



УДК 519.21

**ON THE EXISTENCE OF OPTIMAL CONTROL FOR STOCHASTIC  
DIFFERENTIAL FUNCTIONAL EQUATIONS UNDER THE INFLUENCE  
OF EXTERNAL DISTURBANCES. I. COMPARISON THEOREM  
ПРО ІСНУВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ СТОХАСТИЧНИХ  
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПІД ДІЄЮ ЗОВНІШНИХ  
ЗБУРЕНЬ. I. ТЕОРЕМА ПОРІВНЯННЯ**

**Yurchenko I.V. / Юрченко І.В.***cand. of ph.-math. sc., assoc. prof. / к.ф.-м.н., доц.**ORCID: 0000-0001-9929-5758**Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University,**Ukraine, Chernivtsi, vul. Universitet'ska, 28, 58000**Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,**Україна, Чернівці, вул. Університетська, 28, 58000*

**Анотація.** У статті розглянуто теорему порівняння для розв'язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь під дією зовнішніх збурень та її застосування для однієї задачі стохастичного керування.

**Ключові слова:** теорема порівняння, стохастичне керування, стохастичні функціонально-диференціальні рівняння.

**Вступ.**

У межах теорії стохастичного керування досліджується управління в системах з випадковими параметрами. Ця теорія має широке застосування в багатьох галузях, включаючи фінанси, інженерію, економіку та ін.

Початки теорії стохастичного керування пов'язані з роботами, в яких вивчаються розв'язки стохастичних диференціальних рівнянь, що описують еволюцію системи в часі за умови випадкових збурень чи впливу випадкових факторів. Розвиток теорії стохастичного керування відбувався вдосконаленням методів розв'язання стохастичних диференціальних рівнянь, введенням нових підходів до аналізу випадкових процесів і застосуванням до таких областей, як фінанси, оптимальне керування портфелями, ризик-менеджмент і багато інших (див. праці [1–11]). Сучасні дослідження в теорії стохастичного керування продовжують розширювати її застосування в нові галузі, розробляти більш ефективні методи розв'язання складних проблем і поширювати її теоретичну базу.



У цій статті розглянуто теорему порівняння для розв'язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь (СДФР) під дією зовнішніх збурень та її застосування для однієї задачі стохастичного керування, що є розвитком результатів, отриманих для одновимірних процесів Іто у працях [3, 5–7] та для випадку наявності пуассонових збурень у працях [12–16].

### Теорема порівняння для розв'язків СДФР

Нехай  $(\Omega, F, P)$  – ймовірнісний простір з потоком  $\sigma$ -алгебр  $\{F_t, t \geq 0\}$ ,  $\mathbf{D}$  – простір неперервних справа функцій, що мають лівосторонні границі (НПЛГ) зі значеннями з  $\mathbf{R}^1$  та з рівномірною метрикою [1–3].

**Теорема 1.** Нехай задані:

1) строго зростаюча функція  $\{\rho(x), x \in \mathbf{R}_+\}$  така, що

$$\rho(0) = 0, \quad \int_0^\infty \rho^{-2}(x) dx = \infty;$$

2) неперервні функціонали  $b: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}^1$ ;  $c: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{D} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{R}^1$ ,  $\mathbf{V} \subset \mathbf{R}^1$  такі, що для довільних  $\varphi, \psi \in \mathbf{D}$

$$|b(t, \varphi) - b(t, \psi)| + \int_{\mathbf{V}} |c(t, \varphi, u) - c(t, \psi, u)| \Pi(du) \leq \rho(\|\varphi - \psi\|), \quad t \geq 0;$$

3) два неперервних функціонали  $a_i: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}^1$ ,  $i = 1, 2$ , такі, що

$$a_1(t, \varphi) \leq a_2(t, \varphi), \quad t \geq 0, \quad \varphi \in \mathbf{D};$$

4)  $\{x_i(t) \equiv x_i(t, \omega), t \in \mathbf{R}_+, \omega \in \Omega, i = 1, 2\}$  – неперервні за  $t$  випадкові процеси,  $\{F_t\}$ -вимірні за  $\omega$ ;

5) стандартний вінерів процес  $w(t) \equiv w(t, \omega): [0, \infty) \times \Omega \subset \mathbf{R}^1$  такий, що  $w(0) = 0 \pmod{\mathbf{P}}$ ;

6)  $\{\tilde{v}(t, A) = v(t, A) - \Pi(A)t, A \in \mathbf{V} \subset \mathbf{R} \setminus \{0\}\}$  – центрована пуассонова міра, при цьому  $\{w(t)\}$  і  $\{\tilde{v}(t, A)\}$  незалежні один від одного;

7)  $\{\alpha_i(t) \equiv \alpha_i(t, \omega), t \in \mathbf{R}, \omega \in \Omega\}$  – вимірні відносно  $\{F_t, t \geq 0\}$  випадкові процеси.

Нехай також випадкові процеси з пп. 4–7 даної теореми з імовірністю 1



задовольняють умови:

$$x_i(t) - x_i(0) = \int_0^t \alpha_i(s) ds + \int_0^t b(s, x_i^s) dw(s) + \int_0^t \int_{\mathbf{V}} c(s, x_i^s, v) \tilde{v}(ds, dv),$$

$$x_1(\theta) \leq x_2(\theta), \quad \theta \in (-\infty, 0],$$

$$\alpha_1(t) \leq a_1(t, x_1^t), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$\alpha_2(t) \leq a_2(t, x_2^t), \quad t \geq 0, \quad (2)$$

де  $\{x^t \equiv \{x(t + \theta), \theta \in (-\infty, 0]\}\}$ .

Тоді з імовірністю 1 виконується нерівність

$$x_1(t) \leq x_2(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (3)$$

Якщо виконується умова єдиності з імовірністю 1 сильних розв'язків хоча б для одного з таких СДФР:

$$dx_i(t) = a_i(t, x^t) dt + b(t, x^t) dw(t) + \int_{\mathbf{V}} c(t, x^t, v) \tilde{v}(dt, dv), \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

тоді (3) виконується й за слабкішої умови:

$$a_1(t, \varphi) \leq a_2(t, \varphi), \quad t \geq 0, \quad \varphi \in \mathbf{D}.$$

**Доведення.** Вважатимемо, що  $a_i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $b$  і  $c$  обмежені (з урахуванням міркувань локалізації [3, 7, 13]).

*Етап 1.* Припустимо, що для  $a_1(t, x)$  виконується умова Ліпшиця:

$$|a_1(t, \varphi) - a_1(t, \psi)| \leq K \|\varphi - \psi\| \quad \forall \varphi, \psi \in \mathbf{D}. \quad (5)$$

Виберемо послідовність  $\{\psi_n(t), t \in \mathbf{R}_+, n = 1, 2, \dots\}$  неперервних функцій таких, що їхні носії містяться на інтервалах

$$(a_n, a_{n-1}), \quad 1 > a_1 > \dots > a_n > 0,$$

$$0 \leq \psi_n(t) \leq \frac{2\rho^{-2}(t)}{n}, \quad \int_{a_n}^{a_{n-1}} \psi_n(t) dt = 1.$$

Нехай

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \int_0^x dy \int_0^y \psi_n(t) dt, & x > 0. \end{cases}$$



Для  $\varphi_n \in C(\mathbf{R}^1)$  виконуються співвідношення:

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) &= 0 \quad \text{для } n \leq 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) &= x^+ \quad \text{для } n \rightarrow \infty; \\ \varphi_n''(x) &= \psi_n(x), \quad 0 \leq \varphi_n'(x) \leq 1,\end{aligned}\tag{6}$$

Застосовуючи узагальнену формулу Іто [3], одержимо

$$\begin{aligned}\varphi_n(x_1(t) - x_2(t)) &= \sum_{i=1}^5 I_i(n), \\ I_1(n) &\equiv \int_0^t \varphi_n'(x_1(s) - x_2(s)) \{b(s, x_1^s) - b(s, x_2^s)\} dw(s), \\ I_2(n) &\equiv \int_0^t \varphi_n'(x_1(s) - x_2(s)) \{\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\} ds, \\ I_3(n) &\equiv \frac{1}{2} \int_0^t \varphi_n''(x_1(s) - x_2(s)) \{b(s, x_1^s) - b(s, x_2^s)\}^2 ds, \\ I_4(n) &\equiv \int_0^t \int_{\mathbf{V}} [\varphi_n(x_1(s) - x_2(s) + c(s, x_1^s, v) - c(s, x_2^s, v)) - \\ &\quad - \varphi_n(x_1(s) - x_2(s))] \tilde{v}(ds, dv), \\ I_5(n) &\equiv \int_0^t \int_{\mathbf{V}} [\varphi_n(x_1(s) - x_2(s) + c(s, x_1^s, v) - c(s, x_2^s, v)) - \\ &\quad - \varphi_n(x_1(s) - x_2(s)) - \varphi_n'(x_1(s) - x_2(s))(c(s, x_1^s, v) - c(s, x_2^s, v))] \Pi(dv) ds.\end{aligned}$$

Використовуючи властивості стохастичних інтегралів [3], отримаємо

$$\begin{aligned}E\{I_1(n)\} &= 0, \quad E\{I_4(n)\} = 0, \\ E\{I_3(n)\} &\leq \frac{1}{2} E\left\{\int_0^t \varphi_n''(x_1(s) - x_2(s)) \rho^2(|x_1(s) - x_2(s)|) ds\right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} E\left\{\int_0^t \psi_n(x_1(s) - x_2(s)) \rho^2(|x_1(s) - x_2(s)|) ds\right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{2} E\left\{\int_0^t \frac{2}{n} \rho^{-2}(|x_1(s) - x_2(s)|) \rho^2(|x_1(s) - x_2(s)|) ds\right\} \leq \frac{t}{n}.\end{aligned}$$

З урахуванням умов (1), (2), (5), (6) отримуємо



$$I_2(n) \leq \int_0^t \varphi'_n(x_1(s) - x_2(s)) \{a_1(s, x_1^s) - a_2(s, x_2^s)\} ds \leq$$

$$\leq K \int_0^t \chi_{x_1(s) > x_2(s)} \|x_1^s - x_2^s\| ds \leq K \int_0^t (x_1^s - x_2^s)^+ ds.$$

З (6) випливає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{I_5(n)\} = E\left\{\int_0^t \lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi_n(x_1(s) - x_2(s) + c(s, x_1^s, v) - c(s, x_2^s, v))] - \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x_1(s) - x_2(s)) - \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi'_n(x_1(s) - x_2(s)) \times\right.$$

$$\times (c(s, x_1^s, v) - c(s, x_2^s, v)) \Pi(dv) ds = \int_0^t \lim_{n \rightarrow \infty} (c(s, x_1^s, v) - c(s, x_2^s, v)) \times$$

$$\times [1 - \varphi'_n(x_1(s) - x_2(s))] \Pi(dv) ds = 0.$$

З граничної рівності

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n(x_1(t) - x_2(t))}{x_1(t) - x_2(t)} = 1$$

випливає нерівність

$$E\{(x_1(t) - x_2(t))^+\} \leq K \int_0^t E\{(x_1(s) - x_2(s))^+\} ds.$$

Звідси одержимо, що  $E\{(x_1(t) - x_2(t))^+\} = 0 \quad \forall t \geq 0$ , тобто  $P\{(x_1(t) \leq x_2(t))^+\} = 1 \quad \forall t \geq 0$ .

Внаслідок виконання умов теорем існування та єдиності розв'язку з [3, 7, 13], отримуємо НПЛГ траєкторії й дійдемо висновку, що (3) виконується. Завуважимо, що у випадку виконання умови Ліпшиця (5) для  $a_2(t, \varphi)$  і з аналогічного міркування щодо етапу 1 можна одержати (3).

*Етап 2.* У загальному випадку вибираємо  $a(t, \varphi)$  у такий спосіб, щоб

$$a_1(t, \varphi) < a(t, \varphi) < a_2(t, \varphi), \quad t \geq 0, \quad \varphi \in \mathbf{D},$$

і для  $a(t, \varphi)$  виконувалася умова (3).

Нехай  $\{x(t)\}$  — єдиний розв'язок СДФР:



$$dx(t) = a(t, x')dt + b(t, x')dw(t) + \int_{\mathbf{v}} c(t, x', v)\tilde{v}(dt, dv), \quad t \geq 0,$$

з початковими умовами  $x(\theta) = \varphi_2(\theta)$ ,  $-\infty < \theta \leq 0$ .

Тоді за результатами етапу 1 маємо  $x(t) \leq x_2(t)$  і  $x_1(t) \leq x(t)$  для  $t \geq 0$  майже напевно. Отже, (3) виконується.

*Етап 3.* Нехай існує єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності розв'язок  $\{x(t)\}$  рівняння (4) за умови, що  $i = 1$ :

$$dx(t) = a_1(t, x')dt + b(t, x')dw(t) + \int_{\mathbf{v}} c(t, x', v)\tilde{v}(dt, dv), \quad (7)$$

$$x(\theta) = \varphi_1(\theta), \quad -\infty < \theta \leq 0.$$

Для  $\varepsilon > 0$  матимемо  $x^{(\pm\varepsilon)}(t)$  — два розв'язки рівнянь:

$$dx(t) = (a_1(t, x') \pm \varepsilon)dt + b(t, x')dw(t) + \int_{\mathbf{v}} c(t, x', v)\tilde{v}(dt, dv),$$

$$x(\theta) = \varphi_1(t), \quad -\infty < t \leq 0,$$

для яких з етапів 1, 2 випливає, що

$$x^{(-\varepsilon)}(t) \leq x(t) \leq x^{(+\varepsilon)}(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Якщо  $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ , тоді

$$x^{(-\varepsilon_1)}(t) \leq x^{(-\varepsilon_2)}(t), \quad x^{(+\varepsilon_2)}(t) \leq x^{(+\varepsilon_1)}(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Отже, внаслідок неперервності  $a_1(t, \varphi)$  і єдиності розв'язку для (7), отримаємо

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} x^{(-\varepsilon)}(t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} x^{(+\varepsilon)}(t) = x(t) \quad \forall t \geq 0.$$

Враховуючи нерівності  $\alpha_1 \leq a_1(t, x'_1)$ ,  $a_1(t, x'_1) \leq a_1(t, x'_1) + \varepsilon$  і застосовуючи вище доведені результати для  $x_2(t)$  і  $x^{(+\varepsilon)}(t)$ , запишемо

$$x_1(t) \leq x^{(+\varepsilon)}(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Для  $\varepsilon \downarrow 0^+$  одержимо

$$x_1(t) \leq x(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (8)$$

З аналогічного міркування у випадку  $\alpha_2(t) \geq a_2(t, x'_2)$ ,  $a_2(t, x') > a_1(t, x') - \varepsilon$  дійдемо до нерівності  $x^{(-\varepsilon)}(t) \leq x_2(t)$  з імовірністю 1. При  $\varepsilon \downarrow 0^+$  маємо, що



$$x(t) \leq x_2(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (9)$$

Порівнюючи нерівності (8) і (9), запишемо

$$x_1(t) \leq x(t) \leq x_2(t) \quad \forall t \geq 0,$$

що й завершує доведення теореми. ■

**Зауваження 1.** Теорема 1 має місце і для нелінійних СДФР вигляду

$$\begin{aligned} dx(t, \omega) = & x(\theta) + \sum_{j=1}^r \alpha_j(t, \omega) a_j(t, x(t + \theta, \omega)) dt + \\ & + \sum_{j=r+1}^{2r+1} \alpha_j(t, \omega) b_j(s, x(t + \theta, \omega)) dw_j(t, \omega) + \\ & + \sum_{j=2r+2}^{3r+2} \int_V \alpha_j(t, \omega) c_j(t, x(s + \theta, \omega), v) \tilde{v}_j(dt, dv, \omega) \end{aligned} \quad (10)$$

за умови

$$x(t + \theta, \omega)|_{t=0} = \varphi(\theta); \quad \alpha_j(t, \omega)|_{t=0} = \beta(\theta), \quad j = \overline{1, 3r+2}, \quad (11)$$

де  $\alpha_j(t, \omega): [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$  – зовнішні попарно незалежні між собою та з вінеровими процесами випадкові процеси; коефіцієнти  $a_j, b_j, c_j$  задовольняють умови Ліпшиця та умови теореми 1.

### Висновок.

У роботі доведено теорему порівняння для СДФР під дією зовнішніх збурень типу випадкових процесів. За допомогою цієї теореми можна встановити факт існування оптимального керування для подібних систем.

### Література:

1. Bellman R. Dynamic programming and stochastic control processes // Information and Control. – 1958. – Vol.1, Iss.3. – P.228-239. – [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(58\)80003-0](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(58)80003-0).
2. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. – Київ: Наук. думка, 1968. – 354 с.
3. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение. – Київ: Наук. думка, 1982. – 612 с.



4. Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Об одном методе построения приближенного синтеза оптимального управления // Доповіді АН УРСР. Сер.А.– 1978.– №8.– С.32–36.
5. Toshio Yamada. On a comparison theorem for solutions of stochastic differential equations and its applications // Journal Math. Kyoto Univ.– 1973.– Vol.13(3).– P.497-512.– <https://doi.org/10.1215/kjm/1250523321>.
6. Tokuzo Shiga. Diffusion processes in population genetics // Journal Math. Kyoto Univ.– 1981.– Vol.21 (1).– P.133-151.
7. Ikeda N., Watanabe S. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes.– Amsterdam: North-Holland Mathematical Library, 1989.– 568 p.
8. Knopov P.S. Optimization and Identification of Stochastic Systems. Cybernetics and Systems Analysis.– 2023.– Vol.59(3).– P.375–384.– <https://doi.org/10.1007/s10559-023-00572-4>.
9. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциальные уравнения.– Рига: Ориентир, 1992.– 328 с.
10. Øksendal B. Stochastic Differential Equations An Introduction with Applications. Sixth Edition.– Heidelberg New York Dordrecht London: Springer Science+Business Media, 2013.– <https://doi.org/10.1007/978-3-642-14394-6>.
11. Åström K.J. Introduction to Stochastic Control Theory.– Dover Publications, 2006.– 320 p.
12. Yurchenko I.V. The Comparison Theorem for the Solution of the Stochastic Differential Functional Equations // Міжнародна математична конференція, присвячена пам'яті Ганса Гана. Матеріали.– Чернівці: Рута, 1995.– С.322–332.
13. Yasyn'skyi V.K., Sverdau M.L., Yurchenko I.V. On one problem of stochastic control // Ukrainian Mathematical Journal.– 1995.– Vol.47, №11.– P.1788–1797.– <https://doi.org/10.1007/BF01057927>.
14. Свердан М.Л., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Стійкість у стохастичному моделюванні складних динамічних систем.– Снятин: Над Прутом, 1996.– 448 с.
15. Ясинський В.К., Юрченко І.В. Стійкість та оптимальне керування в стохастичних динамічних системах з випадковими операторами. Видання друге,





доповнене.– Чернівці: Технодрук, 2019.– 258 с.

16. Yasynskyy V.K., Yurchenko I.V. On the existence of optimal control for stochastic functional differential equations under the influence of external disturbances // Cybernetics and System Analysis.– 2024.– Vol.60, №3.– P.462–471.– <https://doi.org/10.1007/s10559-024-00687-2>

**Abstract.** *The article discusses the comparison theorem for solutions of stochastic differential functional equations under the influence of external disturbances and its application to one problem of stochastic control.*

**Keywords:** *comparison theorem, stochastic control, stochastic functional differential equations.*

Стаття відправлена: 04.03.2025 р.

© Юрченко І.В.