				2	8	24	7		41
90						1	12	9	22
100							3	18	21
n_η	4	18	23	29	30	47	22	27	200

вважаючи, що між ξ і η існує лінійна кореляційна залежність, необхідно:

- знайти коефіцієнт кореляції і зробити висновок відносно сили та напрямку зв'язку між ξ і η ;
- скласти рівняння прямих регресії і побудувати їх графіки;
- використовуючи відповідне рівняння регресії оцінити умовне середнє однієї ознаки при конкретному значенні іншої і порівняти його зі значенням, одержаним безпосередньо за кореляційною таблицею.

Розв'язування.

- Коефіцієнт кореляції знаходимо за формулою

$$\rho_{\xi\eta}^* = \frac{K_{\xi\eta}^*}{\sigma_\xi^* \cdot \sigma_\eta^*},$$

$$\text{де } K_{\xi\eta}^* = \frac{1}{n} \sum_{i,j} x_i \cdot y_j \cdot n_{ij} - m_\xi^* \cdot m_\eta^*,$$

$$D_\xi^* = \frac{1}{n} \sum_i x_i^2 \cdot n_i - (m_\xi^*)^2,$$

$$D_\eta^* = \frac{1}{n} \sum_j y_j^2 \cdot n_j - (m_\eta^*)^2.$$

Підставляючи дані задачі у формули, отримуємо:

$$m_{\xi}^* = \frac{1}{200} (20 \cdot 10 + 30 \cdot 23 + 40 \cdot 24 + 50 \cdot 14 + 60 \cdot 19 + 70 \cdot 26 + 80 \cdot 41 + 90 \cdot 22 + 100 \cdot 21) = 64,35,$$

$$m_{\eta}^* = \frac{1}{200} (12 \cdot 4 + 18 \cdot 18 + 24 \cdot 23 + 30 \cdot 29 + 36 \cdot 30 + 42 \cdot 47 + 48 \cdot 22 + 54 \cdot 27) = 36,81$$

$$D_{\xi}^* = \frac{1}{200} (20^2 \cdot 10 + 30^2 \cdot 23 + 40^2 \cdot 24 + 50^2 \cdot 14 + 60^2 \cdot 19 + 70^2 \cdot 26 + 80^2 \cdot 41 + 90^2 \cdot 22 + 100^2 \cdot 21) - (64,35)^2 = 4722,5 - 4140,9225 = 581,5775, \sigma_{\xi}^* = 24,116$$

$$D_{\eta}^* = \frac{1}{200} (12^2 \cdot 4 + 18^2 \cdot 18 + 24^2 \cdot 23 + 30^2 \cdot 29 + 36^2 \cdot 30 + 42^2 \cdot 47 + 48^2 \cdot 22 + 54^2 \cdot 27) - (36,81)^2 = 1484,82 - 1354,9761 = 129,8439, \sigma_{\eta}^* = 11,395,$$

$$K_{\xi\eta}^* = \frac{1}{200} [20(12 \cdot 4 + 18 \cdot 6) + 30(18 \cdot 10 + 24 \cdot 8 + 30 \cdot 4 + 36 \cdot 1) + 40(18 \cdot 2 + 24 \cdot 13 + 30 \cdot 7 + 36 \cdot 2) + 50(24 \cdot 1 + 30 \cdot 9 + 36 \cdot 3 + 42 \cdot 1) + 60(24 \cdot 1 + 30 \cdot 3 + 36 \cdot 12 + 42 \cdot 3) + 70(30 \cdot 4 + 36 \cdot 4 + 42 \cdot 18) + 80 \cdot (30 \cdot 2 + 36 \cdot 8 + 42 \cdot 24 + 48 \cdot 7) + 90(42 \cdot 1 + 48 \cdot 12 + 54 \cdot 9) + 100(48 \cdot 3 + 54 \cdot 18)] - 36,81 \cdot 64,35 = 253,2765$$

Тепер визначаємо коефіцієнт кореляції

$$\rho_{\xi\eta}^* = \frac{253,2765}{24,116 \cdot 11,395} = 0,92168 \approx 0,92.$$

Оскільки $\rho_{\xi\eta}^* > 0$, то зв'язок між величинами ξ і η прямий. Враховуючи, що $\rho_{\xi\eta}^* = 0,92$ близький до одиниці, то цей зв'язок сильний.

б) Підставляючи отримані дані одержуємо рівняння ліній регресії η на ξ :

$$Y - 36,81 = 0,92 \frac{11,395}{24,116} (x - 64,35),$$

або

$$Y = 0,44x + 8,79$$

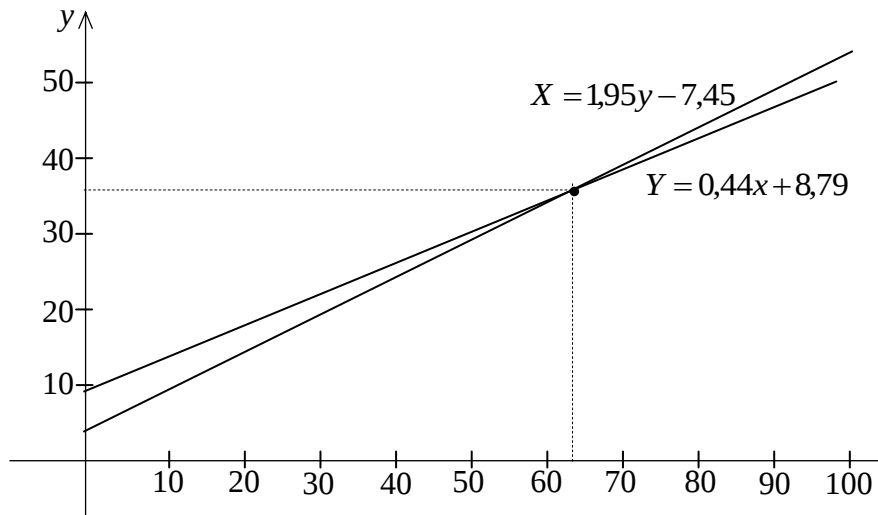
і ξ на η :

$$X - 64,35 = 0,92 \frac{24,116}{11,395} (y - 36,81)$$

або

$$X = 1,95y - 7,45$$

Графіки прямих регресії зображені на рисунку



в) З рівняння $Y = 0,44x + 8,79$ при $x = 55$ одержимо оцінку середнього значення η при фіксованому значенні $\xi = 55$, тобто оцінку $Y = M\left(\frac{\eta}{\xi = x}\right): Y = 32,74$.

Завдання до лабораторної роботи №4

За даними кореляційної таблиці, вважаючи, що між ξ і η існує лінійна кореляційна залежність, необхідно:

- знайти коефіцієнт кореляції і зробити висновок відносно сили та напрямку зв'язку між ξ і η ;
- скласти рівняння прямих регресії і побудувати їх графіки;
- використовуючи відповідне рівняння регресії оцінити умовне середнє однієї ознаки при конкретному значенні іншої і порівняти його зі значенням, одержаним безпосередньо за кореляційною таблицею.

Варіант 1.

$\xi \backslash \eta$	1	1,1	1,2	1,3	1,4	n_ξ
20	4	11	1			16
22	6	11	4			21
24		9	25	5		39
26		12	18	8	2	40
28		6	18	18	14	56
30		1	2	20	5	28
n_η	10	50	68	51	21	200

Варіант 2.

$\xi \backslash \eta$	10	15	20	25	30	35	40	n_ξ
4	1	1	2					4
6	1	1	4	5	6	4		21
8			2	11	12	10		35
10					10	10	6	26
12						8	6	14
n_η	2	2	8	16	28	32	12	100

Варіант 3.

$\xi \backslash \eta$	7,5–12,5	12,5–17,5	17,5–22,5	22,5–27,5	27,5–32,5	32,5–37,5	n_ξ
45–55	2	2					4
55–65	2	4	5	6	4		21
65–75		2	7	12	10	4	35
75–85				10	10	6	26
85–95				8		6	14
n_η	4	8	12	36	24	16	100

Варіант 4.

$\xi \backslash \eta$	5–7	7–9	9–11	11–13	13–15	15–17	17–19	n_ξ
10–15	7	4		2	1			14
15–20	3	8	5	4				20
20–25		2	11	8		2		23
25–30			5	13	7	1		26
30–35				1	16	3		20
35–40				2	6	19	3	30
40–45					3	7	17	27
n_η	10	14	21	30	33	32	20	160

Варіант 5.

$\xi \backslash \eta$	1,0–1,5	1,5–2,0	2,0–2,5	2,5–3,0	n_{ξ}
100–150	2				2
150–200	6	2	1		9
200–250	2	4	5	2	13
250–300		4	9	6	19
300–350				7	7
n_{η}	10	10	15	15	50

Варіант 6.

$\xi \backslash \eta$	15	25	35	45	55	65	75	n_{ξ}
1,5	4	1	2					7
2,5	5	3	3	5	1			17
3,5		1	6	9	2	1		19
4,5			5	19	7	5		36
5,5			3	8	16	6		33
6,5			1	7	9	4		21
7,5				2	4	2	1	9
8,5				1	2	2	3	8
n_{η}	9	5	20	51	41	20	4	150

Варіант 7.

$\xi \backslash \eta$	5	10	15	20	25	n_{ξ}
1	20	10				30
2	16	18	2			36
3	3	15	4			22
4		2	5			7
5			1	2		3
6				1	1	2
n_{η}	39	45	12	3	1	100

Варіант 8.

$\xi \backslash \eta$	20	25	30	35	40	45	n_{ξ}
40	1	5	4	2			12
50		3	7	6			16
60			5	12	7		24
70				2	10	1	13
80					9	8	17
90					5	9	14
100						4	4
n_{η}	1	8	16	22	31	22	100

Варіант 9.

$\xi \backslash \eta$	4–6	6–8	8–10	10–12	n_{ξ}
2,5–3,5	2				2
3,5–4,5	6	3			9
4,5–5,5	2	5	7		14
5,5–6,5		2	2	3	7
6,5–6,5			1	7	8
n_{η}	10	10	10	10	40

Варіант 10.

$\xi \backslash \eta$	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	n_{ξ}
50			3	5	10	18
150		3	40	20	1	64
250	1	10	2	1		14
350	2	1				3
450	1					1
n_{η}	4	14	45	26	11	100

Варіант 11.

$\xi \backslash \eta$	1	3	5	7	9	n_ξ
20	8	12				20
30	2	20				22
40		8	10	9	10	37
50			1	8	12	21
n_η	10	40	11	17	22	100

Варіант 12.

$\xi \backslash \eta$	0	2	7	12	17	22	27	32	37	42	n_ξ
0	3	6									9
1	25	108	44	8	2						187
2	3	50	60	21	5	5					144
3	1	11	33	32	13	2	3	1			96
4		5	5	13	13	7	2				45
5			1	2	12	6	3	2	1		27
6		1		1			2	1		1	6
7			1	1				1			3
n_η	32	181	144	78	45	20	10	5	1	1	500

Варіант 13.

$\xi \backslash \eta$	34	35	36	37	38	39	n_ξ
15	1	2					3
17	3	6	4				13
19		4	13	5			22
21		1	11	4	8	2	26
23			1	2	5	2	10
25		1	3	5	4	7	20
27					3	1	4
29					1	1	2
n_η	4	14	32	16	21	13	100

Варіант 14.

$\xi \backslash \eta$	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40	n_ξ
0–0,2	4						4
0,2–0,4	2	2					4
0,4–0,6			2				2
0,6–0,8		6		4	4		14
0,8–1,0					6	6	12
1,0–1,2						4	4
n_η	6	8	2	4	10	10	40

Варіант 15.

$\xi \backslash \eta$	16	26	36	46	56	n_ξ
20	4					4
25	6	8				14
30		10	32	4		46
35			3	12	1	16
40			9	6	5	20
n_η	10	18	44	22	6	100

Варіант 16.

$\xi \backslash \eta$	12	18	24	30	36	42	n_ξ
20	2	5					7
30	4	6	3				13
40		1	8	9			21
50			12	16	2		30
60			2	6	4	1	13
70					7	2	9
80					1	6	7
n_η	6	12	25	31	17	9	100

Варіант 17.

$\eta \backslash \xi$	100	110	120	130	n_ξ
50			1	3	4
100		3	3		6
150		6	2	1	9
200	1	4		1	6
250	4	1			5
n_η	5	14	6	5	30

Варіант 18.

$\eta \backslash \xi$	10	15	20	25	30	35	n_ξ
50	2	2					4
60	2	4	5	6	4		21
70		2	7	12	10	4	35
80				10	10	6	26
90				8		6	14
n_η	4	8	12	36	24	16	100

Варіант 19.

$\eta \backslash \xi$	10	12	14	16	n_ξ
0	4	1			5
10		2	3		5
20		1	4	4	9
30		2	2	3	7
40		2	3	1	6
50		2	2	4	8
n_η	4	10	14	12	40

Варіант 20.

$\xi \backslash \eta$	6,0–6,5	6,5–7,0	7,0–7,5	7,5–8,0	n_{ξ}
200–250	2				2
250–300	6	2	1		9
300–350	2	4	5	2	13
350–400		4	9	6	19
400–450				7	7
n_{η}	10	10	15	15	50

Варіант 21.

$\xi \backslash \eta$	10	12	14	16	18	20	n_{ξ}
10	9	4	1				14
30	1	10	9	3			23
50		2	6	14	6		28
70			1	10	18	6	35
n_{η}	10	16	17	27	24	6	100

Варіант 22.

$\xi \backslash \eta$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	n_{ξ}
1,25	1									1
1,75	4	6	9	2						21
2,25	5	9	15	10	2	1				42
2,75		4	6	7	7		1			25
3,25		3	2	7	8	4				24
3,75			3	2	3	3	2			13
4,25				2	2	1	2	2	1	10
4,75						2			1	3
5,25									1	1
n_{η}	10	22	35	30	22	11	5	2	3	140

Додатки

Таблиця 1

$$\text{Значення функції } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3698
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0395	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0353	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001

Значення функції Лапласа $\Phi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,43	0,1664	0,86	0,3051	1,29	0,4015	1,72	0,4573	2,30	0,4893
0,01	0,0040	0,44	0,1700	0,87	0,3078	1,30	0,4032	1,73	0,4582	2,32	0,4898
0,02	0,0080	0,45	0,1736	0,88	0,3106	1,31	0,4049	1,74	0,4591	2,34	0,4904
0,03	0,0120	0,46	0,1772	0,89	0,3133	1,32	0,4066	1,75	0,4599	2,36	0,4909
0,04	0,0160	0,47	0,1808	0,90	0,3159	1,33	0,4082	1,76	0,4608	2,38	0,4913
0,05	0,0199	0,48	0,1844	0,91	0,3186	1,34	0,4099	1,77	0,4616	2,40	0,4918
0,06	0,0239	0,49	0,1879	0,92	0,3212	1,35	0,4115	1,78	0,4625	2,42	0,4922
0,07	0,0279	0,50	0,1915	0,93	0,3238	1,36	0,4131	1,79	0,4633	2,44	0,4927
0,08	0,0319	0,51	0,1950	0,94	0,3264	1,37	0,4147	1,80	0,4641	2,46	0,4931
0,09	0,0359	0,52	0,1985	0,95	0,3289	1,38	0,4162	1,81	0,4649	2,48	0,4934
0,10	0,0398	0,53	0,2019	0,96	0,3315	1,39	0,4177	1,82	0,4656	2,50	0,4938
0,11	0,0438	0,54	0,2054	0,97	0,3340	1,40	0,4192	1,83	0,4664	2,52	0,4941
0,12	0,0478	0,55	0,2088	0,98	0,3365	1,41	0,4207	1,84	0,4671	2,54	0,4945
0,13	0,0517	0,56	0,2123	0,99	0,3389	1,42	0,4222	1,85	0,4678	2,56	0,4948
0,14	0,0557	0,57	0,2157	1,00	0,3413	1,43	0,4236	1,86	0,4686	2,58	0,4951
0,15	0,0596	0,58	0,2190	1,01	0,3438	1,44	0,4251	1,87	0,4693	2,60	0,4953
0,16	0,0636	0,59	0,2224	1,02	0,3461	1,45	0,4265	1,88	0,4699	2,62	0,4956
0,17	0,0675	0,60	0,2257	1,03	0,3485	1,46	0,4279	1,89	0,4706	2,64	0,4959
0,18	0,0714	0,61	0,2291	1,04	0,3508	1,47	0,4292	1,90	0,4713	2,66	0,4961
0,19	0,0753	0,62	0,2324	1,05	0,3531	1,48	0,4306	1,91	0,4719	2,68	0,4963
0,20	0,0793	0,63	0,2357	1,06	0,3554	1,49	0,4319	1,92	0,4726	2,70	0,4965
0,21	0,0832	0,64	0,2389	1,07	0,3577	1,50	0,4332	1,93	0,4732	2,72	0,4967
0,22	0,0871	0,65	0,2422	1,08	0,3599	1,51	0,4345	1,94	0,4738	2,74	0,4969
0,23	0,0910	0,66	0,2454	1,09	0,3621	1,52	0,4357	1,95	0,4744	2,76	0,4971
0,24	0,0948	0,67	0,2486	1,10	0,3643	1,53	0,4370	1,96	0,4750	2,78	0,4973
0,25	0,0987	0,68	0,2517	1,11	0,3665	1,54	0,4382	1,97	0,4756	2,80	0,4974
0,26	0,1026	0,69	0,2549	1,12	0,3686	1,55	0,4394	1,98	0,4761	2,82	0,4976
0,27	0,1064	0,70	0,2580	1,13	0,3708	1,56	0,4406	1,99	0,4767	2,84	0,4977
0,28	0,1103	0,71	0,2611	1,14	0,3729	1,57	0,4418	2,00	0,4772	2,86	0,4979
0,29	0,1141	0,72	0,2642	1,15	0,3749	1,58	0,4429	2,02	0,4783	2,88	0,4980
0,30	0,1179	0,73	0,2673	1,16	0,3770	1,59	0,4441	2,04	0,4793	2,90	0,4981
0,31	0,1217	0,74	0,2703	1,17	0,3790	1,60	0,4452	2,06	0,4803	2,92	0,4982
0,32	0,1255	0,75	0,2734	1,18	0,3810	1,61	0,4463	2,08	0,4812	2,94	0,4984
0,33	0,1293	0,76	0,2764	1,19	0,3830	1,62	0,4474	2,10	0,4821	2,96	0,4985
0,34	0,1331	0,77	0,2794	1,20	0,3849	1,63	0,4484	2,12	0,4830	2,98	0,4986
0,35	0,1368	0,78	0,2823	1,21	0,3869	1,64	0,4495	2,14	0,4838	3,00	0,49865
0,36	0,1406	0,79	0,2852	1,22	0,3883	1,65	0,4505	2,16	0,4846	3,20	0,49931
0,37	0,1443	0,80	0,2881	1,23	0,3907	1,66	0,4515	2,18	0,4854	3,40	0,49966
0,38	0,1480	0,81	0,2910	1,24	0,3925	1,67	0,4525	2,20	0,4861	3,60	0,499841
0,39	0,1517	0,82	0,2939	1,25	0,3944	1,68	0,4535	2,22	0,4868	3,80	0,499928
0,40	0,1554	0,83	0,2967	1,26	0,3962	1,69	0,4545	2,24	0,4875	4,00	0,499968
0,41	0,1591	0,84	0,2995	1,27	0,3980	1,70	0,4554	2,26	0,4881	4,50	0,499997
0,42	0,1628	0,85	0,3023	1,28	0,3997	1,71	0,4564	2,28	0,4887	5,00	0,499997

Таблиця 3

Імовірність $P_{\lambda}(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$ розподілу Пуассона

$\lambda \backslash m$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591
2	0,00452	0,01637	0,03334	0,05363	0,07582	0,09879	0,12166	0,14379	0,16466
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940
4		0,00005	0,00025	0,00072	0,00158	0,00296	0,00497	0,00767	0,01111
5			0,00002	0,00006	0,00016	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200
6					0,00001	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030
7								0,00002	0,00004

$\lambda \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674	0,00248	0,00091	0,00034	0,00012	0,00005
1	0,36788	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369	0,01487	0,00638	0,00268	0,00111	0,00045
2	0,18394	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422	0,04462	0,02234	0,01073	0,00500	0,00227
3	0,06131	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037	0,08924	0,05213	0,02863	0,01499	0,00757
4	0,01533	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547	0,13385	0,09123	0,05725	0,03374	0,01892
5	0,00307	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547	0,16062	0,12772	0,09160	0,06073	0,03783
6	0,00051	0,01203	0,05041	0,10420	0,14622	0,16062	0,14900	0,12214	0,09109	0,06306
7	0,00007	0,00344	0,02160	0,05954	0,10444	0,13768	0,14900	0,13959	0,11712	0,09008
8		0,00086	0,00810	0,2977	0,06528	0,10326	0,13038	0,13959	0,13176	0,11260
9		0,00019	0,00270	0,01323	0,03627	0,06884	0,10140	0,12408	0,13176	0,12511
10		0,00004	0,00081	0,00529	0,01813	0,04130	0,07098	0,09926	0,11858	0,12511
11			0,00022	0,00192	0,00824	0,02253	0,04517	0,07219	0,09702	0,11374
12			0,00006	0,00064	0,00343	0,01126	0,02635	0,04813	0,07277	0,09478
13				0,00020	0,00132	0,00520	0,01419	0,02962	0,05038	0,07291
14				0,00006	0,00047	0,00223	0,00709	0,01692	0,03238	0,05208
15				0,00002	0,00016	0,00089	0,00331	0,00903	0,01943	0,3472
16					0,00005	0,00033	0,00145	0,00451	0,01093	0,2170
17					0,00001	0,00012	0,00060	0,00212	0,00579	0,01276
18						0,00004	0,00023	0,00094	0,00289	0,00709
19						0,00001	0,00009	0,00040	0,00137	0,00373
20							0,00003	0,00016	0,00062	0,00187
21								0,00006	0,00026	0,00089
22								0,00002	0,00011	0,00040
23									0,00004	0,00018
24									0,00002	0,00007
25										0,00003
26										0,00001

Закінчення таблиці 3

$\lambda \backslash m$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0,00002									
1	0,00018	0,00007	0,00003	0,00001						
2	0,00101	0,00044	0,00019	0,00008	0,00003	0,00001				
3	0,00370	0,00177	0,00083	0,00038	0,00017	0,00008	0,00003	0,00001		
4	0,01019	0,00531	0,00269	0,00133	0,00065	0,00031	0,00014	0,00007	0,00003	0,00001
5	0,02242	0,01274	0,00699	0,00373	0,00194	0,00098	0,00049	0,00024	0,00012	0,00005
6	0,04109	0,02548	0,01515	0,00870	0,00484	0,00262	0,00139	0,00072	0,00037	0,00018
7	0,06458	0,04368	0,02814	0,01739	0,01037	0,00599	0,00337	0,00185	0,00099	0,00052
8	0,08879	0,06552	0,04573	0,03044	0,01944	0,01199	0,00716	0,00416	0,00236	0,00131
9	0,10853	0,08736	0,06605	0,04734	0,03241	0,02131	0,01353	0,00833	0,00498	0,00291
10	0,11938	0,10484	0,08587	0,06628	0,04861	0,03410	0,02300	0,01499	0,00947	0,00582
11	0,11938	0,11437	0,10148	0,08436	0,06629	0,04960	0,03554	0,02452	0,01635	0,01058
12	0,10943	0,11437	0,10994	0,09842	0,08286	0,06613	0,05036	0,03678	0,02589	0,01763
13	0,09259	0,10557	0,10994	0,10599	0,09561	0,08139	0,06585	0,05093	0,03784	0,02712
14	0,07275	0,09049	0,10209	0,10599	0,10244	0,09302	0,07996	0,06548	0,05135	0,03874
15	0,05335	0,07239	0,08848	0,09892	0,10244	0,09922	0,09062	0,07858	0,06504	0,05165
16	0,03668	0,05429	0,07189	0,08656	0,09603	0,09922	0,09628	0,08840	0,07724	0,06456
17	0,02373	0,03832	0,05497	0,07128	0,08474	0,09338	0,09628	0,09360	0,08633	0,07595
18	0,01450	0,02555	0,03970	0,05544	0,07061	0,08301	0,09094	0,09360	0,09112	0,08439
19	0,00840	0,01614	0,02716	0,04085	0,05575	0,06990	0,08136	0,08867	0,09112	0,08884
20	0,00462	0,00968	0,01766	0,02860	0,04181	0,05592	0,06916	0,07980	0,08657	0,08884
21	0,00242	0,00553	0,01093	0,01906	0,02986	0,04261	0,05599	0,06840	0,07832	0,08461
22	0,00121	0,00302	0,00646	0,01213	0,02036	0,03099	0,04326	0,05597	0,06774	0,07691
23	0,00058	0,00157	0,00365	0,00738	0,01328	0,02156	0,03198	0,04380	0,05588	0,06688
24	0,00027	0,00079	0,00198	0,00431	0,00830	0,01437	0,02265	0,03285	0,04424	0,05573
25	0,00012	0,00038	0,00103	0,00241	0,00498	0,00920	0,01540	0,02365	0,03362	0,04459
26	0,00005	0,00017	0,00051	0,00130	0,00287	0,00566	0,01007	0,01637	0,02457	0,03430
27	0,00002	0,00008	0,00025	0,00067	0,00160	0,00335	0,00634	0,01092	0,01729	0,02541
28		0,00003	0,00011	0,00034	0,00086	0,00192	0,00385	0,00702	0,01173	0,01815
29		0,00001	0,00005	0,00016	0,00044	0,00106	0,00226	0,00436	0,00769	0,01252
30			0,00002	0,00008	0,00022	0,00056	0,00128	0,00261	0,00487	0,00834
31				0,00003	0,00011	0,00029	0,00070	0,00152	0,00298	0,00538
32				0,00001	0,00005	0,00015	0,00037	0,00085	0,00177	0,00336
33					0,00002	0,00007	0,00019	0,00047	0,00102	0,00204
34					0,00001	0,00003	0,00010	0,00025	0,00057	0,00120
35						0,00002	0,00005	0,00013	0,00031	0,00069
36							0,00002	0,00006	0,00016	0,00038
37							0,00001	0,00003	0,00008	0,00021
38								0,00001	0,00004	0,00011
39									0,00002	0,00006
40										0,00003

Таблиця 4

Значення $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,00	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблиця 5

Значення $q = q(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Таблиця 6

Значення ймовірності $P\{U \geq \chi^2\}$ χ^2 -розподілу Пірсона

$\chi^2 \backslash r$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.317311	0.606531	0.801252	0.909796	0.962566	0.985612	0.994829	0.998248	0.999438	0.999828
2	0.157299	0.367879	0.572407	0.735759	0.849145	0.919699	0.959840	0.981012	0.991468	0.996340
3	0.083265	0.223130	0.391625	0.557825	0.699986	0.808847	0.885002	0.934358	0.964295	0.981424
4	0.045500	0.135335	0.261464	0.406006	0.549416	0.676676	0.779777	0.857123	0.911413	0.947347
5	0.025347	0.082085	0.171797	0.287297	0.415880	0.543813	0.659963	0.757576	0.834308	0.891178
6	0.014306	0.049787	0.111610	0.199148	0.306219	0.423190	0.539749	0.647232	0.739918	0.815263
7	0.008151	0.030197	0.071898	0.135888	0.220640	0.320847	0.428880	0.536633	0.637119	0.725445
8	0.004678	0.018316	0.046012	0.091578	0.156236	0.238103	0.332594	0.433470	0.534146	0.628837
9	0.002700	0.011109	0.029291	0.061099	0.109064	0.173578	0.252656	0.342296	0.437274	0.532104
10	0.001565	0.006738	0.018566	0.040428	0.075235	0.124652	0.188573	0.265026	0.350485	0.440493
11	0.000911	0.004087	0.011726	0.026564	0.051380	0.088376	0.138619	0.201699	0.275709	0.357518
12	0.000532	0.002479	0.007383	0.017351	0.034788	0.061969	0.100559	0.151204	0.213309	0.285057
13	0.000311	0.001503	0.004637	0.011276	0.023379	0.043036	0.072108	0.111850	0.162606	0.223672
14	0.000183	0.000912	0.002905	0.007295	0.015609	0.029636	0.051181	0.081765	0.122325	0.172992
15	0.000108	0.000553	0.001817	0.004701	0.010362	0.020257	0.035999	0.059145	0.090936	0.132062
16	0.000063	0.000335	0.001134	0.003019	0.006844	0.013754	0.025116	0.042380	0.066882	0.099632
17	0.000037	0.000203	0.000707	0.001933	0.004500	0.009283	0.017396	0.030109	0.048716	0.074364
18	0.000022	0.000123	0.000440	0.001234	0.002946	0.006232	0.011970	0.021226	0.035174	0.054964
19	0.000013	0.000075	0.000273	0.000786	0.001922	0.004164	0.008187	0.014860	0.025193	0.040263
20	0.000008	0.000045	0.000170	0.000499	0.001250	0.002769	0.005570	0.010336	0.017912	0.029253
21	0.000005	0.000028	0.000105	0.000317	0.000810	0.001835	0.003770	0.007147	0.012650	0.021094
22	0.000003	0.000017	0.000065	0.000200	0.000524	0.001211	0.002540	0.004916	0.008879	0.015105
23	0.000002	0.000010	0.000040	0.000127	0.000338	0.000796	0.001705	0.003364	0.006196	0.010747
24	0.000001	0.000006	0.000025	0.000080	0.000217	0.000522	0.001139	0.002292	0.004301	0.007600
25	0.000001	0.000004	0.000015	0.000050	0.000139	0.000341	0.000759	0.001555	0.002971	0.005346
26	0.000000	0.000002	0.000010	0.000032	0.000089	0.000223	0.000504	0.001050	0.002043	0.003740
27	0.000000	0.000001	0.000006	0.000020	0.000057	0.000145	0.000333	0.000707	0.001399	0.002604
28	0.000000	0.000001	0.000004	0.000012	0.000036	0.000094	0.000220	0.000474	0.000954	0.001805
29	0.000000	0.000001	0.000002	0.000008	0.000023	0.000061	0.000145	0.000317	0.000648	0.001246
30	0.000000	0.000000	0.000001	0.000005	0.000015	0.000039	0.000095	0.000211	0.000439	0.000857
31	0.000000	0.000000	0.000001	0.000003	0.000009	0.000025	0.000062	0.000141	0.000296	0.000587
32	0.000000	0.000000	0.000001	0.000002	0.000006	0.000016	0.000041	0.000093	0.000199	0.000400
33	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000004	0.000010	0.000026	0.000062	0.000134	0.000272
34	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000002	0.000007	0.000017	0.000041	0.000089	0.000185
35	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000002	0.000004	0.000011	0.000027	0.000060	0.000125
36	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000003	0.000007	0.000018	0.000040	0.000084
37	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000002	0.000005	0.000012	0.000026	0.000057
38	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000003	0.000008	0.000017	0.000038
39	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000002	0.000005	0.000012	0.000025
40	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000003	0.000008	0.000017

ЛІТЕРАТУРА

1. Агапова І.С., Бондаренко М.Ф., Дікарєв В.А., Семенець В.В. Збірник задач з теорії ймовірностей з розв'язками: Навч. посібник / За ред. М.Ф. Бондаренка – Харків: ХНУРЕ, 2010. – 356 с.
2. Васильків І.М. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики : навч. посібник. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2020. – 184 с
3. Гнеденко Б. В. Курс теорії ймовірностей: Навч. посіб. / Б. В. Гнеденко – К.: ВПЦ Київський університет, 2010. – 464 с.
4. Голомозий В.В. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики : навч. посібник / В.В. Голомозий, М.В. Карташов, К.В. Ральченко. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2015. – 366 с.
5. Жлуктенко В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика : Навч.–метод. посібник. У 2 ч. – Ч.1. Теорія ймовірностей. / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний. – Вид. 2-ге, без змін. – К. : КНЕУ, 2007. – 304 с.
6. Жлуктенко В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика : Навч.–метод. Посібник. У 2 ч. – Ч.2. Математична статистика. / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний. – Вид. 2-ге, без змін. – К. : КНЕУ, 2007. – 336 с.
7. Карташов М. В. Теорія ймовірностей і математична статистика: підручник. – К.: Видавн.-пол. Центр «Київський університет», 2009. – 479 с.
8. Костробій П.П. Теорія ймовірностей. – Львів: Видавництво „Растр-7”, 2016. – 260 с.
9. Кушнірчук В.Й. Збірник задач з теорії ймовірностей і математичної статистики – Чернівці: Видавничий дім „Родовід”, 2014. – 92 с.
10. Сеньо П. С. Теорія ймовірностей та математична статистика: Підручник. / П. С. Сеньо. – 2-ге вид. – Київ: Знання, 2007. – 556 с.
11. Слюсарчук Ю. М. Теорія ймовірностей, математична статистика та імовірнісні процеси : навч. посіб. / Ю. М. Слюсарчук, Й. Я. Хром'як, Л. Л. Джавала, В. М. Цимбал. – Львів : Вид-во Львів. політехніки, 2015. – 364 с.
12. Цибенко О. С., Кришук М. Г., Тарасевич Ю. Я.. Збірник задач з теорії ймовірностей : навч. посіб. – Київ : Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут", – 2016. – 210 с.

ЗМІСТ

Вступ	3
Тема „Елементи комбінаторики”	4
Тема „Простір елементарних подій. Операції над подіями”	7
Тема „Класичне означення ймовірності”	11
Тема „Геометрична ймовірність”	15
Тема „Основні теореми теорії ймовірностей”	18
Тема „Формула повної ймовірності. Формули Бейєса”	22
Тема „Схема незалежних випробувань: формула Бернуллі, найбільш імовірне число”	27
Тема „Схема незалежних випробувань: формули Лапласа і Пуассона”	31
Тема „Випадкові величини: закони розподілу випадкових величин, функція розподілу”	37
Тема „Неперервні випадкові величини: закони розподілу, функція і щільність розподілу”	42
Тема „Числові характеристики дискретних випадкових величин” ..	46
Тема „Числові характеристики неперервних випадкових величин” ..	53
Тема „Рівномірний розподіл”	57
Тема „Нормальний розподіл”	60
Тема „Двомірні випадкові величини. Нерівність Чебишова. Закон великих чисел”	63
Тема „Характеристична функція випадкової величини”	68
Тема „Математична статистика”	71
Лабораторна робота №1	71
Лабораторна робота №2	81
Лабораторна робота №3	85
Лабораторна робота №4	88
Додатки	100
Література	106

Навчальне видання

КУШНІРЧУК Василь Йосипович

**ЗБІРНИК ВПРАВ І ЗАВДАНЬ
З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ
ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ**

Навчальний посібник

Комп'ютерний набір та верстка
Макетування

*В.Й.Кушнірчук
В.Й.Кушнірчук*

Підписано до друку 26.01.2023 р. Формат 60×84/16.
Папір офсетний. Друк різнографічний. Умов. друк. арк.6,75.
Тираж 50 прим.

Видавництво Чернівецького національного університету
58012 м. Чернівці, вул. Коцюбинського, 2

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №891 від 08.04.2002 р.

$$(\Omega, \mathcal{F}, P)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(B | H_i)$$

$$F_{\xi}(x) = P\{\omega: \xi(\omega) < x\}$$

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2$$