

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

ТОПОЛОГІЧНІ ВЕКТОРНІ ПРОСТОРИ

Навчальний посібник

Чернівці
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича
2025

УДК 515.122+517.982](075.8)
Т 583

Друкується за ухвалою Вченої ради
факультету математики та інформатики
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича
(протокол № 2 від « 1 » жовтня 2025 року)

Укладачі:

Михайлюк Володимир Васильович, доктор фізико-математичних наук,
професор кафедри математичного аналізу Чернівецького національного
університету імені Юрія Федьковича;

Фотій Олена Георгіївна, кандидат фізико-математичних наук, асистент
кафедри математичного аналізу Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича.

Рецензенти:

Карлова О.О., доктор фізико-математичних наук, професор кафедри
математичного аналізу Чернівецького національного університету імені Юрія
Федьковича;

Філінчук О.І., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри
математичних проблем управління та кібернетики Чернівецького
національного університету імені Юрія Федьковича.

**Т 583 Топологічні векторні простори: конспект лекцій / укл. : В.В.
Михайлюк, О.Г. Фотій. Чернівці : Чернівецький національний
університет ім. Ю. Федьковича, 2025. 71 с.**

Навчальний посібник містить теоретичні відомості та задачі, необхідні для опанування дисципліни «Топологічні векторні простори». Подано систематичний виклад основ топологічних векторних просторів та пов'язаних із ними понять функціонального аналізу. Розглянуто перші типи топологічних векторних просторів, їх властивості та приклади, що формують фундамент для подальшого вивчення сучасної теорії лінійних структур. Особливу увагу приділено лінійним неперервним операторам на топологічних векторних просторах, їх характеристикам, способам побудови та взаємозв'язку з топологічними властивостями простору. Окремий розділ присвячено продовженню лінійних неперервних функціоналів, зокрема класичній теоремі Гана—Банаха та її застосуванню у дослідженні структури простору. Також розглянуто елементи теорії двоїстості, а саме, дуальні пари, слабкі та слабо*-топології, що виникають у цих парах.

Для студентів, що здобувають освіту в галузі знань „Математика”.

УДК 515.122+517.982](075.8)

Зміст

1	ПЕРШІ ТИПИ ТОПОЛОГІЧНИХ ВЕКТОРНИХ ПРОСТОРІВ	5
1.1	Топологічна структура на векторному просторі та її властивості	5
1.1.1	Поняття топологічного простору і векторного простору	5
1.1.2	Означення топологічного векторного простору і властивості околів нуля	7
1.1.3	Достатня система множин і породжена нею топологічна структура .	9
1.1.4	Сума з відкритим доданком, гаусдорфовість і регулярність ТВП . . .	10
1.1.5	Контрольні питання	10
1.1.6	Вправи	11
1.2	Нормовані, полінормовані і метризовні ТВП	14
1.2.1	Полінормовані простори, їх топологізація та збіжність у полінормованих просторах	14
1.2.2	Опуклі і абсолютно опуклі множини у векторному просторі	15
1.2.3	Локально опуклі простори і функціонал Мінковського	17
1.2.4	Обмежені множини і критерій нормованості ТВП	18
1.2.5	Двійчасті послідовності та сім'ї множин і функція, породжена ними .	18
1.2.6	Цілковита регулярність гаусдорфівського ТВП і критерій метризованості ТВП	20
1.2.7	Контрольні питання	21
1.2.8	Вправи	22
2	ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ОПЕРАТОРИ НА ТОПОЛОГІЧНИХ ВЕКТОРНИХ ПРОСТОРАХ	27
2.1	Скінченновимірні ТВП	27
2.1.1	Лінійні відображення, простір лінійних відображень	27
2.1.2	Компактні множини в топологічних просторах	29
2.1.3	Гаусдорфова топологія на скінченновимірному просторі	29
2.1.4	Відношення еквівалентності і фактормножини породжені ним	30

2.1.5	Факторпростір топологічного векторного простору, породжений підпростором	31
2.1.6	Передкомпактні множини в ТВП і критерій скінченновимірності . . .	32
2.1.7	Контрольні питання	33
2.1.8	Вправи	34
2.2	Проективні та індуктивні границі і принцип рівномірної обмеженості в ТВП	38
2.2.1	Проективна топологія та її властивості	38
2.2.2	Образ топології, фінальна топологія та прямі границі	39
2.2.3	Індуктивна топологія та її властивості	39
2.2.4	Строгі індуктивні границі, їх гаусдорфівість та обмежені множини в індуктивних границях	40
2.2.5	Поточково обмежені і одностайно неперервні сім'ї відображень	40
2.2.6	Бочкові простори і принцип рівномірної обмеженості	41
2.2.7	Контрольні питання	41
2.2.8	Вправи	43
3	ПРОДОВЖЕННЯ ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ, ДУАЛЬНІ ПАРИ І ПОВ'ЯЗАНІ З НИМИ ТОПОЛОГІЇ	47
3.1	Теорема Гана-Банаха та її застосування	47
3.1.1	Аналітична форма теореми Гана-Банаха	47
3.1.2	Продовження лінійних неперервних функціоналів у локально опуклих просторах	48
3.1.3	Спряжений простір і наслідки з теореми Гана-Банаха	49
3.1.4	Гіперпідпростори і гіперплощини	50
3.1.5	Геометрична форма теореми Гана-Банаха і відокремлення опуклих множин	51
3.1.6	Контрольні питання	51
3.1.7	Вправи	53
3.2	Елементи теорії двоїстості	57
3.2.1	Дуальні пари і слабка топологія	57
3.2.2	Властивості слабкої топології	59
3.2.3	Поляри	59
3.2.4	Топології, що узгоджуються з даною двоїстістю	60
3.2.5	Теореми про відкрите відображення та про замкнений графік для повнометризованих ТВП	61
3.2.6	Контрольні питання	62
3.2.7	Вправи	64
	Література	68

Розділ 1

ПЕРШІ ТИПИ ТОПОЛОГІЧНИХ ВЕКТОРНИХ ПРОСТОРІВ

1.1

ТОПОЛОГІЧНА СТРУКТУРА НА ВЕКТОРНОМУ ПРОСТОРІ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

1.1.1. Поняття топологічного простору і векторного простору.

Означення 1.1.1. Топологічною структурою на деякій множині X називається відображення

$$X \ni x \mapsto \mathcal{U}_x \subseteq 2^X, \mathcal{U}_x \neq \emptyset$$

яке задовольняє наступні умови

$$(O1) \quad (\forall x \in X) \quad (\forall U \in \mathcal{U}_x) \quad (x \in U);$$

$$(O2) \quad (\forall x \in X) \quad (\forall U \in \mathcal{U}_x) \quad (\forall V \subseteq X) \quad (U \subseteq V \Rightarrow V \in \mathcal{U}_x);$$

$$(O3) \quad (\forall x \in X) \quad (\forall U_1, U_2 \in \mathcal{U}_x) \quad (U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_x);$$

$$(O4) \quad (\forall x \in X) \quad (\forall U \in \mathcal{U}_x) \quad (\exists V \in \mathcal{U}_x) \quad (\forall y \in V) \quad (U \in \mathcal{U}_y).$$

При цьому множина X разом з уведеною на ній топологічною структурою називається **топологічним простором**, а елементи U системи $\mathcal{U}_x$ називаються **околами точки x в топологічному просторі X** .

Нехай X – топологічний простір.

- Множина $G \subseteq X$ називається *відкритою* в просторі X , якщо вона є околom кожної своєї точки.

- Сукупність (система) усіх відкритих множин в просторі X називається *топологією* простору X .
- Точка x називається *внутрішньою точкою* множини $A \subseteq X$, якщо множина A є околom точки x в просторі X .
- Сукупність усіх внутрішніх точок множини $A \subseteq X$ називається *внутрішністю* множини A і позначається $\text{int}(A)$.
- Точка x називається *точкою дотику* множини $A \subseteq X$, якщо $A \cap U \neq \emptyset$ для кожного околу U точки x в просторі X .
- Сукупність усіх точок дотику множини $A \subseteq X$ називається *замиканням* множини A і позначається $\overline{A}$.

Означення 1.1.2. Векторним (лінійним) простором над числовим (скалярним) полем $\mathbb{K} \subseteq \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ називається множина X разом з уведеними на ній операціями додавання елементів $s : X \times X \rightarrow X$,

$$s(x, y) = x + y,$$

і множення на скаляр елементів $m : \mathbb{K} \times X \rightarrow X$,

$$m(\alpha, x) = \alpha \cdot x,$$

які задовольняють наступні умови

$$(V1) \ (\forall x, y \in X) \ (x + y = y + x);$$

$$(V2) \ (\forall x, y, z \in X) \ ((x + y) + z = x + (y + z));$$

$$(V3) \ (\exists x \in X) \ (\forall x \in X) \ (x + 0 = x);$$

$$(V4) \ (\forall x \in X) \ (\exists -x \in X) \ (x + (-x)) = 0;$$

$$(V5) \ (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}) \ (\forall x \in X) \ ((\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x));$$

$$(V6) \ (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}) \ (\forall x \in X) \ ((\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x);$$

$$(V7) \ (\forall \alpha \in \mathbb{K}) \ (\forall x, y \in X) \ ((\alpha \cdot (x + y)) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y);$$

$$(V8) \ (\forall x \in X) \ (1 \cdot x = x).$$

При цьому елементи векторного простору X називаються **векторами**, вектор $0 \in X$ – **нульовим вектором** або просто **нулем**, а вектор $-x$ – **протилежним вектором** до вектора $x \in X$.

Властивості.

- 1) Нульовий вектор – єдиний.
- 2) Протилежний вектор – єдиний.
- 3) Якщо $x + y = x$ для деякого $y \in X$, то $y = 0$.
- 4) Існує обернена операція до додавання – *віднімання векторів*, яка означається формулою

$$x - y = x + (-y).$$

- 5) $\alpha \cdot 0 = 0$ для кожного $\alpha \in \mathbb{K}$.
- 6) $0 \cdot x = 0$ для кожного $x \in X$.
- 7) $(-1) \cdot x = -x$ для кожного $x \in X$.

Позначення.

Нехай X – векторний простір, $A, B \subseteq X$ і $\alpha \in \mathbb{K}$. Тоді

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\},$$

$$A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\},$$

$$\alpha A = \{\alpha \cdot a : a \in A\}.$$

Зауваження 1.1.3. Для довільних $A \subseteq X$ і $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ виконується включення

$$(\alpha + \beta)A \subseteq \alpha A + \beta A,$$

і не обов'язково виконується рівність

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$

1.1.2. Означення топологічного векторного простору і властивості околів нуля.

Означення 1.1.4. Топологічний і векторний простір X називається **топологічним векторним простором** (скорочено **ТВП**), якщо топологічна і векторна структури на цьому просторі узгоджені між собою, тобто відображення суми s і множення на скаляр t є неперервними.

Неперервність відображень s і t можна записати у вигляді наступних умов

$$(TV1) \quad (\forall x, y \in X) \quad (\forall W \in \mathcal{U}_{x+y}) \quad (\exists U \in \mathcal{U}_x) \quad (\exists V \in \mathcal{U}_y) \quad (U + V \subseteq W);$$

$$(TV2) \quad (\forall \alpha \in \mathbb{K}) \quad (\forall x \in X) \quad (\forall W \in \mathcal{U}_{\alpha x}) \quad (\exists \delta > 0) \quad (\exists U \in \mathcal{U}_x) \quad (\forall \beta \in \mathbb{K}) \quad (|\alpha - \beta| < \delta \Rightarrow \beta U \subseteq W).$$

Таким чином, топологічний векторний простір описується за допомогою 14-ти умов: (O1)-(O4), (V1)-(V8) і (TV1)-(TV2).

Означення 1.1.5. Множина A у ТВП X над полем $\mathbb{K}$ **поглинає точку** $x \in X$, якщо

$$(\exists \lambda > 0) (\forall \alpha \in \mathbb{K}) (|\alpha| > \lambda \Rightarrow x \in \alpha A).$$

Множина A у ТВП X над полем $\mathbb{K}$ називається **радіальною**, якщо множина A поглинає кожну точку $x \in X$.

Твердження 1.1.6. Множина A у ТВП X є радіальною тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$(\forall x \in X) (\exists \lambda > 0) (\forall \alpha \in \mathbb{K}) (|\alpha| < \lambda \Rightarrow \alpha x \in A).$$

Твердження 1.1.7. Довільний окіл нуля (ону) U у ТВП X є радіальною множиною.

Означення 1.1.8. Множина A у ТВП X над полем $\mathbb{K}$ називається **заокругленою**, якщо

$$(\forall x \in A) (\forall \alpha \in \mathbb{K}) (|\alpha| \leq 1 \Rightarrow \alpha x \in A).$$

Твердження 1.1.9. Нехай U – довільний ону у ТВП X . Тоді існує заокруглений ону V такий, що $V \subseteq U$.

Наслідок 1.1.10. У довільному ТВП всі заокруглені ону утворюють базу ону.

Означення 1.1.11. Нехай X – ТВП і $A \subseteq X$. Множина $C \subseteq X$ називається **заокругленою оболонкою множини A** (позначається $c(A)$), якщо виконуються наступні умови

- 1) множина C заокруглена;
- 2) для довільної заокругленої множини $B \subseteq X$ якщо $A \subseteq B$, то $C \subseteq B$.

Іншими словами, заокруглена оболонка множини A – це найменша заокруглена множина, яка містить множину A .

Твердження 1.1.12. Нехай X – ТВП, $A \subseteq X$ і $\mathcal{B}$ – система всіх заокруглених множин $B \subseteq X$, які містять множину A . Тоді

$$c(A) = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B.$$

Твердження 1.1.13. Нехай X – ТВП і U – ону. Тоді існує ону V такий, що

$$V + V \subseteq U.$$

Твердження 1.1.14. Нехай X – ТВП, U – ону і $n \in \mathbb{N}$. Тоді існує ону V такий, що

$$\underbrace{V + V + \dots + V}_n \subseteq U.$$

Зауваження 1.1.15. Зауважимо, що

$$nV \subseteq \underbrace{V + V + \dots + V}_n.$$

Тому для ону U і V з попереднього твердження маємо

$$nV \subseteq U,$$

тобто

$$V \subseteq \frac{1}{n}U.$$

Твердження 1.1.16. Нехай X – ТВП, U – ону і $\alpha \in \mathbb{K}$ – ненульовий скаляр. Тоді αU також ону.

1.1.3. Достатня система множин і породжена нею топологічна структура.

Означення 1.1.17. Непорожня система $\mathcal{B}$ підмножин векторного простору X називається **достатньою**, якщо вона задовольняє наступні умови

(B1) кожна множина $B \in \mathcal{B}$ є радіальною і заокругленою;

(B2) $(\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}) (\exists B \in \mathcal{B}) (B \subseteq B_1 \cap B_2)$;

(B3) $(\forall B \in \mathcal{B}) (\exists C \in \mathcal{B}) (C + C \subseteq B)$.

Твердження 1.1.18. Нехай $\mathcal{B}$ – достатня система множин у векторному просторі X . Тоді відображення

$$X \ni x \mapsto \mathcal{U}_x = \{U \subseteq X : (\exists B \in \mathcal{B}) (x + B \subseteq U)\}$$

задає топологічну структуру на векторному просторі X , яка називається **топологічною структурою**, породженою достатньою системою $\mathcal{B}$ і для якої система $\mathcal{B}$ утворює базу ону.

Зауваження 1.1.19. Для кожної точки $x \in X$ маємо

$$\mathcal{U}_x = x + \mathcal{U}_0 = \{x + U : U \in \mathcal{U}_0\}.$$

Твердження 1.1.20. Топологічна структура, породжена достатньою системою множин, є лінійною, тобто операції s і t є неперервними відносно цієї структури.

Теорема 1.1.21. Для довільного топологічного векторного простору X система всіх заокруглених ону утворює базу, яка є достатньою системою.

І навпаки, для довільної достатньої системи множин $\mathcal{B}$ на векторному просторі X існує єдина лінійна топологічна структура на X , для якої $\mathcal{B}$ утворює базу ону.

1.1.4. Сума з відкритим доданком, гаусдорфовість і регулярність ТВП.

Твердження 1.1.22. Нехай X - топологічний векторний простір, $A \subseteq X$ - непорожня відкрита множина, $B \subseteq X$ - непорожня множина. Тоді множина $A + B$ відкрита.

Топологічний простір X називається

- 1) - T_1 -простором, якщо для довільних різних точок $x, y \in X$ існують окіл U точки x такий, що $y \notin U$;
- 2) - гаусдорфовим простором або T_2 -простором, якщо для довільних різних точок $x, y \in X$ існують околи U і V точок x і y відповідно, такі, що $U \cap V = \emptyset$;
- 3) - регулярним простором, якщо X є T_1 -простором і для довільної точки $x \in X$ і довільної замкненої в X множини $F \ni x$ існують околи U точки x і окіл V множини F такі, що $U \cap V = \emptyset$.

Теорема 1.1.23. Для довільного топологічного векторного простору X наступні умови є рівносильними:

- 1) X є T_1 -простором;
- 2) X є гаусдорфовим;
- 3) X є регулярним простором;
- 4) $\cap \mathcal{V} = \{0\}$ для деякої бази ону $\mathcal{V}$;
- 5) $\cap \mathcal{V} = \{0\}$ для довільної бази ону $\mathcal{V}$.

1.1.5. Контрольні питання.

- 1) Дати означення топологічної структури і топологічного простору.
- 2) Дати означення відкритої множини і топології.
- 3) Що таке база околів точки x ?
- 4) Дати означення неперервного відображення f у точці і неперервного відображення.

- 5) Що таке сукупно неперервне відображення?
- 6) Дати означення векторного простору над полем $\mathbb{K}$.
- 7) Пояснити, що таке $A + B$ і λA .
- 8) Дати означення топологічного векторного простору.
- 9) Що таке зсув і гомотетія у векторному просторі?
- 10) Коли множина A поглинає множину B ?
- 11) Що таке радіальна множина?
- 12) Що таке заокруглена множина?
- 13) Дати означення достатньої системи множин.
- 14) Як будується топологічна структура, породжена достатньою системою множин?
- 15) Коли сітка $(x_s : s \in S)$ збігається до елемента x в топологічному векторному просторі?

1.1.6. Вправи.

- 1) Довести, що операція переходу до протилежного елемента в ТВП X неперервна.
- 2) Довести, що відображення $g : X \times X \rightarrow X$, $g(x, y) = x - y$, неперервне.
- 3) Нехай U і V – околи нуля в ТВП X . Довести, що $U + V$ – це окіл нуля в X .
- 4) Довести, що для довільного околу нуля U в топологічному векторному просторі X існує окіл нуля V в X , такий, що $V - V \subseteq U$.
- 5) Довести, що для довільних елементів a, b з топологічного векторного простору X існує гомеоморфізм $f : X \rightarrow X$, такий, що $f(a) = b$.
- 6) Нехай A і B – підмножини топологічного векторного простору X і A – відкрита множина. Довести, що $A + B$ – відкрита множина в X .
- 7) Нехай $2U$ – окіл нуля в ТВП X . Довести, що U – окіл нуля в ТВП X .
- 8) З'ясувати, чи поглинає множина A множину B , якщо:
 - а) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \text{ і } x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{(2, 3)\}$;
 - б) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \text{ і } x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{(-2, -3)\}$;
 - в) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 100\}$;
 - г) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq 0\}$.

9) Які з наступних множин A будуть радіальними в $\mathbb{R}^2$, якщо

а) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$;

б) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \text{ або } (x+1)^2 + y^2 \leq 1\}$;

в) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} \leq 1\}$;

г) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \text{ і } x^2 + y^2 \leq 1\}$.

10) Які з наступних множин A будуть заокругленими, якщо:

а) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} \leq 1\}$;

б) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$;

в) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$;

г) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1 \text{ і } y \geq 0 \text{ або } |x| + 2|y| \leq 1 \text{ і } y \leq 0\}$.

11) Довести, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ і довільного околу U в ТВП X існує окіл нуля V в X , такий, що $\underbrace{V + V + \dots + V}_{n \text{ раз}} \subseteq U$.

12) Нехай A – заокруглена множина в ТВП X . Довести, що $\overline{A}$ – заокруглена множина в X .

13) Нехай U – окіл нуля в ТВП X і $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ – послідовність скалярів, така, що $\lambda_n \rightarrow \infty$. Довести, що $X = \bigcup_{n=1}^\infty \lambda_n U$.

14) Довести, що непорожня множина A на комплексній площині $\mathbb{C}$ буде заокругленою тоді і тільки тоді, коли вона є однією з множин наступних чотирьох типів:

а) вся комплексна площина $\mathbb{C}$;

б) множина $\{0\}$;

в) відкритий круг $|\lambda| < \varrho$;

г) замкнений круг $|\lambda| \leq \varrho$.

15) Навести приклад заокругленої множини в дійсному векторному просторі $\mathbb{R}^2$, яка б не була заокругленою в комплексному векторному просторі $\mathbb{C}$.

16) Навести приклад радіальної множини в $\mathbb{R}^2$, яка б не була околом нуля.

17) Навести приклад заокругленої підмножини $\mathbb{R}^2$, яка не є радіальною, і радіальної, яка не є заокругленою.

18) Навести приклад заокругленої і радіальної множини на площині, яка б не була околом нуля в евклідовій топології.

19) Нехай A – підмножина векторного простору X . Довести, що множина $c(A) = \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \lambda A$ є найменшою заокругленою множиною в X , що містить A .

- 20) Нехай X – ТВП, $\mathcal{U}$ – система всіх околів нуля в X , $\mathcal{V}$ – база околів нуля в X , $L = \bigcap \mathcal{U}$. Тоді: а) $\bigcap \mathcal{V} = L$; б) L – лінійний підпростір простору X .
- 21) Нехай X – векторний простір, $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ – антидискретна топологія на X . Довести, що: а) $(X, \mathcal{T})$ – ТВП; б) $(X, \mathcal{T})$ – гаусдорфовий простір тоді і тільки тоді, коли $X = \{0\}$.
- 22) Чи буде топологічним векторним простором простір $\mathbb{R}$ з дискретною топологією?
- 23) Нехай X – ТВП, $(x_s)_{s \in S}$, $(y_s)_{s \in S}$ – сітки в X , $x_s \rightarrow x$, $y_s \rightarrow y$, де $x, y \in X$. Довести, що
- а) $x_s + y_s \rightarrow x + y$ в X ;
 б) $x_s - y_s \rightarrow x - y$ в X .
- 24) Нехай $(x_s)_{s \in S}$ – збіжна до x сітка в ТВП X , $(\lambda_s)_{s \in S}$ – збіжна до λ сітка скалярів. Довести, що $\lambda_s x_s \rightarrow \lambda x$ в X .
- 25) Нехай A – заокруглена множина в ТВП X , $0 \in \text{int} A$.
- а) Довести, що $\text{int} A$ – заокруглена множина;
 б) Показати, що умова $0 \in \text{int} A$ істотна.
- 26) Довести, що лінійний підпростір L ТВП X буде ТВП відносно топологічної структури, індукованої простором X .
- 27) Довести, що замикання лінійного підпростору L ТВП X буде лінійним підпростором X .
- 28) Нехай L – лінійний підпростір ТВП X , $\text{int} L \neq \emptyset$. Довести, що $L = X$.
- 29) Довести, що в будь-якому ТВП X існує база, що складається з замкнених і заокруглених околів нуля.
- 30) Довести, що будь-який підпростір L топологічного векторного простору X або ніде не щільний в X , або всюди щільний в X .
- 31) Довести, що ТВП X буде берівським тоді і тільки тоді, коли X множина другої категорії.
- 32) Нехай X не гаусдорфовий ТВП і $L = \overline{\{0\}}$. Довести, що L є ТВП з антидискретною топологією.

1.2.1. Поліноормовані простори, їх топологізація та збіжність у поліноормованих просторах.

Означення 1.2.1. Нехай X – векторний простір над полем $\mathbb{K}$. Функція $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ називається **переднормою** на X , якщо для довільних $x, y \in X$ і $\alpha \in \mathbb{K}$ виконуються наступні умови

$$(N1) \quad p(x) \geq 0;$$

$$(N2) \quad p(\alpha x) = |\alpha| \cdot p(x);$$

$$(N3) \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

Якщо, крім того, для кожного $x \in X$ виконується умова

$$(N4) \quad p(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0,$$

то переднорма p називається **нормою** на X .

Означення 1.2.2. Нехай X – векторний простір над полем $\mathbb{K}$ і P – множина переднорм на просторі X . Тоді пара (X, P) називається **поліноормованим простором**.

Позначення.

Для множини переднорм P на просторі X через $\mathcal{F}(P)$ позначимо множину усіх скінченних непорожніх множин $\tau \subseteq P$.

Для довільної множини $\tau = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq P$ і кожного $x \in X$ покладемо

$$p_\tau(x) = \max\{p_1(x), \dots, p_n(x)\}.$$

Для довільної множини $\tau = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq P$ і довільного $\varepsilon > 0$ покладемо

$$B_{\tau, \varepsilon} = \{x \in X : p_\tau(x) \leq \varepsilon\}.$$

Твердження 1.2.3. Функція p_τ є переднормою на X .

Твердження 1.2.4. Система

$$\mathcal{B}(P) = \{B_{\tau, \varepsilon} : \tau \in \mathcal{F}(P), \varepsilon > 0\}$$

є достатньою у ВП X .

Наслідок 1.2.5. У довільному поліноормованому просторі (X, P) існує єдина лінійна структура, відносно якої система $\mathcal{B}(P)$ утворює базу ону. Ця структура називається **топологією поліноормованого простору** (X, P) .

Означення 1.2.6. Множина S з відношенням порядку $\leq$ називається **напрявленою множиною**, якщо виконуються наступні умови

$$1) (\forall s \in S) (s \leq s);$$

$$2) (\forall s, t, r \in S) (s \leq t \leq r \Rightarrow s \leq r);$$

$$3) (\forall s, t \in S) (\exists r \in S) (s \leq r, t \leq r).$$

Сім'я $(x_s : s \in S)$, де S – напрямлена множина, елементів $x_s \in X$ називається **сіткою** в X .

Означення 1.2.7. Сітка $(x_s : s \in S)$ в топологічному просторі X збігається до елемента $x \in X$ (позначається $x_s \rightarrow x$), якщо

$$(\forall U \in \mathcal{U}_x) (\exists s_0 \in S) (\forall s \geq s_0) (x_s \in U).$$

Твердження 1.2.8. Сітка $(x_s : s \in S)$ в поліномованому просторі (X, P) збігається до елемента $x \in X$ тоді і тільки тоді, коли $p(x_s - x) \rightarrow 0$ для кожної переднорми $p \in P$.

Твердження 1.2.9. Поліномований простір (X, P) гаусдорфовий тоді і тільки тоді, коли

$$(\forall x \in X) (\exists p \in P) (p(x) > 0).$$

1.2.2. Опуклі і абсолютно опуклі множини у векторному просторі.

Означення 1.2.10. Множина A у ВП X над полем $\mathbb{K}$ називається **опуклою**, якщо

$$(\forall x, y \in A) (\forall \alpha, \beta \in [0, 1]) (\alpha + \beta = 1 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in A).$$

Твердження 1.2.11. Нехай A – опукла множина у ВП X і $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$. Тоді

$$\alpha_1 A + \dots + \alpha_n A = (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) A.$$

Наслідок 1.2.12. Нехай A – опукла множина у ВП X і $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$ – такі, що

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1.$$

Тоді

$$\alpha_1 A + \dots + \alpha_n A = A.$$

Твердження 1.2.13. Перетин довільної сім'ї опуклих множин є опуклою множиною.

Означення 1.2.14. Нехай X – ВП і $A \subseteq X$. Множина $C \subseteq X$ називається **опуклою оболонкою множини A** (позначається $co(A)$), якщо виконуються наступні умови

- 1) множина C опукла;
- 2) для довільної опуклої множини $B \subseteq X$ якщо $A \subseteq B$, то $C \subseteq B$.

Іншими словами, опукла оболонка множини A – це найменша опукла множина, яка містить множину A .

Твердження 1.2.15. Нехай X – ВП, $A \subseteq X$ і $\mathcal{B}$ – система всіх опуклих множин $B \subseteq X$, які містять множину A . Тоді

$$co(A) = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B.$$

Твердження 1.2.16.

$$co(A) = \{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n : n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0, \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1, a_1, \dots, a_n \in A\}.$$

Означення 1.2.17. Опукла заокруглена множина A у ВП X над полем $\mathbb{K}$ називається **абсолютно опуклою**.

Твердження 1.2.18. Множина A у ВП X є абсолютно опуклою тоді і тільки тоді коли

$$(\forall x, y \in A) (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}) (|\alpha| + |\beta| \leq 1 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in A).$$

Твердження 1.2.19. Нехай A – абсолютно опукла множина у ВП X і $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Тоді

$$\alpha_1 A + \dots + \alpha_n A = (|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|)A.$$

Наслідок 1.2.20. Нехай A – абсолютно опукла множина у ВП X і $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$ – такі, що

$$|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n| = 1.$$

Тоді

$$\alpha_1 A + \dots + \alpha_n A = A.$$

Твердження 1.2.21. Перетин довільної сім'ї абсолютно опуклих множин є абсолютно опуклою множиною.

Означення 1.2.22. Нехай X – ВП і $A \subseteq X$. Множина $C \subseteq X$ називається **абсолютно опуклою оболонкою множини A** (позначається $ss(A)$), якщо виконуються наступні умови

- 1) множина C абсолютно опукла;
- 2) для довільної абсолютно опуклої множини $B \subseteq X$ якщо $A \subseteq B$, то $C \subseteq B$.

Іншими словами, абсолютно опукла оболонка множини A – це найменша абсолютно опукла множина, яка містить множину A .

Твердження 1.2.23. Нехай X – ВП, $A \subseteq X$ і $\mathcal{B}$ – система всіх абсолютно опуклих множин $B \subseteq X$, які містять множину A . Тоді

$$co(A) = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B.$$

Твердження 1.2.24.

$$co(A) = \{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n : n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}, |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n| \leq 1, a_1, \dots, a_n \in A\}.$$

1.2.3. Локально опуклі простори і функціонал Мінковського.

Означення 1.2.25. ТВП X називається локально опуклим (скорочено ЛОП), якщо в X існує база, яка складається з опуклих ону.

Твердження 1.2.26. ТВП X є ЛОП тоді і тільки тоді, коли в X існує база, яка складається з абсолютно опуклих ону.

Твердження 1.2.27. Нехай (X, P) – поліномований простір. Тоді для довільної множини $\tau \subseteq F$ і кожного $x \in X$ куля $B_{\tau, \varepsilon}$ є абсолютно опуклою.

Наслідок 1.2.28. Кожний поліномований простір є ЛОП.

Означення 1.2.29. Нехай A – радіальна множина X . Для кожного $x \in X$ покладемо

$$I_x(A) = \{\alpha > 0 : x \in \alpha A\}.$$

Функція $p_A : X \rightarrow [0, +\infty)$, означена формулою

$$p_A(x) = \inf I_x(A),$$

називається функціоналом Мінковського, породженим множиною A .

Твердження 1.2.30. Якщо множина A – радіальна і заокруглена, то

$$I_x(A) = [p_A(x), +\infty)$$

або

$$I_x(A) = (p_A(x), +\infty)$$

для кожного $x \in X$.

Твердження 1.2.31. Якщо множина A – абсолютно опукла, то функціонал Мінковського p_A є переднормою на X , причому

$$\{x \in X : p_A(x) < 1\} \subseteq A \subseteq \{x \in X : p_A(x) \leq 1\}.$$

Твердження 1.2.32. Нехай A, B – радіальні заокруглені множини і $\beta > 0$. Тоді

- a) $A \subseteq B \Rightarrow p_B \leq p_A$;
- b) $p_{A \cap B} = \max\{p_B, p_A\}$;
- c) $p_{\beta A} = \frac{1}{\beta} \cdot p_A$.

Теорема 1.2.33. ТВП X є локально опуклим тоді і тільки тоді, коли X є полінормованим.

1.2.4. Обмежені множини і критерій нормованості ТВП.

Означення 1.2.34. Множина A в полінормованому просторі (X, P) називається обмеженою, якщо для довільної переднорми $p \in P$ існує число $\gamma_p > 0$ таке, що

$$p(x) \leq \gamma_p$$

для кожного $x \in A$.

Означення 1.2.35. Множина A в ТВП X поглинає множину $B \subseteq X$, якщо

$$(\exists \lambda > 0) (\forall \alpha \in \mathbb{K}) (|\alpha| > \lambda \Rightarrow B \subseteq \alpha A).$$

Твердження 1.2.36. Множина A в полінормованому просторі (X, P) є обмеженою тоді і тільки тоді, коли A поглинається довільним оточенням нуля.

Означення 1.2.37. Множина A в ТВП (X, P) називається обмеженою, якщо A поглинається довільним оточенням нуля.

Твердження 1.2.38. Множина A в ТВП X є обмеженою тоді і тільки тоді, коли

$$\alpha_n a_n \rightarrow 0$$

для довільної нескінченно малої послідовності скалярів α_n і довільної послідовності векторів $a_n \in A$.

Твердження 1.2.39. Ону U в ТВП X є обмеженим тоді і тільки тоді, коли для довільної нескінченно малої послідовності скалярів $\alpha_n \neq 0$ сім'я $(\alpha_n U : n \in \mathbb{N})$ утворює базу ону.

Теорема 1.2.40. ТВП X є нормовним тоді і тільки тоді, коли X гаусдорфовий і в X існує опуклий обмежений ону.

1.2.5. Двійчасті послідовності та сім'ї множин і функція, породжена ними.

Означення 1.2.41. Послідовність $(V_n)_{n=0}^{\infty}$ непорожніх заокруглених множин V_n у ВП X називається двійчастою, якщо $V_0 = X$ і $V_n + V_n \subseteq V_{n-1}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Позначимо через $\mathbb{Q}_2^+$ множину всіх двійково раціональних чисел $r > 0$. Зауважимо, що кожне число $r \in \mathbb{Q}_2^+ \cap (0, 1)$ однозначно можна подати у вигляді

$$r = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{2^k} = (0, \alpha_1 \dots \alpha_n)_2,$$

де $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \{0, 1\}$ і $\alpha_n = 1$. При цьому число n позначимо через $l(r)$.

Для кожного $r \in \mathbb{Q}_2^+ \cap [1, +\infty)$ покладемо

$$U_r = V_0 = X,$$

а для кожного $r \in \mathbb{Q}_2^+ \cap (0, 1)$ покладемо

$$r = (0, \alpha_1 \dots \alpha_n)_2 \in \mathbb{Q}_n^+ \cap (0, 1)$$

покладемо

$$U_r = \sum_{k=1}^n \alpha_k V_k.$$

Сім'я $(U_r : r \in \mathbb{Q}_2^+)$ називається **двійчастою сім'єю**, породженою послідовністю $(V_n)_{n=0}^\infty$.

Твердження 1.2.42. *Нехай $(U_r : r \in \mathbb{Q}_2^+)$ – двійчаста сім'я множин, породжена двійчастою послідовністю $(V_n)_{n=0}^\infty$ у ВП X . Тоді для довільних $r, s \in \mathbb{Q}_2^+$ виконуються умови:*

1) *множина U_r заокруглена і $0 \in U_r$;*

2) *$U_r + U_s \subseteq U_{r+s}$;*

3) *якщо $r \leq s$, то $U_r \subseteq U_s$.*

Нехай $(U_r : r \in \mathbb{Q}_2^+)$ – двійчаста сім'я множин, породжена двійчастою послідовністю $(V_n)_{n=0}^\infty$ у ВП X . Для кожного $x \in X$ розглянемо множину

$$A_x = \{r \in \mathbb{Q}_2^+ : x \in U_r\}$$

і покладемо

$$f(x) = \inf A_x.$$

Функція $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ називається **функцією, породженою двійчастою послідовністю $(V_n)_{n=0}^\infty$** .

Твердження 1.2.43. *Нехай $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ – функція, породжена двійчастою послідовністю $(V_n)_{n=0}^\infty$. Тоді для довільних $x, y \in X$ і $n \in \mathbb{N}$ виконуються умови:*

1) *$0 \leq f(x) \leq 1$;*

2) *якщо $|\alpha| \leq 1$, то $f(\alpha x) \leq f(x)$, зокрема, $f(-x) = f(x)$;*

3) якщо $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$;

4) $\{z \in X : f(z) < \frac{1}{2^n}\} \subseteq V_n \subseteq \{z \in X : f(z) \leq \frac{1}{2^n}\}$.

1.2.6. Цілковита регулярність гаусдорфового ТВП і критерій метризовності ТВП. Топологічний простір X називається $T_{3\frac{1}{2}}$ -простором, якщо для довільної точки $x \in X$ і довільного околу U точки x існує неперервна функція $f : X \rightarrow [0, 1]$ така, що $f(x) = 1$ і $f(y) = 0$ для кожного $y \in X \setminus U$.

Топологічний простір X , який задовольняє умови T_1 і $T_{3\frac{1}{2}}$ називається **цілком регулярним**.

Теорема 1.2.44. Довільний гаусдорфовий ТВП X є цілком регулярний.

Означення 1.2.45. Функція $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ називається **метрикою на множині X** , якщо для довільних $x, y, z \in X$ виконуються наступні умови

$$(M1) \quad d(x, y) \geq 0;$$

$$(M2) \quad d(x, y) = d(y, x);$$

$$(M3) \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z);$$

$$(M4) \quad d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$$

При цьому пара (X, d) називається **метричним простором**.

Для кожного $x \in X$ і довільного $\varepsilon > 0$ покладемо

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$$

і

$$B[x, \varepsilon] = \{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\}.$$

Множина U у метричному просторі (X, d) є околom точки x , існує $\varepsilon > 0$ таке, що

$$B(x, \varepsilon) \subseteq U.$$

Топологічний простір X називається **метризовним**, якщо існує метрика d на X , яка породжує топологічну структуру простору X .

Означення 1.2.46. Функція $|\cdot| : X \rightarrow \mathbb{R}$ на векторному просторі X називається **псевдонормою**, якщо для довільних $x, y \in X$ і кожного $\alpha \in \mathbb{K}$ виконуються наступні умови

$$(PN1) \quad |x| \geq 0;$$

$$(PN2) \quad |\alpha x| \leq |x|, \text{ якщо } |\alpha| \leq 1;$$

$$(PN3) \quad |x + y| \leq |x| + |y|;$$

$$(PN4) \quad |x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Твердження 1.2.47. Нехай $|\cdot| : X \rightarrow \mathbb{R}$ – псевдонорма на векторному просторі X . Тоді функція

$$d(x, y) = |x - y|$$

є метрикою на X .

Теорема 1.2.48. ТВП X є метризовним тоді і тільки тоді, коли X гаусдорфовий і в X існує не більш, ніж зліченна база ону.

1.2.7. Контрольні питання.

- 1) Що таке переднорма?
- 2) Яка переднорма називається нормою?
- 3) Що таке нормований простір?
- 4) Як вводиться лінійна топологічна структура на нормованому просторі?
- 5) Що таке полінормований простір?
- 6) Як вводиться топологічна структура на полінормованому просторі?
- 7) Коли полінормований простір (X, P) гаусдорфовий?
- 8) Коли сітка $(x_s)_{s \in S}$ збігається до елемента x в полінормованому просторі (X, P) ?
- 9) Пояснити, з яких елементів складаються наступні простори, і якою сукупністю переднорм задається їх топологічна структура: а) $\mathbb{K}^T$; б) $C_p(T)$; в) $\mathfrak{A}(G)$; г) $C^\infty[a, b]$; г) $C^\infty(G)$.
- 10) Що таке досконалий простір Кете-Тепліца і як вводиться на ньому нормальна топологія Кете?
- 11) Що називається відрізком у векторному просторі X ?
- 12) Що таке опукла комбінація елементів x і y ?
- 13) Що таке опукла множина у векторному просторі?
- 14) Дати означення опуклої оболонки множини A .
- 15) Який зв'язок між опуклою оболонкою множини A і сукупністю всіх опуклих комбінацій скінченної послідовності елементів з A ?
- 16) Що таке абсолютно опукла множина?

- 17) Що таке абсолютно опукла оболонка множини і з яких елементів вона складається?
- 18) Дати означення локально опуклого простору.
- 19) Що таке функціонал Мінковського радіальної абсолютно опуклої множини A ?
- 20) Який зв'язок між локально опуклими і полінормованими просторами?
- 21) Що таке обмежена множина в ТВП?
- 22) Яка характеристика обмеженості множини на мові послідовностей?
- 23) Який ТВП називається нормовним?
- 24) Сформулювати критерій нормовності ТВП (теорема Колмогорова).
- 25) Як будується норма на гаусдорфовому ТВП X з обмеженим абсолютно опуклим оточенням нуля V ?
- 26) Що таке двійчаста послідовність у векторному просторі?
- 27) Як визначається двійчаста сім'я, що породжена двійчастою послідовністю?
- 28) Як визначається функція, що породжена двійчастою послідовністю?
- 29) Які властивості функції, породженої двійчастою послідовністю?
- 30) Як для оточення нуля U в ТВП X будується неперервна функція $g : X \rightarrow [0, 1]$, така, що $g(0) = 0$ і $g(x) = 1$ на $X \setminus U$?
- 31) Що таке псевдонорма на векторному просторі?
- 32) Сформулювати критерій метризованості ТВП (теорема Біркгоффа-Какутані).
- 33) Як визначається метрика на гаусдорфовому ТВП X з не більш ніж зліченною базою оточень нуля, яка породжує топологічну структуру простору X ?
- 34) Навести приклад ТВП, який не є локально опуклим.

1.2.8. Вправи.

- 1) Довести, що для довільної перенорми p виконується рівність $p(0) = 0$.
- 2) Які з наступних функцій p будуть переднормами на відповідних векторних просторах X ? Які з цих переднорм будуть нормами?

а) $p(x) = |x(t)|$, $x \in X = \mathbb{K}^T$;

б) $p_K(x) = \max_{t \in K} |x(t)|$, K – компактна підмножина топологічного простору T , $x \in X = C(T)$;

в) $p(x) = \int_a^b |x(t)| dt$, $x \in X = C(\mathbb{R})$, $-\infty < a < +\infty$;

$$\text{г)} p(x) = (\sqrt{\xi_1} + \sqrt{\xi_2})^2, x = (\xi_1, \xi_2) \in X = \mathbb{K}^2;$$

$$\text{г)} p(x) = \inf\{1, |x|\}, x \in X = \mathbb{K};$$

$$\text{д)} p(x) = \sqrt{\xi_1} + \sqrt{\xi_2}, x = (\xi_1, \xi_2) \in X = \mathbb{K}^2;$$

$$\text{е)} p(x) = \int_a^b |x(t)| dt, x \in X = C[a, b], -\infty < a < +\infty.$$

3) Нехай $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

а) Довести що множина $F = \{x = (\xi_k)_{k=1}^\infty \in \ell_p : (\forall k \in \mathbb{N})(\xi_k \geq 0)\}$ замкнена в ℓ_p .

б) Чи буде множина $A = \{x = (\xi_k)_{k=1}^\infty \in \ell_p : (\forall k \in \mathbb{N})(\xi_k > 0)\}$ відкритою в ℓ_p ?

в) Знайти $\text{int} A$ і $\text{cl} A$ в ℓ_p , де A – множина з пункту б).

4) а) Довести, що одинична куля $B = \{x = (\xi_k)_{k=1}^\infty \in \ell_1 : \sum_{k=1}^\infty |\xi_k| \leq 1\}$ простору ℓ_1 є замкнутою ніде не щільною множиною в ℓ_2 .

б) Довести, що $\ell_1 \subseteq \ell_2$, причому ℓ_1 – множина першої категорії в ℓ_2 .

5) Нехай сукупність P переднорм на векторному просторі X напрямлена відношенням $\leq$ ($p \leq q \equiv \forall x \in X \quad p(x) \leq q(x)$). Довести, що система $\mathcal{B} = \{B_{p,\varepsilon} : p \in P, \varepsilon > 0\}$, де $B_{p,\varepsilon} = \{x \in X : p(x) \leq \varepsilon\}$, є базою околів нуля в полінормованому просторі (X, P) .

6) Нехай $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ – скінченна сукупність переднорм на векторному просторі X і $p(x) = \max\{p_1(x), \dots, p_n(x)\}$ на X .

а) Довести, що p переднорма.

б) Довести, що топологічна структура полінормованого простору (X, P) збігається з топологічною структурою простору $(X, P) = (X, \{p\})$.

7) Довести, що сітка $(x_s : s \in S)$ збігається до елемента x у просторі X , якщо:

$$\text{а)} S = \mathbb{N}, X = C^\infty[0, 1], x_n(t) = \frac{t^n}{n!} \text{ для } t \in [0, 1], x(t) = 0 \text{ на } [0, 1];$$

$$\text{б)} S = \mathbb{N}, X = C_k(\mathbb{R}), x_n(t) = \frac{t}{n}, x(t) = 0 \text{ на } [0, 1];$$

$$\text{в)} S = (\mathcal{F}_0(T), \subseteq), X = C_p(T), T = [0, 1], \tau = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}, \text{ де } 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1, x_{\tau,k}(t) = \max\{0, 1 - |t - \frac{t_{k-1} + t_k}{2}|\}, x_\tau = \sum_{k=1}^n x_{\tau,k}, x(t) = 0;$$

$$\text{г)} S = (\mathcal{F}_0(T), \subseteq), X = \mathbb{K}^T, x_\tau = \chi_\tau \text{ для } \tau \in S \text{ і } x(t) = 1 \text{ на } T.$$

8) Нехай $f \in \mathfrak{A}_R$, $\sum_{k=0}^\infty a_k z^k$ – ряд Тейлора функції f і $f_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ при $|z| < R$. Довести, що $f_n \rightarrow f$ в $\mathfrak{A}_R$.

9) Довести, що для довільного топологічного простору T простори $C_p(T)$ і $C_k(T)$ гаусдорфові.

10) а) Довести, що алгебраїчна сума $A + B$ двох опуклих множин A і B у векторному просторі X є опуклою множиною.

б) Чи обов'язково буде опуклим об'єднання $A \cup B$ двох опуклих множин A і B ?

- 11) Довести, що замикання $\overline{A}$ опуклої множини A у ТВП X – це опукла множина.
- 12) Які з наступних множин A будуть опуклими чи абсолютно опуклими у відповідних просторах X ?
- а) $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : |\xi_1| \leq |\xi_2|\}$;
 - б) $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : \xi_2 \geq \xi_1^2\}$;
 - в) $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : \xi_2 \geq \sqrt{|\xi_1|}\}$;
 - г) $X = C[0, 1]$, $A = \{x \in C[0, 1] : (\forall n \in \mathbb{N})(|x(\frac{1}{n})| \leq \frac{1}{n})\}$;
 - г) $X = \mathbb{R}^2$, $p \geq 1$, $A = \{x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : |\xi_1|^p + |\xi_2|^p \leq 1\}$;
 - д) $X = \mathbb{R}^2$, $0 < p < 1$, $A = \{x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : |\xi_1|^p + |\xi_2|^p \leq 1\}$.
- 13) Знайти і зобразити опуклі оболонки множини A у просторі X .
- а) $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{(1, 0), (0, 1)\}$;
 - б) $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{(1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$;
 - в) $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{(1, 0), (0, 1), (0, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$;
 - г) $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{(1, 0), (0, 1), (0, 0), (1, 1)\}$.
- 14) Знайти і зобразити абсолютно опуклу оболонку множини $A = \{(1, 0), (0, 1)\}$.
- 15) Нехай $\mathcal{V}$ – система всіх абсолютно опуклих і радіальних множин у векторному просторі X . Довести, що $\mathcal{V}$ – достатня система множин в X . Лінійні топологія на X , у якої $\mathcal{V}$ буде базою околів нуля, називається *найсильнішою локально опуклою топологією на X* .
- 16) Довести, що на кожному векторному просторі X існує норма $p : X \rightarrow \mathbb{R}$.
- 17) Побудувати в нескінченновимірному нормованому просторі X абсолютно опуклу і радіальну множину A , яка б не була околom нуля в X .
- 18) Знайти $p_A(x)$, якщо:
- а) $X = \mathbb{R}^2$, $A = \{x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 : |\xi_1| + |\xi_2| \leq 1\}$, $x = (2, 3)$;
 - б) $X = C[-1, 1]$, $A = \{x \in C[-1, 1] : \max_{t \in [a, b]} |x(t)| \leq \frac{1}{2}\}$, $x(t) = t^2$.
- 19) Нехай A – відкрита абсолютно опукла множина в ТВП X . Довести, що A – радіальна і $A = \{x \in X : p_A(x) < 1\}$.
- 20) Нехай A – замкнена абсолютно опукла і радіальна множина в ТВП X . Довести, що $A = \{x \in X : p_A(x) \leq 1\}$.
- 21) Які з наступних множин A будуть обмеженими у відповідних ТВП X ?
- а) $X = C_p[0, 1]$, $A = \{x \in X : x(0) = 0 \quad \text{і} \quad \forall t \in [0, 1] \quad |x(t)| \leq \frac{1}{t}\}$;
 - б) $X = C_k[0, 1]$, $A = \{x \in X : x(0) = 0 \quad \text{і} \quad \forall t \in [0, 1] \quad |x(t)| \leq \frac{1}{t}\}$;

- в) $X = \mathfrak{A}_R$ ($R \leq 1$), $A = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, де $f_n(z) = z^n$;
- г) $X = \mathfrak{A}_R$ ($R > 1$), $A = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, де $f_n(z) = z^n$;
- г) $X = C^\infty[0, 1]$, $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, $x_n(t) = t^n$, де $t \in [0, 1]$;
- д) $X = C^\infty[0, 1]$, $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, $x_n(t) = \frac{t^n}{n!}$, де $t \in [0, 1]$;
- е) $X = \ell_1(\mathbb{R})$, $\mathbb{R} = (r_m)_{m=1}^\infty$, $r_m = (k^m)_{k=1}^\infty$, $A = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, $e_n = (\delta_{n,k})_{k=1}^\infty$,
 $\delta_{n,k}$ – символ Кронекера, $\delta_{n,k} = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$;
- є) $X = \ell_1(\mathbb{R})$, $\mathbb{R} = (r_m)_{m=1}^\infty$, $r_m = (k^m)_{k=1}^\infty$, $A = \{n^{-n}e_n : n \in \mathbb{N}\}$.

- 22) Нехай A – обмежена множина в ТВП X , $\alpha \in \mathbb{K}$ і $B \subseteq A$.
- а) Довести, що B – обмежена множина в X ;
- б) Довести, що множина αA також обмежена в X .
- 23) Нехай $A_1, A_2, \dots, A_n$ – обмежені множини в ТВП X . Довести, що
- а) $\bigcup_{k=1}^n A_k$ – обмежена множина в X ;
- б) $A_1 + \dots + A_n$ – обмежена множина в X .
- 24) Довести, що заокруглена оболонка $c(A)$ обмеженої множини A в ТВП X сама обмежена в X .
- 25) Довести, що абсолютно опукла оболонка $cc(A)$ і опукла оболонка $co(A)$ обмеженої множини в локально опуклому просторі X будуть обмеженими множинами в X .
- 26) Довести, що простір $\mathbb{K}^T$ буде нормовним тоді і тільки тоді, коли $|T| < \aleph_0$.
- 27) Нехай p – норма на просторі $\mathbb{K}^\mathbb{N}$, $\mathcal{T}$ – топологія покоординатної збіжності на $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ і $\mathcal{S}$ – топологія нормованого простору $(\mathbb{K}^\mathbb{N}, p)$. Довести, що топології $\mathcal{T}$ і $\mathcal{S}$ непорівнянні, тобто $\mathcal{S} \not\subseteq \mathcal{T}$ і $\mathcal{T} \not\subseteq \mathcal{S}$.
- 28) Нехай T – цілком регулярний топологічний простір. Довести, що простір C_k буде нормовним тоді і тільки тоді, коли T – компактний простір.
- 29) Довести, що простір $\mathfrak{A}(G)$ не нормовний.
- 30) Довести, що простір $C^\infty[a, b]$ не нормовний.
- 31) Довести, що простір $\mathbb{K}^T$ метризовний з топологією поточної збіжності тоді і тільки тоді, коли $|T| \leq \aleph_0$.
- 32) Нехай T – локально компактний і σ -компактний топологічний простір. Довести, що простір $C_k(T)$ метризовний.

- 33) Нехай P – сукупність переднорм на векторному просторі X і (X, P) – гаусдорфовий простір. Довести, що
- а) якщо $|P| < \aleph_0$, то (X, P) нормований;
 - б) якщо $|P| \leq \aleph_0$, то (X, P) метризований;
 - в) якщо $P = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$, то функція

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{p_n(x - y)}{1 + p_n(x - y)}$$

є метрикою на X , яка породжує топологічну структуру полінормованого простору (X, P) .

- 34) Довести, що простір $C_p(T)$ метризований тоді і тільки тоді, коли $|T| \leq \aleph_0$.
- 35) Довести, що простір $\mathfrak{A}(G)$ метризований.
- 36) Довести, що простір $C^\infty(G)$ метризований.
- 37) Довести, що простір $\ell_p(\mathbb{R})$ метризований.

Розділ 2

ЛІНІЙНІ НЕПЕРЕРВНІ ОПЕРАТОРИ НА ТОПОЛОГІЧНИХ ВЕКТОРНИХ ПРОСТОРАХ

2.1

СКІНЧЕННОВИМІРНІ ТВП

2.1.1. Лінійні відображення, простір лінійних відображень.

Означення 2.1.1. Нехай X і Y векторні простори. Відображення $f : X \rightarrow Y$ називається **лінійним**, якщо

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

для довільних $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ і $x, y \in X$.

Твердження 2.1.2. Відображення $f : X \rightarrow Y$ є лінійним тоді і тільки тоді, коли

1) f є **адитивним**, тобто

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

для довільних $x, y \in X$;

2) f є **однорідним**, тобто

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

для довільних $\alpha \in \mathbb{K}$ і $x \in X$.

Для лінійного відображення $f : X \rightarrow Y$ покладемо

$$\ker f = \{x \in X : f(x) = 0\}$$

$$\operatorname{Im} f = \{f(x) : x \in X\}.$$

Твердження 2.1.3. Нехай $f : X \rightarrow Y$ – лінійне відображення. Тоді

- 1) $\ker f$ є лінійним підпростором простору X ;
- 2) $\operatorname{Im} f$ є лінійним підпростором простору Y .

Означення 2.1.4. Лінійне відображення $f : X \rightarrow Y$ називається

- **мономорфізмом**, якщо f є ін'єктивним, тобто

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

для довільних $x, y \in X$;

- **епіморфізмом**, якщо f є сюр'єктивним, тобто $\operatorname{Im} f = Y$;

- **ізоморфізмом**, якщо f є бієктивним, тобто ін'єктивним і сюр'єктивним.

Твердження 2.1.5. Лінійне відображення $f : X \rightarrow Y$ є мономорфізмом тоді і тільки тоді, коли $\ker f = \{0\}$.

Означення 2.1.6. Через $\mathcal{L}(X, Y)$ ми позначаємо простір усіх лінійних відображень $f : X \rightarrow Y$, визначених у на векторному просторі X і зі значеннями у векторному просторі Y .

Простір $\mathcal{L}(X, Y)$ є векторним простором відносно природних операцій

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

i

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Твердження 2.1.7. Нехай $f \in \mathcal{L}(X, Y)$, $A \subseteq X$ і $B \subseteq Y$. Тоді

- 1) якщо A заокруглена (опукла, абсолютно опукла, лінійний підпростір), то $f(A)$ заокруглена (опукла, абсолютно опукла, лінійний підпростір);
- 2) якщо f епіморфізм і A радіально, то $f(A)$ радіальна;
- 3) якщо B радіальна (заокруглена, опукла, абсолютно опукла, лінійний підпростір), то $f^{-1}(B)$ радіальна (заокруглена, опукла, абсолютно опукла, лінійний підпростір).

Означення 2.1.8. Через $L(X, Y)$ ми позначаємо простір усіх лінійних неперервних відображень $f : X \rightarrow Y$, визначених у на топологічному векторному просторі X і зі значеннями у топологічному векторному просторі Y .

Простір $L(X, Y)$ є векторним підпростором простору $\mathcal{L}(X, Y)$.

Твердження 2.1.9. Нехай $f \in \mathcal{L}(X, Y)$. Тоді f неперервне тоді і тільки тоді, коли f неперервне в нулі.

Твердження 2.1.10. Нехай $f \in L(X, Y)$ і $A \subseteq X$ – обмежена множина. Тоді множина $f(A)$ обмежена в просторі Y .

Твердження 2.1.11. Нехай (X, P) і (Y, Q) – полінормовані простори і $f \in \mathcal{L}(X, Y)$. Тоді відображення f неперервне тоді і тільки тоді, коли для довільної $q \in Q$ існують $C_q > 0$ і $p_1, \dots, p_n \in P$ такі, що

$$q(f(x)) \leq C_q \max\{p_1(x), \dots, p_n(x)\}$$

для кожного $x \in X$.

2.1.2. Компактні множини в топологічних просторах.

Означення 2.1.12. Множина K в топологічному просторі X називається **компактною**, якщо з довільного відкритого покриття цієї множини можна виділити скінченне підпокриття. Топологічний простір X називається **компактним**, якщо він є компактною множиною в собі.

Твердження 2.1.13. Компактна множина K в гаусдорфовому просторі X є замкненою.

Твердження 2.1.14. Замкнена множина F в компактному просторі X є компактною.

Твердження 2.1.15. Образ компактної множини при неперервному відображенні є компактним.

Означення 2.1.16. Відображення $f : X \rightarrow Y$ між топологічними просторами X і Y називається **гомеоморфізмом**, якщо f неперервне, бієктивне і обернена відображення f^{-1} неперервне.

Твердження 2.1.17. Кожне неперервне бієктивне відображення компактного простору на гаусдорфовий простір є гомеоморфізмом.

2.1.3. Гаусдорфова топологія на скінченновимірному просторі.

Нагадаємо, що вектори

$$e_1, e_2, \dots, e_n$$

утворюють **базис** у векторному просторі X , якщо для кожного $x \in X$ існує єдиний набір $\alpha_x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ такий, що

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n.$$

При цьому число $\dim X = n$ називається **розмірністю** простору X .

Твердження 2.1.18. Нехай $e_1, e_2, \dots, e_n$ – базис у векторному просторі X . Тоді відображення $f : X \rightarrow \mathbb{K}^n$, означене формулою

$$f(x) = \alpha_x$$

є лінійним ізоморфізмом.

Теорема 2.1.19. На довільному скінченновимірному векторному просторі X існує єдина лінійна гаусдорфова топологічна структура.

Означення 2.1.20. Відображення $f : X \rightarrow Y$ між ТВП X і Y називається ізоморфізмом ТВП, якщо f є гомеоморфізмом топологічних просторів X і Y та лінійним ізоморфізмом векторних просторів X і Y .

Твердження 2.1.21. Довільний гаусдорфовий топологічний векторний простір X розмірності n ізоморфний простору $\mathbb{K}^n$.

Твердження 2.1.22. Гаусдорфові скінченновимірні топологічні векторні простори X і Y ізоморфні тоді і тільки тоді, коли $\dim X = \dim Y$.

Твердження 2.1.23. Нехай X – скінченновимірний гаусдорфовий ТВП і Y – довільний ТВП. Тоді

$$\mathcal{L}(X, Y) = L(X, Y).$$

Твердження 2.1.24. Довільний скінченновимірний підпростір гаусдорфового ТВП є замкнений.

2.1.4. Відношення еквівалентності і фактормножини породжені ним.

Означення 2.1.25. Бінарна операція $A \subseteq X^2$ називається відношенням еквівалентності на множині X (позначається $x \sim y$), якщо для довільних $x, y, z \in X$ виконуються умови

1) $x \sim x$; (рефлексивність)

2) $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$; (симетричність)

3) $x \sim x, y \sim z \Rightarrow x \sim z$. (транзитивність)

Приклади:

1) рівність чисел;

2) рівнопотужність множин;

3) ізоморфність просторів;

4) подібність фігур.

Означення 2.1.26. Нехай X - множина і $\sim$ - відношення еквівалентності на X . Для кожного $x \in X$ покладемо

$$\pi(x) = \hat{x} = \{y \in X : y \sim x\}.$$

Множина $\pi(x)$ називається **класом еквівалентності** елемента x , а сукупність усіх класів еквівалентності

$$\pi(X) = \hat{X} = \{\pi(x) : x \in X\}$$

називається **фактормножиною** і позначається $X/\sim$.

Твердження 2.1.27. Нехай X - множина, $\sim$ - відношення еквівалентності на X і $x, y \in X$. Тоді

$$\pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow \pi(x) \cap \pi(y) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \sim y.$$

2.1.5. Факторпростір топологічного векторного простору, породжений підпростором.

Означення 2.1.28. Нехай X - векторний простір і $L \subseteq X$ - його підпростір. Для довільних $x, y \in X$ позначимо

$$x \sim_L y \Leftrightarrow x - y \in L.$$

Твердження 2.1.29. Відношення $\sim_L$ є відношенням еквівалентності на X .

Фактормножину $X/\sim_L$ позначатимемо X/L .

Твердження 2.1.30. $\pi(x) = x + L$ для кожного $x \in X$.

Твердження 2.1.31. Для довільних $x, y \in X$ і $\alpha \neq 0$ виконуються рівності

$$\pi(x + y) = \pi(x) + \pi(y) \quad \text{і} \quad \pi(\alpha x) = \alpha \pi(x).$$

Твердження 2.1.32. Множина X/L є векторним простором відносно операцій

$$s(\hat{x} + \hat{y}) = s(\pi(x) + \pi(y)) =: \pi(x + y)$$

і

$$m(\alpha \hat{x}) = m(\alpha \pi(x)) =: \pi(\alpha x).$$

Твердження 2.1.33. Відображення $\pi : X \rightarrow X/L$ є лінійним.

Відображення $\pi : X \rightarrow X/L$ називається **факторвідображенням** або **канонічною проекцією** простору X на X/L .

Нехай X - ТВП, L - його підпростір і $\mathcal{B}$ - система всіх заокруглених ону в X .

Твердження 2.1.34. Система

$$\pi(\mathcal{B}) = \{\pi(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

є достатньою в X/L .

Означення 2.1.35. Лінійну топологію на X/L , для якої $\pi(\mathcal{B})$ утворює базу ону, називатимемо **фактортопологією**, а топологічний векторний простір XL називатимемо **факторпростором**.

Твердження 2.1.36. Відображення $\pi : X \rightarrow X/L$ є неперервним.

Твердження 2.1.37. Факторпростір X/L є гаусдорфовим тоді і тільки, коли L замкнений в X .

2.1.6. Передкомпатні множини в ТВП і критерій скінченновимірності.

Означення 2.1.38. Множина A в ТВП X називається **передкомпактною**, якщо для довільного ону U існує скінченна множина

$$\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$$

така, що

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^n (x_k + U).$$

Твердження 2.1.39. Непорожня множина A у ТВП X є передкомпактною тоді і тільки тоді коли для довільного ону U існує скінченна множина

$$\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A$$

така, що

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^n (a_k + U).$$

Твердження 2.1.40. Кожна передкомпактна множина A в ТВП X є обмеженою.

Твердження 2.1.41. Кожна компактна множина A в ТВП X є передкомпактною.

Твердження 2.1.42. Образ передкомпактної множини при неперервному лінійному відображенні є передкомпактним.

Твердження 2.1.43. Гаусдорфовий ТВП X є передкомпактним тоді і тільки тоді, коли він є нульовим, тобто $X = \{0\}$.

Теорема 2.1.44. Гаусдорфовий ТВП є скінченновимірним тоді і тільки тоді, коли в ньому існує передкомпактний ону.

2.1.7. Контрольні питання.

- 1) Сформулювати характеристику ін'єктивності лінійного відображення в термінах його ядра.
- 2) Як вводяться операції додавання і множення на скаляр у векторному просторі $\mathcal{L}(X, Y)$?
- 3) Який елемент є нульовим у векторному просторі $\mathcal{L}(X, Y)$?
- 4) Чи обов'язково є неперервним лінійне відображення між топологічними векторними просторами, якщо воно є неперервним в нулі?
- 5) Чи обов'язково є обмеженим образ обмеженої множини при лінійному неперервному відображенні між топологічними векторними просторами?
- 6) Який зв'язок між компактними і замкненими множинами у компактному гаусдорфовому просторі?
- 7) Чи є неперервним обернене відображення до бієктивного неперервного відображення компактного простору на гаусдорфовий компактний простір?
- 8) Як побудувати лінійний ізоморфізм між двома векторними просторами над полем $\mathbb{K}$, які мають однакову розмірність?
- 9) Сформулювати теорему Тихонова про гаусдорфові лінійні структури на скінченновимірних просторах.
- 10) Як на скінченновимірному просторі X задати гаусдорфову лінійну топологічну структуру?
- 11) Побудувати ізоморфізм скінченновимірного простору X з $\dim X = n$ на простір $\mathbb{K}^n$ з топологією добутку?
- 12) Яке співвідношення між просторами $L(X, Y)$ і $\mathcal{L}(X, Y)$, якщо X – скінченновимірний гаусдорфовий простір, Y – топологічний векторний простір?
- 13) Яку топологічну властивість скінченновимірного лінійного підпростору гаусдорфового топологічного векторного простору ви знаєте?
- 14) Що таке клас еквівалентності елемента $x \in X$, породжений відношенням еквівалентності $\sim$ на множині X ?
- 15) З яких елементів складається фактормножина, породжена відношенням еквівалентності?
- 16) Який зв'язок між класами еквівалентності двох еквівалентних між собою елементів?

- 17) Який зв'язок між класами еквівалентності двох не еквівалентних між собою елементів?
- 18) Які вектори x і y векторного простору X вважаються рівними за модулем L , де L – лінійний підпростір X ?
- 19) Чому дорівнює клас еквівалентності елемента x векторного простору X , породжений відношенням рівності за модулем лінійного підпростору L простору X ?
- 20) Як вводяться операції на векторному просторі X/L , де X – векторний простір, а L – його підпростір?
- 21) Що є нулем у векторному просторі X/L ?
- 22) Як вводиться канонічна проекція $\pi : X \rightarrow X/L$?
- 23) Як вводиться топологічна структура на факторпросторі X/L ?
- 24) Які властивості канонічної проекції π ви знаєте?
- 25) Сформулювати умову гаусдорфовості факторпростору.
- 26) Дати означення передкомпактної множини в ТВП.
- 27) Який зв'язок між передкомпактністю і обмеженістю?
- 28) Який зв'язок між компактністю і передкомпактністю?
- 29) Коли гаусдорфовий ТВП буде передкомпактним?
- 30) Сформулювати критерій скінченновимірності ТВП.

2.1.8. Вправи.

- 1) Нехай X і Y – векторні простори і $f : X \rightarrow Y$ – адитивне відображення. Довести, що $f(0) = 0$.
- 2) Нехай X і Y – векторні простори і $f : X \rightarrow Y$ – однорідне відображення. Довести, що $f(0) = 0$.
- 3) Довести, що кожне однорідне відображення $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є лінійним.
- 4) Побудувати однорідне відображення $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, яке не є лінійним.
- 5) Побудувати таке неоднорідне відображення $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ для довільних $\alpha \in \mathbb{Q}$ і $x \in \mathbb{R}$.
- 6) Навести приклад адитивного відображення $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, яке не є однорідним.
- 7) Довести, що лінійне відображення між топологічними векторними просторами є неперервним тоді і тільки тоді, коли воно неперервне хоча б в одній точці.

- 8) Чи обов'язково прообраз обмеженої множини при лінійному неперервному відображенні між топологічними векторними просторами також є обмеженою множиною?
- 9) Навести приклад компактної незамкненої множини у деякому топологічному просторі.
- 10) Нехай X – компактний простір, Y – гаусдорфовий простір і $f : X \rightarrow Y$ – неперервне ін'єктивне відображення. Довести, що відображення $f : X \rightarrow f(X)$ – це гомеоморфізм.
- 11) Нехай X – гаусдорфовий компактний простір. Довести, що на множині X не існує гаусдорфової топології, яка є строго слабшою, ніж топологія простору X .
- 12) Норми p і q на векторному просторі X називаються еквівалентними, якщо існують константи $\alpha > 0$ і $\beta > 0$, такі, що для довільного $x \in X$ виконується нерівність:

$$\alpha p(x) \leq q(x) \leq \beta p(x).$$

- а) Довести, що норми p і q еквівалентні на X тоді і тільки тоді, коли тотожне відображення $I : (X, p) \rightarrow (X, q)$ є ізоморфізмом;
- б) Довести безпосередньо, що норми $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |\xi_k|$ і $\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, де $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n$, еквівалентні на $\mathbb{K}^n$;
- в) Довести безпосередньо, що норми $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |\xi_k|$ і $\|x\|_\infty = |x| = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|$, де $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n$, еквівалентні на $\mathbb{K}^n$;
- г) Довести, що будь-які дві норми на скінченновимірному просторі X еквівалентні.
- 13) Довести, що норми $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |\xi_k|$ і $\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, де $x = (\xi_k)_{k=1}^\infty \in \ell_1$, не еквівалентні на ℓ_1 .
- 14) Довести, що норми $\|x\|_1$ і $\|x\|_\infty$ не еквівалентні на ℓ_1 .
- 15) Нехай $1 \leq p < q \leq \infty$. Довести, що норми $\|x\|_p$ і $\|x\|_q$ не еквівалентні на ℓ_p .
- 16) Довести, що на нескінченновимірному нормованому просторі X існують принаймні дві лінійні гаусдорфові топології.
- 17) Довести, що на просторі $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ не існує гаусдорфової локально опуклої топології $\mathcal{T}$, для якої $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_0$, де $\mathcal{T}_0$ – топологія добутку на $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.
- 18) Чи існує в просторі $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ радіальна абсолютно опукла множина A , яка б не була околom нуля в евклідовій топології на $\mathbb{K}^\mathbb{N}$?

- 19) Які з наступних просторів ізоморфні?
- ℓ_p^n і ℓ_q^n ;
 - ℓ_1^2 і ℓ_1^3 ;
 - ℓ_2^1 і ℓ_2^0 .
- 20) З'ясувати, які з множин L замкнені в ТВП X , якщо
- $X = C[a, b]$, L – множина многочленів степеня не більше n ;
 - $X = C[a, b]$, L – множина всіх многочленів;
 - $X = \ell_1$, $L = \{x = (\xi_k) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : (\forall k > n)(\xi_k = 0)\}$, n – фіксоване натуральне число;
 - $X = \ell_1$, $L = \mathbb{K}^{\infty} = \{x = (\xi_k) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : (\exists n \in \mathbb{N})(\forall k \geq n)(\xi_k = 0)\}$.
- 21) Довести, що наступні відношення є відношеннями еквівалентності на відповідних множинах
- відношення рівності на множині дійсних (комплексних) чисел;
 - відношення рівності за модулем на множині цілих чисел;
 - відношення рівнопотужності множин на довільній системі множин;
 - відношення рівності геометричних фігур на площині (у просторі);
 - відношення подібності геометричних фігур на площині (у просторі);
 - відношення паралельності прямих на площині (у просторі);
 - відношення лінійної ізоморфності векторних просторів;
 - відношення ізоморфності топологічних векторних просторів.
- 22) Знайти фактормножину, породжену відношенням рівності за модулем натурального числа n на множині цілих чисел $\mathbb{Z}$.
- 23) Побудувати відношення еквівалентності на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$, для якого класом еквівалентності числа нуль є множина раціональних чисел $\mathbb{Q}$.
- 24) Нехай $X = \mathbb{R}$ і $L = \{0\}$. Знайти X/L .
- 25) Нехай $X = \mathbb{R}^2$ і $L = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Знайти X/L .
- 26) Нехай X – векторний простір, L, M – його лінійні підпростори, $X = L \oplus M$ і $\pi : X \rightarrow X/L$ – канонічна проекція. Довести, що звуження $\pi|_M : M \rightarrow X/L$ – ізоморфізм векторних просторів.
- 27) Нехай ТВП X є прямою сумою своїх замкнених підпросторів. Чи обов'язково $\pi|_M : M \rightarrow X/L$ є ізоморфізмом ТВП?
- 28) Нехай X, Y – ТВП і $f : X \rightarrow Y$ – лінійне неперервне відображення. Довести, що існує неперервний мономорфізм $g : X/\ker f \rightarrow Y$, такий, що $f = g \circ \pi$.

- 29) З'ясувати, які з наступних множин A будуть передкомпактними у відповідних ТВП X . Які з них будуть компактними?
- а) $A = (0, 1)$, $X = \mathbb{R}$;
 - б) $A = \mathbb{N}$, $X = \mathbb{R}$;
 - в) $A = \{x \in \ell_2^n : \|x\|_2 \leq 1\}$, $X = \ell_2^n$;
 - г) $A = \{x \in \ell_2 : \|x\| \leq 1\}$, $X = \ell_2$;
 - ґ) $A = \{x \in C[0, 1] : |x(0)| + |x'(t)| \leq 1, \quad \forall t \in [0, 1]\}$, $X = C[0, 1]$;
 - д) $A = \{x \in C[0, 1] : |x'(t)| \leq 1, \quad \forall t \in [0, 1]\}$, $X = C[0, 1]$;
 - е) $A = \{x = (\xi_k) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : (\forall k)(a_k \leq \xi_k \leq b_k)\}$, $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$;
 - є) $A = \{x \in [0, 1]^{[0, 1]} : x \downarrow \text{ на } [0, 1]\}$, $X = \mathbb{R}^{[0, 1]}$.
- 30) Нехай в гаусдорфовому ТВП існує компактна множина K з непорожньою внутрішністю. Довести, що простір X – скінченновимірний.
- 31) Нехай L – лінійний підпростір банахового простору $C^1[0, 1]$ неперервно дифереційовних функцій $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ з нормою $\|x\| = \max\{\|x\|_{\infty}, \|x'\|_{\infty}\}$, де $\|y\|_{\infty} = \max_{t \in [0, 1]} |y(t)|$ для $y \in C[0, 1]$.

2.2

ПРОЕКТИВНІ ТА ІНДУКТИВНІ ГРАНИЦІ І ПРИНЦИП РІВНОМІРНОЇ ОБМЕЖЕНОСТІ В ТВП

2.2.1. Проективна топологія та її властивості.

Означення 2.2.1. Топологія $\mathcal{T}$ на множині X називається **верхньою гранню сім'ї** $(\mathcal{T}_i : i \in I)$ топологій $\mathcal{T}_i$ на множині X , якщо $\mathcal{T}_i \leq \mathcal{T}$ для кожного $i \in I$.

Твердження 2.2.2. Довільна сім'я $(\mathcal{T}_i : i \in I)$ топологій $\mathcal{T}_i$ на множині X має верхню грань.

Твердження 2.2.3. Нехай X – довільна множина, $(Y, \mathcal{S})$ – топологічний простір і $f : X \rightarrow Y$. Тоді система множин

$$\mathcal{T} = \{f^{-1}(G) : G \in \mathcal{S}\}$$

є топологією на X , яка є найслабшою з тих топологій на X , відносно яких відображення f є неперервним.

Означення 2.2.4. Топологія з попереднього твердження називається **прообраз топологією** і позначається $f^{-1}(\mathcal{S})$.

Твердження 2.2.5. Нехай X – довільна множина, $(Y_i : i \in I)$ – сім'я топологічних просторів $(Y_i, \mathcal{S}_i)$ і $(f_i : i \in I)$ – сім'я відображень $f_i : X \rightarrow Y_i$. Тоді існує найслабша топологія на X , відносно якої всі відображення f_i є неперервними.

Означення 2.2.6. Топологія з попереднього твердження називається **проективною топологією** породженою сім'єю відображень f_i , топологічний простір X разом з проективною топологією називається **оберненою границею** топологічних просторів Y_i відносно відображень f_i і позначається $\varprojlim f_i Y_i$.

Твердження 2.2.7. Нехай X – топологічний простір і $Y = \varprojlim g_i Y_i$ – оберненою границею топологічних просторів Y_i відносно відображень $g_i : Y \rightarrow Y_i$. Тоді відображення $f : X \rightarrow Y$ є неперервним тоді і тільки тоді, коли для кожного $i \in I$ відображення $f_i = g_i \circ f : X \rightarrow Y_i$ є неперервним.

Твердження 2.2.8. Проективна топологія на векторному просторі X , породжена сім'єю лінійних відображень $f_i : X \rightarrow Y_i$ є лінійною топологією, для якої базу ону утворюють множини вигляду

$$V = \bigcap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}(V_{i_k}),$$

де $n \in \mathbb{N}$, $i_k \in I$ і V_{i_k} – заокруглений ону в ТВП Y_{i_k} .

2.2.2. Образ топології, фінальна топологія та прямі границі.

Твердження 2.2.9. Нехай (X, T) – топологічний простір, Y – довільна множина і $f : X \rightarrow Y$. Тоді система множин

$$T = \{G \subseteq Y : f^{-1}(G) \in T\}$$

є топологією на Y , яка є найсильнішою з тих топологій на Y , відносно яких відображення f є неперервним.

Означення 2.2.10. Топологія з попереднього твердження називається **образом топології T** при відображенні f і позначається $f(T)$.

Зауваження 2.2.11. Якщо X – ТВП, Y – ВП і $f : X \rightarrow Y$ – лінійне відображення, то образ топологія $f(T)$ може бути нелінійною.

Твердження 2.2.12. Нехай (X, T) – ТВП, Y – ВП і $f : X \rightarrow Y$ – епіморфізм. Тоді образ топологія $f(T)$ є лінійною, для якої базу ону утворює система

$$\mathcal{V} = f(\mathcal{U}) = \{f(U) : U \in \mathcal{U}\},$$

де $\mathcal{U}$ – база заокруглених ону в X .

Твердження 2.2.13. Нехай $(X_i : i \in I)$ – сім'я топологічних просторів (X_i, T_i) , Y – довільна множина, і $(f_i : i \in I)$ – сім'я відображень $f_i : X_i \rightarrow Y$. Тоді існує найсильніша топологія на Y , відносно якої всі відображення f_i є неперервними.

Означення 2.2.14. Топологія з попереднього твердження називається **фінальною топологією** породженою сім'єю відображень f_i , а топологічний простір Y разом з фінальною топологією називається **прямою границею** топологічних просторів X_i відносно відображень f_i і позначається $\varinjlim f_i X_i$.

Твердження 2.2.15. Нехай $X = \varinjlim f_i X_i$ – пряма границя топологічних просторів X_i відносно відображень $f_i : X_i \rightarrow X$ і Y – топологічний простір. Тоді відображення $g : X \rightarrow Y$ є неперервним тоді і тільки тоді, коли для кожного $i \in I$ відображення $g_i = f_i \circ g : X \rightarrow Y$ є неперервним.

2.2.3. Індуктивна топологія та її властивості.

Зауваження 2.2.16. Якщо $(X_i : i \in I)$ – сім'я ТВП, Y – ВП і $(f_i : i \in I)$ – сім'я епіморфізмів $f_i : X_i \rightarrow Y$, то фінальна топологія може бути нелінійною.

Твердження 2.2.17. Нехай $(X_i : i \in I)$ – сім'я ТВП (X_i, T_i) , Y – ВП і $(f_i : i \in I)$ – сім'я лінійних відображень $f_i : X_i \rightarrow Y$. Тоді існує найсильніша локально опукла топологія на Y , відносно якої всі відображення f_i є неперервними. Базу ону в цій топології утворюють всі абсолютно опуклі множини $V \subseteq Y$ такі, що для кожного $i \in I$ множина $f_i^{-1}(V)$ є ону в X_i .

Означення 2.2.18. Топологія з попереднього твердження називається **індуктивною топологією** породженою сім'єю відображень f_i , а топологічний векторний простір Y разом з індуктивною топологією називається **індуктивною границею** топологічних векторних просторів X_i відносно відображень f_i і позначається $\limind f_i X_i$.

Твердження 2.2.19. Нехай $X = \limind f_i X_i$ – індуктивна границя ТВП X_i відносно лінійних відображень $f_i : X_i \rightarrow X$ і Y – ЛОП. Тоді лінійне відображення $g : X \rightarrow Y$ є неперервним тоді і тільки тоді, коли для кожного $i \in I$ відображення $g_i = f_i \circ g : X \rightarrow Y$ є неперервним.

2.2.4. Строгі індуктивні границі, їх гаусдорфівість та обмежені множини в індуктивних границях.

Означення 2.2.20. Індуктивна границя $X = \limind f_n X_n$ зростаючої послідовності $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ локально опуклих просторів $(X_n, \mathcal{T}_n)$, породженою сім'єю тотожних відображень $f_i : X_n \rightarrow X$, де $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, позначається $\limind X_n$.

Індуктивна границя $X = \limind X_n$ зростаючої послідовності $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ локально опуклих просторів $(X_n, \mathcal{T}_n)$ називається **строгою**, якщо $\mathcal{T}_{n+1}|_{X_n} = \mathcal{T}_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Лема 2.2.21. Нехай L – підпростір ЛОП X і U – абсолютно опуклий ону в L . Тоді існує абсолютно опуклий ону W в X такий, що $W \cap L = U$. Якщо, крім того, $x_0 \in X \setminus \overline{L}$, то W можна вибрати так, що $x_0 \notin W$.

Теорема 2.2.22. Строга індуктивна границя послідовності гаусдорфових ЛОП є гаусдорфовою.

Теорема 2.2.23 (Теорема Дьедонне-Шварца). Нехай X – строга індуктивна границя послідовності гаусдорфових ЛОП X_n таких, що X_n є замкненим в X_{n+1} для кожного $n \in \mathbb{N}$ і $B \subseteq X$. Тоді множина B обмежена в X тоді і тільки тоді, коли існує $m \in \mathbb{N}$ таке, що $B \subseteq X_m$ і множина B обмежена в X_m .

2.2.5. Поточково обмежені і одностайно неперервні сім'ї відображень.

Означення 2.2.24. Нехай X і Y – ТВП. Сім'я $(f_s : s \in S)$ лінійних неперервних відображень $f_s : X \rightarrow Y$ називається

- **поточково обмеженою**, якщо для кожного $x \in X$ множина $\{f_s(x) : s \in S\}$ є обмеженою в просторі Y ;
- **рівномірно обмеженою**, якщо для кожного ону V в просторі Y існує ону U в просторі X такий, що $f_s(U) \subseteq V$ для кожного $s \in S$.

Твердження 2.2.25. Нехай X і Y – нормовані простори і $(f_s : s \in S)$ – сім'я лінійних неперервних відображень $f_s : X \rightarrow Y$. Тоді сім'я $(f_s : s \in S)$ є поточково обмеженою тоді і тільки тоді, коли для кожного $x \in X$ існує $\gamma_x > 0$ таке, що $\|f_s(x)\| \leq \gamma_x$ для кожного $s \in S$.

Твердження 2.2.26. Нехай X і Y – нормовані простори і $(f_s : s \in S)$ – сім'я лінійних неперервних відображень $f_s : X \rightarrow Y$. Тоді сім'я $(f_s : s \in S)$ є рівномірно обмеженою тоді і тільки тоді, коли існує $\gamma > 0$ таке, що $\|f_s\| \leq \gamma$ для кожного $s \in S$.

2.2.6. Бочкові простори і принцип рівномірної обмеженості.

Означення 2.2.27. Множина B в ТВП X називається **бочкою**, якщо вона радіальна, абсолютно опукла і замкнена в X .

ЛОП X називається **бочковим**, якщо кожна бочка в просторі X є ону.

Твердження 2.2.28. У берівському ТВП кожна бочка є ону, зокрема, кожний берівський ЛОП X є бочковим.

Твердження 2.2.29. Індуктивна границя бочкових просторів є бочковим простором.

Наслідок 2.2.30. Існує бочковий простір, який не є берівським.

Теорема 2.2.31. Нехай X – бочковий простір, Y – ЛОП і $(f_s : s \in S)$ – поточково обмежена сім'я лінійних неперервних відображень $f_s : X \rightarrow Y$. Тоді сім'я $(f_s : s \in S)$ є одностайно неперервною.

Теорема 2.2.32. Нехай X – берівський ТВП, Y – ТВП і $(f_s : s \in S)$ – поточково обмежена сім'я лінійних неперервних відображень $f_s : X \rightarrow Y$. Тоді сім'я $(f_s : s \in S)$ є одностайно неперервною.

2.2.7. Контрольні питання.

- 1) Як визначається верхня грань сукупності топологій і з яких елементів вона складається?
- 2) Що таке прообраз топології при даному відображенні?
- 3) Дати означення проєктивної топології, яка породжена сім'єю відображень f_i .
- 4) Що таке обернена границя сім'ї топологічних просторів?
- 5) У якому випадку проєктивна топологія буде лінійною?
- 6) Що таке проєктивна границя сім'ї ТВП?
- 7) Пояснити, чому топологія підпростору є проєктивною топологією.
- 8) Що таке добуток сім'ї ТВП?
- 9) Дати означення простору-перетину.
- 10) Що таке простори Д'єдонне-Гомеса?
- 11) Що таке образ топології при даному відображенні?

- 12) Чи обов'язково образ топології при лінійному відображенні є лінійним?
- 13) Яка достатня умова того, що образ топології при лінійному відображенні є лінійним?
- 14) Дати означення фінальної топології і прямої границі.
- 15) Дати означення індуктивної топології.
- 16) Що таке індуктивна границя сім'ї локально опуклих просторів?
- 17) Пояснити, чому фактортопологія є індуктивною топологією.
- 18) Дати означення локально опуклої прямої суми.
- 19) Що таке простір-об'єднання?
- 20) Дати означення індуктивної границі послідовності локально опуклих просторів і описати базу околів нуля в такій індуктивній границі.
- 21) З яких елементів складається, як топологізується і як позначається:
 - а) простір фінітних послідовностей;
 - б) простір фінітних неперервних функцій;
 - в) простір пробних функцій;
 - г) простір аналітичних у замкненому крузі функцій;
 - г) ваговий простір Кете?
- 22) Які індуктивні границі називаються строгими?
- 23) У якому випадку строга індуктивна границя буде гаусдорфовим локально опуклим простором?
- 24) Сформулювати теорему Д'едонне-Шварца про обмежені множини в індуктивних границях.
- 25) Дати означення:
 - а) поточно обмеженої сім'ї $(f_s : s \in S)$ лінійних неперервних відображень $f_s : X \rightarrow Y$, де X, Y – топологічні векторні простори;
 - б) рівномірно обмеженої сім'ї $(f_s : s \in S)$ лінійних неперервних відображень $f_s : X \rightarrow Y$, де X, Y – нормовані простори;
 - в) одностайно неперервної сім'ї $(f_s : s \in S)$ лінійних неперервних відображень $f_s : X \rightarrow Y$, де X, Y – топологічні векторні простори.
- 26) Сформулювати характеристику поточної обмеженості сім'ї лінійних неперервних відображень між нормованими просторами.

- 27) Сформулювати характеристику рівномірної обмеженості сім'ї лінійних неперервних відображень між нормованими просторами.
- 28) Сформулювати класичний принцип рівномірної обмеженості в нормованих просторах.
- 29) Дати означення бочки.
- 30) Що таке бочковий простір?
- 31) Який зв'язок між бочковістю і беровістю?
- 32) Як побудувати бочковий простір, який не є берівським?
- 33) Сформулювати принцип рівномірної обмеженості в локально опуклих просторах.
- 34) Сформулювати принцип рівномірної обмеженості в топологічних векторних просторах.

2.2.8. Вправи.

- 1) Нехай $X = Y = \mathbb{R}$. Знайти прообраз евклідової топології на просторі Y при наступних відображеннях $f : X \rightarrow Y$
 - а) $f(x) = x$;
 - б) $f(x) = x^2$;
 - в) $f(x) = e^x$;
 - г) $f(x) = \operatorname{arctg} x$;
 - ґ) $f(x) = \sin x$;
 - д) $f(x) = \operatorname{sgn} x$.
- 2) Нехай L – лінійний підпростір топологічного векторного простору X , наділений індукованою лінійною топологічною структурою і A – підмножина L . Довести, що:
 - а) A буде відкритою в L множиною тоді і тільки тоді, коли існує відкрита в X множина G , така, що $G \cap L = A$;
 - б) A буде замкнутою в L множиною тоді і тільки тоді, коли існує замкнена в X множина F , така, що $F \cap L = A$;
 - в) $[A]_L = [A]_X \cap L$.
- 3) Нехай X – векторний простір, (Y, q) – нормований простір і $f : X \rightarrow Y$ – алгебраїчний ізоморфізм. Довести, що функція $p = q \circ f$ є нормою на X і топологія нормованого простору (X, p) збігається з прообразом топології нормованого простору (Y, q) .
- 4) Нехай X – локально опуклий простір, P – сукупність всіх неперервних переднорм p на X , X_p – простір X з топологією, породженою переднормою $p \in P$ і $f_p : X \rightarrow X_p$ – тотожне відображення. Довести, що $X = \lim_{\operatorname{pr}} f_p X_p$.

- 5) Довести, що $C^\infty[a, b] = \lim \operatorname{pr} C^n[a, b]$, де $C^n[a, b]$ – це простір n раз неперервно диференційовних функцій $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ з нормою

$$\|x\|_n = \max\{\|x\|_\infty, \dots, \|x^{(n)}\|_\infty\},$$

де $\|y\|_\infty = \max_{t \in [a, b]} |y(t)|$ для неперервної функції y .

- 6) Довести, що сітка $(x_s)_{s \in S}$ точок x_s з ТВП $X = \lim \operatorname{pr} f_i Y_i$ збігається до елемента x в X тоді і тільки тоді, коли $f_i(x_s) \rightarrow f_i(x)$ в Y_i для довільного $i \in I$.

- 7) Нехай $X = \prod_{i \in I} X_i$ і $A = \prod_{i \in I} A_i$, де $A_i \subseteq X_i$ для всіх $i \in I$. Довести, що $\overline{A} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$.

- 8) Довести, що топологія цілком регулярного простору X – це проєктивна топологія, яка породжується сукупністю всіх неперервних функцій $f : X \rightarrow [0, 1]$.

- 9) Нехай $X = Y = \mathbb{R}$. Знайти образ евклідової топології на просторі X при наступних відображеннях $f : X \rightarrow Y$

а) $f(x) = x$;

б) $f(x) = x^2$;

в) $f(x) = e^x$;

г) $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

г) $f(x) = \sin x$;

д) $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

- 10) Нехай $X = \mathbb{R}^\infty$ – простір всіх фінітних послідовностей з топологією $\mathcal{T}$ індуктивної границі послідовності своїх скінченновимірних підпросторів

$$\mathbb{R}_n = \{(\xi_1, \dots, \xi_n, 0, \dots, 0, \dots) : (\forall k = \overline{1, n})(\xi_k \in \mathbb{R})\},$$

$$E = \{e = (\varepsilon_k)_{k=1}^\infty : (\forall k)(\varepsilon_k > 0)\} \quad \text{і}$$

$$B_e = \{x = (\xi_k)_{k=1}^\infty : (\forall k)(|\xi_k| < \varepsilon_k)\}.$$

- а) Довести, що $\mathcal{V} = \{B_e : e \in E\}$ – це достатня система множин в $\mathbb{R}^\infty$;

- б) Довести, що лінійна топологія $\mathcal{S}$, базою околів нуля у якої є система $\mathcal{V}$, збігається з топологією $\mathcal{T}$;

- в) Довести, що топологія $\mathcal{T}_0$ локально опкулої прямої суми на $\mathbb{R}^\infty$ як прямої суми послідовності просторів $X_n = \mathbb{R}$ збігається з топологією $\mathcal{T}$.

- 11) Нехай X – це індуктивна границя послідовності нормованих просторів $(X_n, \|\cdot\|_n)$ і $B_n = \{x \in X_n : \|x\|_n \leq 1\}$ для кожного n . Довести, що базу околів нуля в X

утворюють множини вигляду

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\varepsilon_1 B_1 + \varepsilon_2 B_2 + \cdots + \varepsilon_n B_n),$$

де ε_k – довільні додатні числа.

12) Довести, що кожний лінійний функціонал на $\mathbb{R}^\infty$ обов'язково неперервний.

13) Нехай μ – міра, визначена на σ -алгебрі борелівських підмножин числової прямої, яка скінченна на кожній обмеженій борелівській множині. Довести, що функціонал

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) d\mu$$

лінійний неперервний на просторі $\mathcal{K}$.

14) Довести, що базу околів нуля в просторі $\mathcal{K}$ всіх фінітних функцій на $\mathbb{R}$ утворюють множини

$$V_e = \{x \in \mathcal{K} : (\forall t \in \mathbb{R})(|x(t)| < e(t))\},$$

де e пробігає множину всіх строго додатних функцій на $\mathbb{R}$.

15) Нехай

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t^2-1}}, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases}$$

а) Довести, що $\varphi \in \mathcal{D}$.

б) Покладемо $A = \{x_{m,n} : (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$, де

$$x_{m,n}(t) = \frac{1}{n}\varphi(t) + \frac{1}{m}\varphi(t-n), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Довести, що нульова функція належить до замикання множини A в $\mathcal{D}$, але не існує послідовності точок $y_k \in A$, яка збігається до нуля.

16) а) Нехай числова послідовність $a = (\alpha_k)_{k=1}^\infty$ така, що для довільного $x = (\xi_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$ ряд $\sum_{k=1}^\infty \alpha_k \xi_k$ збігається. Довести, що $a \in \ell_2$.

б) Нехай $1 < p < +\infty$, $a = (\alpha_k)_{k=1}^\infty$ і для довільного $x \in \ell_p$ ряд $\sum_{k=1}^\infty \alpha_k \xi_k$ збігається. Довести, що $a \in \ell_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

в) Нехай $p = 1$, $a = (\alpha_k)_{k=1}^\infty$ і для довільного $x \in \ell_1$ ряд $\sum_{k=1}^\infty \alpha_k \xi_k$ збігається. Довести, що $a \in \ell_\infty$.

г) Нехай $p = +\infty$, $a = (\alpha_k)_{k=1}^\infty$ і для довільного $x \in \ell_\infty$ ряд $\sum_{k=1}^\infty \alpha_k \xi_k$ збігається. Довести, що $a \in \ell_1$.

- 17) Довести за означенням, що простір $\mathbb{R}^n$ є бочковим.
- 18) Навести приклад необмеженої бочки в просторі $\mathbb{R}^n$, яка не збігається з усім простором.
- 19) а) Навести приклад поточно обмеженої послідовності лінійних неперервних функціоналів f_n на просторі $\mathbb{R}^\infty$ з максимум-нормою, яка б не була рівномірно обмеженою.
- б) Чи буде простір $\mathbb{R}^\infty$ з нормою $\|\cdot\|_\infty$ бочковим? Берівським? Банаховим?
- 20) Довести, що для сім'ї $(f_s : s \in S)$ лінійних неперервних відображень $f_s : S \rightarrow Y$, X, Y – нормовані простори, одностайна неперервність рівносильна рівномірній обмеженості.
- 21) Нехай X, Y – банахові простори, $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$ – нарізно неперервний білінійний функціонал. Довести, що f – неперервне.

Розділ 3

ПРОДОВЖЕННЯ ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ, ДУАЛЬНІ ПАРИ І ПОВ'ЯЗАНІ З НИМИ ТОПОЛОГІЇ

3.1

ТЕОРЕМА ГАНА-БАНАХА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

3.1.1. Аналітична форма теореми Гана-Банаха.

Означення 3.1.1. Нехай X – векторний простір над полем $\mathbb{K}$. Лінійне відображення $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ називається **лінійним функціоналом**. Якщо $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то функціонал f називається **дійсним**, а якщо $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то функціонал f називається **комплексним**.

Твердження 3.1.2. Нехай X – векторний простір над полем $\mathbb{C}$. Відображення $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ є лінійним комплексним функціоналом, якщо існує лінійний дійсний функціонал $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ такий, що

$$f(x) = u(x) - iu(ix)$$

для кожного $x \in X$.

Означення 3.1.3. Нехай X – векторний простір над полем $\mathbb{K}$. Функція $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ називається **калібрувальною (сублінійною) функцією** на X , якщо для довільних $x, y \in X$ і $\alpha > 0$ виконуються наступні умови

$$(K1) \quad p(\alpha x) = \alpha \cdot p(x);$$

$$(K2) \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

Теорема 3.1.4. Нехай X – дійсний векторний простір, Y_0 – лінійний підпростір простору X , $x_0 \in X \setminus Y_0$, $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ – калібрувальна функція і $g_0 : Y_0 \rightarrow \mathbb{R}$ – лінійний функціонал на Y_0 такі, що

$$g_0(x) \leq p(x)$$

для кожного $x \in Y_0$. Тоді існує лінійний функціонал $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$, який визначений на підпросторі

$$Y = Y_0 + \langle x_0 \rangle = \{x + \alpha x_0 : x \in Y_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

простору X , і задовольняє наступні умови

$$(i) \quad g(x) = g_0(x) \text{ для кожного } x \in Y_0;$$

$$(ii) \quad g(x) \leq p(x) \text{ для кожного } x \in Y.$$

Теорема 3.1.5 (Аналітична форма теореми Гана-Банаха для дійсних скалярів). Нехай X – дійсний векторний простір, X_0 – лінійний підпростір простору X , $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ – калібрувальна функція і $f_0 : X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ – лінійний функціонал на X_0 такі, що

$$f_0(x) \leq p(x)$$

для кожного $x \in X_0$. Тоді існує лінійний функціонал $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ на просторі X , який задовольняє наступні умови

$$(i) \quad f(x) = f_0(x) \text{ для кожного } x \in X_0;$$

$$(ii) \quad f(x) \leq p(x) \text{ для кожного } x \in X.$$

Теорема 3.1.6 (Аналітична форма теореми Гана-Банаха для дійсних і комплексних скалярів). Нехай X – векторний простір над полем $\mathbb{K}$, X_0 – лінійний підпростір простору X , $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ – переднорма на X і $f_0 : X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ – лінійний функціонал на X_0 такі, що

$$|f_0(x)| \leq p(x)$$

для кожного $x \in X_0$. Тоді існує лінійний функціонал $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ на X , який задовольняє наступні умови

$$(i) \quad f(x) = f_0(x) \text{ для кожного } x \in X_0;$$

$$(ii) \quad |f(x)| \leq p(x) \text{ для кожного } x \in X.$$

3.1.2. Продовження лінійних неперервних функціоналів у локально опуклих просторах.

Твердження 3.1.7. Нехай X – векторний простір над полем $\mathbb{K}$ і $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ – лінійний функціонал. Тоді наступні умови рівносильні

(i) функціонал f є неперервним;

(ii) існує окіл нуля U в просторі X такий, що $|f(x)| \leq 1$ для кожного $x \in X$;

(iii) ядро функціонала $\ker f = f^{-1}(0)$ є замкненим в просторі X .

Теорема 3.1.8. Нехай X – локально опуклий простір над полем $\mathbb{K}$, X_0 – лінійний підпростір простору X і $f_0 : X_0 \rightarrow \mathbb{K}$ – лінійний неперервний функціонал на X_0 . Тоді існує лінійний неперервний функціонал $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ на X такий, що $f(x) = f_0(x)$ для кожного $x \in X_0$.

Теорема 3.1.9. Нехай X – нормований простір над полем $\mathbb{K}$, X_0 – лінійний підпростір простору X і $f_0 : X_0 \rightarrow \mathbb{K}$ – лінійний неперервний функціонал на X_0 . Тоді існує лінійний неперервний функціонал $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ на X такий, що $f(x) = f_0(x)$ для кожного $x \in X_0$ і $\|f\| = \|f_0\|$.

3.1.3. Спряжений простір і наслідки з теореми Гана-Банаха.

Означення 3.1.10. Нехай X – топологічний векторний простір над полем $\mathbb{K}$. Векторний простір усіх лінійних неперервних функціоналів $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ називається **спряженим простором** до простору X і позначається через X^* .

Наслідок 3.1.11. Нехай X – гаусдорфовий локально опуклий простір і $x_0 \in X \setminus \{0\}$. Тоді існує $f \in X^*$ такий, що $f(x_0) = 1$.

Наслідок 3.1.12. Нехай X – гаусдорфовий локально опуклий простір. Тоді спряжений простір X^* розділяє точки в просторі X , тобто для довільних різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує $f \in X^*$ такий, що $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Означення 3.1.13. Нехай X – векторний простір над полем $\mathbb{K}$ і $E \subseteq X$ – непорожня множина. Множина

$$\text{sp}(E) = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k : n \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}, x_1, \dots, x_n \in E \right\}$$

називається **лінійною оболонкою** множини E .

Означення 3.1.14. Непорожня підмножина E топологічного векторного простору X називається **повною** в просторі X , якщо $\overline{\text{sp}(E)} = X$.

Наслідок 3.1.15 (Критерій повноти Банаха). Непорожня підмножина E локально опуклого простору X є повною в X тоді і тільки тоді, коли для кожного $f \in X^*$ виконується імплікація

$$f|_E = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0.$$

3.1.4. Гіперпідпростори і гіперплощини.

Означення 3.1.16. Гіперпідпростором векторного простору X над полем $\mathbb{K}$ називається максимальний відносно включення лінійний підпростір в X , який відмінний від всього простору X . Іншими словами, гіперпідпростір H векторного простору X – це такий його лінійний підпростір, що $H \neq X$ і для довільного лінійного підпростору L простору X з умови $H \subseteq L$ випливає, що $L = H$ або $L = X$.

Твердження 3.1.17. Лінійний підпростір H векторного простору X є гіперпідпростором тоді і тільки тоді, коли факторпростір X/H є одновимірним.

Твердження 3.1.18. Нехай X – скінченновимірний векторний простір розмірності n . Тоді лінійний підпростір H векторного простору X є гіперпідпростором тоді і тільки тоді, коли розмірність простору H дорівнює $n - 1$.

Означення 3.1.19. Нехай L – лінійний підпростір векторного простору X над полем $\mathbb{K}$ і $a \in X$. Тоді множина $a + L$ називається **афінним підпростором** простору X . Якщо ж L є гіперпідпростором векторного простору X , афінний підпростір $a + L$ називається **гіперплощиною**.

Твердження 3.1.20. Ядро $H = \ker f$ довільного ненульового лінійного функціоналу $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ є гіперпідпростором в X .

Твердження 3.1.21. Нехай H – гіперпідпростір у векторному просторі X . Тоді існує лінійний функціонал $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ такий, що $H = \ker f$.

Твердження 3.1.22. Нехай f і g – лінійні функціонали на векторному просторі X такі, що $\ker f \subseteq \ker g$. Тоді існує скаляр $\alpha \in \mathbb{K}$ такий, що $g = \alpha \cdot f$.

Через X^l ми позначаємо векторний простір усіх лінійних функціоналів на просторі X .

Твердження 3.1.23. Відповідність

$$X^l \setminus \{0\} \ni f \mapsto H_f = f^{-1}(1)$$

є бієкцією між множиною усіх ненульових лінійних функціоналів на векторному просторі X і множиною усіх гіперплощин в просторі X , які не проходять через нуль.

Твердження 3.1.24. Відповідність

$$X^* \setminus \{0\} \ni f \mapsto H_f = f^{-1}(1)$$

є бієкцією між множиною усіх ненульових лінійних неперервних функціоналів на топологічному векторному просторі X і множиною усіх замкнених гіперплощин в просторі X , які не проходять через нуль.

3.1.5. Геометрична форма теореми Гана-Банаха і відокремлення опуклих множин .

Теорема 3.1.25 (теорема Мазура). *Нехай X – топологічний векторний простір над полем $\mathbb{K}$, A – непорожня опукла відкрита підмножина простору X і L – афінний підпростір простору X такі, що $A \cap L = \emptyset$. Тоді існує замкнена гіперплощина H в просторі X така, що $L \subseteq H$ і $A \cap H = \emptyset$.*

Означення 3.1.26. *Нехай X – топологічний векторний простір, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ – лінійний неперервний функціонал і $\alpha \in \mathbb{R}$. Тоді множина*

$$H_\alpha = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$$

є замкненою гіперплощиною в просторі X . Множини

$$G_\alpha = \{x \in X : f(x) < \alpha\} \quad \text{і} \quad G^\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

називатимемо відкритими півпросторами простору X , а множини

$$F_\alpha = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \quad \text{і} \quad F^\alpha = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$$

називатимемо замкненими півпросторами простору X .

Казатимемо, що підмножини A і B простору X відокремлюються H_α , якщо $A \subseteq F_\alpha$ і $B \subseteq F^\alpha$ або навпаки; і строго відокремлюються H_α , якщо $A \subseteq G_\alpha$ і $B \subseteq G^\alpha$ або навпаки.

Теорема 3.1.27. *Нехай A і B – непорожні опуклі множини у топологічному векторному просторі X , причому множина A – відкрита і $A \cap B = \emptyset$. Тоді існує ненульовий лінійний неперервний дійсний функціонал f на X і число $\alpha \in \mathbb{R}$ такі, що $A \subseteq G_\alpha$ і $B \subseteq F^\alpha$.*

Теорема 3.1.28. *Нехай X – локально опуклий простір, K і F – непорожні опуклі множини у просторі X , причому множина K – компактна, F – замкнена і $K \cap F = \emptyset$. Тоді існує ненульовий лінійний неперервний дійсний функціонал f на X і число $\alpha \in \mathbb{R}$ такі, що $K \subseteq G_\alpha$ і $F \subseteq G^\alpha$.*

Теорема 3.1.29. *Нехай X – локально опуклий простір, B – замкнена абсолютно опукла множина і $x_0 \in X \setminus B$. Тоді існує ненульовий лінійний неперервний дійсний функціонал f на X такий, що $|f(x)| < 1$ для кожного $x \in B$ і $|f(x_0)| > 1$.*

Теорема 3.1.30. *Кожна замкнена абсолютно опукла множина у локально опуклий просторі X є перетином всіх замкнених півпросторів в X , які містять цю множину.*

3.1.6. Контрольні питання.

- 1) Який зв'язок між дійсною і уявною частинами лінійного функціонала на векторному просторі над полем комплексних чисел?

- 2) Дати означення калібрувальної функції. Який зв'язок між переднормою і калібрувальною функцією?
- 3) За якою формулою будується лінійне продовження лінійного функціонала на один крок?
- 4) Сформулювати аналітичну форму теорему Гана-Банаха для дійсних скалярів.
- 5) Сформулювати теорему Гана-Банаха для комплексних скалярів.
- 6) Сформулювати критерій неперервності лінійного функціонала.
- 7) Сформулювати теорему Гана-Банаха про продовження лінійних неперервних функціоналів в локально опуклих просторах.
- 8) Сформулювати теорему Гана-Банаха про продовження лінійних неперервних функціоналів в нормованих просторах.
- 9) Що таке спряжений простір до топологічного векторного простору?
- 10) Коли спряжений простір X^* розділяє точки у топологічному векторному просторі X ?
- 11) Яка множина називається повною у топологічному векторному просторі?
- 12) Сформулювати критерій повноти Банаха.
- 13) Дати означення гіперпідпростору, афінного підпростору і гіперплощини.
- 14) Яким є зв'язок гіперпідпросторів з факторпросторами?
- 15) Яким є зв'язок гіперпідпросторів з ядрами лінійних функціоналів?
- 16) Яка розмірність гіперпідпросторів скінченновимірних векторних просторів?
- 17) Яким є зв'язок між множиною всіх ненульових лінійних функціоналів на векторному просторі і множиною усіх гіперплощин, які не проходять через нуль?
- 18) Яким є зв'язок між множиною всіх ненульових лінійних неперервних функціоналів на топологічному векторному просторі і множиною усіх замкнених гіперплощин, які не проходять через нуль?
- 19) Сформулювати теорему Мазура.
- 20) Дати означення відкритих (замкнених) півпросторів.
- 21) Сформулювати поняття (строгої) відокремності двох множин.
- 22) Сформулювати теорему про відокремлення відкритої опуклої і довільної опуклої множини в ТВП.

- 23) Сформулювати теорему про відокремлення компактної і замкненої опуклих множин в ЛОП.
- 24) Сформулювати теорему про відокремлення точки і замкненої опуклої множини.
- 25) Сформулювати теорему про зображення замкненої опуклої множини у вигляді перетину замкнених півпросторів.

3.1.7. Вправи.

- 1) Знайти уявну частину $v : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ комплексного лінійного функціонала $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ за його дійсною частиною $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, якщо
 - а) $u(x + iy) = y$;
 - б) $u(x + iy) = x + y$;
 - в) $u(x + iy) = 4x - y$.
- 2) Знайти дійсну частину $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ комплексного лінійного функціонала $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ за його уявною частиною $v : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, якщо
 - а) $v(x + iy) = x$;
 - б) $v(x + iy) = x - y$;
 - в) $u(x + iy) = 2x - 3y$.
- 3) Встановити, які з наступних функцій $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є калібрувальними функціями
 - а) $p(x) = \max\{x, -2x\}$;
 - б) $p(x) = \max\{0, -x\}$;
 - в) $p(x) = |2x - 1|$.
- 4) Встановити, які з наступних функцій $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ є калібрувальними функціями
 - а) $p(x, y) = \max\{x, -2x\} + \max\{2y, -y\}$;
 - б) $p(x) = \max\{0, -x\} = \max\{y, 0\}$;
 - в) $p(x) = \sqrt{|xy|}$.
- 5) Нехай $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність (невід’ємних) калібрувальних функцій $p_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Встановити, чи є наступні функції $p : \mathbb{R}^{\infty} \rightarrow \mathbb{R}$ калібрувальними функціями на просторі всіх фінітних послідовностей $\mathbb{R}^{\infty}$
 - а) $p(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x_n)$;
 - б) $p(x_1, x_2, \dots) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |p_n(x_n)|^q \right)^{\frac{1}{q}}$, де $q \geq 1$;
 - в) $p(x_1, x_2, \dots) = \max_{n \in \mathbb{N}} p_n(x_n)$.

- 6) Нехай $X = \mathbb{R}^2$ і $p(x, y) = \max\{x, -2x\} + \max\{2y, -y\}$ – калібрувальна функція на X . Для підпростору L простору X і лінійного функціонала $f_0 : L \rightarrow \mathbb{R}$ перевірити, що $f_0(x, y) \leq p(x, y)$ і побудувати лінійне продовження $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ зі збереженням оцінки, якщо
- а) $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$ і $f_0(x, y) = x - 2y$;
- б) $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\}$ і $f_0(x, y) = x + y$.
- 7) Нехай $X = \mathbb{R}^\infty$ і $p(x_1, x_2, \dots) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ – калібрувальна функція на X . Для підпростору L простору X і лінійного функціонала $f_0 : L \rightarrow \mathbb{R}$ перевірити, що $f_0(x) \leq p(x)$ і побудувати лінійне продовження $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ зі збереженням оцінки. Чи обов'язково таке продовження f є неперервним?
- а) $L = \{(x_n)_{n=1}^\infty \in X : \sum_{n=1}^\infty x_{2n} = 2 \sum_{n=1}^\infty x_{2n-1}\}$ і $f_0(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n x_n$;
- б) $L = \{(x_n)_{n=1}^\infty \in X : 2 \sum_{n=1}^\infty x_{2n} + \sum_{n=1}^\infty x_{2n-1} = 0\}$ і $f_0(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n=1}^\infty x_n$.
- 8) Нехай X – гаусдорфовий локально опуклий простір, L – його скінченновимірний підпростір і $f_0 : L \rightarrow \mathbb{R}$ – лінійний функціонал. Довести, що існує функціонал $f \in X^*$ такий, що $f(x) = f_0(x)$ для кожного $x \in L$.
- 9) Нехай X – гаусдорфовий локально опуклий простір, $x_1, \dots, x_n$ – лінійно незалежна система елементів і $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Довести, що існує функціонал $f \in X^*$ такий, що $f(x_n) = \alpha_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.
- 10) Нехай X – гаусдорфовий локально опуклий простір, $(x_i)_{i \in I}$ – лінійно незалежна сім'я елементів $x_i \in X$. Довести, що існує біртогональна сім'я $(f_i)_{i \in I}$ функціоналів $f_i \in X^*$ така, що $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ для довільних $i, j \in I$, де δ_{ij} – це символ Кронекера.
- 11) Нехай X – нормований простір і $E = \{x_1, x_2, \dots\} \subseteq X$. Довести, що для того, щоб існувало $f \in X^*$, таке, що $f(x_i) = \alpha_i$, $\|f\| \leq C$, необхідно і досить, щоб для довільного $n \in \mathbb{N}$ і для довільних $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ виконувалась нерівність

$$\left| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right| \leq C \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\|.$$

- 12) Нехай $a_j = (\alpha_{j,k}) \in \ell_1$ і

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{j,k} \xi_k = \beta_j, \quad (*)$$

де $j = 1, 2, \dots$ – нескінченна система лінійних рівнянь з нескінченним числом невідомих.

- а) Нехай $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_{j,k}| \xi_k < \infty$ для довільного j . Довести, що $(*)$ має обмежений розв'язок $x = (\xi_k)$, такий, що $|\xi_k| \leq C$, тоді і тільки тоді, коли для довільних $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in$

$\mathbb{K}^n$ виконується нерівність

$$\left| \sum_{i=1}^n \lambda_i \beta_i \right| \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^n \lambda_i \alpha_{j,k} \right|.$$

б) Нехай $X = c_0$ і $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{j,k} = 0$ для кожного j . Довести, що для того, щоб існував розв'язок $x = (\xi_k) \in \ell_1$, такий, що $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \leq C$ необхідно і досить, щоб для довільних $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ виконувалась нерівність

$$\left| \sum_{j=1}^n \lambda_j \beta_j \right| \leq C \sup_k \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j \alpha_{j,k} \right|.$$

- 13) Нехай X – скінченновимірний гаусдорфовий простір розмірності n . Довести, що множина $A \subseteq X$ є повною в X тоді і тільки тоді, коли існує лінійно незалежна система $x_1, \dots, x_n$, яка складається з елементів $x_k \in A$.
- 14) Нехай $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ – довільна послідовність додатних чисел $\alpha_n > 0$. Чи є повною в просторі $\mathbb{R}^{\infty}$ множина $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ елементів $x_n = (1, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, \alpha_n, 0, 0, \dots)$?
- 15) Нехай $X = \mathbb{R}^3$. Для наступних множин $A \subseteq X$ встановити, чи існує гіперпідпростір L в X такий, що $A \subseteq L$. У випадку, коли такий підпростір існує, встановити, чи він єдиний.
 - а) $A = \{(1, 1, 0), (1, 2, -1), (2, 3, -1)\}$;
 - б) $A = \{(-1, 1, 0), (1, -2, -1), (-1, 0, -1)\}$.
- 16) Нехай $X = \mathbb{R}^4$. Для наступних множин $A \subseteq X$ встановити, чи існує гіперпідпростір L в X такий, що $A \subseteq L$. У випадку, коли такий підпростір існує, встановити, чи він єдиний.
 - а) $A = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 2, -1), (0, 1, -2, -1), (2, 2, 0, -2)\}$;
 - б) $A = \{(1, 0, 1, 0), (1, -2, 3, -4), (1, 1, 2, -1), (3, 1, 0, 2)\}$.
- 17) Нехай $X = \mathbb{R}^3$. Для наступних множин $A \subseteq X$ встановити, чи існує гіперплощина H в X така, що $A \subseteq H$. У випадку, коли така гіперплощина H існує, знайти функціонал $f \in X^*$ такий, що $H = f^{-1}(1)$.
 - а) $A = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 2, -1)\}$;
 - б) $A = \{(0, 1, 0), (2, -3, 2), (1, 2, -1)\}$.
- 18) Навести приклад двох обмежених неперетинних опуклих множин A і B у просторі $\mathbb{R}^2$, які не можна строго відокремити в $\mathbb{R}^2$.
- 19) Нехай A і B – відкриті множини у топологічному векторному просторі X , які можна відокремити в X . Довести, що A і B можна строго відокремити в X .

- 20) Нехай X – векторний простір, A і B – такі опуклі підмножини простору X , що $A \cap B = \emptyset$. З допомогою леми Цорна довести, що існують опуклі множини C і D такі, що $A \subseteq C$, $B \subseteq D$, $C \cap D = \emptyset$ і $X = C \cup D$.
- 21) Нехай A і B – замкнені неперетинні опуклі множини у просторі $\mathbb{R}^2$. Довести, що A і B можна відокремити в $\mathbb{R}^2$.
- 22) Нехай A і B – замкнені неперетинні опуклі множини у гаусдорфовому скінченновимірному локально опуклому просторі X . Довести, що A і B можна відокремити в X .

3.2.1. Дуальні пари і слабка топологія. Для відображення $f : X \times Y \rightarrow Z$ і точки $(x, y) \in X \times Y$ покладемо

$$f^x(y) = f_y(x) = f(x, y).$$

Означення 3.2.1. Нехай X, Y і Z – векторні простори над полем $\mathbb{K}$. Відображення $f : X \times Y \rightarrow Z$ називається **білінійним**, якщо для кожної точки $(x, y) \in X \times Y$ відображення f^x і f_y лінійні.

Білінійний функціонал $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$ називається **білінійною формою** або **спаровуванням** векторних просторів X і Y . Якщо $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то функціонал f називається **дійсним**, а якщо $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то функціонал f називається **комплексним**.

Білінійні форми f ми позначатимемо $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Твердження 3.2.2. Нехай X і Y – векторні простори над полем $\mathbb{K}$. Відображення $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$ є білінійною формою тоді і тільки тоді, коли для довільних $x, x_1, x_2 \in X$, $y, y_1, y_2 \in Y$ і $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ виконуються наступні умови:

$$1) (D1) \quad \langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle;$$

$$2) (D2) \quad \langle x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \rangle = \alpha_1 \langle x, y_1 \rangle + \alpha_2 \langle x, y_2 \rangle.$$

Означення 3.2.3. Трійку $(X, Y, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, де X і Y – векторні простори над полем $\mathbb{K}$ і $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – білінійна форма на $X \times Y$, називатимемо **дуальною парою** або **двоїстістю** і позначатимемо символом $\langle X, Y \rangle$. При цьому казатимемо, що простори X і Y з дуальної пари $\langle X, Y \rangle$ **перебувають у двоїстості**.

Означення 3.2.4. Двоїстість $\langle X, Y \rangle$ відокремною відносно першої чи другої змінної, якщо вона задовольняє відповідно умови:

$$1) (S1) \quad \text{для довільного } x \in X \text{ з того, що } \langle x, y \rangle = 0 \text{ для кожного } y \in Y, \text{ випливає, що } x = 0;$$

$$2) (S2) \quad \text{для довільного } y \in Y \text{ з того, що } \langle x, y \rangle = 0 \text{ для кожного } x \in X, \text{ випливає, що } y = 0.$$

Двоїстість, відокремна відносно обох змінних, називається **відокремною**.

Твердження 3.2.5. Нехай $\langle X, Y \rangle$ – дуальна пара і $y \in Y$. Тоді функція $p_y : X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$p_y(x) = |\langle x, y \rangle|,$$

є переднормою на X .

Означення 3.2.6. Сукупність переднорм $P = \{p_y : y \in Y\}$, пов'язаних із двоїстістю $\langle X, Y \rangle$, породжує локально опуклу топологію на просторі X , яка називається **слабкою топологією**, породженою двоїстістю $\langle X, Y \rangle$, і ми позначатимемо її $\sigma(X, Y)$.

Твердження 3.2.7. Базу околів нуля у локально опуклому просторі $X_\sigma = (X, \sigma(X, Y))$ утворюють множини

$$U_{y_1, \dots, y_n} = \{x \in X : \max_{1 \leq k \leq n} |\langle x, y_k \rangle| \leq 1\},$$

де $y_1, \dots, y_n \in Y$.

Твердження 3.2.8. Слабка топологія $\sigma(X, Y)$ є гаусдорфовою тоді і тільки тоді, коли двоїстість $\langle X, Y \rangle$ є відокремною відносно першої змінної.

Твердження 3.2.9. Для кожного $y \in Y$ лінійний функціонал $f : X_\sigma \rightarrow \mathbb{K}$, $f(x) = \langle x, y \rangle$, неперервний.

Аналогічно вводиться слабка топологія на просторі Y .

Означення 3.2.10. Сукупність $Q = \{q_x : x \in X\}$ переднорм $q_x(y) = |\langle x, y \rangle|$ на Y , пов'язаних із двоїстістю $\langle X, Y \rangle$, породжує локально опуклу топологію на просторі Y , яка називається **слабкою топологією**, породженою двоїстістю $\langle X, Y \rangle$, і ми позначатимемо її $\sigma(Y, X)$.

Твердження 3.2.11. Базу околів нуля у локально опуклому просторі $Y_\sigma = (Y, \sigma(Y, X))$ утворюють множини

$$V_{x_1, \dots, x_n} = \{y \in Y : \max_{1 \leq k \leq n} |\langle x_k, y \rangle| \leq 1\},$$

де $x_1, \dots, x_n \in X$.

Твердження 3.2.12. Слабка топологія $\sigma(Y, X)$ є гаусдорфовою тоді і тільки тоді, коли двоїстість $\langle X, Y \rangle$ є відокремною відносно другої змінної.

Твердження 3.2.13. Для кожного $x \in X$ лінійний функціонал $f : Y_\sigma \rightarrow \mathbb{K}$, $f(y) = \langle x, y \rangle$, неперервний.

Твердження 3.2.14. Нехай X – локально опуклий простір і $Y = X^*$. Відображення $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$,

$$\langle x, y \rangle = y(x),$$

є білінійною формою, відокремною відносно другої змінної. Якщо, крім того, X гаусдорфовий, то дуальна пара $\langle X, Y \rangle$ відокремна.

Означення 3.2.15. Для топологічного векторного простору X топологія $\sigma(X, X^*)$ називається **слабкою топологією простору X** і позначатимемо її w . Слабка топологія $\sigma(X^*, X)$ на спряженому просторі X^* називається **слабкою* топологією простору X^*** і позначатимемо її w^* .

Лема 3.2.16. Нехай $f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1}$ – лінійні функціонали на векторному просторі X над полем $\mathbb{K}$ такі, що

$$\bigcap_{k=1}^n \ker f_k \subseteq \ker f_{n+1}.$$

Тоді існують скаляри $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ такі, що

$$f_{n+1} = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n.$$

Теорема 3.2.17. Нехай $\langle X, Y \rangle$ – дуальна пара і відображення $\psi : Y \rightarrow X^l$ для довільних $x \in X$ і $y \in Y$ задається формулою

$$\psi(y)(x) = \langle x, y \rangle.$$

Тоді $\psi(Y) = (X_\sigma)^*$.

3.2.2. Властивості слабкої топології.

Теорема 3.2.18. Нехай A – опукла множина в локально опуклому просторі X . Тоді $[A] = [A]_w$.

Наслідок 3.2.19. Опукла множина в локально опуклому просторі X є замкненою тоді і тільки тоді, коли вона є слабо замкненою.

Твердження 3.2.20. Слабке замикання одиничної сфери S у нескінченновимірному дійсному гільбертовому просторі H дорівнює одиничній кулі B .

Теорема 3.2.21. Множина A в локально опуклому просторі X є обмеженою тоді і тільки тоді, коли вона є слабо обмеженою.

3.2.3. Поляри.

Означення 3.2.22. Нехай $\langle X, Y \rangle$ – дуальна пара і $A \subseteq X$. Полярою A° множини A відносно двоїстості $\langle X, Y \rangle$ називається множина, яка визначається наступною рівністю

$$A^\circ = \{y \in Y : (\forall x \in A) (|\langle x, y \rangle| \leq 1)\}.$$

Аналогічно полярою B° множини $B \subseteq Y$ відносно двоїстості $\langle X, Y \rangle$ називається множина, яка визначається наступною рівністю

$$B^\circ = \{x \in X : (\forall y \in B) (|\langle x, y \rangle| \leq 1)\}.$$

Твердження 3.2.23. Нехай $\langle X, Y \rangle$ – дуальна пара. Тоді

- (і) поляра A° довільної множини $A \subseteq X$ відносно двоїстості $\langle X, Y \rangle$ є $\sigma(Y, X)$ -замкненою абсолютно опуклою множиною в просторі Y ;

(ii) якщо $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X$, то $A_2^\circ \subseteq A_1^\circ$;

(iii) для довільної сім'ї $(A_i)_{i \in I}$ підмножин простору X виконується рівність

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^\circ = \bigcap_{i \in I} A_i^\circ;$$

(iv) для довільної множини $A \subseteq X$ і довільного скаляра $\alpha \in \mathbb{K}$ виконується рівність

$$(\alpha A)^\circ = \frac{1}{\alpha} A^\circ.$$

Теорема 3.2.24. Біполяр $A^{\circ\circ}$ довільної підмножини простору X відносно двоїстості $\langle X, Y \rangle$ є $\sigma(X, Y)$ -замкненою абсолютно опуклою оболонкою множини A в просторі X .

Наслідок 3.2.25. Біполяр $A^{\circ\circ}$ довільної підмножини локально опуклого простору X відносно двоїстості (X, X^*) є слабо замкненою абсолютно опуклою оболонкою множини A в просторі X .

Наслідок 3.2.26. $A^{\circ\circ\circ} = A^\circ$.

Наслідок 3.2.27. Нехай $(A_i)_{i \in I}$ – сім'я $\sigma(X, Y)$ -замкнених абсолютно опуклих множин в просторі X . Тоді

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^\circ = \left[\text{сс} \left(\bigcup_{i \in I} A_i^\circ \right) \right]_\sigma.$$

Наслідок 3.2.28. Нехай X – нормований простір і $\varphi : X \rightarrow X^{**}$ – канонічне вкладення. Тоді $\|\varphi(x)\| = \|x\|$ для кожного $x \in X$.

Теорема 3.2.29. Нехай X – ТВП і U – окіл нуля в X . Тоді поляр U° відносно двоїстості (X, X^*) є слабо* компактною множиною в просторі X^* .

Твердження 3.2.30. Нехай X – ТВП. Тоді кожна одностайно неперервна множина в просторі X^* є слабо* відносно компактною.

3.2.4. Топології, що узгоджуються з даною двоїстістю.

Означення 3.2.31. Нехай $\langle X, Y \rangle$ – дуальна пара. Систему $\mathcal{A}$ слабо обмежених в просторі X множин називатимемо **насиченою**, якщо виконуються наступні умови

$$1) (A1) \quad (\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}) (\exists A_3 \in \mathcal{A}) (A_1 \cup A_2 \subseteq A_3);$$

$$2) (A2) \quad (\forall A \in \mathcal{A}) (\forall \alpha \in \mathbb{K}) (\alpha A \in \mathcal{A}).$$

$$3) (A3) \quad \bigcup \mathcal{A} = X;$$

Якщо, крім того, виконується умова

1) (A4) кожну множину $A \in \mathcal{A}$ абсолютно опукла.

то систему $\mathcal{A}$ називатимемо добре насиченою.

Твердження 3.2.32. Нехай $\langle X, Y \rangle$ – дуальна пара і $\mathcal{A}$ – насичена система множин в просторі X . Тоді існує єдина лінійна структура на просторі Y , для якої система

$$\mathcal{A}^\circ = \{A^\circ : A \in \mathcal{A}\}$$

є базою оточень нуля.

Означення 3.2.33. Топологію з попереднього твердження називатимемо **топологією рівномірної збіжності на системі $\mathcal{A}$** і позначатимемо $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$.

Означення 3.2.34. Топологію $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, де $\mathcal{B}$ – система всіх слабко обмежених множин в просторі X , називатимемо **сильною топологією простору Y** і позначатимемо $\beta(Y, X)$.

Твердження 3.2.35. Для нормованого простору X топологія $\beta(X^*, X)$ – це нормована топологія простору X^* .

Означення 3.2.36. Нехай $\langle X, Y \rangle$ – дуальна пара і $\mathcal{T}$ – топологія на просторі X . Казатимемо, що топологія $\mathcal{T}$ **узгоджується з двоїстістю $\langle X, Y \rangle$** , якщо формулою $f(x) = \langle x, y \rangle$, де $y \in Y$, задається загальний вигляд лінійного неперервного функціоналу на ТВП $(X, \mathcal{T})$.

Теорема 3.2.37 (теорема Маккі-Аренса). Локально опукла топологія $\mathcal{T}$ на просторі X узгоджується з відокремною відносно другої змінної двоїстістю $\langle X, Y \rangle$ тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{T}$ є топологією рівномірної збіжності на деякій добре насиченій системі, що складається з $\sigma(Y, X)$ -компактних підмножин простору Y .

Означення 3.2.38. Нехай $\langle X, Y \rangle$ – дуальна пара і $\mathcal{C}$ – система всіх абсолютно опуклих $\sigma(Y, X)$ -компактних підмножин простору Y . Топологія $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ називається **топологією Маккі** і позначатимемо її $\tau(X, Y)$.

Твердження 3.2.39. Нехай $\langle X, Y \rangle$ – відокремна відносно другої змінної дуальна пара. Для того, щоб локально опукла топологія $\mathcal{T}$ на просторі X узгоджувалась з двоїстістю $\langle X, Y \rangle$ необхідно і досить, щоб

$$\sigma(X, Y) \subseteq \mathcal{T} \subseteq \tau(X, Y).$$

3.2.5. Теореми про відкрите відображення та про замкнений графік для повнометризованих ТВП.

Означення 3.2.40. Відображення $f : X \rightarrow Y$ між топологічними просторами X і Y називається **відкритим**, якщо для довільної відкритої множини G в просторі X множина $f(G)$ є відкритою в просторі Y .

Твердження 3.2.41. Нехай X, Y – ТВП і $f : X \rightarrow Y$ – лінійне відображення. Тоді f відкрите тоді і лише тоді, коли для довільного околу нуля U в просторі X множина $f(U)$ є околom нуля в просторі Y .

Теорема 3.2.42 (Теорема Банаха-Шаудера). Нехай X, Y – повнометризовні ТВП і $f : X \rightarrow Y$ – лінійне неперервне і сюр'єктивне відображення. Тоді f – відкрите відображення.

Теорема 3.2.43 (Теорема Банаха). Нехай X, Y – повнометризовні ТВП і $f : X \rightarrow Y$ – лінійна неперервна бієкція. Тоді обернене відображення f^{-1} неперервне.

Для відображення $f : X \rightarrow Y$ через $\text{Gr } f$ ми позначаємо графік

$$\text{Gr } f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$$

відображення f .

Теорема 3.2.44. Нехай X, Y – повнометризовні ТВП і $f : X \rightarrow Y$ – лінійне відображення із замкненим графіком. Тоді відображення f неперервне.

3.2.6. Контрольні питання.

- 1) Дати означення білінійного відображення і білінійного функціонала.
- 2) Дати означення дуальної пари.
- 3) Дати означення двоїстості, відокремної відносно першої (другої) змінної.
- 4) Дати означення слабкої топології. Які множини утворюють базу околів нуля у слабкій топології, породженій двоїстістю?
- 5) У якому випадку слабка топологія є гаусдорфовою?
- 6) Що таке слабка* топологія?
- 7) Сформулювати теорему про опис слабого спряженого простору.
- 8) Сформулювати теорему про слабке замикання опуклої множини.
- 9) У якому випадку слабке замикання опуклої множини у локально опуклому просторі є замкненим?
- 10) Чому дорівнює слабке замикання одиничної сфери у нескінченновимірному гільбертовому просторі?
- 11) Який зв'язок між обмеженими і слабо обмеженими множинами у локально опуклому просторі?
- 12) Дати означення полярї і сформулювати найпростіші властивості поляр.

- 13) Сформулювати теорему про біполярну.
- 14) Які властивості має біполярна множини у локально опуклому просторі X відносно двоїстості (X, X^*) ?
- 15) Який зв'язок між полярною і третьою полярною множини?
- 16) Які властивості канонічного вкладення нормованого простору у другий спряжений ви знаєте?
- 17) Сформулювати теорему Алаоглу-Бурбакі про слабку* компактність полярної в ЛОП.
- 18) Який зв'язок між одностайно неперервними множинами у спряженому просторі і слабка* відносно компактними?
- 19) Дати означення топології рівномірної збіжності. Як утворюється база околів нуля у топології рівномірної збіжності?
- 20) Що таке сильна топологія?
- 21) Якою є сильна* топологія на спряженому просторі до нормованого простору?
- 22) Як характеризується топологія ЛОП як топологія рівномірної збіжності?
- 23) У якому випадку топологія узгоджується з даною двоїстістю?
- 24) Сформулювати теорему Маккі-Аренса про топології, що узгоджуються з даною двоїстістю.
- 25) Дати означення топології Маккі.
- 26) Як характеризуються топології, що узгоджуються з даною двоїстістю?
- 27) Яке відображення називається відкритим?
- 28) У якому випадку лінійне відображення є відкритим?
- 29) Сформулювати теорему Банаха-Шаудера про відкрите відображення.
- 30) Сформулювати теорему Банаха про обернений оператор.
- 31) Сформулювати теорему Банаха про замкнений графік.

3.2.7. Вправи.

- 1) Нехай $X = Y = \mathbb{R}$. Довести, що всі білінійні функціонали $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ мають вигляд $f(x, y) = kxy$, де $k = f(1, 1) \in \mathbb{R}$.
- 2) Нехай $X = Y = \mathbb{C}$. Довести, що всі білінійні дійсні функціонали $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ мають вигляд

$$f(x + iy, u + iv) = k_1xu + k_2xv + k_3yu + k_4yv.$$

- 3) Нехай X, Y – векторні простори над полем $\mathbb{K}$, $f : X \rightarrow \mathbb{K}$, $g : Y \rightarrow \mathbb{K}$ – лінійні функціонали. Довести, що $h(x, y) = f(x)g(y)$ є білінійним функціоналом.
- 4) Нехай X, Y – векторні простори над полем $\mathbb{C}$, $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ – білінійний комплексний функціонал, а $u = \operatorname{Re} f$ і $v = \operatorname{Im} f$ – його дійсна і уявна частини відповідно. Довести, що u і v є білінійними дійсними функціоналами і встановити зв'язок між ними.
- 5) Нехай $X = Y = \mathbb{R}^\infty$. Довести, що відображення $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$

є відокремною білінійною формою.

- 6) Нехай X – векторний простір над полем $\mathbb{K}$. Довести, що двоїстість $\langle X, X^l \rangle$ є відокремною.
- 7) Нехай X – гаусдорфовий локально опуклий простір над полем $\mathbb{K}$. Довести, що двоїстість $\langle X, X^* \rangle$ є відокремною.
- 8) Довести, що для довільної двоїстості $\langle X, Y \rangle$ слабка топологія $\sigma(X, Y)$ є наслабшою топологією на X , для якої всі функції $f_y : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f_y(x) = \langle x, y \rangle$, є неперервними.
- 9) Нехай $X = \mathbb{R}^n$ і $Y = X^l$. Довести, що слабка топологія $\sigma(X, Y)$ збігається з евклідовою топологією простору X .
- 10) Нехай $X = Y = \mathbb{R}^\infty$ і

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

для довільних $(x_n)_{n=1}^\infty \in X$ і $(y_n)_{n=1}^\infty \in Y$. Довести, що слабка топологія $\sigma(X, Y)$ збігається з топологією поточної збіжності на $\mathbb{N}$ і є слабшою, ніж вихідна топологія простору фінітних послідовностей $\mathbb{R}^\infty$.

- 11) Нехай $X = \mathbb{R}^\infty$. Довести, що слабка топологія $\sigma(X, X^*)$ є слабшою, ніж вихідна топологія простору фінітних послідовностей $\mathbb{R}^\infty$, хоча $X^* = X^l$ аналогічно, як для гаусдорфових скінченновимірних ЛОП.

- 12) Нехай X – топологічний векторний простір. Довести, що топологія $\sigma(X^*, X)$ є відокремною.
- 13) Нехай $X = \mathbb{R}^\infty$. Довести, що слабка* топологія $\sigma(X^*, X)$ – це топологія поточної збіжності на множині

$$A = \{(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 0, 0, \dots) \in X : n \in \mathbb{N}\}.$$

- 14) Нехай X – топологічний векторний простір і множина $A \subseteq X$ – така, що $X = \text{sp } A$. Довести, що слабка* топологія $\sigma(X^*, X)$ – це топологія поточної збіжності на множині A .
- 15) Довести, що кожний лінійний функціонал на просторі $X = \mathbb{R}^\infty$ є $\sigma(X, X^*)$ -неперервним.

- 16) Встановити, чи є слабо замкненими у банаховому просторі всіх збіжних послідовностей $X = c$ наступні множини

а) $A = \{(x_n)_{n=1}^\infty \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in [0, 1]\};$

б) $A = \{(x_n)_{n=1}^\infty \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 \in [1, 2]\}.$

- 17) Нехай $(a_n)_{n=1}^\infty$ – послідовність невід'ємних чисел $a_n \geq 0$. Встановити, чи є слабо замкненими у просторі фінітних послідовностей $X = \mathbb{R}^\infty$ наступні множини

а) $A = \{(x_n)_{n=1}^\infty \in X : |x_n| \leq a_n\};$

б) $A = \{(x_n)_{n=1}^\infty \in X : \sum_{n=1}^\infty |a_n x_n| \leq 1\}.$

- 18) Встановити, чи є слабо обмеженими у банаховому просторі всіх збіжних послідовностей $X = c$ наступні множини

а) $A = \{(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, n, 0, 0, \dots) \in X : n \in \mathbb{N}\};$

б) $A = \{(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, \frac{100^n}{n!}, 0, 0, \dots) \in X : n \in \mathbb{N}\}.$

- 19) Встановити, чи є слабо обмеженою у просторі фінітних послідовностей $X = \mathbb{R}^\infty$ множина

$$A = \{(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots) \in X : n \in \mathbb{N}\}.$$

- 20) Нехай $X = \mathbb{R}^\infty$. Довести, що множина $B \subseteq X^*$ є слабка* обмеженою тоді і тільки тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ множина

$$B_n = \{y((\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 0, 0, \dots)) : y \in B\}$$

є обмеженою.

- 21) Нехай $X = Y = \mathbb{R}^2$ і $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$ для довільних $x = (x_1, x_2) \in X$ і $y = (y_1, y_2) \in Y$. Знайти поляру A° і біполяру $A^{\circ\circ}$ множини $A \subseteq X$ відносно двоїстості $\langle X, Y \rangle$, якщо
- $A = \{(1, 0), (0, 1)\}$;
 - $A = \{(1, 1), (1, -1)\}$.
- 22) Нехай $X = Y = \mathbb{R}^3$ і $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ для довільних $x = (x_1, x_2, x_3) \in X$ і $y = (y_1, y_2, y_3) \in Y$. Знайти поляру A° і біполяру $A^{\circ\circ}$ множини $A \subseteq X$ відносно двоїстості $\langle X, Y \rangle$, якщо
- $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$;
 - $A = \{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (-1, -1, 1)\}$.
- 23) Нехай $X = \mathbb{R}^\infty$. Знайти поляру A° і біполяру $A^{\circ\circ}$ множини $A \subseteq X$ відносно двоїстості $\langle X, X^* \rangle$, якщо
- $A = \{(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 0, 0, \dots) \in X : n \in \mathbb{N}\}$;
 - $A = \{(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots) \in X : n \in \mathbb{N}\}$.
- 24) Нехай $X = c_0$ – банахів простір всіх збіжних до нуля послідовностей і $Y = X^*$. Знайти норму лінійного неперервного функціонала $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$, якщо
- $f(y) = y \left(\left(\frac{n^2}{2^n} \right)_{n=1}^\infty \right)$;
 - $f(y) = y \left(\left(\frac{3^n}{n!} \right)_{n=1}^\infty \right)$.
- 25) Нехай $X = \mathbb{R}^\infty$, $Y = \mathbb{R}^\mathbb{N}$ і $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ для довільних $(x_n)_{n=1}^\infty \in X$ і $(y_n)_{n=1}^\infty \in Y$. Встановити, чи є $\sigma(Y, X)$ -компактною множина $B \subseteq Y$, якщо
- $B = \{(y_n)_{n=1}^\infty \in Y : \sum_{n=1}^\infty \frac{|y_n|}{n} \leq 1\}$;
 - $B = \{(y_n)_{n=1}^\infty \in Y : |y_n| \leq n^2 \forall n \in \mathbb{N}\}$.
- 26) Нехай $X = c_0$ – банахів простір всіх збіжних до нуля послідовностей. Довести слабку* компактність множини $B = \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X^*$, якщо
- $y_n(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{x_k}{2^{n+k}}$, де $x = (x_k)_{k=1}^\infty \in X$;
 - $y_n(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{x_k}{k^{n+1}}$, де $x = (x_k)_{k=1}^\infty \in X$.
- 27) Нехай $X = \mathbb{R}^\infty$. Довести слабку* компактність множини $B = \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq X^*$, якщо
- $y_n(x) = n x_n$, де $x = (x_k)_{k=1}^\infty \in X$;
 - $y_n(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{k n}{k+n} x_k$, де $x = (x_k)_{k=1}^\infty \in X$.

- 28) Нехай $\langle X, Y \rangle$ – двоїстість. Довести, що топологія $\sigma(X, Y)$ – це топологія $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ рівномірної збіжності на системі $\mathcal{A}$ всіх скінченних підмножин простору Y .
- 29) Нехай $\langle X, Y \rangle$ – двоїстість, $\mathcal{A}$ – насичена система в просторі X і для кожного $A \in \mathcal{A}$ множина $B(A)$ – це замкнена абсолютно опукла оболонка множини A . Довести, що система $\mathcal{B} = \{B(A) : A \in \mathcal{A}\}$ також насичена в просторі X і $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$.
- 30) Довести, що топологія $\mathcal{T}$ топологічного векторного простору X є локально опуклою тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{T}$ є топологією рівномірної збіжності на системі $\mathcal{A}$ всіх одностайно неперервних підмножин простору X^* .
- 31) Нехай X – локально опуклий простір. Довести, полярне відображення $A \mapsto A^\circ$ відносно двоїстості $\langle X, X^* \rangle$ бієктивно відображає систему всіх бочок в просторі X на систему всіх замкнених абсолютно опуклих обмежених підмножин X^* в топології $\sigma(X^*, X)$.
- 32) Локально опуклий простір X є бочковим тоді і тільки тоді, коли кожна обмежена підмножина простору X^* в топології $\sigma(X^*, X)$ є одностайно неперервною.
- 33) Нехай $X = \mathbb{R}^\infty$. Довести, що $\sigma(X^*, X) = \beta(X^*, X)$.
- 34) Довести, що для локально опуклого простору $X = \mathbb{R}^\infty$ сильна топологія $\beta(X, X^*)$ і топологія Маккі $\tau(X, X^*)$ дорівнюють і збігаються з вихідною топологією простору X .

Література

- [1] Alexandroff P. *Zur Theorie der topologischen Räume*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS **11** (1936) 55-58.
- [2] Amir D., Lindenstrauss J. *The structure of weakly compact set of Banach spaces*, Ann. of Math. **88** (1986) 35-46.
- [3] Arhangel'skii A.V., Tkachuk V.V. *Calibers and point-finite cellularity of the space $C_p(X)$ and some questions of S.Gul'ko and M.Husek* Topology Appl. **23** (1) (1986) 65-73.
- [4] Baire R. *Sur les fonctions de variables réelles*, Ann. Mat. Pura Appl. ser. 3. (3) (1899) 1-123.
- [5] Banach T.O. *(Metrically) quarter-stratifiable spaces and their applications in the theory of separately continuous functions*, Mat. Studii. **18** (1) (2002) 10-28.
- [6] Bishop E. *A minimal boundary for function algebras*, Pacif. J. Math. **9** (1959) 629-642.
- [7] Bockstein M. *Un théorème de séparabilité pour les produits topologiques*, Fund. Math. **35** (1948) 242-246.
- [8] Bouziad A. *Notes sur la propriété de Namioka*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (2) (1994) 873-883.
- [9] Corson H. *Normality in subsets of product spaces*, American Journal of Mathematics **81** (3) (1959) 785-796.
- [10] Corson H., Isbell I. *Some properties of strong uniformities*, Quart. J. Math. Oxford. **11** (1960) 17-33.
- [11] Chavalley C., Frink Jr. O. *Bicomactness on cartesian products*, Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941) 612-614.
- [12] Davies R. O. *An intersection theorem of Erdős and Rado*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **63** (1967), 995-996.
- [13] Gelfand I., Shilov G. *Über verschiedene Methoden der Einführung der Topologie in die Menge der maximalen Ideale eines normierten Ringes*, Rec. Math. N.S. **9** (51) (1941) 25-39.
- [14] Hewitt E. *Certain generalizations of the Weierstrass approximation theorem*, Duke Math. J. **14** (1947) 419-427.

- [15] Efimov B., Engelking R., Pełczyński A. *Remarks on diadic spaces II*, Colloquium Mathematicum. **13** (2) (1964) 181-197.
- [16] Engelking R. *General Topology*, Revised and completed edition, Heldermann Verlag, Berlin (1989).
- [17] Engelking R. *On functions defined on Cartesian products*, Fund. Math. **59** (1966) 221-231.
- [18] Engelking R., Pełczyński A. *Remarks on diadic spaces*, Colloquium Mathematicum. **11** (1963) 55-63.
- [19] Erdős P., Rado R. *Intersection theorems of systems of sets*, Journal London Math. Soc. **35** (1960) 85-90.
- [20] Hahn H. *Theorie der reellen Funktionen*, 1. Band, Berlin: Verlag von Julius Springer, 1921. VIII, 600 s.
- [21] Isbell I. *Uniform spaces* Providence, (1964) 190 p.
- [22] Kalamidas N.D., Spiliopoulos G.D. *Compact sets in $C_p(X)$ and calibers*, Can. Math. Bull. **35** (4) (1992) 497-502.
- [23] H. Lebesgue H. *Sur l'approximation des fonctions* Bull. Sci. Math., **22** (1898) 278-287.
- [24] Marczewski E. *Séparabilité et multiplication cartésienne des espaces topologiques*, Fund. Math. **34** (1947) 127-143.
- [25] Maslyuchenko O.V., Maslyuchenko V.K., Mykhaylyuk V.V., Sobchuk O.V. *Paracompactness and separately continuous mappings*, General Topology in Banach Spaces., Nova Sci. Publ., Nantintong-New-York. (2001) 147-169.
- [26] Mazur S. *On continuous mappings on Cartesian products*, Fund. Math. **39** (1952) 229-238.
- [27] Michael E. *A note on intersections*, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1963) 281-283.
- [28] Mibu Y. *On Baire functions on infinite product spaces*, Proc. Imp. Acad. Tokyo. **20** (1944) 661-663.
- [29] Miščenko A. *Some theorems on the topological product of spaces* Fund. Math. **58** (1966) 259-284.
- [30] Moran W. *Separate continuity and support of measures*, J. London. Math. Soc. **44** (1969) 320-324.
- [31] Mykhaylyuk V.V. *Namioka spaces and topological games*, Bull. Austral. Math. Soc. **73** (2006) 263-272.
- [32] Mykhaylyuk V.V. *The Namioka property of KC-functions and Kempisty spaces*, Topology Appl. **153** (2006) 2455-2461.
- [33] Mykhaylyuk V.V. *Metrizable compacta in the space of continuous functions with the topology of pointwise convergence*, Acta Math. Hungarica. **117** (4) (2007) 315-323.
- [34] Noble N., Ulmer M. *Factoring functions on Cartesian products*, Trans. Amer. Math. Soc. **163** (1972) 329-339.

- [35] Okunev O.G., Tkachuk V.V. *Lindelof Σ -property in $C_p(X)$ and $p(C_p(X)) = \omega$ do not imply countable network weight in X* , Acta Math. Hungar. **90** (1-2) (2001) 119-132.
- [36] Piotrowski Z. *Separate and joint continuity*, Real Anal. Exch. **11** (2) (1985-86) 293-322.
- [37] Rosenthal H.P. *On injective Banach spaces and the $L^\infty(\mu)$ for finite measure μ* , Acta Math. **124** (1970) 205-247.
- [38] Ross K., Stone A. *Product of separable spaces*, Amer. Math. Monthly **71** (1964) 398-403.
- [39] Rudin M. E. *A new proof that metric spaces are paracompact*, Proc. Amer. Math. Soc. **20** (1969) 603.
- [40] Šanin N. *A theorem from the general theory of sets*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS **53** (1946), 399-400.
- [41] Stone M. *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937) 375-481.
- [42] Stone M. *The generalized Weierstrass approximation theorem*, Math. Mag. **21** (1947-48) 167-183 and 237-254.
- [43] Tkachuk V.V. *Cardinal invariants of the Suslin number type*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **270** (4) (1983) 795-798.
- [44] Tychonoff A. *Über die topologische Erweiterung von Räumen*, Math. Ann. **102** (1930) 544-561.
- [45] Tychonoff A. *Ein Fixpunktsatz*, Math. Ann. **111** (1935) 767-776.
- [46] Vera G. *Baire measurability of separately continuous functions*, Quart. J. Math. Oxford. **39** (153) (1988) 109-116.
- [47] Архангельский А.В. *Топологические пространства функций*, М.: Изд-во Московского ун-та, (1989) 222 с.
- [48] Шанин Н.А. *О произведениях топологических пространств*, Тр. матем. ин-та АН СССР. **24** (1948) 1-112.
- [49] Карлова О.О. *Перший функціональний лебегівський клас і берівська класифікація нарізно неперервних відображень*, Наук. вісник. Чернівецького ун-ту: зб. наук. праць. Вип. 191-192. Математика. Чернівці: Рута (2004) 52-60.
- [50] Маслюченко В.К., Михайлюк В.В. *Нарізно неперервні функції на добутках компактів та їх залежність від n змінних*, Укр. мат. журн. **47** (3) (1995) 344-350.
- [51] Маслюченко В.К., Михайлюк В.В. *Нарізно неперервні функції багатьох змінних на добутку просторів, які є добутками метризованих множників*, Мат. вісник НТШ **1** (2004) 77-84.
- [52] Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Собчук О.В. *Обернені задачі теорії нарізно неперервних відображень*, Укр. мат. журн. **44** (9) (1992) 1209-1220.
- [53] Михайлюк В.В. *До питання про множину точок розриву нарізно неперервного відображення*, Мат. студії. **3** (1994) 91-94.

- [54] Михайлюк В.В. *Нарізно неперервні функції на добутках і їх залежність від N координат*, Укр. мат. журн. **56** (10) (2004) 1357-1368.
- [55] Михайлюк В.В. *Координатний метод і теорія нарізно неперервних відображень*, дис. ... докт. фіз.-мат. наук: 01.01.01. Чернівці (2008) 333 с.
- [56] Михайлюк В.В. *Залежність від n координат нарізно неперервних функцій на добутку компактів*, Укр. мат. журн. **50** (6) (1998) 822-829.
- [57] Михайлюк В.В. *Узагальнення одного результату Вері*, Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Вип. 228. Математика. Чернівці: Рута (2004) 86-88.
- [58] Михайлюк В.В. *Простори Наміюки і сильно берівські простори*, Мат. студії. **26** (1) (2006) 55-64.
- [59] Михайлюк В.В. *Берівська класифікація нарізно неперервних функцій і властивість Наміюки*, Укр.мат. вісник. **5** (2) (2008) 203-218.

Навчальний посібник
Топологічні векторні простори

Укладачі:

Михайлюк Володимир Васильович
Фотій Олена Георгіївна

Літ. редактор О.В. Колодій

Комп'ютерний набір
Михайлюк В.В., Фотій О.Г.