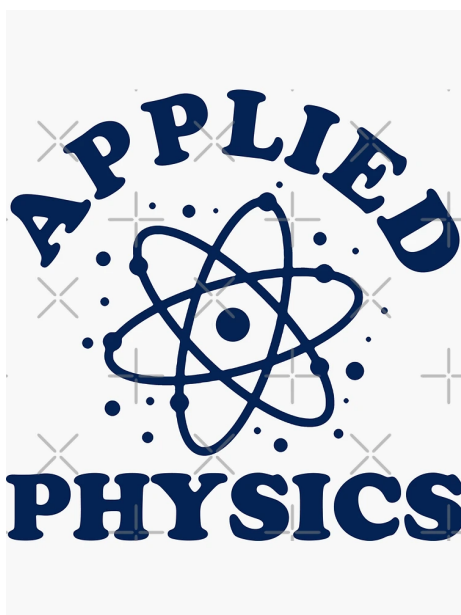


Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

В. А. Головацький, Р. Р. Кобилянський

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ ЗАСАДИ ПРИКЛАДНОЇ ФІЗИКИ

Навчально-методичний посібник



Чернівці
Чернівецький національний університет
2025

УДК 53(075.8)

Друкується за ухвалою Вченої ради
Навчально-наукового інституту фізико-технічних
та комп'ютерних наук
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича

Фундаментальні засади прикладної фізики: Навчально-методичний посібник / В. А. Головацький, Р. Р. Кобилянський. — Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2025. — 133 с.

У посібнику систематизовано викладено основи прикладної фізики та окреслено коло глобальних проблем людства, над вирішенням яких працюють фізики. Розглянуто фундаментальні закони фізики, що становлять теоретичну основу прикладних досліджень. Особливу увагу приділено розділу термоелектрики та перспективам її розвитку. Окремі частини посібника присвячено розв'язанню типових задач з різних розділів загальної фізики та застосуванню методів елементарної математики. Матеріал відповідає змісту дисципліни «Фундаментальні засади прикладної фізики», що викладається студентам першого курсу спеціальності Е6 «Прикладна фізика та наноматеріали», та сприяє повторенню важливих тем шкільної фізики й елементарної математики, що є надзвичайно корисним для успішного засвоєння нових знань.

© Чернівецький національний університет, 2025

Зміст

1	ОСНОВИ ПРИКЛАДНОЇ ФІЗИКИ	6
1.1	Вступ	7
1.1.1	Напрями розвитку прикладної фізики	7
1.2	Роль прикладної фізики у вирішенні глобальних проблем	8
1.2.1	Вичерпання природних ресурсів	8
1.2.2	Забруднення довкілля	8
1.2.3	Кліматичні зміни та екологічні виклики	9
1.2.4	Продовольча безпека	9
1.2.5	Охорона здоров'я	10
1.2.6	Інформаційна та кібербезпека	10
1.3	Проблеми та досягнення прикладної фізики	11
1.3.1	Сонячна енергетика	11
1.3.2	Вітрова енергетика	12
1.3.3	Накопичення енергії	12
1.3.4	Передача енергії	12
1.3.5	Термоелектрична енергетика	13
1.4	Ключові положення класичної фізики як фундамент прикладної фізики	14
1.4.1	Вступ	14
1.4.2	Основні розділи класичної фізики та їх положення	14
1.4.3	Значення класичної фізики для прикладних до- сліджень	16
1.4.4	Висновок	16

1.5	Закони збереження: енергії, імпульсу, моменту імпульсу та заряду	16
1.5.1	Вступ	16
1.5.2	Закон збереження енергії	16
1.5.3	Закон збереження імпульсу	17
1.5.4	Закон збереження електричного заряду	19
1.5.5	Значення законів збереження у прикладній фізиці	19
1.5.6	Висновок	20
1.6	Диференціальне та інтегральне числення як математична основа фізичних досліджень	20
1.6.1	Вступ	20
1.6.2	Диференціальне числення у фізиці	20
1.6.3	Інтегральне числення у фізиці	21
1.6.4	Фізичні приклади застосування	21
1.6.5	Висновок	22
2	ТЕРМОЕЛЕКТРИКА	23
2.1	Вступ та актуальність	23
2.2	Фізичні основи термоелектрики	26
2.2.1	Контактні та термоелектричні явища	26
2.3	Ефект Зеебека	29
2.4	Ефект Пельтьє	36
2.5	Ефект Томсона	37
2.6	Термоелектрична добротність	37
2.7	Сучасні матеріали та технології	41
2.8	Висновки	43
3	КОМП'ЮТЕРНА ФІЗИКА	45
3.1	Вступ	45
	Методи комп'ютерного моделювання	45
	Інструменти комп'ютерної фізики	46
	Застосування у прикладній фізиці	47
	Висновок	48
3.2	Алгоритми та графічний спосіб їх опису	48
3.2.1	Блок-схеми алгоритмів	52

3.2.2	Лінійні алгоритми	53
3.2.3	Розгалужені алгоритми	55
3.2.4	Приклади алгоритмів зі складним розгалуженням	58
3.2.5	Циклічні алгоритми	63
3.2.6	Підпорядковані алгоритми. Підпрограми.	66
3.2.7	Рекурсія. Рекурсивні алгоритми	67
4	РОЗВ’ЯЗКИ ТИПОВИХ ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ	82
4.1	Рівномірний рух. Середня швидкість	83
4.2	Рівномірний рух. Три задачі про річку	85
4.3	Рівномірний рух. Задача про перехрестя	87
4.4	Рівноприскорений одновимірний рух	90
4.5	Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту	92
4.5.1	Подвійний постріл гармати	92
4.5.2	Максимальна дальність на похилій площині	95
4.5.3	Кулька стрибає по похилій площині	99
4.6	Рух тіла по похилій площині	100
4.7	Скочування циліндра по похилій площині	102
4.8	Задача про пружину	106
4.9	Прямий одновимірний пружний удар	108
4.10	Непружний удар (злипання)	113
4.11	Падіння тонкого ланцюжка на стіл	114
4.12	Рівняння реактивного руху (рівняння Ціолковського)	116
4.13	Закони збереження	117
4.14	Електрика	123
5	ЗБІРНИК ЗАДАЧ	126
5.1	Рух тіла в однорідному полі сили тяжіння	126
5.2	Закони збереження імпульсу	127
5.3	Закони збереження моменту імпульсу	128
5.4	Закон збереження енергії	128
5.5	Рівняння Бернуллі	129
5.6	Рівняння Ціолковського	129
	БІБЛІОГРАФІЯ	130

Розділ 1

ОСНОВИ ПРИКЛАДНОЇ ФІЗИКИ

1.1. Вступ

Фізика є фундаментальною наукою про природу, яка вивчає найзагальніші закони, що визначають поведінку матерії та енергії. У системі природничих наук вона займає центральне місце, оскільки її результати використовуються в хімії, біології, геології, астрономії та інженерії. Прикладна фізика, на відміну від фундаментальної, зосереджена на практичному використанні фізичних законів для створення технологій, приладів і методів, що розв'язують конкретні завдання людства.

Прикладна фізика — це розділ фізики, що вивчає фізичні явища з метою їхнього практичного застосування в промисловості, енергетиці, медицині, комунікаціях та інших сферах. Її особливість полягає у тісному зв'язку з технічними науками, інженерією та технологіями, що дозволяє швидко впроваджувати наукові відкриття у виробництво.

Напрями розвитку прикладної фізики

Сучасна прикладна фізика охоплює широкий спектр напрямів:

- **Енергетика** — розробка ефективних технологій отримання та збереження енергії, у тому числі відновлюваних джерел (сонячні батареї, вітрові турбіни, термоядерна енергетика).
- **Матеріалознавство та нанотехнології** — створення нових матеріалів із заданими властивостями, дослідження наноструктур та напівпровідників.
- **Лазерні та оптичні технології** — застосування лазерів у медицині, промисловості та зв'язку.
- **Електроніка та інформаційні технології** — розробка мікро- та наноелектронних пристроїв, квантових комп'ютерів.
- **Медична фізика** — методи діагностики та лікування (МРТ, УЗД, променева терапія).

1.2. Роль прикладної фізики у вирішенні глобальних проблем

Прикладна фізика має ключове значення для подолання сучасних глобальних викликів. Кожна з проблем вимагає не лише наукового розуміння, а й практичних технологічних рішень. Нижче наведено детальний розгляд кількох із них.

Вичерпання природних ресурсів

Суть проблеми. Інтенсивне використання мінеральних ресурсів, прісної води та біологічних ресурсів призводить до їх вичерпання. Зокрема, деякі рідкісні метали (літій, кобальт, індій) можуть стати дефіцитними протягом кількох десятиліть.

Наслідки. Ресурсний дефіцит може спричинити економічні кризи, технологічне відставання та геополітичні конфлікти. Вичерпання запасів прісної води вже зараз загрожує мільярдам людей, особливо у посушливих регіонах.

Шляхи розв'язання. Впровадження технологій повторного використання та переробки, розвиток заміників рідкісних матеріалів, підвищення ефективності водоспоживання, перехід до економіки замкненого циклу.

Забруднення довкілля

Суть проблеми. Антропогенна діяльність призводить до забруднення повітря, води та ґрунтів. Хімічні відходи, важкі метали, пластик та токсичні сполуки накопичуються у біосфері, порушуючи екосистеми.

Наслідки. Погіршення якості повітря спричиняє захворювання дихальних шляхів і серцево-судинної системи. Мікропластик потрапляє у харчовий ланцюг, впливаючи на здоров'я людей та тварин. Евтрофікація водойм зменшує біорізноманіття.

Шляхи розв'язання. Посилення екологічного законодавства, розвиток чистих технологій виробництва, зменшення використання одно-

разового пластику, стимулювання переробки відходів.

Кліматичні зміни та екологічні виклики

Суть проблеми. Зростання концентрації парникових газів в атмосфері внаслідок діяльності людини призводить до глобального потепління, зміни кліматичних зон та танення льодовиків у Гренландії та Антарктиді. Це супроводжується підвищенням рівня Світового океану, утворенням і розширенням озонових дір, а також зростанням частоти й інтенсивності екстремальних погодних явищ, таких як урагани, повені та посухи.

Наслідки. Кліматичні зміни можуть призвести до затоплення прибережних територій, зменшення врожайності, втрати біорізноманіття, поширення тропічних хвороб у нові регіони та масштабних міграцій населення. Порушення кліматичної рівноваги впливає на стабільність економік та соціальну безпеку.

Шляхи розв'язання. Розробка екологічно чистих технологій виробництва та транспорту, впровадження енергоефективних систем освітлення, опалення та охолодження, створення супутникових і сенсорних систем моніторингу атмосфери та океанів, моделювання кліматичних процесів для прогнозування змін та адаптації, а також очищення промислових викидів за допомогою фільтраційних систем та каталітичних реакторів.

Продовольча безпека

Суть проблеми. Зростання чисельності населення світу, зміна клімату, деградація ґрунтів та обмеженість сільськогосподарських ресурсів створюють загрозу нестачі продовольства. Нерівномірний розподіл продуктів харчування між регіонами загострює проблему, особливо у країнах, що розвиваються.

Наслідки. Дефіцит продовольства призводить до голоду, недоїдання, зниження якості життя, зростання соціальної напруженості та потенційних конфліктів за ресурси. Погіршення харчової безпеки

безпосередньо впливає на здоров'я населення та економічну стабільність держав.

Шляхи розв'язання. Використання агрофізичних методів контролю стану ґрунтів і рослин (спектроскопія, дистанційне зондування), впровадження тепличних комплексів з оптимізованим мікрокліматом, застосування сенсорів точного землеробства для мінімізації витрат води та добрив, розробка технологій збереження продуктів — контроль температури, вакуумне пакування, ультрафіолетове знезараження.

Охорона здоров'я

Суть проблеми. Зростання кількості хронічних і інфекційних захворювань, старіння населення та нерівний доступ до медичних послуг створюють серйозні виклики для систем охорони здоров'я у світі. Висока вартість сучасних методів лікування та діагностики ускладнює їх впровадження у бідніших країнах.

Наслідки. Погіршення загального стану здоров'я населення, зниження тривалості життя, зростання витрат на медичне обслуговування та зменшення продуктивності праці. Невчасне виявлення і лікування захворювань може призвести до значних людських та економічних втрат.

Шляхи розв'язання. Вдосконалення методів діагностики (МРТ, КТ, ПЕТ, оптична когерентна томографія), розробка нових лазерних та ультразвукових технологій лікування, використання наноматеріалів для адресної доставки ліків, створення біосенсорів для раннього виявлення хвороб, моделювання біофізичних процесів для розробки нових терапій.

Інформаційна та кібербезпека

Суть проблеми. Зростання обсягів цифрової інформації та поширення кіберзлочинності створюють загрозу витоку даних, зламу критично важливих систем і порушення роботи державних та комерційних

структур. Нові технології, включно з квантовими обчисленнями, роблять традиційні методи захисту менш ефективними.

Наслідки. Кібератаки можуть призвести до фінансових втрат, зупинки інфраструктурних об'єктів, порушення роботи банківської системи, витоку персональних даних та підриву довіри до цифрових технологій. У державному масштабі це загрожує національній безпеці.

Шляхи розв'язання. Розробка квантових криптографічних систем, стійких до злому, використання фізичних випадкових генераторів ключів, створення апаратних засобів захисту інформації на основі фізичних принципів (оптичні та магнітні методи), дослідження стійких каналів передачі даних з використанням оптоволоконних та радіочастотних технологій.

Розв'язання глобальних проблем вимагає координації зусиль усіх країн світу, міжнародних організацій, наукових інституцій та громадянського суспільства.

1.3. Проблеми та досягнення прикладної фізики

Сонячна енергетика

Основна задача фізиків полягає у підвищенні ефективності фотоелектричних перетворювачів. **Досягнення:**

- Розробка кремнієвих сонячних панелей з ефективністю 22–24%, що вже доступні на ринку (наприклад, технологія *PERC*).
- Використання перовськітних елементів з лабораторною ефективністю понад 26% при низькій собівартості виробництва.
- Гібридні фотоелементи (тандемні) на основі кремнію та перовськітів, які досягли ефективності 29.8% (2023 р., лабораторні зразки).

Вітрова енергетика

Задача фізиків полягає в оптимізації аеродинамічних характеристик лопатей та зменшенні втрат при передачі енергії. **Досягнення:**

- Сучасні турбіни з діаметром ротора понад 200 м та номінальною потужністю 5–20 МВт (наприклад, Siemens Gamesa SG 14-222 DD).
- Використання композитних матеріалів з високим модулем пружності для зменшення вібрацій та збільшення терміну служби.
- Системи активного керування кутом атаки лопатей для оптимізації потужності при змінному вітрі.

Накопичення енергії

Одним з головних завдань є розробка акумуляторів з високою питомою енергією та тривалим ресурсом. **Досягнення:**

- Літій-іонні батареї з питомою енергією понад 250 Вт·год/кг та понад 5000 циклів заряду-розряду (Tesla, CATL).
- Системи накопичення на основі літій-залізо-фосфатних (LiFePO_4) елементів, що демонструють підвищену безпеку.
- Прототипи твердотільних акумуляторів з енергоємністю понад 400 Вт·год/кг (Toyota, QuantumScape).

Передача енергії

Фізики працюють над зменшенням втрат при передаванні енергії на великі відстані. **Досягнення:**

- Лінії постійного струму високої напруги (HVDC) з напругою до 1100 кВ, що зменшують втрати до 3% на 1000 км.
- Використання надпровідних кабелів з робочими температурами близько -196°C (рідкий азот) для майже безвтратної передачі.

Термоелектрична енергетика

Основна задача фізиків полягає у підвищенні коефіцієнта перетворення теплової енергії в електричну, тобто термоелектричної добротності ZT , а також у створенні матеріалів, придатних для масового застосування в енергетиці та утилізації відпрацьованого тепла.

Досягнення:

- Розробка наноструктурованих сполук на основі телуриду вісмуту (Bi_2Te_3) з $ZT \approx 1.5\text{--}2.0$ у діапазоні температур $300\text{--}500\text{ K}$.
- Використання напівпровідникових матеріалів на основі селеніду олова (SnSe), які демонструють рекордний $ZT \approx 2.6$ (лабораторні зразки) при високих температурах.
- Інтеграція термоелектричних генераторів у промислові установки для утилізації низькопотенційного тепла, що дозволяє підвищити загальний ККД систем на $3\text{--}5\%$.
- Використання органічно-неорганічних гібридних матеріалів з оптимізованою електронною структурою для зменшення теплопровідності та підвищення ефективності.

Висновки

Завдяки фізичним дослідженням у матеріалознавстві, квантовій електроніці, аеродинаміці та енергетичних технологіях, перехід на відновлювальні джерела енергії стає технічно можливим. Подальші досягнення у підвищенні ефективності, зниженні вартості та інтеграції систем накопичення енергії є ключем до глобальної енергетичної трансформації.

Прикладна фізика є міждисциплінарною наукою, що поєднує фундаментальні знання з інженерними підходами для вирішення практичних завдань. У ХХІ столітті її значення лише зростатиме, адже технологічний прогрес і глобальні виклики потребують нових наукових рішень.

1.4. Ключові положення класичної фізики як фундамент прикладної фізики

Вступ

Класична фізика — це розділ фізики, який сформувався до початку XX століття і включає механіку, термодинаміку, електродинаміку та хвильову теорію світла. Хоча сьогодні значну роль відіграють квантова механіка та теорія відносності, класична фізика залишається основою більшості прикладних досліджень і технологій. Її закони є наближеним описом реальності, який добре працює в умовах макроскопічних розмірів та малих швидкостей порівняно зі швидкістю світла.

Основні розділи класичної фізики та їх положення

1. Класична механіка (Ньютонівська)

- Закони Ньютона, що описують взаємодію тіл та їхній рух.
- Принцип відносності Галілея.
- Закони збереження механічної енергії та імпульсу.

Приклади застосування: розрахунок траєкторії польоту супутників, проєктування транспортних засобів, аналіз стійкості будівельних конструкцій.

2. Термодинаміка

- **Перший закон термодинаміки** Енергія не зникає і не виникає з нічого, вона лише переходить з однієї форми в іншу.

$$\Delta U = Q - A,$$

де ΔU — зміна внутрішньої енергії, Q — підведена теплота, A — робота, виконана системою.

- **Другий закон термодинаміки** Тепло самовільно переходить від гарячого до холодного; усі процеси прагнуть більшого безладу (ентропія зростає).

$$\Delta S \geq 0,$$

де S — ентропія системи.

- **Третій закон термодинаміки** При абсолютному нулі (0 K) рух атомів зупиняється, ентропія ідеального кристала прямує до нуля, досягти 0 K неможливо.

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0.$$

Приклади застосування: проєктування холодильників, теплових двигунів, систем кондиціонування та енергетичних установок.

3. Класична електродинаміка

- Закони Кулона, Ампера, Фарадея.
- Рівняння Максвелла — узагальнене математичне формулювання електромагнітних процесів.

Приклад застосування: створення електрогенераторів, трансформаторів, систем бездротового зв'язку, медичних діагностичних приладів.

4. Хвильова теорія

- Закони поширення хвиль у різних середовищах.
- Інтерференція та дифракція світла.
- Поляризація електромагнітних хвиль.

Приклади застосування: розробка оптичних волокон, лазерних систем, акустичних приладів.

Значення класичної фізики для прикладних досліджень

Класична фізика є фундаментом для:

1. Розробки моделей і розрахунків у техніці та інженерії.
2. Створення вимірювальної апаратури.
3. Формування алгоритмів і програмного забезпечення для симуляцій.

Висновок

Ключові положення класичної фізики забезпечують наукову основу для прикладних розробок. Вони дозволяють описувати і прогнозувати поведінку систем, розробляти нові технології та оптимізувати виробничі процеси. Незважаючи на розвиток сучасних теорій, класична фізика залишається основним інструментом для інженерів і дослідників у більшості сфер.

1.5. Закони збереження: енергії, імпульсу, моменту імпульсу та заряду

Вступ

Закони збереження є фундаментальними принципами фізики, які стверджують, що певні фізичні величини залишаються сталими у замкнених системах, незалежно від внутрішніх процесів, що відбуваються у цих системах. У прикладній фізиці вони відіграють ключову роль, оскільки дозволяють будувати точні математичні моделі і передбачати поведінку технічних та природних систем.

Закон збереження енергії

Формулювання: повна енергія замкненої системи залишається сталою:

$$E_{\text{повна}} = \text{const}$$

Ця енергія може змінювати форму (кінетична, потенціальна, внутрішня, електромагнітна тощо), але її сумарне значення не змінюється.

Математичний запис для механічних систем:

$$T + U = \text{const}$$

де T — кінетична енергія, U — потенціальна енергія.

Приклади застосування у прикладній фізиці:

- розрахунок ефективності теплових двигунів і генераторів;
- аналіз енергетичного балансу в будівлях (енергоефективність);
- проєктування акумуляторних систем та технологій зберігання енергії;
- моделювання руху космічних апаратів.

Закон збереження імпульсу

Формулювання: у замкненій системі сумарний вектор імпульсу залишається сталим:

$$\vec{p}_{\text{сум}} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{const}$$

де m_i — маса i -го тіла, $\vec{v}_i$ — його швидкість.

Приклади застосування:

- розрахунок віддачі вогнепальної зброї або реактивного руху;
- визначення траєкторії зіткнень у колайнерах;
- аналіз руху транспортних засобів при аваріях;
- стабілізація супутників і космічних апаратів за допомогою реакційних коліс.

Закон збереження моменту імпульсу (кутового моменту)

Суть закону: У замкненій системі, на яку не діють зовнішні моменти сил, сумарний кутовий момент системи залишається незмінним у часі.

$$\vec{L}_{\text{заг}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i) \longrightarrow \vec{L} = I \vec{\omega},$$

де $\vec{L}_{\text{заг}}$ — сумарний кутовий момент системи, $\vec{r}_i$ — радіус-вектор частинки i від вибраної точки, m_i — маса частинки i , $\vec{v}_i$ — швидкість частинки i , I — момент інерції тіла відносно осі обертання, $\vec{\omega}$ — кутова швидкість тіла.

Умови застосування: Система замкнена або зовнішні моменти сил відсутні ($\sum \vec{M}_{\text{зовн}} = 0$).

Приклади:

- Обертання ковзаняра на льоду, який притискає руки до тулуба $\rightarrow$ швидкість обертання збільшується.
- Гіроскопи зберігають напрямок осі обертання завдяки збереженню кутового моменту. Використовуються у навігації літаків, кораблів, космічних апаратів.

З закону збереження кутового моменту випливає *другий закон Кеплера*: «Радіус-вектор планети описує рівні площі за рівні проміжки часу.» Інакше кажучи, планета рухається швидше, коли ближче до Сонця, і повільніше, коли далі.

За малий проміжок часу dt планета описує площу $dA = \frac{1}{2} r v_{\perp} dt$: де r — відстань планети від Сонця, $v_{\perp}$ — компонента швидкості перпендикулярна радіус-вектору.

Швидкість зміни площі пропорційна моменту імпульсу, який без впливу зовнішніх моментів сил не змінюється:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r v_{\perp} = \frac{m r v_{\perp}}{2m} = \frac{L}{2m} = \text{const.}$$

Отже, другий закон Кеплера є прямим наслідком закону збереження кутового моменту для планети, що рухається під дією центральної сили.

Закон збереження електричного заряду

Формулювання: алгебраїчна сума електричних зарядів у замкненій системі залишається сталою:

$$\sum_i q_i = \text{const}$$

де q_i — заряд i -го тіла або частинки.

Приклади застосування:

- проєктування електронних схем та систем живлення;
- розрахунок роботи акумуляторів та конденсаторів;
- моделювання електричних розрядів у плазмі та газах;
- забезпечення надійності систем зв'язку та передачі даних.

Значення законів збереження у прикладній фізиці

Закони збереження:

1. дозволяють спрощувати складні задачі, зменшуючи кількість невідомих величин;
2. забезпечують фундамент для розробки алгоритмів чисельного моделювання;
3. слугують критерієм перевірки правильності експериментальних результатів.

Висновок

Закони збереження енергії, імпульсу та електричного заряду — це універсальні принципи, на яких ґрунтується не лише класична, але й сучасна фізика. Вони є основою для розробки технологій у промисловості, енергетиці, транспорті, космонавтиці, електроніці та інформаційних технологіях.

1.6. Диференціальне та інтегральне числення як математична основа фізичних досліджень

Вступ

Більшість фізичних законів формуються у вигляді рівнянь, що описують зміну величин у просторі та часі. Диференціальне та інтегральне числення є основними математичними інструментами, які дозволяють досліджувати ці зміни, моделювати процеси та знаходити кількісні результати на основі фізичних моделей.

Диференціальне числення у фізиці

Похідна як швидкість зміни величини Похідна функції $y = f(x)$ визначається як:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

У фізиці вона описує:

- швидкість як похідну від координати за часом: $v(t) = \frac{dx}{dt}$;
- прискорення як похідну від швидкості: $a(t) = \frac{dv}{dt}$;
- зміну температури, тиску, концентрації у часі та просторі.

Геометричний зміст похідної. Похідна дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці x ($f'(x) = \tan \alpha$)

Застосування диференціальних рівнянь Багато фізичних законів формуються як диференціальні рівняння:

- рівняння Ньютона $m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x, t)$;
- рівняння теплопровідності: $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T$;
- рівняння коливань: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$.

Інтегральне числення у фізиці

Визначений інтеграл Інтеграл від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx$$

У фізиці він використовується для:

- обчислення роботи сили: $A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$;
- визначення маси тіла з непостійною густиною: $m = \int_V \rho(\vec{r}) dV$;
- розрахунку електричного заряду провідника: $Q = \int_S \sigma dS$.

Невизначений інтеграл Невизначений інтеграл функції $f(x)$ — це функція $F(x)$, похідна якої дорівнює $f(x)$:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Він використовується при розв'язуванні диференціальних рівнянь, що описують фізичні процеси.

Фізичні приклади застосування

Кінематика Знаючи прискорення $a(t)$, можна знайти швидкість і координату:

$$v(t) = \int a(t) dt, \quad x(t) = \int v(t) dt$$

Електродинаміка Розрахунок електричного поля за заданим розподілом зарядів $\rho(\vec{r})$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

Теплопередача Визначення теплової енергії, переданої через поверхню:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} \int_S \vec{q}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} dt$$

де $\vec{q}$ — вектор теплового потоку.

Висновок

Диференціальне та інтегральне числення є невід'ємною частиною фізики. Вони дозволяють не лише описувати зміни фізичних величин, але й знаходити кількісні характеристики процесів, будувати математичні моделі та робити прогнози. У прикладній фізиці ці методи лежать в основі чисельного моделювання, обробки експериментальних даних і створення нових технологій.

Розділ 2

ТЕРМОЕЛЕКТРИКА

У розділі використано матеріали праць Анатичука Л.І., Фреїка Д.М. та інших науковців [1–8], присвячених систематизації історичних фактів і сучасних досліджень у галузі термоелектрики.

2.1. Вступ та актуальність

Сучасний світовий енергетичний баланс зазнає значних викликів. У 2023 році глобальне споживання первинної енергії досягнуло рекордних $620 \cdot 10^{18} \text{ Дж} = 172 \cdot 10^{12} \text{ кВт} \cdot \text{год}$. Цей показник зростає щороку на 1.5-2.5%. Особливо стрімким є зростання споживання електроенергії у 2024 році. У цьому році воно збільшилось на 4.3% ($\approx 7.4 \cdot 10^{12} \text{ кВт} \cdot \text{год}$), що є одним з найвищих показників за останні десятиліття.

Ці тенденції, разом із необхідністю скорочення викидів парникових газів, формують нагальну потребу у розвитку *альтернативних, відновлюваних та екологічно чистих* джерел енергії. Одним із перспективних напрямків є *термоелектрика*.

Термоелектрика — це напрям сучасної фізики твердого тіла та енергетики, який вивчає перетворення теплової енергії безпосередньо в електричну та навпаки за допомогою термоелектричних матеріалів. Така технологія є особливо цінною завдяки відсутності рухомих частин, високій надійності, безшумності роботи та можливості функціонування в екстремальних умовах.

Термоелектричні генератори (ТЕГ) можуть працювати автономно, без рухомих частин, у будь-яких кліматичних умовах, та використовувати як джерела тепла відпрацьовані потоки від промислових процесів, транспортних засобів, природні геотермальні джерела чи навіть тепло людського тіла.

Розвиток термоелектрики має дві основні мотивації:

1. **Енергетична ефективність** — утилізація відпрацьованого тепла в промисловості, транспорті та побуті.
2. **Альтернативна генерація** — створення джерел електроенергії там, де неможливе застосування традиційних генераторів (космос, автономні сенсори, віддалені райони).

Історичний огляд

Перші відкриття у сфері термоелектрики датуються початком XIX століття:

- **1821 р.** — Томас Зеєбек виявив явище виникнення електрорушійної сили у замкненому контурі з двох різних металів при наявності температурної різниці (*ефект Зеєбека*).
- **1834 р.** — Жан Пельтьє відкрив тепловий ефект на межі двох провідників при пропусканні електричного струму (*ефект Пельтьє*).
- **1851 р.** — Вільям Томсон (лорд Кельвін) теоретично пояснив взаємозв'язок між цими явищами та відкрив *ефект Томсона*.

Сучасні напрями та приклади застосування

Транспорт

ТЕГ для рекуперації тепла з вихлопних газів знижують витрати палива на 3.5–10%. У гібридних автомобілях потенційна економія пального може сягати 10% при інтеграції з системами управління енергією.

Носимі пристрої Гнучкі ТЕГ здатні жити сенсори та мобільні пристрої за рахунок тепла людського тіла або сонячного випромінювання.

Автономні системи ТЕГ застосовують у космічних апаратах, підводних буях, метеостанціях та медичних імплантах (біотермоелектрика).

Нові наукові тренди (2023–2025)

- **Наноструктуровані матеріали** — використання квантових точок, нанодротів і суперґраток для зменшення теплопровідності та підвищення ZT.
- **2D-термоелектрики** — графен, MoS₂, фосфорен із високою рухливістю носіїв.
- **Топологічні ізолятори** — матеріали з унікальною електронною структурою, що поєднують високу електропровідність із низькою теплопровідністю.
- **Інтеграція з фотоелектричними системами** — одночасне використання світлового та теплового спектра для генерації електроенергії.
- **Біотермоелектрика** — створення енергетично автономних медичних пристроїв, що живляться від тепла людського тіла.

Промислове застосування термоелектрики почалося в середині ХХ століття з появою напівпровідникових сполук, зокрема телуриду вісмуту (Bi₂Te₃), що мали значно вищу ефективність порівняно з металами.

2.2. Фізичні основи термоелектрики

Контактні та термоелектричні явища

Робота виходу

У стані термодинамічної рівноваги поверхня будь-якого металевого зразка оточена тонким шаром електронів, які залишили метал та перейшли в навколишній простір. Внаслідок цього сам метал набуває позитивного заряду (через втрату частини електронів), а електронний шар — негативного. Разом вони утворюють своєрідний плоский конденсатор, між обкладками якого існує електростатична різниця потенціалів. Щоб електрон зміг покинути метал, його кінетична енергія повинна перевищувати або дорівнювати величині, необхідній для подолання електричного поля цього поверхневого «конденсатора». Ця мінімальна енергія і є роботою виходу електрона з металу.

$$W_k \geq e \Delta\varphi.$$

Значення мінімальної кінетичної енергії електрона, достатньої для виходу його з металу, називають *роботою виходу* й вимірюють у несистемних одиницях енергії — електрон-вольтах: $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$.

Значення роботи виходу залежить як від роду металу, так і від стану його поверхні.

Контактна різниця потенціалів

Якщо два різнорідних металевих провідники привести в контакт, то електрони зможуть переходити з одного провідника в інший і назад. В результаті один із провідників зарядиться позитивно, а другий — негативно, і виникне електростатичне поле, а між цими металами — *контактна різниця потенціалів*. Рівноважний стан такої системи настане тоді, коли різниця потенціалів, що виникла між металами, припинить перетікання електронів з одного металу в інший.

Величина контактної різниці потенціалів визначається різницею робіт виходу та концентрацій електронів у контактуючих металах.

Розрахуємо спочатку вплив робіт виходу електронів з металів на контактну різницю потенціалів. Нехай (при однакових концентраціях електронів) робота виходу електрона з металу 1 більша, ніж з металу 2 ($A_1 > A_2$). Це означає, що електронам легше залишити метал 2, ніж метал 1. Після утворення контакту між ними електрони з металу 2 будуть частіше переходити в метал 1, ніж у зворотному напрямку. У результаті в околі контакту метал 1 накопичить надлишок електронів і зарядиться негативно, а метал 2 втратить частину електронів і стане позитивно зарядженим. Між ними виникне контактна різниця потенціалів $\Delta\varphi_A$, яка зрештою зупинить подальший перенос зарядів.

Для того щоб знайти контактну різницю потенціалів $\Delta\varphi_A$, підрахуємо роботу з перенесення електрона по замкненому контуру (рис. 2.1).

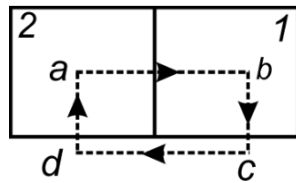


Рис. 2.1. Контактна різниця потенціалів

Ділянку d – c цього контуру виберемо поблизу поверхні металів 1 і 2 так, щоб вона потрапляла всередину своєрідного конденсатора, згадуваного вище. Оскільки в даному разі діють лише електростатичні (потенціальні) сили, то робота з перенесення електрона по замкненому контуру дорівнює нулю:

$$A_{ab} + A_{bc} + A_{cd} + A_{da} = 0$$

$$e(\varphi_a - \varphi_b) - A_1 + e(\varphi_c - \varphi_d) + A_2 = 0$$

Введемо позначення:

$$\varphi_a - \varphi_b = \Delta\varphi_{ab}, \quad \varphi_c - \varphi_d = \Delta\varphi_A$$

Як показують підрахунки, при звичайних температурах

$$\Delta\varphi_A \gg \Delta\varphi_{ab},$$

тому, нехтуючи значенням $\Delta\varphi_{ab}$, дістанемо

$$\Delta\varphi_A \approx \frac{A_1 - A_2}{e}. \quad (2.1)$$

Формула (2.1) описує так звану *зовнішню частину* контактної різниці потенціалів, оскільки вона створюється за межами металів і діє у приповерхневому шарі (ділянка $d-c$).

Розглянемо тепер другу частину контактної різниці потенціалів $\Delta\varphi_n$, пов'язану з різницею концентрацій електронів у металах. Ця частина діє на границі контакту металів всередині них (центральна частина ділянки $a-b$). Очевидно, що якщо $n_2 > n_1$, то переходи електронів з металу 2 у метал 1 будуть відбуватися частіше, ніж у зворотному напрямку. У результаті метал 1 зарядиться негативно, а метал 2 — позитивно, і електричне поле, що виникло, припинить подальше переміщення електронів.

В області контакту двох металів електронний газ буде перебувати в потенціальному (електростатичному) полі, тому для розподілу концентрації електронів застосовна формула Больцмана:

$$n_1 = n_2 \exp\left(-\frac{e \Delta\varphi_n}{kT}\right). \quad (2.2)$$

Звідси випливає:

$$\Delta\varphi_n = \frac{kT}{e} \ln \frac{n_2}{n_1}. \quad (2.3)$$

З (2.1) і (2.3) знаходимо загальний вираз для контактної різниці потенціалів:

$$\Delta\varphi = \frac{A_1 - A_2}{e} + \frac{kT}{e} \ln \frac{n_2}{n_1}. \quad (2.4)$$

Експериментально існування контактної різниці потенціалів установив А. Вольта, який сформулював такі закони:

1. Контактна різниця потенціалів між двома металами залежить від їхньої хімічної природи й температури.

2. Контактна різниця потенціалів між кінцями ланцюга, що складається з декількох послідовно з'єднаних різнорідних металів, що

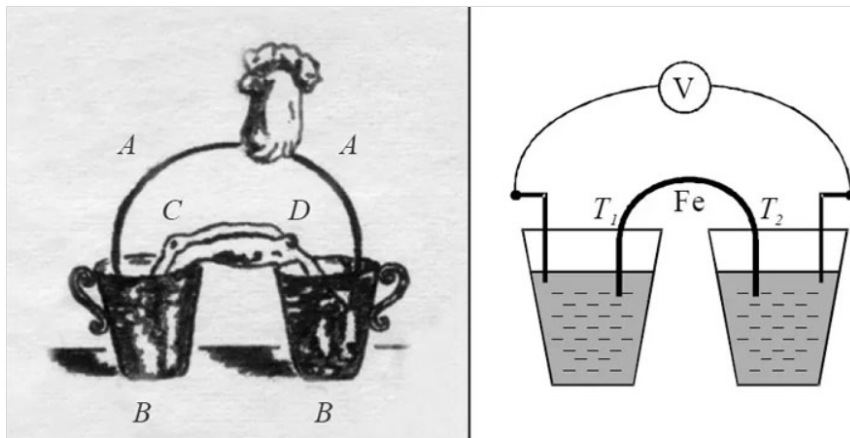


Рис. 2.2. Схема експерименту Александро Вольта

знаходяться при однакових температурах, не залежить від властивостей проміжних провідників і дорівнює контактній різниці потенціалів, що виникає при безпосередньому сполученні крайніх провідників ланцюга:

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_{13}.$$

Дійсно:

$$\Delta\varphi_{12} + \Delta\varphi_{23} = \Delta\varphi_{13}.$$

2.3. Ефект Зеєбека

Ефект Зеєбека полягає у виникненні електрорушійної сили (ЕРС) у провіднику або напівпровіднику, коли між його кінцями існує різниця температур. Величину ЕРС можна записати у вигляді:

$$\mathcal{E} = S \cdot \Delta T,$$

де S — коефіцієнт Зеєбека [$\mu\text{В/К}$], а $\Delta T = T_1 - T_2$ — різниця температур між гарячим і холодним кінцями матеріалу.

Для більшості напівпровідників величина S коливається у межах $100\text{--}300 \mu\text{В/К}$, тоді як для металів — лише кілька $\mu\text{В/К}$, що пояснює, чому для створення ефективних термоелектричних генераторів використовують саме напівпровідники.

Томас Йоганн Зеєбек (біографія)

Томас Йоганн Зеєбек, німецько-естонський фізик, хімік і лікар, народився у 1770 році в ганзейському містечку Ревель (нині Таллін). У віці 17 років він вирушає до Німеччини, щоб вивчати медицину, і в 1792 році складає випускні іспити з медицини на відмінно. Однак під сильним впливом харизматичного професора фізики Георга Крістофа Ліхтенберга Зеєбек вирішує присвятити себе фізиці.

У березні 1802 року він отримує докторський ступінь і переїжджає до Єни. Тут він потрапляє у бурхливе інтелектуальне середовище, центральною фігурою якого був Йоганн Вольфганг Ґете — великий поет, пристрасний дослідник природи та натураліст. Як впливовий адміністратор Веймарського двору, Ґете допомагав молодим талантам розпочати їхню академічну кар'єру.

Зеєбек уперше зустрівся з Ґете на обіді у грудні 1803 року, де познайомився і зі своїм однолітком, майбутнім уславленим філософом Ґегелем, з яким вони стали друзями. Ґете шукав асистента для допомоги у своїх оптичних дослідженнях, і Зеєбек виявився чудовим вибором. Їхня тривала співпраця призвела до того, що внесок Зеєбека став важливою частиною «Теорії кольорів» — головного наукового твору Ґете. Проте близькість до постаті Ґете почала пригнічувати Зеєбека, і він залишає Єну.

У 1818 році, після низки мандрів університетськими містами Німеччини, Зеєбека за його роботи з оптики обирають членом-кореспондентом Берлінської академії наук.

21 липня 1820 року данський фізик Ганс Крістіан Ерстед опублікував своє знамените есе «Експерименти про вплив електричного струму на магнітну стрілку», яке відкрило двері в нову галузь науки — електромагнетизм. Зеєбек залишає осторонь свої оптичні експерименти й занурюється в ідеї Ерстеда. Дуже швидко, після кількох місяців роботи, Зеєбек досягає головного результату своєї наукової кар'єри — відкриття явища, яке він назвав «термомагнетизмом» за аналогією з «електромагнетизмом» Ерстеда.

Про своє відкриття він доповідає на засіданні Берлінської академії 16 серпня 1821 року. Згодом Ерстед відвідує лабораторію Зеєбека

в Берліні, щоб ознайомитися з його експериментами, і вже в березні 1823 року повідомляє про відкриття Зеебека на засіданні Французької академії наук. При цьому він дає фізично правильну інтерпретацію нового явища та вводить для нього прийнятий сьогодні термін «термоелектрика».

Ерстед високо оцінив роботу Зеебека, назвавши її «найпрекраснішим із відкриттів, що постали з його досліджень».

Коефіцієнт Зеебека

Кількісною характеристикою термоелектричного ефекту служить *коефіцієнт Зеебека*. Він характеризує різницю потенціалів між кінцями провідника ΔU , що виникає при підтриманні між ними різниці температур ΔT :

$$S = -\frac{\Delta U}{\Delta T} = \frac{E}{\Delta T/\Delta x}, \quad (2.5)$$

де $E = \frac{\Delta U}{\Delta x}$ — напруженість електричного поля у провіднику, а $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ — градієнт температури.

Відповідно, напруга, яка виникає у термопарі з двох різних металів A та B з різницею температур T_1 і T_2 між їх кінцями, дорівнює

$$U = S_B(T_2 - T_1) - S_A(T_2 - T_1) = (S_B - S_A)(T_2 - T_1).$$

На жаль, у звичайних металах коефіцієнт Зеебека виявляється досить малим, причому для різних металів він може мати різні знаки (див. табл. 2.1). Наприклад, при різниці температур у декілька сотень градусів в термопарі, одним з електродів якої є замкнений у вакуумі метал, напруга становить лише декілька мілівольт. Переконаємося, використовуючи дані з таблиці. Дійсно, при різниці температур у 300°C в термопарі, одним з електродів якої є вісмут (що посідає провідне місце в таблиці, $73 \mu\text{V/K}$), а другим — сурма ($47 \mu\text{V/K}$), створювана напруга становитиме близько 36 мВ. Таким чином, щоб замінити дві звичайні пальчикові батарейки, які використовуються в комп'ютерних мишках, пультах та багатьох інших гаджетах, довелося б з'єднати близько 80 таких термопар і підтримувати між

їхніми електродами різницю температур у 300°C . Це виглядає надто складно!

Табл. 2.1. Коефіцієнт Зеєбека в звичайних металах

Метал	Коефіцієнт S , мкВ/К (відносно свинцю)	Метал	Коефіцієнт S , мкВ/К (відносно платини)
Вісмут	−72	Срібло	+7,1
Нікель	−15,6	Мідь	+7,6
Кобальт	−15,0	Золото	+7,7
Залізо	−16,2	Сурма	+47,0
Калій	−9,0		

Розвиток досліджень термоелектричного ефекту

Термоелектрика досить швидко знайшла своє застосування, принаймні у фізичних лабораторіях. Так, відомий усім закон Ома був відкритий і описаний Георгом Симоном Омом у двох статтях (1826 та 1827 років). Після публікації першої статті Ому порадили відмовитися від гальванічної батареї, оскільки під час вимірювань електрорушійна сила такого джерела істотно змінювалася. Більш точні результати вимірювань для другої статті були отримані завдяки використанню саме термоелектричного джерела струму (пара мідь–вісмут), здатного підтримувати постійну напругу.

А що ж з поясненням явища термоелектрики? До середини 30-х років ХХ століття не існувало мікроскопічного розуміння будови металів. Для створення відповідної теорії необхідно було передусім зрозуміти структуру атомів, що їх утворюють, а потрібний для цього математичний та понятійний апарат — квантова механіка — був сформульований лише наприкінці 1920-х років. Проте на феноменологічному рівні розуміння явища термоелектрики поступово розвивалося. У другій половині ХІХ століття в працях Гіббса, Больцмана та інших учених формується нова галузь фізики — статистична механіка, яка вивчає системи з великим числом частинок. Описувати їхні властивості за допомогою класичної механіки було неможли-

во: не лише розв'язати, але навіть записати рівняння для великої кількості частинок практично нереально. Натомість учені відкрили нові, так звані *статистичні закономірності*. Вони зрозуміли, що для адекватного опису властивостей системи надлишкова інформація (координати й швидкості всіх частинок) не потрібна. Потрібно було навчитися користуватися статистичними характеристиками. Так зароджувалися елементи статистичної фізики.

У 1875 році Джозайя Віллард Гіббс уводить нову характеристику системи великої кількості частинок: *хімічний потенціал* μ — енергію, яку необхідно витратити для введення в систему великого числа частинок ще однієї частинки. В умовах рівноваги ця величина залишається сталою в усьому об'ємі системи — інакше частинки перетікали б з одного місця в інше. Поняття хімічного потенціалу легко узагальнюється і на випадок перебування системи у зовнішньому полі, під яким далі ми будемо розуміти електричне поле з потенціалом φ . Для цього до хімічного потенціалу μ потрібно додати відповідну потенціальну енергію частинки з зарядом q , яку вона набуває при входженні в систему. Таким чином, умовою рівноваги виявляється сталість *електрохімічного потенціалу*:

$$\mu_{\text{ел.хім}} = \mu + q\varphi.$$

Повернімося до дослідів Алессандро Вольта 1794 року. Протилежні кінці залізного провідника він занурював у киплячу та крижану воду, створюючи в системі вільних електронів у металі градієнт температури. Такі електрони разом із нагрівачем і холодильником, строго кажучи, не утворюють рівноважної системи: для підтримання різниці температур необхідно безперервно підводити та відводити тепло.

Однак якщо кінці провідника не з'єднані в електричне коло (скажімо, лапкою жаби), електрони на початку переміщуються так, щоб їхня густина відповідала локальній температурі (як у будь-якого газу при сталому тиску: де холодніше, там густина більша). Проте електрони є зарядженими частинками, і тому всередині металу виникає відмінне від нуля електричне поле, а між кінцями провідника — різниця потенціалів. Ось вам і пояснення термоелектрики — достатньо

лише знати про існування у металі вільних електронів (сам електрон був відкритий лише у 1897 році).

Як виписане вище перетворити у корисну формулу для коефіцієнта Зеєбека? Потрібно всього кілька рядків. Електрохімічний потенціал у провіднику залишається сталим:

$$\mu + q\varphi = \text{const.}$$

Отже, його похідна за координатою (провідник вважаємо одномірним) дорівнює нулю:

$$\frac{d\mu}{dx} + q\frac{d\varphi}{dx} = 0.$$

Остання похідна є не що інше, як узята з протилежним знаком напруженість електричного поля:

$$E = -\frac{d\varphi}{dx}.$$

Таким чином, ми приходимо до рівняння

$$\frac{d\mu}{dx} = qE.$$

Нехай електрохімічний потенціал залежить від температури. Тоді

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{d\mu}{dT} \frac{dT}{dx}.$$

Порівнюючи з попереднім рівнянням, отримаємо

$$qE = \frac{d\mu}{dT} \frac{dT}{dx}.$$

Згідно (2.5) коефіцієнт Зеєбека S входить у співвідношення

$$E = S \frac{dT}{dx},$$

В результаті отримаємо

$$S = \frac{1}{q} \frac{d\mu}{dT}.$$

Висновок. Для отримання більших значень коефіцієнта Зеєбека потрібно щоб хімічний потенціал більше залежав від температури. У напівпровідників ця залежність значно вища, оскільки кількість вільних носіїв заряду залежить від температури.

Табл. 2.2. Коефіцієнт Зеєбека в напівпровідниках

Матеріал	Тип	Коефіцієнт Зеєбека, мкВ/К
Вісмут	Метал	−73
Константан	Метал	−35
Нікель	Метал	−15
Платина	Метал	0
Алюміній	Метал	3.5
Германій	Напівпровідник	300
Кремній	Напівпровідник	440
Теллур	Напівпровідник	600
Селен	Напівпровідник	900

Лише у 1929 році, спираючись на експериментальне виявлення високих значень (сотні мікрвольт на кельвін) коефіцієнта Зеєбека у напівпровідниках, Абрам Федорович Іоффе висунув ідею, що для підвищення ККД термоелементів слід замінити метали напівпровідниками.

Зрозуміти, чому саме напівпровідники є більш перспективними матеріалами для термоелектричних джерел енергії, можна так. При оцінці коефіцієнта Зеєбека у металах ми використовували той факт, що кількість електронів не змінюється. У напівпровідниках це не так – концентрація носіїв заряду дуже сильно (експоненційно) залежить від температури, призводячи до набагато сильнішої залежності хімічного потенціалу від неї. Саме це й зумовлює великі значення коефіцієнта Зеєбека в напівпровідниках (див. табл.2.2).

Подальші дослідження відкритого Зеєбеком явища продовжилися у 1830-х роках у роботах Жана Пельтьє, який відкрив обернений термоелектричний ефект: нагрівання чи охолодження контакту двох провідників при протіканні через нього електричного струму. Суть цього явища кількома роками пізніше вивчав фізик німецького походження, один із засновників електротехніки Генріх Фрідріх Еміль Ленц. Він помістив краплю води у заглиблення на стику двох стержнів з вісмуту та сурми (із опором R) і виявив, що при проходженні електричного струму I в одному напрямку крапля перетворювалася на лід, а при зміні напрямку на протилежний лід танув. Цей простий і вражаючий експеримент показав, що під час протікання через контакт двох різних металів струму, окрім відомого джоулевого тепла (I^2R), виділяється або поглинається додаткове тепло, пропорційне першому степеню струму. Це тепло отримало назву *тепло Пельтьє*.

2.4. Ефект Пельтьє

Ефект Пельтьє полягає у виділенні або поглинанні теплоти на межі контакту двох провідників чи напівпровідників при проходженні електричного струму. На відміну від джоулевого нагрівання, яке завжди призводить до виділення теплоти, ефект Пельтьє може бути як ендотермічним (поглинання теплоти), так і екзотермічним (виділення теплоти), залежно від напрямку струму. Таким чином, ефект Пельтьє є зворотним до ефекту Зеєбека і лежить в основі роботи термоелектричних охолоджувачів. Фізична природа ефекту пояснюється тим, що електрони або дірки, переходячи через межу двох матеріалів з різними енергетичними структурами, змінюють свою енергію. Надлишкова енергія віддається у вигляді теплоти до ґратки, або ж, навпаки, енергія забирається з ґратки.

Кількість теплоти, яка виділяється або поглинається на контакті за час t , описується рівнянням:

$$Q = \Pi It,$$

де Π — коефіцієнт Пельтьє, що залежить від властивостей матеріа-

лів, I — сила струму через контакт.

Коефіцієнт Пельтьє пов'язаний з коефіцієнтом Зеебека α співвідношенням:

$$\Pi = S \cdot T,$$

де T — абсолютна температура.

2.5. Ефект Томсона

Ефект Томсона описує теплові явища в однорідному провіднику з градієнтом температури, крізь який протікає електричний струм. Виділення або поглинання тепла в цьому випадку дорівнює:

$$q = \tau \cdot I \cdot \frac{dT}{dx},$$

де τ — коефіцієнт Томсона [В/К], $\frac{dT}{dx}$ — градієнт температури.

2.6. Термоелектрична добротність

Ефективність термоелектричних матеріалів оцінюють за безрозмірним параметром *термоелектричної добротності*:

$$ZT = \frac{S^2 \sigma T}{\kappa},$$

де σ — електропровідність, κ — теплопровідність, T — абсолютна температура. Чим більше значення ZT , тим вища ефективність матеріалу. Для практичного використання бажано, щоб $ZT > 1$, але сучасні наукові дослідження вже наближаються до $ZT \approx 3-4$ у лабораторних зразках.

Коефіцієнт корисної дії термоелектричного генератора

Можна показати, що термоелектрична добротність ZT — безрозмірна величина, що характеризує ефективність термоелектричного матеріалу і визначає максимально можливий коефіцієнт корисної дії термоелектричного перетворювача.

Коефіцієнт корисної дії η термоелектричного пристрою визначається відношенням енергії, переданої навантаженню за час t , до повної теплової енергії, поглинутої контактом за цей же час. Оскільки в електричному колі максимальну потужність на зовнішньому навантаженні отримується у випадку, коли опір навантаження дорівнює внутрішньому опору джерела, то у формулі для η в чисельнику можна записати максимальну Джоулеву енергію в термоелементі — $\frac{1}{4}U^2t/R$, де U — термоелектрична напруга ($U = S\Delta T$), а опір провідника з питомим опором ρ , довжиною Δl та площею перерізу A становить $R = \rho \frac{\Delta l}{A} = \frac{\Delta l}{\sigma A}$. В знаменнику η міститься енергія, яка дорівнює добутку теплового потоку $q = \kappa \frac{\Delta T}{\Delta l}$, площі перерізу A , часу t та різниці температур. Таким чином, з точністю до постійного коефіцієнта $\frac{1}{4}$:

$$\eta = \frac{U^2t/R}{\kappa \frac{\Delta T}{\Delta l} At} = \frac{S^2\sigma\Delta T}{\kappa},$$

де $\sigma = 1/\rho$ — питома електропровідність матеріалу термоелемента, S — коефіцієнт Зеєбека, κ — теплопровідність матеріалу.

Величина

$$Z = \frac{S^2\sigma}{\kappa} \quad (2.6)$$

називається **термоелектричною добротністю матеріалу**. Вона характеризує ефективність термоелектричного пристрою і має розмірність обернену до температури ($[Z] = 1/K$). Коефіцієнт Зеєбека, електропровідність і теплопровідність залежать від температури. Це означає, що при проєктуванні термоелектричних генераторів потрібно враховувати оптимальний робочий діапазон температур. Для прикладу:

- Bi_2Te_3 — оптимальна робоча температура близько 300 K (кімнатна температура);
- PbTe — працює ефективно у діапазоні 500–900 K;
- оксиди кобальту — понад 1000 K.

Залежність від температури добротності відомих напівпровідникових матеріалів наведена на рис. 2.3. З рисунка видно, що кожний матеріал має високу добротність лише в певному температурному діапазоні.

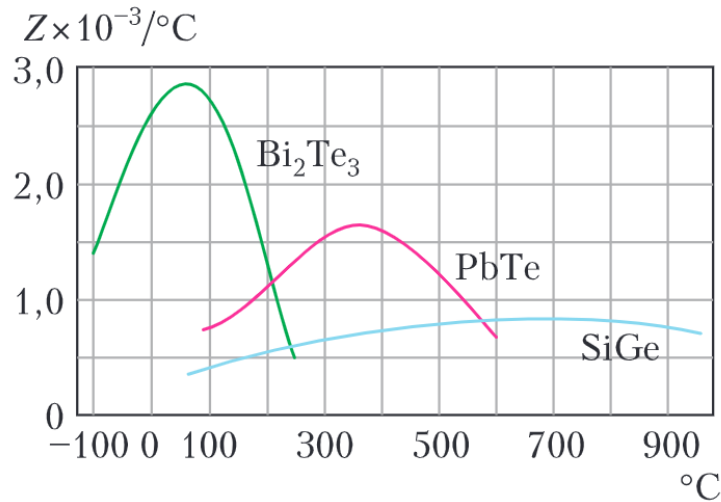


Рис. 2.3. Залежність термоелектричної добротності відомих термоелектричних матеріалів від температури [8]

Часто використовують безрозмірну термоелектричну добротність

$$ZT = \frac{S^2 \sigma T}{\kappa}. \quad (2.7)$$

Безрозмірна термоелектрична добротність сучасних напівпровідникових матеріалів досягає величини 2...3. Для того щоб термоелектричні пристрої стали конкурентоспроможними у порівнянні з іншими технологіями відновлюваної енергетики (наприклад, сонячною або геотермальною), необхідно досягти значень $ZT > 4$.

На жаль, для металів цей показник добротності виявляється дуже малим: при робочих температурах термоелектричних пристроїв він становить лише порядку $10^{-3} - 10^{-4}$.

Приклад розрахунку добротності Z для міді

Для міді при кімнатній температурі характерні такі параметри: $S \approx 1.5 \cdot 10^{-6} \text{ В/К}$, $\sigma \approx 5.8 \cdot 10^7 \text{ См/м}$, $\kappa \approx 400 \text{ Вт/(м}^{\circ}\text{К)}$.

Підставляючи значення, отримаємо:

$$Z = \frac{(1.5 \cdot 10^{-6})^2 \cdot (5.8 \cdot 10^7)}{400} \approx 3.3 \cdot 10^{-7} \text{ K}^{-1}.$$

Висновки

- Отримане значення термоелектричної добротності для міді є надзвичайно низьким.
- При кімнатній температурі маємо $ZT \approx 10^{-4}$, що робить мідь непридатною для використання як активний матеріал у термоелектричних перетворювачах.
- Метали (зокрема мідь) застосовують лише як електроди та контакти, тоді як ефективні термоелектричні матеріали — це напівпровідники з великим коефіцієнтом Зеєбека та малою теплопровідністю.

Очевидно, що для підвищення ефективності термоелектричного пристрою слід:

- збільшувати коефіцієнт Зеєбека матеріалу;
- збільшувати його електропровідність;
- зменшувати ґраткову теплопровідність.

Як ми вже бачили, коефіцієнт Зеєбека в металах є дуже малим через велику концентрацію електронів і відповідно велику енергію Фермі. Водночас електрони забезпечують металам високу електропровідність. Але метали також мають і високу теплопровідність.

Електропровідність металу жорстко пов'язана з електронним внеском у теплопровідність законом Відемана–Франца:

$$\frac{\kappa_e}{\sigma T} = L,$$

де L — стала Лоренца. Тобто збільшення електропровідності призводить до зростання теплопровідності.

Окрім електронів, тепло в металі переноситься також ґраткою. Її внесок κ_p при кімнатних температурах може бути значним, тому повна теплопровідність становить:

$$\kappa = \kappa_e + \kappa_p.$$

Таким чином, підвищення ефективності термоелектричних пристроїв на практиці зводиться до оптимізації трьох параметрів: збільшення коефіцієнта Зеєбека S , збільшення електропровідності σ та зменшення ґраткової теплопровідності κ_p .

2.7. Сучасні матеріали та технології

Класичні напівпровідникові сполуки

Перші ефективні термоелектричні матеріали з'явилися у середині ХХ століття. Найбільш відомими стали:

- **Bi₂Te₃** — телурид вісмуту, ефективний у діапазоні температур 250–400 К.
- **PbTe** — телурид свинцю, застосовується при 500–900 К.
- **SiGe** — кремній-германієві сплави, використовуються при температурах понад 1000 К.

Ці матеріали стали основою для промислових термоелектричних генераторів, що працювали в космічних апаратах і системах охолодження.

Наноструктуровані матеріали

Останні десятиліття показали, що наноструктуризація матеріалу може суттєво підвищити його ефективність. До таких методів належать:

1. **Квантові точки** — наночастинки розміром кілька нанометрів, які розсіюють фонони та зменшують теплопровідність.
2. **Суперґратки** — періодичні шари різних напівпровідників товщиною у кілька нанометрів.
3. **Нанопористі структури** — матеріали з високим вмістом нанопор, що зменшують теплопровідність без суттєвого впливу на електропровідність.

Дослідження показали, що наноструктуровані Bi_2Te_3 можуть досягати значень $ZT > 2$ у кімнатному діапазоні температур.

Топологічні ізолятори

Топологічні ізолятори — це новий клас матеріалів, які мають ізоляційний об'єм і провідну поверхню. Вони демонструють унікальні електронні властивості, що можуть призвести до значного підвищення коефіцієнта Зеебека. Прикладом є леговані сполуки на основі Bi_2Te_3 та Sb_2Te_3 .

Оксидні матеріали

Оксиди металів (наприклад, $\text{Ca}_3\text{Co}_4\text{O}_9$) мають високу термічну стабільність і можуть працювати при температурах понад 1000 К. Їх основна перевага — хімічна стійкість і екологічна безпечність, що робить їх перспективними для промислових печей та енергетичних установок.

Органічні термоелектрики

Органічні провідні полімери, такі як поліанілін та полі(3,4-етилендіокситіофен) (PEDOT), мають низьку теплопровідність і гнучку механічну структуру. Це дозволяє створювати гнучкі термоелектричні генератори, що інтегруються у тканини та переносну електроніку.

Приклади промислового впровадження

- Автомобільні компанії тестують термоелектричні модулі для утилізації тепла вихлопних газів.
- У Японії встановлюють термоелектричні панелі на гарячих трубопроводах, щоб живити датчики без батарейок.
- NASA використовує радіоізотопні термоелектричні генератори на зондах *Voyager*, *Curiosity* та *Perseverance*.

2.8. Висновки

Термоелектрика, поєднуючи фундаментальні фізичні принципи з інноваційними матеріалами, має значний потенціал для вирішення енергетичних та екологічних проблем XXI століття. Подальші дослідження у галузі наноструктур, топологічних матеріалів та інтеграційних енергетичних систем відкривають шлях до досягнення $ZT > 3$ у промислових умовах.

Бібліографія

- [1] Anatychuk L. I. *Thermoelectricity Vol. 1 – Physics of Thermoelectricity*, Institute of Thermoelectricity, Kiev, 1998
- [2] Anatychuk L. I. *Thermoelectricity Vol. 2 - Thermoelectric Power Converters*, Institute of Thermoelectricity, Kiev, 2005
- [3] Anatychuk L.I. *On the Discoverers of Thermoelectricity*. In: Springer Series in Materials Science. Springer, 2024, P.3-12.
- [4] Д. М. Фреїк, Л. І. Никируй, О.С. Криницький *Досягнення і проблеми термоелектрики 1. Історичні аспекти*. Фізика і хімія твердого тіла. 2012;13(2):297-318.
- [5] Д. М. Фреїк, Л. І. Никируй, М.О. Галушак *Досягнення і проблеми термоелектрики II. Основні положення теорії термоелектричних явищ (огляд)*. Фізика і хімія твердого тіла. 2012;13(3):574-585.
- [6] Zhao L.-D. et al. *Ultrahigh thermoelectric performance in SnSe*. Nature, 2022.
- [7] Lee S. et al. *Flexible thermoelectric generators for wearable electronics*. Adv. Energy Mater., 2023.
- [8] Snyder G. J., Toberer E. S. *Complex thermoelectric materials*. Materials for Sustainable Energy. Vol 7. Co-Published with Macmillan Publishers Ltd, UK; 2010:101-110.

Розділ 3

КОМП'ЮТЕРНА ФІЗИКА

3.1. Вступ

Комп'ютерна фізика — це напрям прикладної фізики, що використовує методи чисельного аналізу та комп'ютерного моделювання для розв'язання фізичних задач, які неможливо або надто складно вирішити аналітичними методами. Сучасні обчислювальні технології дозволяють моделювати системи будь-якої складності — від атомів і молекул до клімату планети.

Методи комп'ютерного моделювання

- **Метод скінченних різниць** — апроксимація похідних у диференціальних рівняннях кінцевими різницями.
- **Метод скінченних елементів** — розбиття області на елементи простої форми та розв'язання рівнянь у кожному з них.
- **Метод Монте-Карло** — статистичне моделювання процесів за допомогою випадкових чисел.
- **Метод молекулярної динаміки** — чисельне відтворення руху великої кількості частинок з урахуванням взаємодій.
- **Спектральні методи** — розклад функцій у ряди та використання швидких перетворень Фур'є.

Інструменти комп'ютерної фізики

Для реалізації чисельних методів використовують:

- спеціалізовані програмні пакети (COMSOL Multiphysics, ANSYS, Matlab, Origin);
- мови програмування (Python, C++, Fortran);
- бібліотеки чисельних обчислень (NumPy, SciPy, Matplotlib, TensorFlow);
- суперкомп'ютери та обчислювальні кластери для складних багатofакторних моделей.

COMSOL Multiphysics — це програмний пакет для *комп'ютерного моделювання фізичних процесів* методом скінченних елементів. Він дозволяє будувати математичні моделі та симулювати явища у фізиці, хімії, біології та інженерії. COMSOL має модулі для електромагнетизму, теплопередачі, механіки, гідродинаміки, акустики, квантових і наноструктурних задач. У ньому можна розв'язувати *системи рівнянь у частинних похідних (PDE)*, що описують фізичні процеси, та поєднувати різні фізичні ефекти (так званий *multiphysics* підхід). COMSOL широко застосовується у науці та промисловості для проєктування сенсорів, наноструктур, енергетичних пристроїв, антен тощо.

ANSYS — інший потужний програмний комплекс для *інженерного моделювання*. Він орієнтований на задачі механіки, міцності, теплопередачі, гідродинаміки та електромагнітних розрахунків. ANSYS також базується на методі скінченних елементів (FEM), методі об'ємів (FVM) та інших чисельних методах. До складу пакета входять спеціалізовані модулі: *ANSYS Mechanical* (механіка і міцність конструкцій), *ANSYS Fluent* (гідродинаміка, газодинаміка), *ANSYS HFSS* (високочастотна електродинаміка та антени). ANSYS активно використовується у машинобудуванні, авіації, автомобільній промисловості, енергетиці для розрахунку конструкцій і оптимізації виробів.

Коротке порівняння:

- **COMSOL** — універсальний і зручний для наукових досліджень, орієнтований на фізиків та дослідників, які будують власні моделі.
- **ANSYS** — інженерний комплекс, орієнтований на промислове проектування та перевірку конструкцій.

Origin — це програмний пакет для *обробки та візуалізації експериментальних даних*. Він спеціалізується на побудові графіків, статистичному аналізі та апроксимації експериментальних результатів. Origin надає зручні інструменти для створення *публікаційної якості графіків*, виконання *регресійного аналізу, аналізу Фур'є*, обробки великих масивів даних та автоматизації обчислень.

Застосування у прикладній фізиці

Комп'ютерне моделювання використовується у:

- **Аеродинаміці** — розрахунок обтікання літаків, автомобілів, турбін.
- **Молекулярній фізиці** — моделювання структури білків, наноматеріалів.
- **Астрофізиці** — симуляції формування галактик, еволюції зірок.
- **Кліматології** — прогнозування кліматичних змін.
- **Енергетиці** — оптимізація роботи реакторів, вітрових і сонячних установок.
- **Медичній фізиці** — моделювання поширення ультразвуку та лазерного випромінювання в тканинах.

Висновок

Комп'ютерна фізика поєднує фундаментальні закони фізики, математичні методи та обчислювальні технології. Вона дозволяє вирішувати задачі, які раніше були недоступні, скорочує час і вартість досліджень, забезпечує можливість вивчення систем у широкому діапазоні масштабів — від нанометрів до космічних відстаней.

3.2. Алгоритми та графічний спосіб їх опису

Алгоритм — це чітко визначена, скінченна послідовність інструкцій або дій, яку виконавець (людина чи комп'ютер) має виконати для розв'язання задачі або досягнення конкретного результату. Іншими словами, алгоритм задає правило обробки вхідних даних з метою отримання очікуваного виходу.

У програмуванні алгоритми відіграють ключову роль, проте вони не залежать від конкретної мови реалізації. Алгоритм визначає порядок виконання дій і може включати умови, цикли та операції з даними. Завдяки цьому програми працюють ефективно, забезпечуючи оптимальне розв'язання поставлених задач. Один алгоритм може бути реалізований у вигляді різних програм на будь-якій мові програмування. Це підкреслює універсальність алгоритмів, які не залежать від конкретних засобів реалізації.

Уміння створювати алгоритми є фундаментальною навичкою програміста. Воно дозволяє:

- аналізувати складні завдання та розбивати їх на простіші;
- знаходити ефективні рішення й оптимізувати процеси;
- підвищувати продуктивність програм і зменшувати навантаження на систему;
- структурувати мислення й приймати обґрунтовані рішення під час проектування коду.

Алгоритмічне мислення розвиває не лише логіку, а й творчий підхід: воно допомагає вдосконалювати існуючі методи й створювати

інноваційні програмні рішення. Формування цих навичок потребує часу та практики, проте зусилля окупаються, відкриваючи широкі можливості для професійного зростання.

Алгоритмічне мислення – це здатність аналізувати проблеми та розробляти логічні рішення, використовуючи алгоритми. Воно відіграє важливу роль у програмуванні, оскільки дозволяє розбивати складні завдання на простіші кроки та послідовно їх вирішувати.

Ось деякі ключові аспекти алгоритмічного мислення:

- **Декомпозиція задачі:** Розбивайте складне завдання на дрібніші завдання. Це допомагає зробити процес вирішення більш керованим. Починайте із загального опису завдання та послідовно розбивайте його на простіші кроки, кожен з яких може бути вирішений окремо.
- **Абстракція:** Вміння виділяти основні аспекти завдання та ігнорувати непотрібні деталі допомагає спростити розробку алгоритму. Зосередьтеся на ключових кроках та логіці рішення, не торкаючись деталей, які не впливають на результат.
- **Логічні правила:** Розуміння та застосування умов (**if-else**) та циклів (**for, while**) допомагає керувати ходом виконання алгоритму. Умови дозволяють виконувати певні дії залежно від заданих умов, а цикли — повторювати дії до виконання умови.
- **Аналіз та покращення алгоритмів:** Розвивайте навичку оцінки та аналізу алгоритмів. Усвідомлюйте, які алгоритми ефективні, а які можна покращити. Порівнюйте різні підходи до вирішення задачі та вибирайте найбільш оптимальні.

Базові поняття алгоритмів:

- *Вхідні дані* — інформація, яка подається на вхід алгоритму (числа, рядки, об'єкти тощо).
- *Вихідні дані* — результат роботи алгоритму після його виконання.

- *Послідовність дій* — порядок операцій, що визначає логіку розв'язання задачі.

Властивості алгоритмів

- **Визначеність:** Алгоритм повинен бути однозначним, що виключає довільність тлумачення будь-якого розпорядження та заданого порядку виконання.
- **Результативність:** Реалізація обчислювального процесу повинна через певне число кроків привести до видачі результату або повідомлення про неможливість розв'язання задачі.
- **Масовість:** Один алгоритм можна застосовувати для розв'язання однотипних задач з різними початковими даними. Це дозволяє створювати типові програми для різних варіантів завдань.
- **Дискретність:** Алгоритм обчислювального процесу можна розчленувати на окремі етапи або елементарні операції.

Способи та форми опису алгоритмів

Основні способи опису алгоритмів:

1. Словесні.
2. Словесно-формульні.
3. Графічні (схеми, блок-схеми).
4. Однією з мов програмування.

Алгоритм може бути виражений словесно, записаний у вигляді тексту (з використанням спеціальної навчальної алгоритмічної мови) або зображений у вигляді схеми.

Словесний опис використовується для формулювання правила чи плану. **Словесно-формульний опис** передбачає застосування певних обчислень або співвідношень.

Схема — це графічне зображення алгоритму за допомогою геометричних блоків, які позначають команди. Схема дозволяє наочно простежити процес виконання алгоритму.

Елементи схеми:

- Графічні фігури, що відображають окремі етапи рішення задачі і містять текст відповідної команди.
- Лінії зі стрілками, які вказують послідовність виконання етапів.

Блок-схема алгоритму — графічне зображення логічної структури алгоритму. Кожний етап відображається геометричною фігурою (блоком) певної форми залежно від характеру операції. Блоки з'єднуються стрілками, які визначають порядок виконання операцій і формують логічну структуру алгоритму.

Основні структури алгоритмів:

- Слідування (послідовність кроків).
- Розгалуження (умовні команди, `if-else`).
- Повторення (цикли `for`, `while`).

Команда — записаний в алгоритмі наказ виконавцю. **Блок-схема** — наочне графічне зображення алгоритму, де окремі дії зображуються блоками, а зв'язки між ними позначені стрілками.

План складання алгоритму

1. Уважно прочитати умову задачі.
2. Визначити:
 - що дано (аргументи);
 - що потрібно знайти (результати);
 - у якому вигляді представлені аргументи і результати (типи).

3. Записати заголовок алгоритму.
4. Визначити шляхи вирішення задачі та необхідні проміжні величини.
5. Записати алгоритм алгоритмічною мовою.
6. Перевірити правильність складання алгоритму на конкретних значеннях аргументів.

Існує державний стандарт на виконання графічного запису алгоритму. Графічний запис алгоритму є найбільш наглядним. Перелік умовних графічних символів, їх найменування, форма, розміри і функції, що відображаються, встановлюються державним стандартом ДСТУ ISO 5807:2016.

Алгоритми мають певну класифікацію, що відображає особливості їх реалізації. Загалом існує три типи алгоритмів:

- лінійний,
- розгалужений,
- циклічний.

Блок-схеми алгоритмів

Використання схем дозволяє представляти алгоритм в наочній формі, тому вони найчастіше використовуються. В блок-схемах зображаються різні типи елементів програми різними фігурами. *Обчислювальні блоки є прямокутником*, в якому записуються розрахункові формули. Причому формули повинні бути записані таким чином, що зліва, яка обчислюється, розміщується змінна, далі йде знак $:=$ або знак $=$ (оператор присвоєння, він означає, що змінній зліва надається значення виразу, записаного справа), далі — розрахункова формула.

Якщо в алгоритмі використовується *розгалуження* за допомогою умови, то ця умова записується в *ромбі*, який має два виходи: один — для випадку, якщо умова істинна (*Так*), інший — якщо умова хибна (*Ні*). Операції введення і виведення даних позначаються

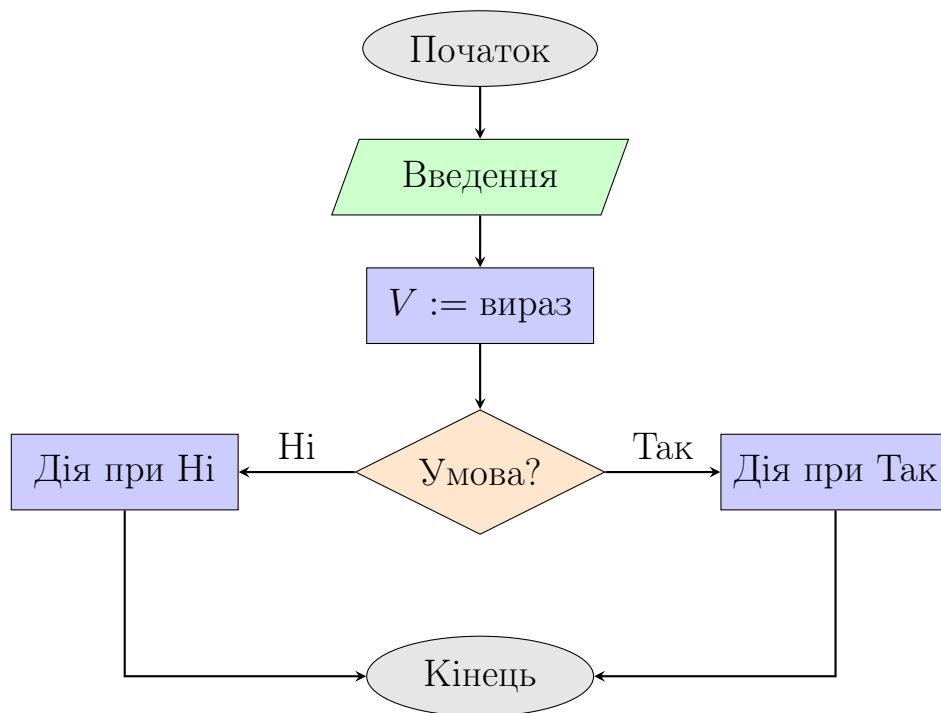
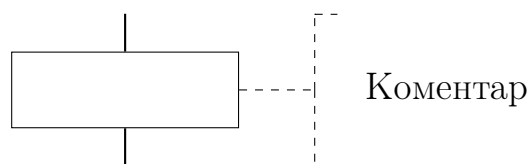


Рис. 3.1. Приклад блок-схеми.

паралелограмами з відповідними написами «Введення» або «Виведення». Початок і кінець процесу зображаються як овали з написами «Початок» або «Кінець».

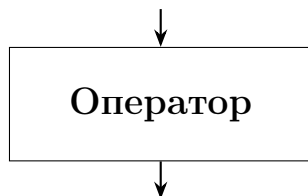
Якщо пояснення не може бути розміщене в центрі блоку, то використовують додатковий коментар зовні блоків за допомогою пунктирних ліній, так як зображено на рисунку.



Лінійні алгоритми

Найпростішими для алгоритмізації є задачі, в яких перетворення інформації відбувається послідовно за певними формулами. Такі алгоритми називають лінійними.

Для представлення такого алгоритму використовується алгоритмічна конструкція слідування (послідовного виконання), яка передбачає послідовне виконання дій в тому порядку, в якому вони записані в тексті програми. Представлення цієї конструкції у блок-схемах здійснюється послідовністю блоків :



Приклад 1. Розглянемо лінійний алгоритм розрахунку складного виразу: $z = \sin^2(x^2 + y^2) + \cos^3(x^2 + y^2)$ для заданих значень змінних x та y .

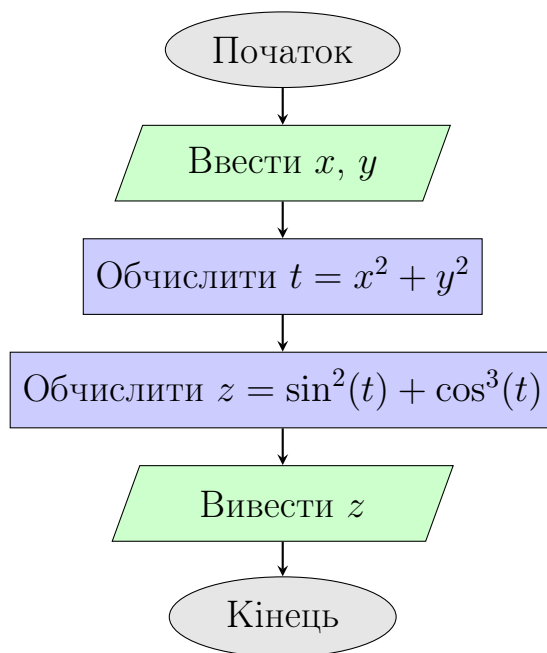


Рис. 3.2. Схема лінійного алгоритму.

Приклад 2. Визначити площу трикутника за формулою Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p = \frac{a+b+c}{2}$ - півпериметр трикутника, a, b, c , - сторони трикутника.

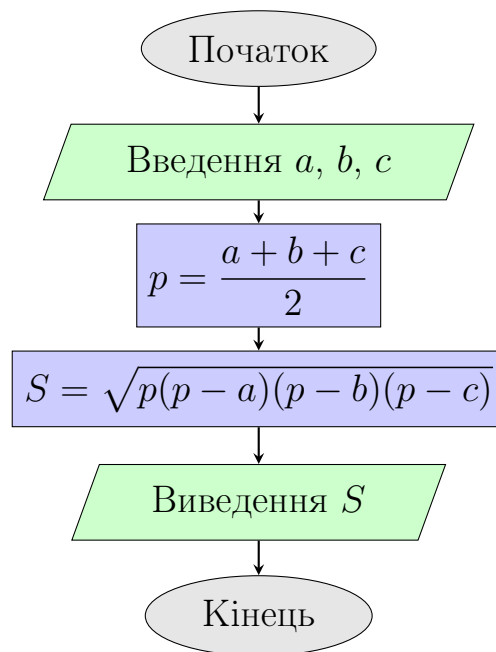


Рис. 3.3. Блок-схема розрахунку площі трикутника.

Лінійний алгоритм, поданий на рисунку 3.3, не завжди працюватиме коректно, оскільки в ньому відсутня перевірка вхідних даних. Може виникнути ситуація, коли введені значення довжин сторін a , b , c не утворюють жодного трикутника (наприклад, у випадку $c > a + b$). Тому для побудови універсального алгоритму необхідно передбачити перевірку правильності вхідних даних. Залежно від результатів такої перевірки подальше виконання програми може відрізнятися. Іншими словами, алгоритм повинен містити розгалуження.

Розгалужені алгоритми

Розгалужені алгоритми використовуються у випадках, коли обробка інформації може відбуватися за різними схемами залежно від властивостей вхідних даних або проміжних результатів. У таких алгоритмах передбачаються всі можливі варіанти обробки, кожен з яких реалізується як окрема гілка. Вибір конкретної гілки здійснюється на основі перевірки умови, що відображає властивості даних, які обробляються.

Для представлення розгалужених алгоритмів застосовують алгоритмічні конструкції вибору. Ця структура дозволяє в залежності від результату перевірки умови обрати один з альтернативних шляхів виконання алгоритму. Кожен шлях веде до спільного виходу, якщо одна з гілок не завершує виконання програми раніше. Структура розгалуження буває різна:

- повне розгалуження;
- неповне розгалуження;
- складне розгалуження;
- багатоваріантний вибір;

Повне розгалуження. Дана алгоритмічна структура передбачає виконання дій і у разі виконання, і у разі невиконання заданої умови. Графічне представлення такої структури має вигляд, наведений на рис. 3.4:

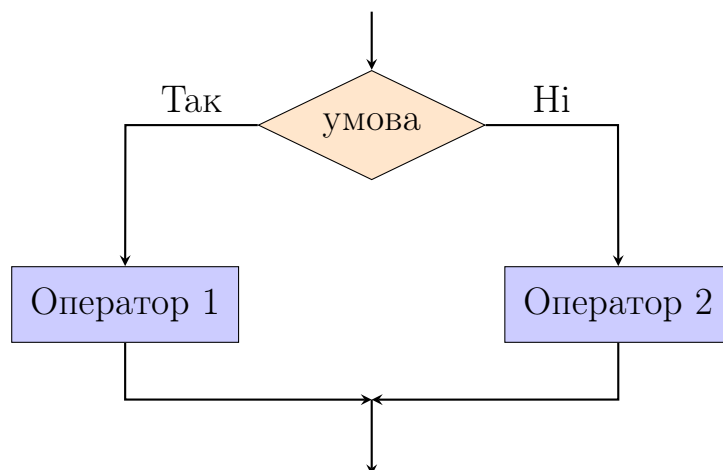


Рис. 3.4. Схема повного розгалуження

Неповне розгалуження. Дана алгоритмічна структура передбачає виконання дій тільки у разі виконання, або у разі невиконання заданої умови. Тобто, одна із її гілок взагалі не передбачає ніяких

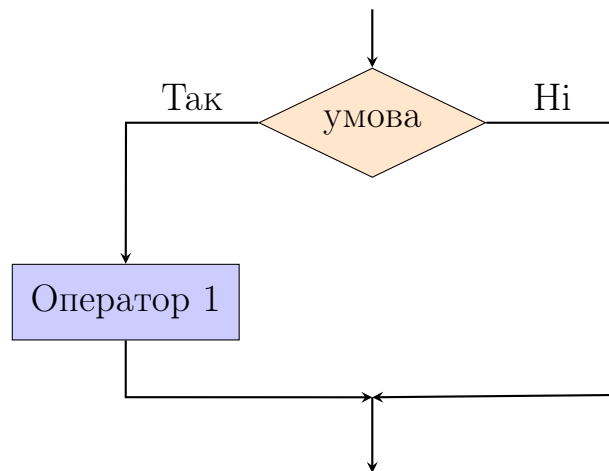


Рис. 3.5. Схема неповного розгалуження.

дій. Графічне представленням таких структур у блок-схемах має вигляд, наведений на рис. 3.5:

У лінійному алгоритмі розрахунку площі трикутника, який наведений на рис.3.3, додаємо перевірку коректності вхідних даних. Некоректними можуть виявитися такі дані, за яких довжина однієї зі сторін більша за суму двох інших. Для прямої перевірки цього потрібно було б створити кілька умов для змінних a , b , c . Зручнішим способом є перевірка того, щоб підкореневий вираз у формулі Герона не був від'ємним.

Удосконалена блок-схема з урахуванням цієї перевірки подана на рис. 3.6.

Залежно від того, на скільки гілок розгалужується алгоритм, він може бути простим або складним. Для простого розгалуженого процесу перевіряється одна умова, для складного — дві чи більше умов (рис. 3.7). Збільшуючи кількість умовних блоків можна досягнути довільної кількості розгалужень. При перевірці n умов отримується $n + 1$ розгалужень. Використання великої кількості умовних блоків значно ускладнює алгоритм. Для потреби великої кількості розгалужень зручніше використовувати умови з багатоваріантним вибором (рис. 3.8 та рис. 3.9). У першому випадку розгалуження реалізується у залежності від значення певної змінної, а в другому — у результаті

послідовної перевірки ряду умов.

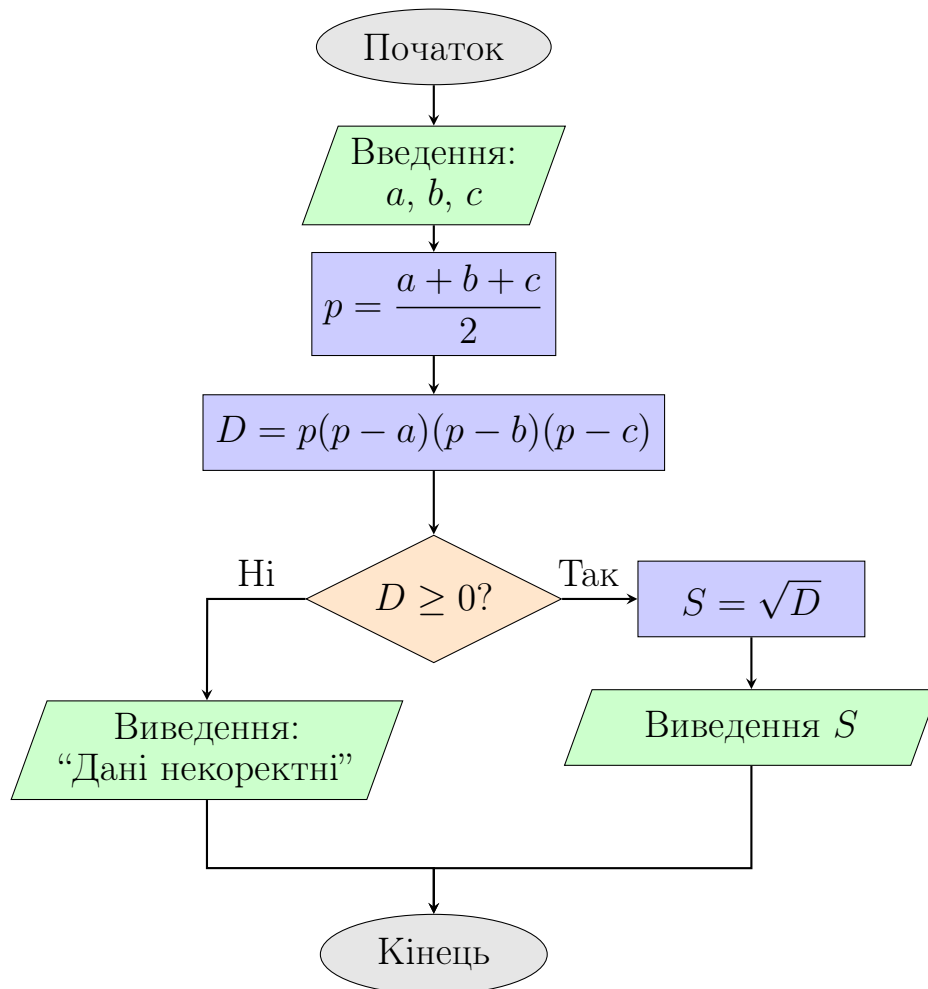


Рис. 3.6. Блок-схема з перевіркою коректності даних для обчислення площі трикутника.

Приклади алгоритмів зі складним розгалуженням

Нижче наведемо кілька прикладів алгоритмів, у яких використовуються складні розгалуження.

1. **Визначення типу трикутника за довжинами сторін (рівносторонній, рівнобедрений, різносторонній).**

На вхід подаються три числа — довжини сторін трикутника.

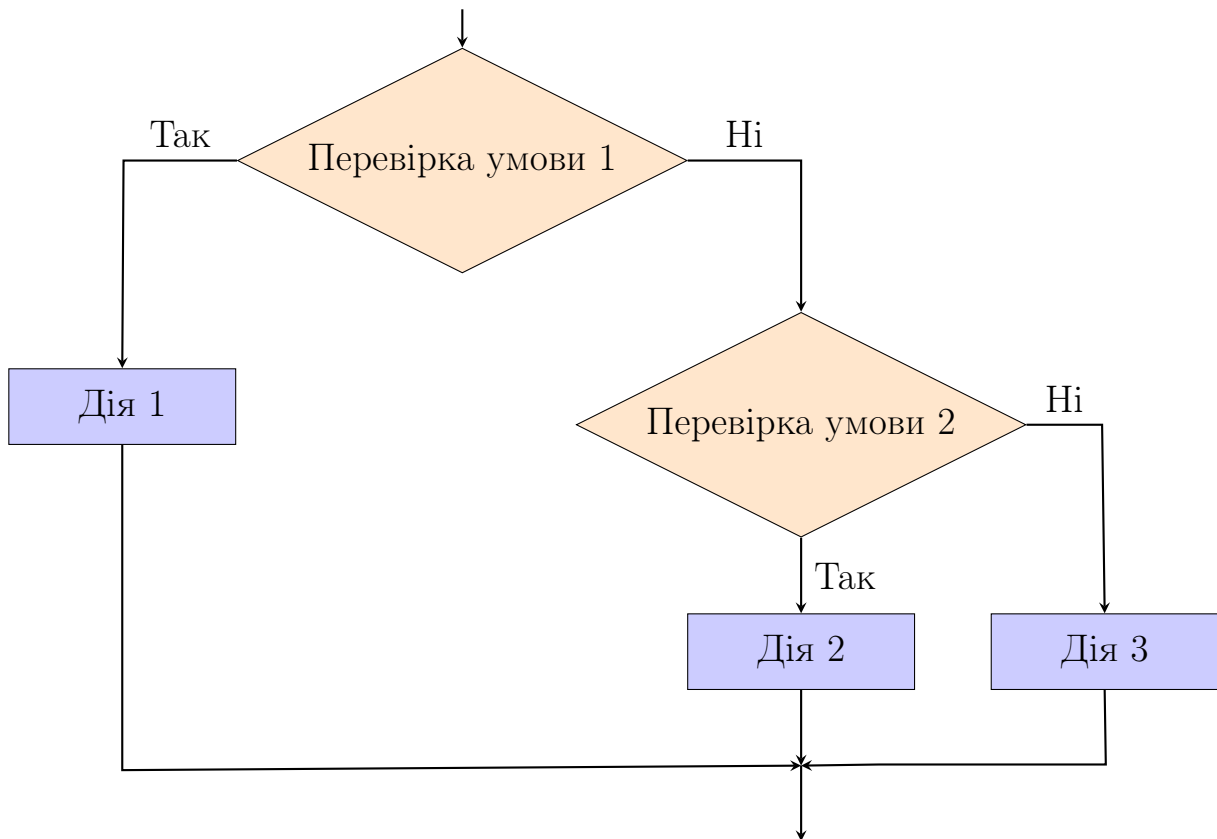


Рис. 3.7. Схема складного розгалуження з двома умовами.

- Спочатку перевіряється, чи існує трикутник (кожна сторона менша від суми двох інших, або перевірка за допомогою формули Герона, як у попередній задачі). Якщо умова не виконується, алгоритм завершується з повідомленням «трикутник не існує».
- Якщо трикутник існує, то:
 - якщо всі три сторони рівні — трикутник рівносторонній;
 - якщо рівні тільки дві сторони — трикутник рівнобедрений;
 - інакше — трикутник різносторонній.

Це приклад алгоритму, де одна з гілок може завершувати виконання достроково.

2. Розрахунок оплати за електроенергію за тарифними зонами.

На вхід подається кількість спожитої електроенергії (кВт·год).

- Якщо споживання менше 100 кВт·год — застосовується пільговий тариф.
- Якщо споживання від 100 до 300 кВт·год — перші 100 оплачуються за пільговим тарифом, решта — за стандартним.
- Якщо споживання більше 300 кВт·год — розрахунок здійснюється за трьома зонами: перші 100 — пільговий тариф, наступні 200 — стандартний, решта — підвищений тариф.

Тут використовується багаторівневе розгалуження з кількома умовами.

3. Визначення дій студента за результатами іспиту.

На вхід подається оцінка студента (0–100 балів).

- Якщо оцінка нижча за 50 — студент не склав іспит:
 - якщо оцінка від 35 до 49 — дозволяється перездача;
 - якщо нижче 35 — потрібно повторне вивчення курсу.
- Якщо оцінка від 50 до 100 — іспит складено.
 - оцінка від 90 до 100 — *відмінно*, "А".
 - оцінка від 80 до 89 — *добре*, "В".
 - оцінка від 70 до 79 — *добре*, "С".
 - оцінка від 60 до 69 — *задовільно*, "D".
 - оцінка від 50 до 59 — *задовільно*, "Е".

Цей приклад містить вкладені перевірки умов і кілька можливих сценаріїв розвитку подій.

Складні умови

У процесі побудови алгоритмів часто виникають ситуації, коли необхідно перевіряти не одну, а кілька умов одночасно. Для цього застосовуються **складні умови**, які будуються з простіших за допомогою логічних операцій. Основні з них такі:

- **Логічне множення (кон'юнкція) AND** — позначається символом $\wedge$. Умовний вираз $A \wedge B$ істинний тоді й тільки тоді, коли істинні обидві умови A і B .
- **Логічне додавання (диз'юнкція) OR** — позначається символом $\vee$. Вираз $A \vee B$ істинний, якщо істинна хоча б одна з умов A або B .
- **Заперечення (NOT)** — позначається символом $!$. Якщо умова A істинна, то $!A$ є хибною, і навпаки.
- **Виключене додавання (XOR)** — позначається символом $\oplus$. Вираз $A \oplus B$ істинний тоді, коли істинне тільки одне з висловлювань A або B , але не обидва одночасно.
- **Заперечене множення (NAND)** — позначається символом $\uparrow$ або записом $!(A \wedge B)$. Вираз $A \text{ NAND } B$ істинний тоді, коли $A \wedge B$ хибний, тобто істинний у всіх випадках, крім обох істинних одночасно.
- **Заперечене додавання (NOR)** — позначається символом $\downarrow$ або записом $!(A \vee B)$. Вираз $A \text{ NOR } B$ істинний тоді, коли обидві умови A і B хибні.

A	B	$!A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \oplus B$	$A \uparrow B$	$A \downarrow B$
1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1

Табл. 3.1. Таблиця істинності для основних логічних операцій.

Примітка. Позначення стрілка вгору для NAND пояснюється тим, що це комбінація двох символів $!$ та $\wedge$. Аналогічно для NOR — комбінація символів $!$ та $\vee$ нагадує стрілку вниз.

Складні умови дозволяють комбінувати кілька перевірок в один логічний вираз. У такому виразі, як і в арифметиці, операції мають

пріоритет, тобто порядок, у якому вони виконуються, якщо не використані дужки.

1. **NOT (заперечення, !)** — має найвищий пріоритет. Виконується першим. Приклад:

$$!A \wedge B$$

спочатку обчислюється $!A$, а потім результат кон'юнкції з B .

2. **AND (кон'юнкція, $\wedge$)** — має середній пріоритет, виконується після NOT, але перед OR та XOR. Приклад:

$$A \wedge B \vee C$$

обчислюється як $(A \wedge B) \vee C$.

3. **OR (диз'юнкція, $\vee$) та XOR (виключне додавання, $\oplus$)** — мають нижчий пріоритет, ніж AND і NOT. Приклад:

$$A \vee B \wedge C$$

обчислюється як $A \vee (B \wedge C)$.

4. **NAND ($\uparrow$) та NOR ($\downarrow$)** — у схемах та програмуванні їх часто трактують як єдиний оператор, який вже включає NOT. Пріоритет:

- $\text{NAND} = \text{NOT AND} \Rightarrow$ спочатку AND, потім NOT
- $\text{NOR} = \text{NOT OR} \Rightarrow$ спочатку OR, потім NOT

Загальне правило: Дужки завжди мають перевагу над пріоритетом. Якщо сумніваєтесь, ставте дужки, щоб явно визначити порядок обчислень.

Приклади складних умов, які можуть бути використані у блок-схемах:

$$(x \geq 1) \wedge (x \leq 10), \quad (x < 0) \vee (x > 100), \quad !(x = 0).$$

У блок-схемах такі вирази розміщуються замість умови. Вони так само як проста умова повертають значення "Так" або "Ні".

Циклічні алгоритми

У багатьох алгоритмах виникає необхідність багаторазового виконання певної послідовності дій. Такі алгоритми називають *циклічними*, а повторювану частину — *тілом циклу*.

Побудова циклічного алгоритму передбачає:

1. визначення дій, які необхідно виконати перед входом у цикл ;
2. визначення операцій, що становлять тіло циклу;
3. формулювання умови, за якої здійснюється вихід із циклу.

Для подання циклічних алгоритмів використовують алгоритмічні конструкції повторення. Вони можуть реалізовуватися різними способами.

Прості цикли з параметром. Якщо у процесі обробки даних є змінна, значення якої змінюється за відомим правилом або у відомих межах, то можна заздалегідь визначити кількість повторень тіла циклу. Таку змінну називають *параметром циклу*, а сам цикл — *циклом з параметром* (або арифметичним циклом). Графічне представленням циклу з параметром подане на (рис. 3.10).

Як параметр циклу можна використовувати змінну, яка належить до оброблюваної інформації; індексну змінну, якщо оброблювана інформація є масивом; коефіцієнти, що змінюються за законом арифметичної прогресії. Наприклад, алгоритм обчислення значення функції при зміні аргументу з певним кроком:

$$y = \frac{x}{1 + x^2}$$

при $x = 1.0, 1.1, 1.2, \dots 3$. Тут за параметр циклу можна обрати змінну x , яка змінюється від значення $x_1 = 1$ до значення $x_2 = 3$ з кроком $h = 0.1$.

Ітераційні цикли. У багатьох задачах кількість повторень циклу неможливо визначити заздалегідь. Це стосується, зокрема, розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з великою кількістю невідомих, пошуку коренів алгебраїчних та трансцендентних рівнянь, розв'язання систем диференціальних рівнянь, задач інтерполяції та екстраполя-

ції, обчислення функцій за допомогою рядів чи наближеного інтегрування. У таких випадках застосовуються *ітераційні цикли*, які реалізують процес багаторазового повторення дій до досягнення певної умови завершення.

Оскільки кількість повторень ітерацій наперед невідома, необхідно чітко сформулювати *умову виходу з циклу*, яка визначається особливостями конкретної задачі.

Розрізняють два основних типи ітераційних циклів:

- **Цикл з передумовою** — умова перевіряється перед виконанням кожної ітерації. Якщо умова істинна, тіло циклу виконується; якщо ні — робота циклу завершується (рис. 3.11).
- **Цикл з постумовою** — умова перевіряється після виконання тіла циклу. Це гарантує виконання хоча б однієї ітерації незалежно від початкових даних (рис. 3.12).

Поєднання елементарних алгоритмічних конструкцій, що розглянуті вище, дозволяє формувати алгоритми довільної складності. Цього набору структур цілком достатньо для реалізації навіть найскладніших обчислювальних процедур.

Алгоритм розрахунку суми нескінченного збіжного ряду

Задача. Розрахувати суму ряду:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

У сумі врахувати усі доданки, які більші за задане значення ε .

Алгоритм розрахунку суми елементів числового масиву

Задача. Задано масив A , який містить n чисел. Необхідно скласти блок-схему розрахунку суми всіх елементів масиву:

У розглянутих вище циклах з передумовою та постумовою містяться два обов'язкові елементи: блок перевірки завершення циклу та розрахунковий блок, у якому змінюється ітератор або параметр. У

блок-схемах циклів з ітератором чи параметром ці елементи можна об'єднати в один спеціальний блок, який називають *блоком модифікації циклу*. Він одночасно виконує перевірку умови та зміну параметра, роблячи схему більш компактною й наочною. Наприклад, розглянемо цикл, в якому розраховуються значення функції $y = x^2$ починаючи з $x = x_0$ до $x = x_n$ з кроком Δx .

Алгоритми зі структурою вкладених циклів

У деяких алгоритмах одна команда циклу містить інші команди циклу. Такі цикли називають *вкладеними*. Цикл, який містить інші цикли, називають *зовнішнім*, а той, що знаходиться всередині — *внутрішнім*.

Під час організації вкладених циклів важливо пам'ятати:

- Зовнішній цикл керує загальним процесом виконання.
- Внутрішній цикл виконується повністю для кожного кроку зовнішнього циклу.
- Параметри зовнішнього циклу можуть впливати на параметри внутрішнього.
- Внутрішній цикл повністю поміщається всередині зовнішнього.

Вкладені цикли часто використовують для обробки двовимірних структур даних, таких як *матриці*. Це дозволяє ефективно реалізувати алгоритми, що потребують доступу до елементів у рядках і стовпцях.

Введення елементів матриці

Нехай матриця **A** має n рядків і m стовпців. Кожен її елемент визначається двома індексами: перший відповідає номеру рядка, другий — номеру стовпця. Наприклад, елемент $A[2, 3]$ розташований у другому рядку та третьому стовпці.

Щоб повністю задати матрицю, потрібно ввести значення всіх її елементів. Елемент матриці позначають як $A[i, j]$, де i змінюється від 1 до n , а j — від 1 до m .

Кожен рядок матриці можна розглядати як окремий одновимірний масив. Тому для введення елементів матриці застосовують вкладені цикли:

- зовнішній цикл керує номером рядка (i),
- внутрішній цикл — введенням елементів цього рядка, тобто перебором індексів стовпців (j).

При переході до нового рядка індекс j знову встановлюється рівним 1. У внутрішньому циклі після введення кожного елемента значення j збільшується, доки не буде заповнено весь рядок. Коли умова для продовження внутрішнього циклу (блок 7) порушується, у блоці 8 збільшується номер рядка i , і починається введення наступного рядка. Зовнішній цикл повторюється, поки не будуть введені всі n рядків, і завершується лише тоді, коли $i > n$.

Блок-схема алгоритму

Блок-схема алгоритму введення матриці A може бути спрощена, якщо використати блоки модифікації циклів. Запис $i = 1, n, 1$ у блоці модифікації означає, що у відповідному циклі ітератор i змінюється зі значення 1 до значення n з кроком 1.

Підпорядковані алгоритми. Підпрограми.

У процесі розв'язання складних задач часто виникає потреба в багаторазовому виконанні одного й того самого набору дій. Щоб уникнути дублювання коду, такі дії оформлюють у вигляді окремого *підпорядкованого алгоритму*, який називають підалгоритм, а в програмуванні — *підпрограма*, який називається *підпрограмою*.

Використання підпрограм дозволяє:

- спростити структуру програми;
- підвищити її читабельність;

- забезпечити повторне використання коду.

У блок-схемах підпрограми позначаються спеціальним графічним елементом — прямокутником з подвійними бічними сторонами.

Задача. Скласти алгоритм обчислення числа сполучень. Формула для розрахунку має вигляд: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$. Обчислення факторіалу слід оформити у вигляді окремої підпрограми.

У цій задачі необхідно тричі обчислити факторіал: $n!$, $m!$ і $(n - m)!$. Для розрахунку факторіала розроблено окремий підалгоритм (підпрограму). Замість повного запису послідовності блоків обчислення факторіалів, які мали б повторюватися тричі в основній схемі, використовуються спеціальні блоки виклику підпрограми розрахунку факторіала.

Застосування підпрограм широко використовується в алгоритмічній практиці та є одним із найважливіших і найефективніших прийомів. Уміння аналізувати складні задачі та розбивати їх на простіші — фундаментальна навичка програміста.

Підпрограми приймають вхідні параметри, виконують над ними певні операції та повертають вихідні значення у вигляді змінних, що змінюються в процесі виконання. Якщо підпрограма повертає лише одне значення, її зручно оформлювати як підпрограму-функцію, яка повертає результат у місці виклику — аналогічно до математичних функцій, таких як $\sin(x)$ або $\exp(x)$.

Рекурсія. Рекурсивні алгоритми

Якщо підпрограма-функція для обчислення свого значення при певному параметрі викликає сама себе з іншим значенням параметра, то така функція називається *рекурсивною*, а сам процес — *рекурсією*. Найпростіший приклад рекурсії можна продемонструвати в рекурсивному алгоритмі обчислення факторіала.

Рекурсивний алгоритм обчислення факторіала. Назвемо підпрограму-функцію $fact(n)$. Оскільки обчислення факторіала числа n можна записати як добуток $n \cdot (n - 1)!$, тобто зводиться до обчислення факторіала числа $(n - 1)$, то функція $fact(n)$ буде викликати $fact(n - 1)$, і так далі. У рекурсивних функціях важливо

забезпечити умову завершення рекурсії. У випадку факторіала це досягається при виклику $fact(1)$, для якого заздалегідь визначено значення: $fact(1) = 1$. Блок-схема алгоритму наведена на рис. 3.19.

Рекурсивний алгоритм обчислення визначника матриці

Іншим прикладом рекурсивного алгоритму є обчислення визначника матриці A . Визначник квадратної матриці розмірності $n \times n$ можна виразити через визначники матриць меншої розмірності. Згідно з формулою Лапласа, визначник матриці A обчислюється як:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} \cdot a_{1,j} \cdot \det(A_{1,j}),$$

де $a_{1,j}$ — елемент першого рядка та j -го стовпця, а $A_{1,j}$ (мінор) — матриця, отримана шляхом видалення першого рядка та j -го стовпця з A .

Цей підхід дозволяє реалізувати рекурсивну функцію $\det(A)$, яка викликає сама себе для обчислення визначників мінорів, поки не буде досягнуто базового випадку — матриці розміром 1×1 , для якої $\det(A) = a_{1,1}$.

Блок-схема рекурсивного алгоритму наведена на рис. 3.20.

Задачі для самостійного розв'язування

1. Задано координати точки $P(x, y)$. Скласти алгоритм перевірки того, чи потрапляє ця точка в одиничне коло з центром у початку координат.
2. Задано координати точки $P(x, y)$. Скласти алгоритм перевірки того, чи потрапляє ця точка у квадрат зі стороною 2 та центром у початку координат.
3. Удосконалити алгоритми попередніх задач для випадку, коли задано масив з n точок.
4. Задано координати точки $P(x, y)$. Скласти алгоритм визначення номера координатної чверті, в яку потрапляє ця точка. Якщо точка розташована на осі, то вказати назву цієї осі.

5. Скласти алгоритм розв'язку квадратного рівняння за заданими коефіцієнтами a , b , c .
6. Скласти алгоритм розрахунку суми елементів масиву $A[1..n]$.
7. Скласти алгоритм розрахунку середнього зросту студентів у групі.
8. Скласти алгоритм розрахунку факторіалу $n!$.
9. Скласти алгоритм розрахунку суми ряду

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

У сумі врахувати усі доданки, які більші за задане значення ε .

10. Скласти алгоритм визначення можливості утворення трикутника з заданими довжинами його сторін a , b , c .

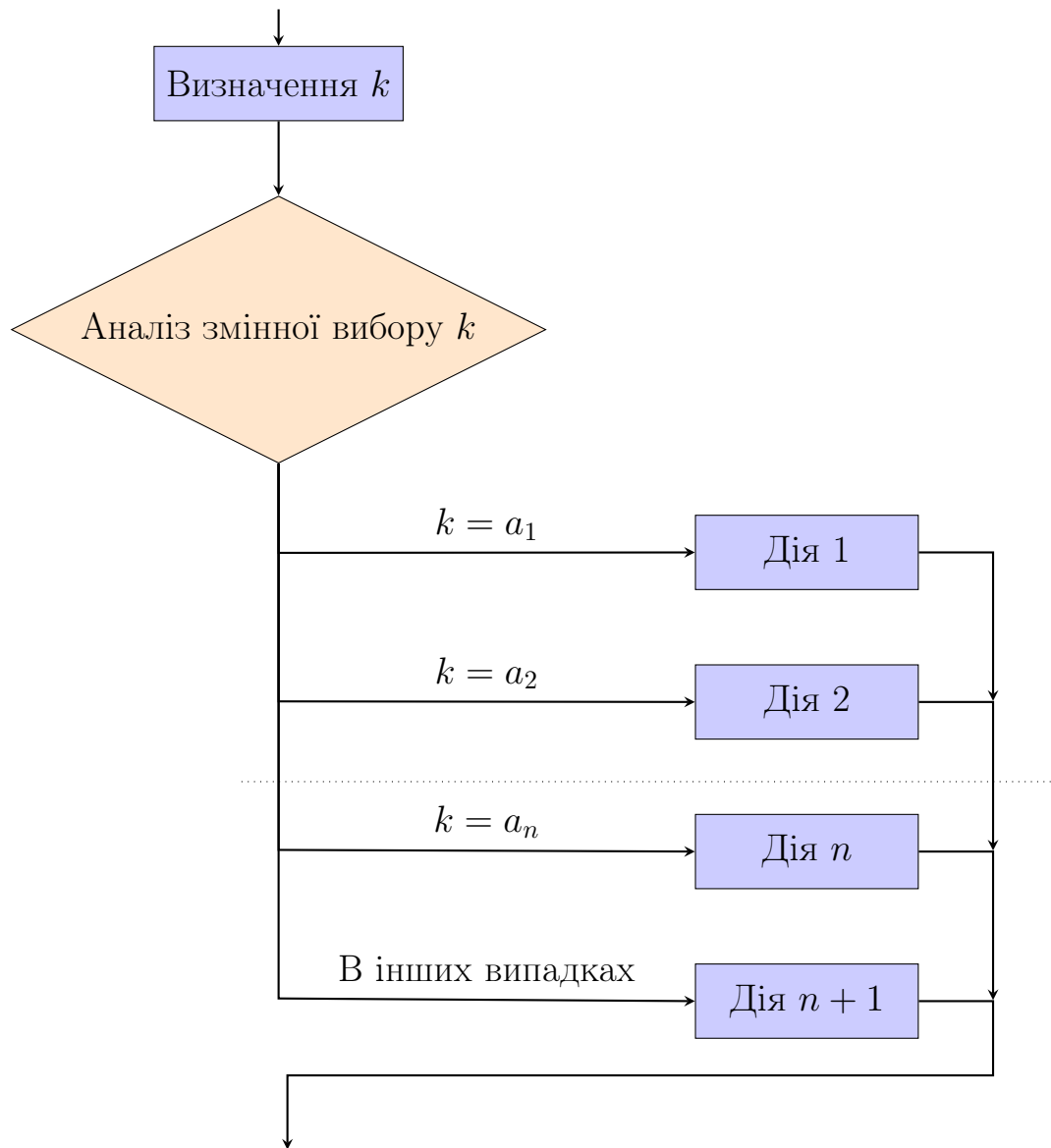


Рис. 3.8. Блок-схема багатоваріантного вибору за значенням змінної.

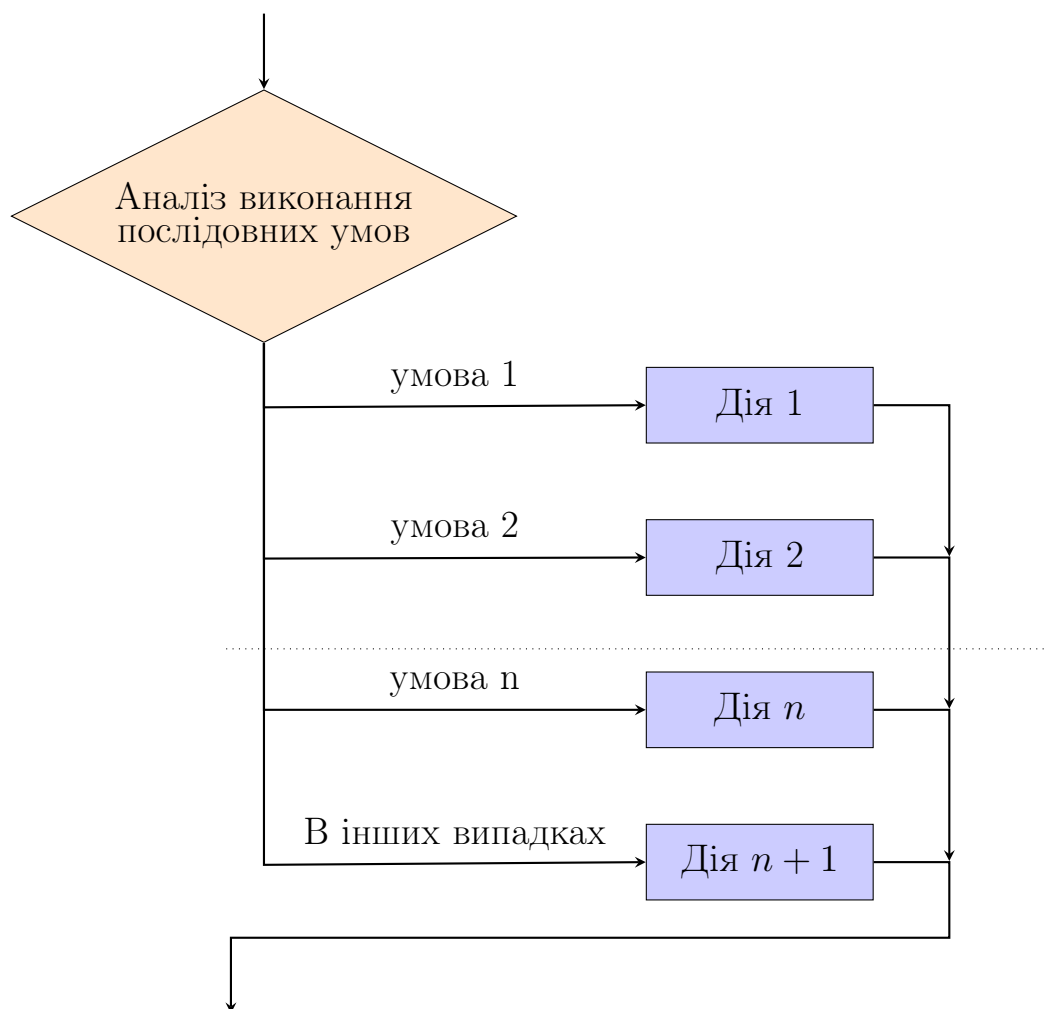


Рис. 3.9. Блок-схема багатоваріантного вибору за послідовною перевіркою ряду умов.

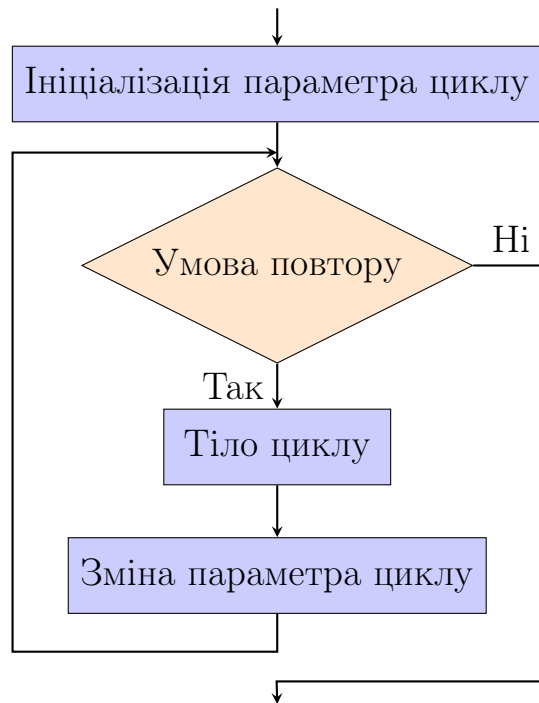


Рис. 3.10. Блок-схема циклу з параметром.

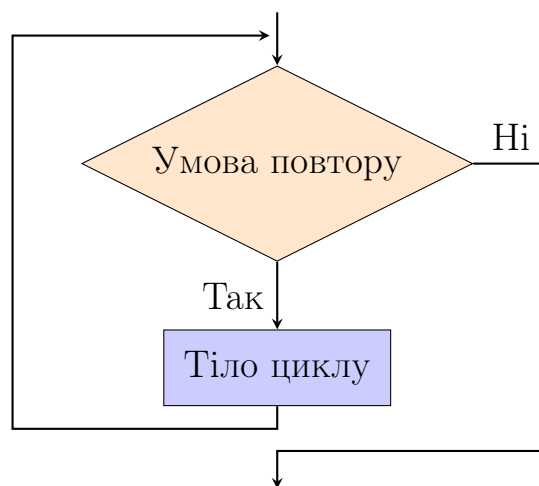


Рис. 3.11. Цикл з передумовою (перевірка умови перед ітерацією)

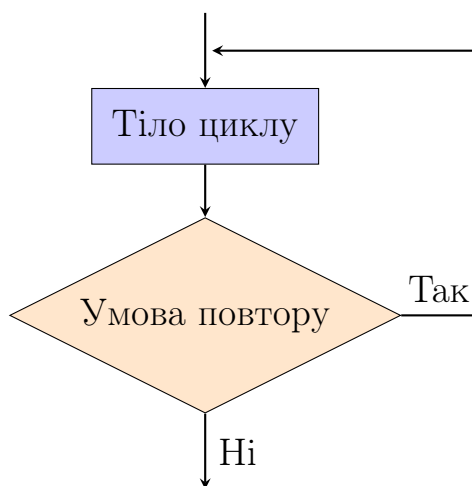


Рис. 3.12. Цикл з постумовою (перевірка умови після ітерації)

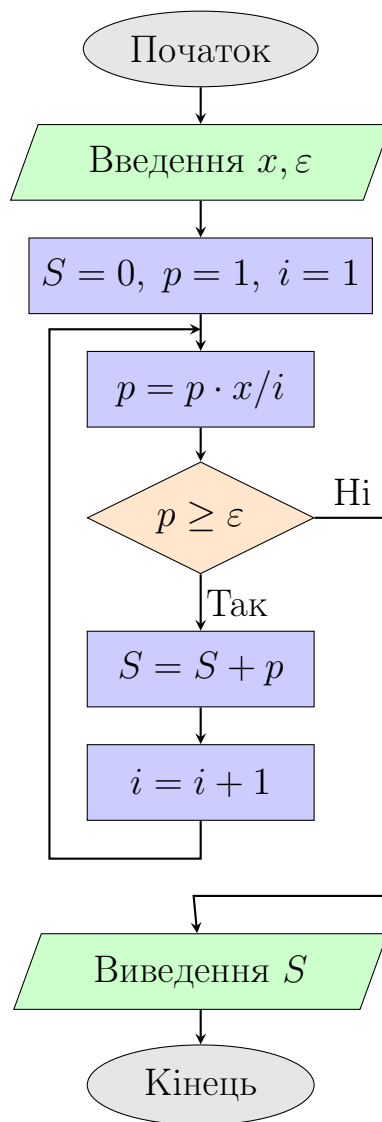


Рис. 3.13. Блок-схема алгоритму розрахунку суми ряду

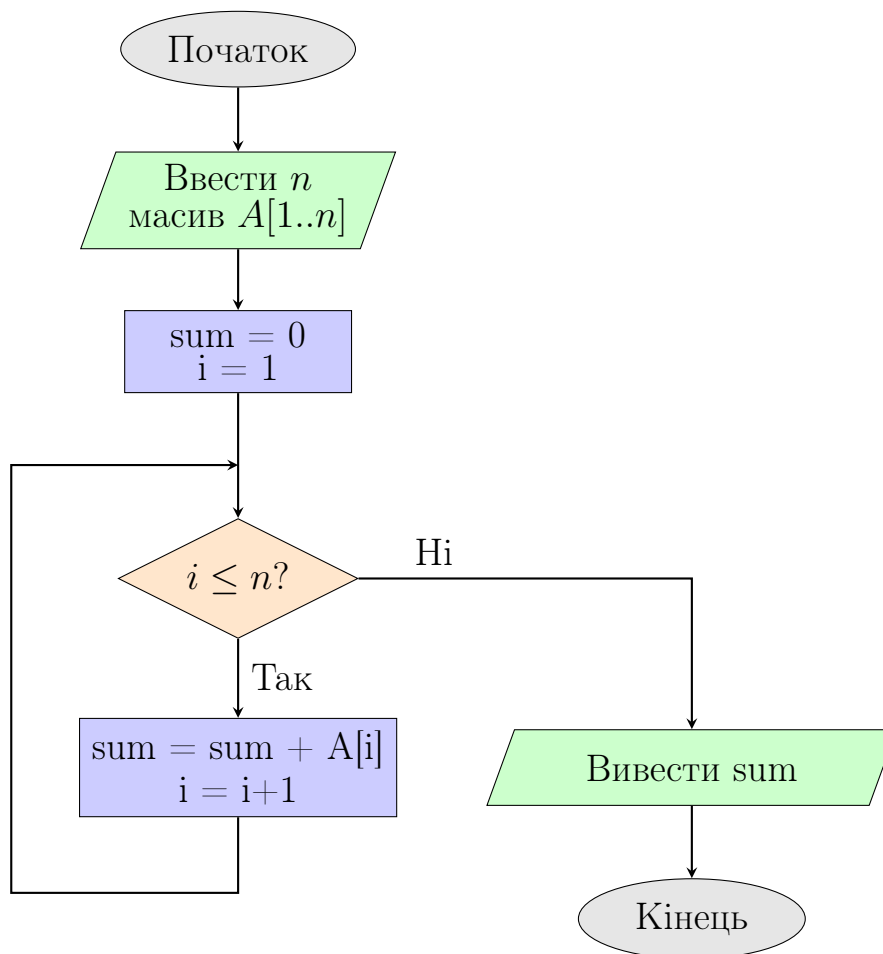


Рис. 3.14. Блок-схема алгоритму розрахунку суми елементів масиву

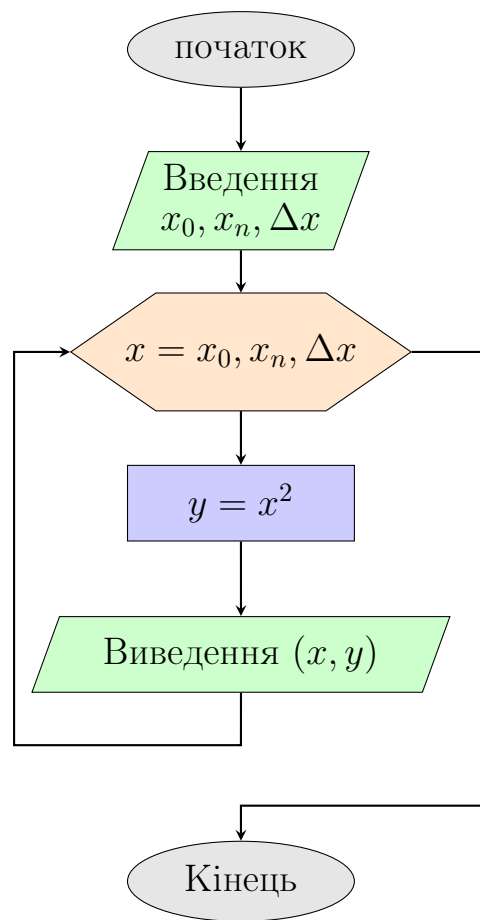


Рис. 3.15. Блок-схема алгоритму обчислення $y = x^2$ із застосуванням блоку модифікації циклу.

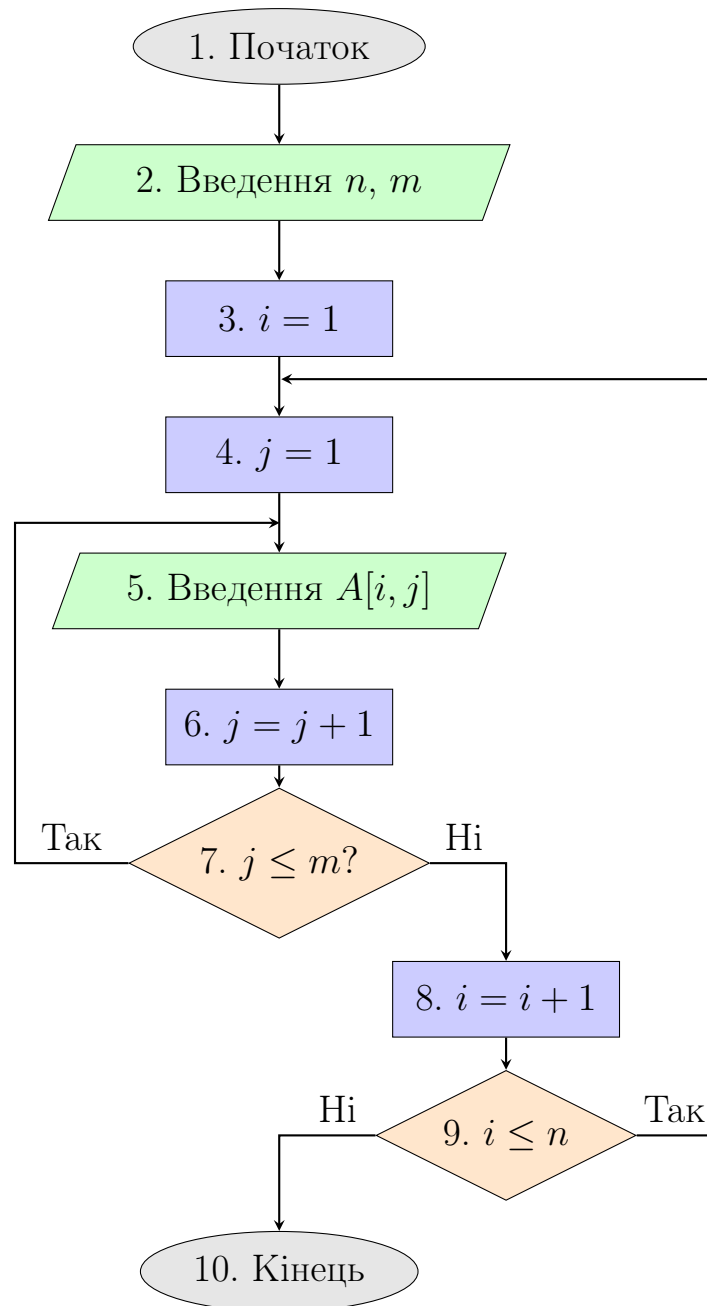


Рис. 3.16. Блок-схема алгоритму введення елементів матриці.

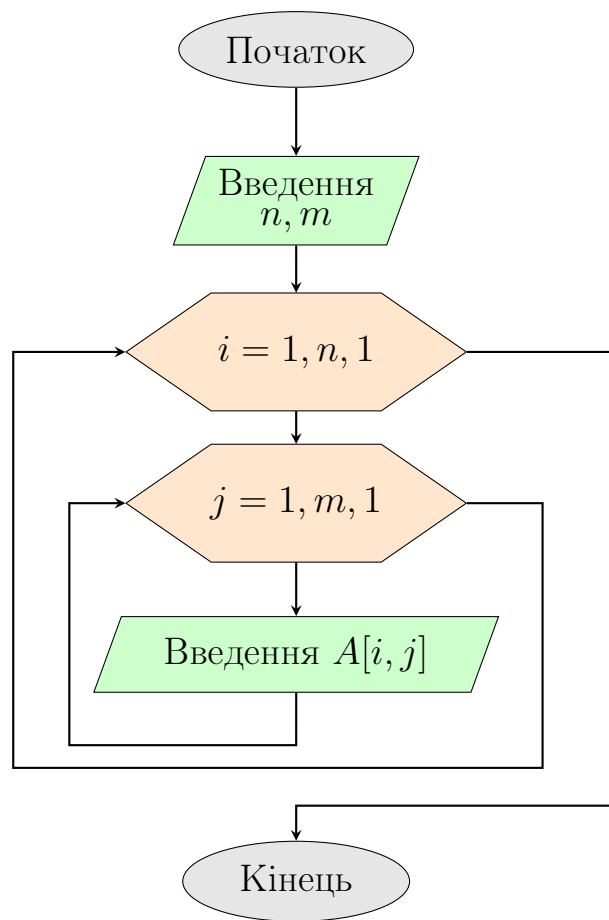


Рис. 3.17. Блок-схема алгоритму введення матриці з використанням блоків модифікації циклів.

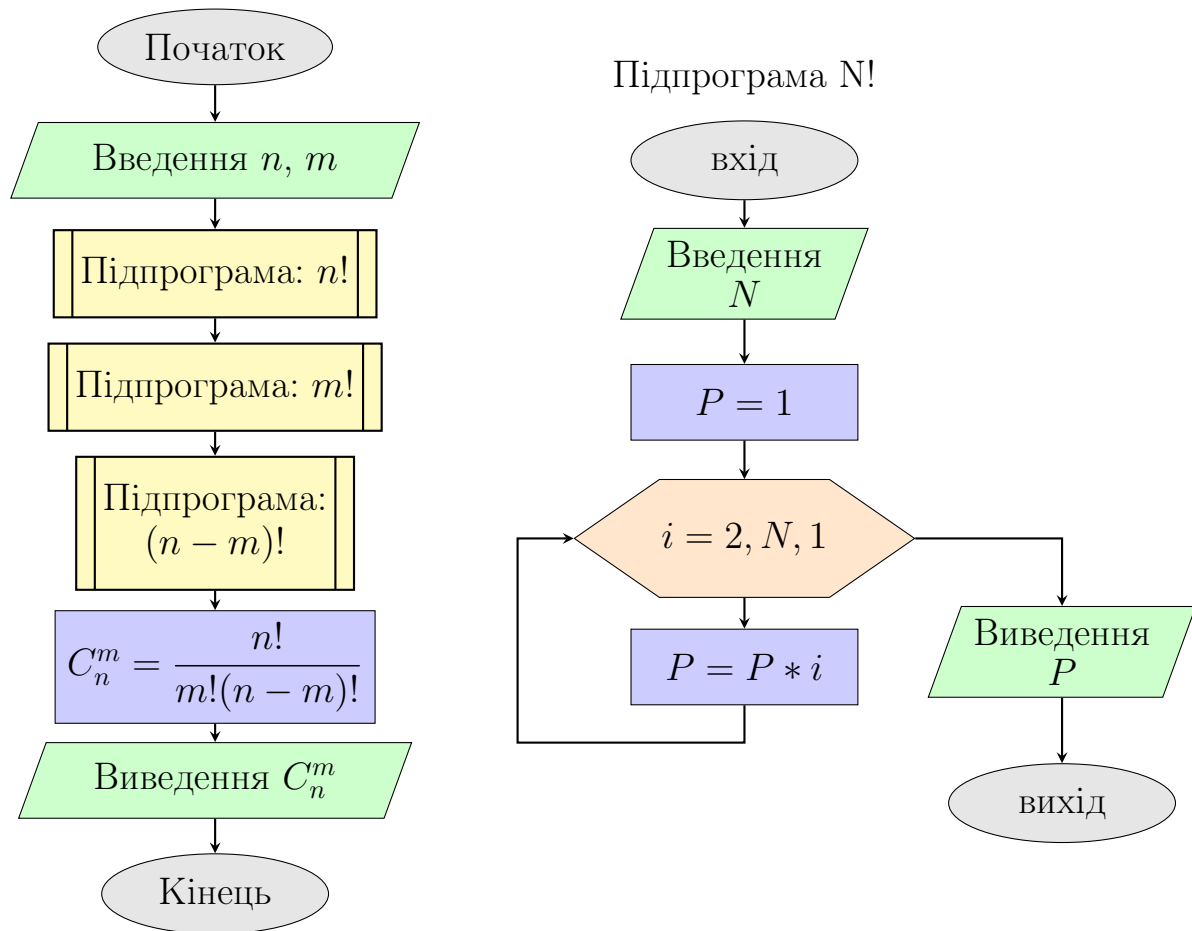


Рис. 3.18. Блок-схема алгоритму розрахунку числа сполучень (біноміальних коефіцієнтів) з використанням підпрограми факторіалу.

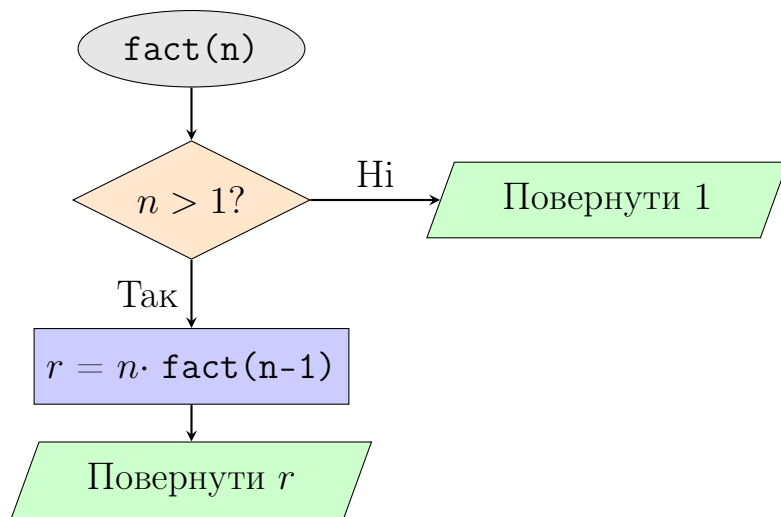


Рис. 3.19. Рекурсивна підпрограма-функція розрахунку факторіалу.

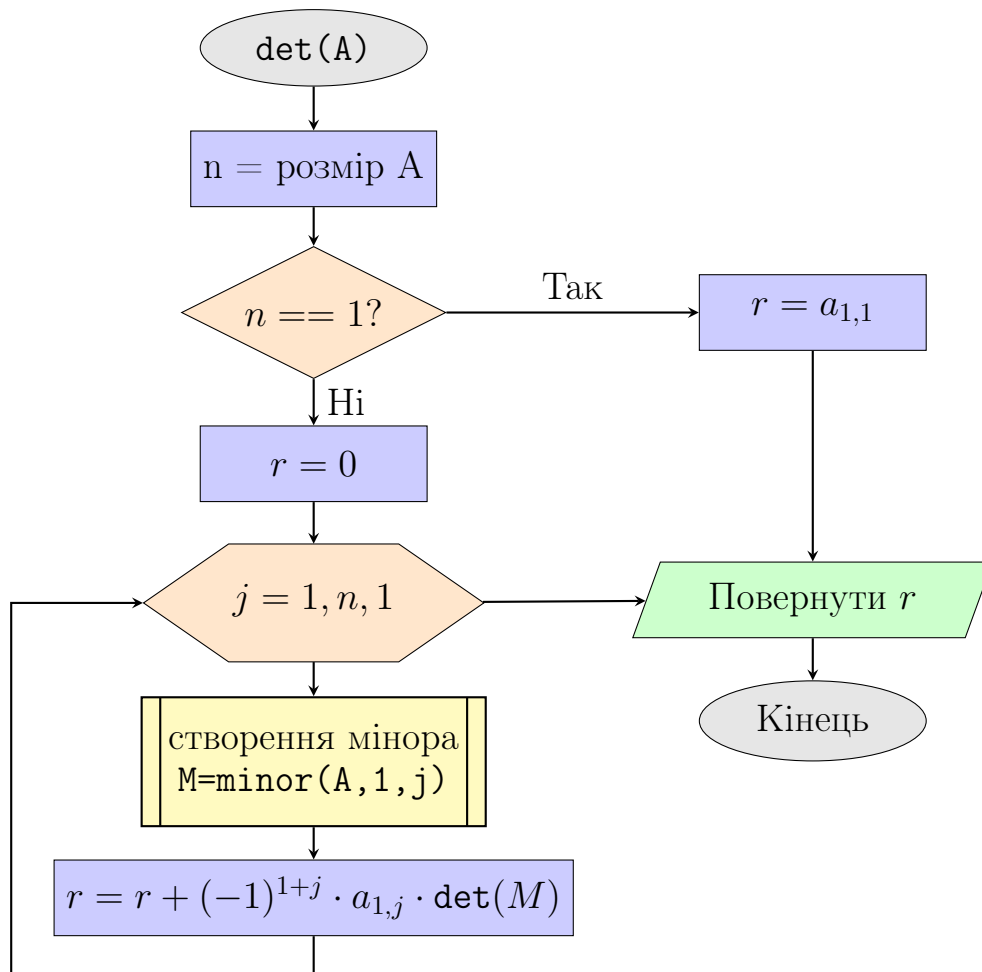


Рис. 3.20. Рекурсивна підпрограма-функція розрахунку визначника.

Розділ 4

РОЗВ'ЯЗКИ ТИПОВИХ ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ

У цьому розділі наведено задачі на закони збереження (лінійного імпульсу, енергії, моменту імпульсу, рівняння Бернуллі, рівняння Ціолковського) з детальними аналітичними виведеннями. Кожна задача супроводжується коментарем щодо застосування відповідних законів та поясненням кожного кроку розрахунку.

Довідник формул: Кінематика

1. Рівномірний рух

Означення. Середньою швидкістю руху матеріальної точки на проміжку часу Δt називається відношення пройденого шляху ΔS за цей час до його тривалості:

$$v_{\text{сер}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

У випадку, коли тіло рухалось половину всього часу з швидкістю v_1 , а другу половину часу з швидкістю v_2 , то середня швидкість дорівнює середній арифметичній швидкості: $v_{\text{сер}} = \frac{v_1 + v_2}{2}$

2. Рівноприскорений прямолінійний рух

Величина	Формула
Прискорення	$a = \frac{v-v_0}{t}$
Швидкість у момент часу t	$v = v_0 + at$
Переміщення (через час)	$s = v_0t + \frac{1}{2}at^2$
Переміщення (без часу)	$s = \frac{v^2-v_0^2}{2a}$
Середня швидкість	$v_{\text{ср}} = \frac{v_0+v}{2}$
Шлях через середню швидкість	$s = v_{\text{ср}} \cdot t$

3. Тіло, кинуте вертикально вгору (без опору повітря)

Величина	Формула
Закон руху (координата)	$y = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$
Швидкість у момент часу t	$v = v_0 - gt$
Час підйому	$t = \frac{v_0}{g}$
Максимальна висота	$h_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{2g}$
Повний час польоту (вверх/вниз)	$T = \frac{2v_0}{g}$

4.1. Рівномірний рух. Середня швидкість

Задача.1 Тіло долає однакову відстань у два етапи з різними сталими швидкостями v_1 та v_2 . 1) У першому сценарії воно проходить першу половину шляху зі швидкістю v_1 , а другу — зі швидкістю v_2 . 2) У другому сценарії воно рухається першу половину часу зі швидкістю v_1 , а другу — зі швидкістю v_2 . Знайти середні швидкості в обох сценаріях і визначити, у якому випадку середня швидкість більша.
Розв'язок.

1) *Половини шляху.* Нехай загальна відстань дорівнює S . Тоді

$$t_1 = \frac{S}{2v_1}, \quad t_2 = \frac{S}{2v_2}, \quad t = t_1 + t_2 = \frac{S}{2} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right).$$

Середня швидкість

$$v_{\text{шлях}} = \frac{S}{t} = \frac{S}{\frac{S}{2} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right)} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} \quad (\text{гармонійне середнє } v_1 \text{ і } v_2).$$

2) *Половини часу.* Нехай загальний час дорівнює T . Тоді пройдений шлях

$$S = \frac{T}{2}v_1 + \frac{T}{2}v_2 = \frac{T}{2}(v_1 + v_2),$$

а середня швидкість

$$v_{\text{час}} = \frac{S}{T} = \frac{v_1 + v_2}{2} \quad (\text{арифметичне середнє } v_1 \text{ і } v_2).$$

Порівняння. Потрібно показати, що

$$\frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} \leq \frac{v_1 + v_2}{2} \quad (v_1, v_2 > 0).$$

Домножимо обидві частини на $2(v_1 + v_2) > 0$:

$$4v_1v_2 \leq (v_1 + v_2)^2 = v_1^2 + 2v_1v_2 + v_2^2 \iff 0 \leq v_1^2 - 2v_1v_2 + v_2^2 = (v_1 - v_2)^2.$$

Остання нерівність істинна завжди, а рівність досягається тоді й лише тоді, коли $v_1 = v_2$.

Висновок. Середня швидкість є більшою у другому сценарії (коли половину часу рухаються зі швидкістю v_1 , а половину — зі швидкістю v_2). Рівність середніх швидкостей має місце лише за умови $v_1 = v_2$.

4.2. Рівномірний рух. Три задачі про річку

Модель і позначення. Координати: вісь x вздовж течії (додатний напрямок — вниз за течією), вісь y — поперек річки. Береги: $y = 0$ та $y = L$. Швидкість течії стала $u > 0$. Човен має сталу швидкість відносно води v і тримає курс під кутом β до додатного напрямку осі x (рахуємо проти годинникової стрілки). Тоді швидкість човна відносно берега дорівнює векторній сумі $\vec{V} = \vec{u} + \vec{v}$ і має наступні компоненти:

$$V_x = u + v \cos \beta,$$

$$V_y = v \sin \beta.$$

Задача 1. Прямо навпроти. Під яким кутом до напрямку швидкості течії $\vec{u}$ потрібно плисти, щоб вийти на протилежному березі точно навпроти старту. Знайти кут і час.

Розв'язання. Потрібно $V_x = 0 \Rightarrow u + v \cos \beta = 0$, тобто

$$\cos \beta = -\frac{u}{v} \quad (v \geq u), \quad \beta = \arccos\left(-\frac{u}{v}\right) \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

Цей розв'язок легко отримати на основі рисунка 4.1.

$$\sin(\alpha) = \sin(\beta - \pi/2) = -\cos \beta = \frac{u}{v}$$

$$\text{Тоді} \quad \sin \beta = \sqrt{1 - \frac{u^2}{v^2}} \quad \text{і} \quad t = \frac{L}{v \sin \beta} = \frac{L}{\sqrt{v^2 - u^2}}.$$

Як видно з отриманої формули, що задача має розв'язок лише у випадку $v > u$.

Задача 2. Найменший час. Переплисти якнайшвидше. На яку відстань течія знесе при найшвидшому переплитті річки?

Розв'язання. Для найшвидшого переплиття, потрібно плисти в перпендикулярному до берегів напрямку.

Тоді $t_{\min} = L/v$, знос вздовж берега

$$d = u t_{\min} = \frac{uL}{v}.$$

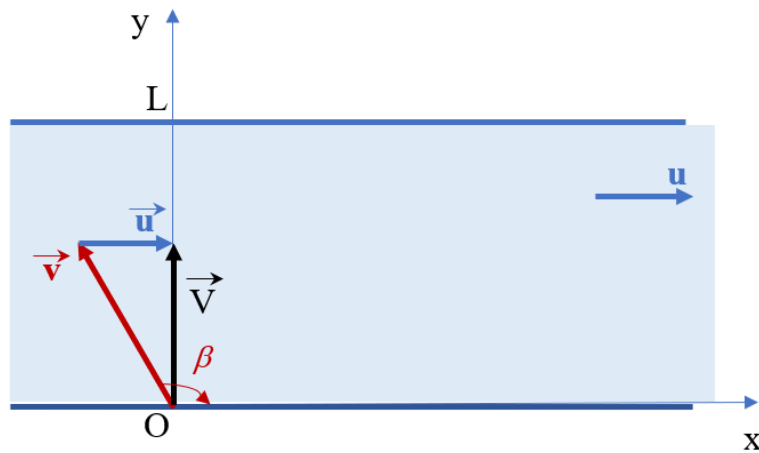


Рис. 4.1. Схема вибору напрямку руху для компенсації зносу

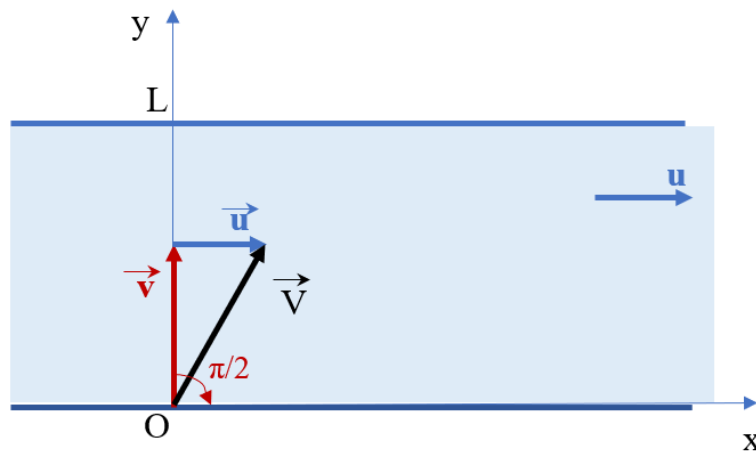


Рис. 4.2. Схема вибору напрямку руху для мінімального часу

Задача 3. З мінімальною швидкістю потрапити у задану точку на протилежному березі нижче за течією.

Нехай річка має ширину L і рівномірно тече зі швидкістю u . Човен стартує з точки A на одному березі і повинен дістатися точки B на протилежному березі, яка розташована на відстані d вниз за течією від точки, що лежить навпроти A . З якою мінімальною швидкістю та в якому напрямку потрібно плисти щоб досягти точки B .

Геометричний розв'язок. Позначимо вектор течії $\vec{u}$. За час перепливання t вектори переміщення задовольняють $\overrightarrow{AB} = \vec{V}t = \vec{u}t + \vec{v}t$, тобто вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\vec{V}$ паралельні. Отже, до вектора $\vec{u}$ потрібно додати такий вектор $\vec{v}$, щоб результуючий вектор задовольняв цю умову. Початок вектора $\vec{v}$ сумістимо з кінцем вектора $\vec{u}$, а кінець вектора $\vec{v}$ повинен лежати на відрізку AB . Найменша довжина вектора $\vec{v}$ буде у випадку, якщо він буде перпендикулярним до $\overrightarrow{AB}$. Геометрично положення кінця вектора $\vec{v}$ та його довжину можна знайти побудовою кола з центром в точці C та дотичним до відрізка AB .

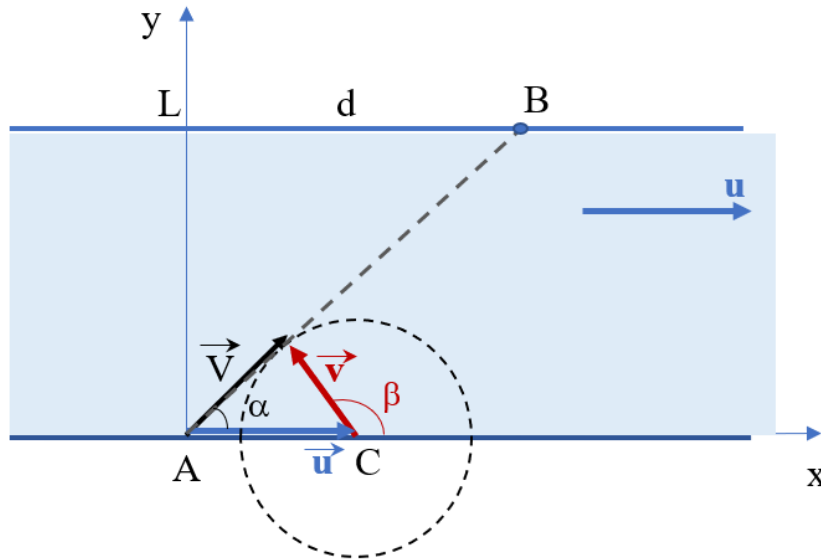


Рис. 4.3. Схема вибору напрямку руху для мінімальної швидкості

З рисунка видно, що $v = u \sin \alpha = u \frac{L}{\sqrt{d^2 + L^2}}$. $\beta = \alpha + \pi/2$

4.3. Рівномірний рух. Задача про перехрестя

Задача 1. Два автомобілі рухаються рівномірно вздовж двох взаємно перпендикулярних доріг у напрямку до перехрестя. Швидкості автомобілів становлять v_1 та v_2 відповідно. У початковий момент часу перший автомобіль знаходиться на відстані a , а другий — на

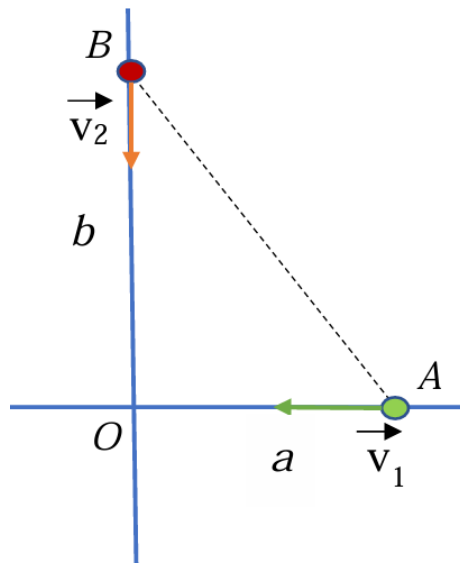


Рис. 4.4. Схема руху автомобілів.

відстані b від точки перетину доріг. Визначити мінімальну відстань між автомобілями в процесі їх руху.

Розв'язання (аналітичний підхід)

Нехай t — час, що минув від початку спостереження. Тоді координати автомобілів у момент часу t :

Перший автомобіль: $x_1(t) = a - v_1 t$

Другий автомобіль: $x_2(t) = b - v_2 t$

Відстань між автомобілями:

$$D(t) = \sqrt{(a - v_1 t)^2 + (b - v_2 t)^2}$$

Щоб знайти мінімум, розглянемо квадрат відстані:

$$D^2(t) = (a - v_1 t)^2 + (b - v_2 t)^2$$

Знайдемо похідну:

$$\frac{dD^2}{dt} = 2(a - v_1 t)(-v_1) + 2(b - v_2 t)(-v_2)$$

Прирівнюємо до нуля:

$$-2v_1(a - v_1 t) - 2v_2(b - v_2 t) = 0 \Rightarrow v_1(a - v_1 t) + v_2(b - v_2 t) = 0$$

Розв'язуємо відносно t :

$$t = \frac{v_1 a + v_2 b}{v_1^2 + v_2^2}$$

Підставляємо у формулу $D(t)$:

$$D_{\min} = d = \sqrt{(a - v_1 t)^2 + (b - v_2 t)^2}$$

Розв'язання (геометричний підхід)

Використаємо принцип відносності руху. Розглянемо рух другого автомобіля відносно першого. Для цього вважаємо, що перший автомобіль нерухомий, а другий має додатковий вектор швидкості $-\vec{v}_1$ (див рис.4.5). Напрямок руху другого авто буде відбуватись вздовж відрізка BC (під кутом α). Найменша відстань між автомобілями визначається як відстань від точки до прямої, тобто вздовж перпендикуляра. Враховуючи, що кут CAD рівний куту α , відстань d визначається через гіпотенузу $|AC|$:

$$d = |AC| \cdot \cos \alpha = (b \cdot \tan \alpha - a) \cdot \cos \alpha$$

Враховуючи $\tan \alpha = v_1/v_2$ а $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}}$ отримаємо:

$$d = \frac{(b \cdot v_1 - a \cdot v_2)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

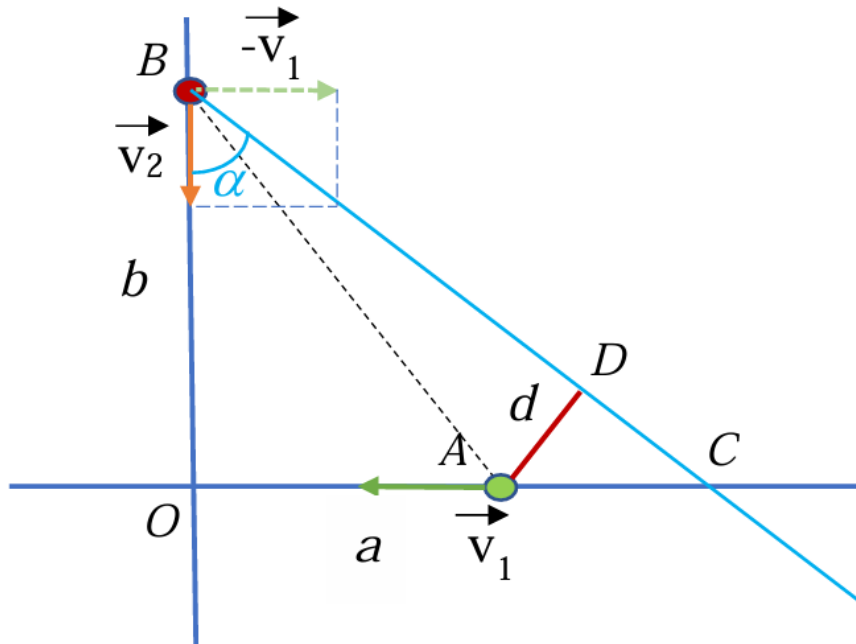


Рис. 4.5. Геометрична схема розв'язку.

Висновок

Мінімальна відстань між автомобілями:

$$D_{\min} = \frac{|av_2 - bv_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Час, коли ця відстань досягається:

$$t = \frac{v_1 a + v_2 b}{v_1^2 + v_2^2}$$

4.4. Рівноприскорений одновимірний рух

Задача 1. Ліфт, піднімаючись рівноприскорено протягом першого проміжку часу $t_1 = 2$ с, досягає швидкості $v_1 = 4$ м/с, з якою продовжує рух протягом другого проміжку часу $t_2 = 4$ с. Потім ліфт

рухається рівносповільнено і до кінця третього проміжку $t_3 = 3$ с зупиняється. Визначити висоту підйому ліфта. Розв'язати задачу також графічно.

Розв'язання. Висота підйому ліфта дорівнює

$$h = h_1 + h_2 + h_3,$$

де h_1, h_2, h_3 — шляхи, пройдені ліфтом за проміжки часу t_1, t_2, t_3 відповідно.

Оскільки протягом першого і третього проміжків ліфт рухався з рівноприскореним та рівносповільненим рухом, середні швидкості на цих ділянках дорівнюють

$$v_{cp1} = \frac{0 + v_1}{2} = \frac{v_1}{2}, \quad v_{cp3} = \frac{v_1 + 0}{2} = \frac{v_1}{2}.$$

Тоді шляхи на ділянках t_1 і t_3 дорівнюють

$$h_1 = v_{cp1}t_1 = \frac{v_1 t_1}{2}, \quad h_3 = v_{cp3}t_3 = \frac{v_1 t_3}{2}.$$

За час t_2 , рухаючись рівномірно, ліфт пройшов шлях

$$h_2 = v_1 t_2.$$

Таким чином, повна висота підйому ліфта

$$h = \frac{v_1 t_1}{2} + v_1 t_2 + \frac{v_1 t_3}{2} = \frac{v_1}{2}(t_1 + 2t_2 + t_3).$$

Підставивши значення:

$$h = \frac{4}{2}(2 + 2 \cdot 4 + 3) = 2 \cdot 13 = 26 \text{ м.}$$

Для графічного методу розв'язку задачі побудуємо графік залежності швидкості від часу $v(t)$. Очевидно, що висота підйому ліфта дорівнює його переміщенню у вертикальному напрямку. У випадку

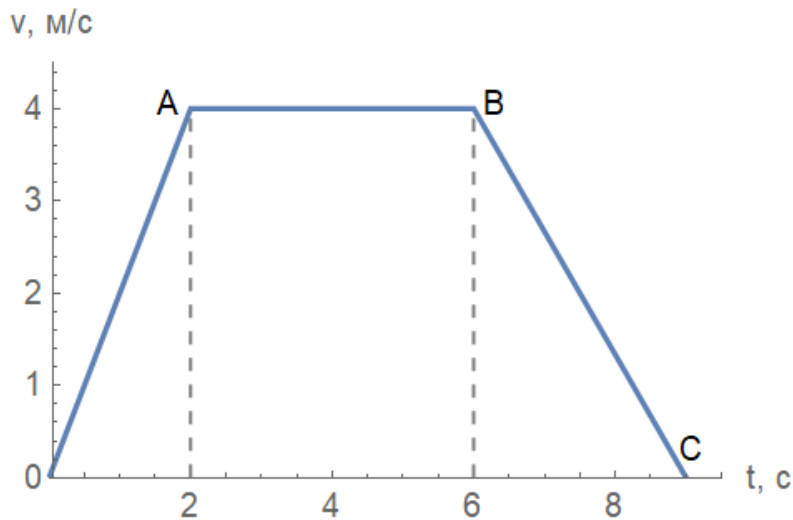


Рис. 4.6. Графічний метод розв'язку

швидкості, залежної від часу переміщення можна розрахувати через інтеграл :

$$h = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

Значення інтеграл дорівнює площі фігури, що утворена віссю Ox та лінією $v(t)$. Ця площа також дорівнює 26. Отже, висота підйому ліфта дорівнює 26 м.

4.5. Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту

Подвійний постріл гармати

Гармата може вистрілити снаряд із початковою швидкістю v_0 так, що ціль на горизонтальній відстані L від гармати може бути уражена двома снарядами, що летять двома різними траєкторіями («висока» і «низька»). Нехтуючи опором повітря, визначити:

1. якою має бути затримка Δt між двома пострілами (час, на який треба відкласти другий постріл відносно першого), щоб

два снаряди — випущені під відповідними кутами, що дають однакову дальність L — влучили в ціль *одночасно*;

2. умову здійсненності (які параметри мають виконуватись, щоб задача мала розв'язок).

Розв'язок.

Кути, під якими роблять постріли на однакову дальність L , можна знайти з формули визначення дальності

$$L = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta), \quad \text{тобто} \quad \sin(2\theta) = \frac{gL}{v_0^2}.$$

Відомо, що $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$. Звідси випливає, що однакову дальність польоту з однакою початковою швидкістю можна досягнути при пострілах з двома різними кутами θ і $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$. Час польоту снаряда при пострілах під кутом θ та $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$ визначаються за часом руху у вертикальному напрямку за відповідними формулами:

$$t_1 = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}, \quad t_2 = \frac{2v_0 \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)}{g} = \frac{2v_0 \cos \theta}{g}.$$

Нас цікавить

$$\Delta t = |t_1 - t_2| = \frac{2v_0}{g} |\sin \theta - \cos \theta|.$$

Щоб позбутися кута θ у цьому виразі, піднесемо до квадрата:

$$\Delta t^2 = \frac{4v_0^2}{g^2} (\sin \theta - \cos \theta)^2$$

Враховуючи

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = 1 + \sin(2\theta)$$

та співвідношення $\sin(2\theta) = Lg/v_0^2$, отримаємо

$$\Delta t^2 = \frac{4v_0^2}{g^2} (1 - Lg/v_0^2)$$

Отже :
$$\Delta t = \frac{2}{g} \sqrt{v_0^2 - gL}$$

(Зауважимо, що ця формула має сенс лише за умови $v_0^2 \geq gL$ — тобто ціль досяжна двома траєкторіями; при $v_0^2 = gL$ обидві траєкторії збігаються і $\Delta t = 0$).

Числовий приклад. Для $g = 9.8 \text{ м/с}^2$, $v_0 = 200 \text{ м/с}$, $L = 3000 \text{ м}$:

$$v_0^2 - gL = 40000 - 29430 = 10570 \text{ (м}^2\text{/с}^2\text{)},$$

$$\Delta t = \frac{2}{9.8} \sqrt{10570} \approx \frac{2}{9.8} \cdot 102.815 \approx 21 \text{ с.}$$

Коментар. Формула дає просту інтерпретацію: якщо різниця ква-

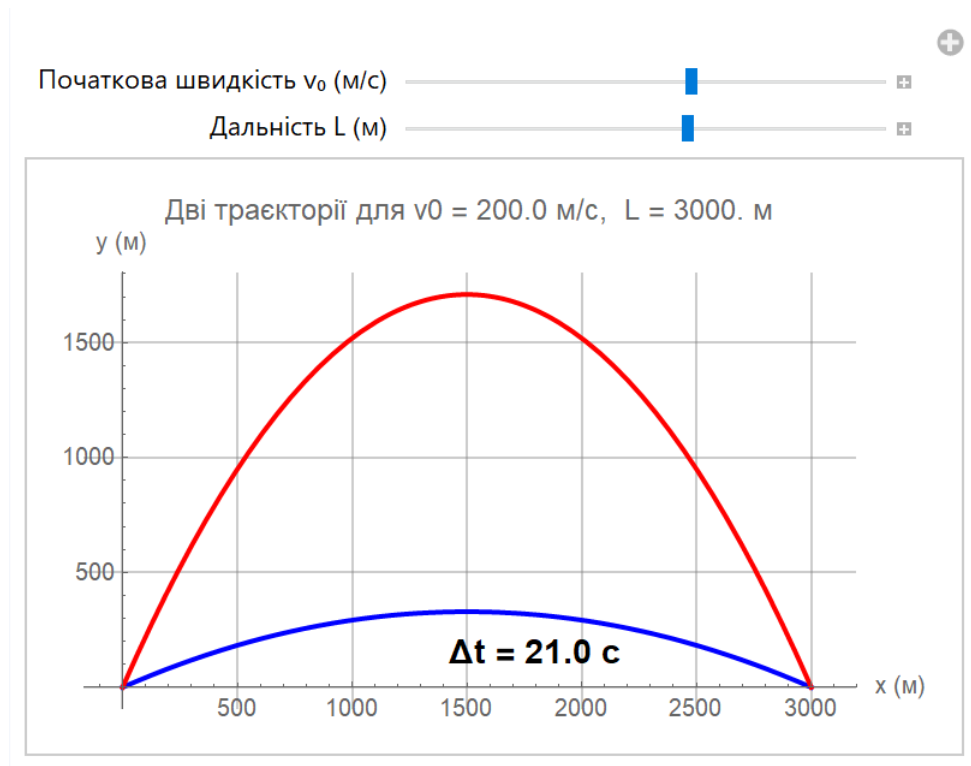


Рис. 4.7. Висока та низька траєкторія польоту снарядів, що попадають в одну ціль

драта початкової швидкості та величини gL велика, то треба довше чекати між пострілами, щоб довша (висока) траєкторія встигла наздогнати коротшу у цілі одночасно.

Максимальна дальність на похилій площині

Тіло кинуте з початковою швидкістю v_0 під кутом β до горизонту з точки, що лежить на похилій площині, нахилений до горизонту під кутом α . Знайти кут β , при якому дальність польоту вздовж похилої площини буде максимальною, та обчислити цю найбільшу дальність $L_{\max}$. Опором повітря знехтувати. Розглянути два варіанти напрямку кидання: в сторону максимального підйому та максимального спуску похилої площини

Розв'язання. Розглянемо спочатку випадок кидання в сторону під-

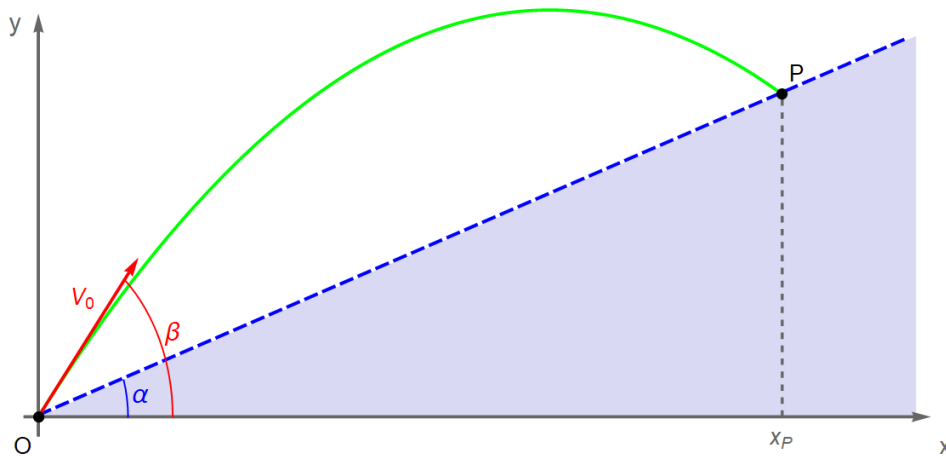


Рис. 4.8. Траєкторія руху тіла, кинутого під кутом до горизонту

йому. Вісь Ox направимо горизонтально, тоді параметричні рівняння руху (параметром слугує час польоту):

$$x(t) = v_0 \cos \beta t, \quad y(t) = v_0 \sin \beta t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (4.1)$$

Виразимо t через x :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \beta}.$$

Підставимо в $y(t)$, отримаємо траєкторію:

$$\boxed{y(x) = x \tan \beta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \beta} x^2}. \quad (4.2)$$

Ця траєкторія має вигляд параболи, яка проходить через початок координат. Рівняння профілю похилої площини має вигляд прямої, яка також проходить через початок координат $y(x) = x \tan \alpha$.

Точка падіння (x_p, y_p) визначається з умови перетину параболи з прямою:

$$x_p \tan \beta - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \beta} x_p^2 = x_p \tan \alpha.$$

Квадратне рівняння

$$x_p(\tan \beta - \tan \alpha) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \beta} x_p^2 = 0$$

має два розв'язки : тривіальний ($x_p = 0$) та нетривіальний

$$x_p = \frac{2v_0^2 \cos^2 \beta (\tan \beta - \tan \alpha)}{g}. \quad (4.3)$$

Відстань вздовж похилої площини від початку координат до точки падіння:

$$L = \frac{x_p}{\cos \alpha} = \frac{2v_0^2 \cos^2 \beta (\tan \beta - \tan \alpha)}{g \cos \alpha}. \quad (4.4)$$

Щоб знайти $\beta_{\max}$, максимізуємо $L(\beta)$:

$$L(\beta) = \frac{2v_0^2 \cos^2 \beta (\tan \beta - \tan \alpha)}{g \cos \alpha}. \quad (4.5)$$

Цю функцію зручно перетворити до наступного вигляду

$$L(\beta) = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha} (\sin 2\beta - (1 + \cos 2\beta) \tan \alpha). \quad (4.6)$$

Для знаходження кута кидання, при якому L максимальна, розглянемо функцію:

$$f(\beta) = \sin 2\beta - (1 + \cos 2\beta) \tan \alpha.$$

Максимум знаходиться з умови:

$$\frac{df}{d\beta} = 2 \cos 2\beta + 2 \sin 2\beta \tan \alpha = 0.$$

Отримуємо рівняння:

$$\tan 2\beta_{\max} = -\cot \alpha,$$

яке внаслідок періодичності функції тангенс має безліч розв'язків. Після перетворення $-\cot \alpha = \tan \alpha + \pi/2$, отримаємо

$$\beta_{\max} = \frac{1}{2}(\alpha + \pi/2 + n\pi).$$

Лише розв'язок при $n = 0$ задовільняє умову задачі. Тому, кут кидання для максимальної відстані:

$$\beta_{\max} = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}.$$

Підставляючи $\beta_{\max}$ у формулу 4.6, можна обчислити максимальну відстань $L_{\max}$:

$$L_{\max} = \frac{2v_0^2}{g \cos \alpha} (\sin 2\beta_{\max} - (1 + \cos 2\beta_{\max}) \tan \alpha).$$

$$L_{\max} = \frac{2v_0^2}{g \cos \alpha} (\cos \alpha - (1 - \sin \alpha) \tan \alpha).$$

Після спрощення отримаємо остаточний вираз:

$$\boxed{L_{\max} = \frac{v_0^2}{g(1 + \sin \alpha)}}, \quad (4.7)$$

де вважаємо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

При $\alpha = 0$ отримаємо $\beta = 45^\circ$ і максимальна дальність для заданої початкової швидкості $L_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$.

У випадку $\alpha = 90^\circ$ отримаємо $\beta = 90^\circ$, що відповідає тілу кинутого вертикально вгору зі швидкістю v_0 . Довжина $L_{\max}$ дорівнює висоті підйому тіла $L_{\max} = H = \frac{v_0^2}{2g}$. Випадок кидання тіла у напрямку спуску буде отримано, якщо у наведених формулах замість α підставити $-\alpha$. У цьому випадку кут кидання для максимальної відстані:

$$\beta_{\max} = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2},$$

а максимальна дальність

$$L_{\max} = \frac{v_0^2}{g(1 - \sin \alpha)}. \quad (4.8)$$

Як видно з формули (4.8) при $\alpha = 90^\circ$ $L_{\max} = \infty$.

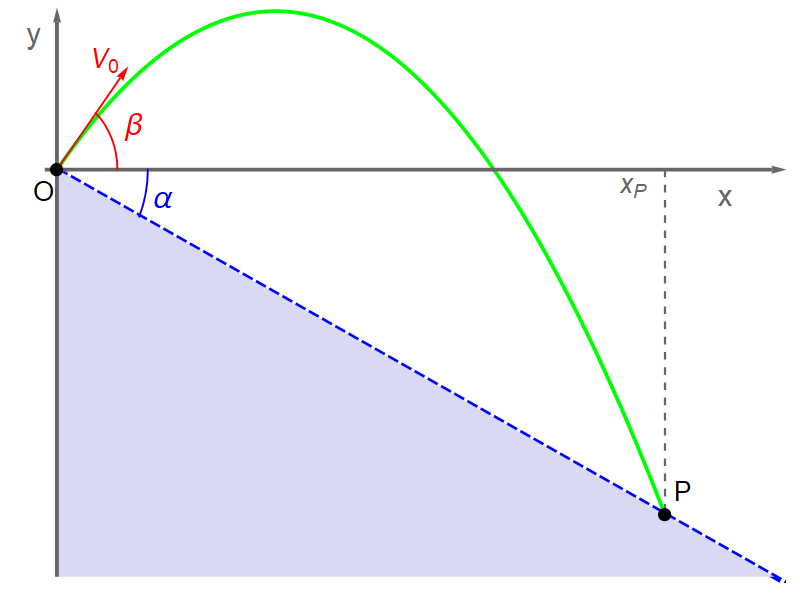


Рис. 4.9. Траєкторія руху тіла, кинутого під кутом до горизонту у напрямку спуску

Кулька стрибає по похилій площині

Кулька стрибає по похилій площині. В один з моментів відскоку кулька мала швидкість v_0 під кутом β до нахиленої площини, яка утворює з горизонтом кут α . Визначити час польоту до наступного зіткнення та максимальну висоту відскоку від похилої площини (максимальне віддалення від площини). Опором повітря знехтувати.

Розв'язання. Початок координат O візьмемо в точці кидання. Вісь Ox спрямуємо вздовж похилої площини донизу, вісь Oy — по нормалі до площини. У такій системі координат падіння кульки описується рівноприскореним рухом вздовж обох осей. Величина прискорення вздовж осі Ox та Oy визначається відповідними проєкціями :

$$a_x = g \sin \alpha, \quad a_y = -g \cos \alpha. \quad (4.9)$$

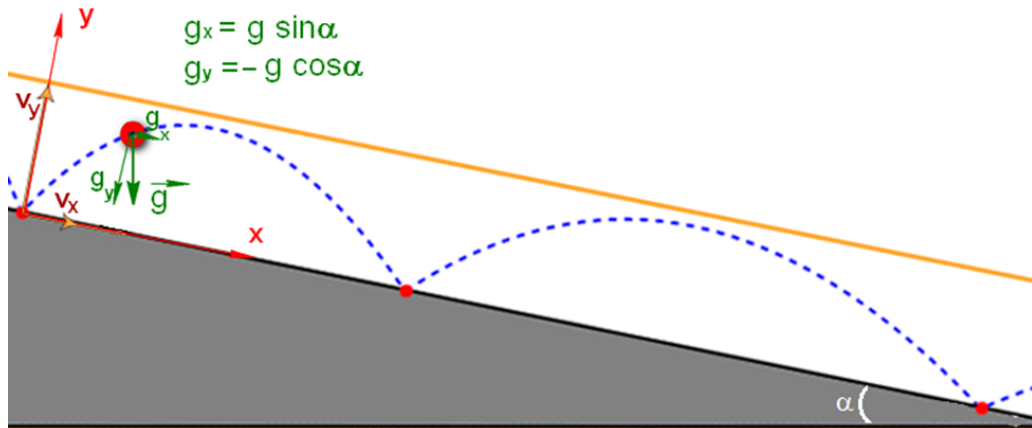


Рис. 4.10. Рух кульки, що підстрибує по похилій площині

Початкові проєкції швидкості:

$$v_{0x} = v_0 \cos \beta, \quad v_{0y} = v_0 \sin \beta.$$

Кінематичні рівняння руху (при $x(0) = y(0) = 0$):

$$x(t) = v_0 \cos \beta t + \frac{g \sin \alpha}{2} t^2, \quad y(t) = v_0 \sin \beta t - \frac{g \cos \alpha}{2} t^2.$$

Час польоту t_f знайдемо з умови $y(t_f) = 0$:

$$v_0 \sin \beta t_f - \frac{g \cos \alpha}{2} t_f^2 = 0 \Rightarrow t_f = \frac{2v_0 \sin \beta}{g \cos \alpha}.$$

($t_f = 0$ - тривіальний розв'язок). Максимальне віддалення від площини досягається, коли $v_y(t) = 0$:

$$v_y(t) = v_0 \sin \beta - g \cos \alpha t, \quad t_h = \frac{v_0 \sin \beta}{g \cos \alpha}.$$

Підставляючи t_h у $y(t)$, дістаємо

$$y_{\max} = v_0 \sin \beta t_h - \frac{g \cos \alpha}{2} t_h^2 = \frac{(v_0 \sin \beta)^2}{2g \cos \alpha}.$$

Отже,

$$t_f = \frac{2v_0 \sin \beta}{g \cos \alpha}, \quad y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \beta}{2g \cos \alpha}.$$

4.6. Рух тіла по похилій площині

Модель і позначення. Розглядаємо тіло маси m , що рухається по похилій площині під кутом α до горизонту. Координати: вісь x — уздовж площини, вісь y — перпендикулярно до площини. Сила тяжіння $\vec{m}g$ розкладається на компоненти:

$$mg_x = mg \sin \alpha, \quad mg_y = mg \cos \alpha.$$

Задача 1. Рух без тертя. Тіло маси m починає рухатися з верхньої точки похилої площини довжиною L без початкової швидкості. Знайти час спуску та кінцеву швидкість.

Розв'язання. Якщо не враховувати силу тертя, то на тіло діють лише дві сили: сила тяжіння, яка напрямлена вертикально вниз, та сила реакції, яка перпендикулярна до похилої площини. Рух відбувається вздовж похилої площини під дією рівнодійної сили F , яка

дорівнює проекції сили тяжіння на напрям руху $F = ma = mg \sin \alpha$.
Отже, прискорення: $a = g \sin \alpha$. Час спуску можна знайти з формули $L = \frac{at^2}{2} = \frac{gt^2 \sin \alpha}{2}$.

Отримаємо: $t = \sqrt{\frac{2L}{g \sin \alpha}}$.

Кінцева швидкість: $v = at = \sqrt{2gL \sin \alpha}$.

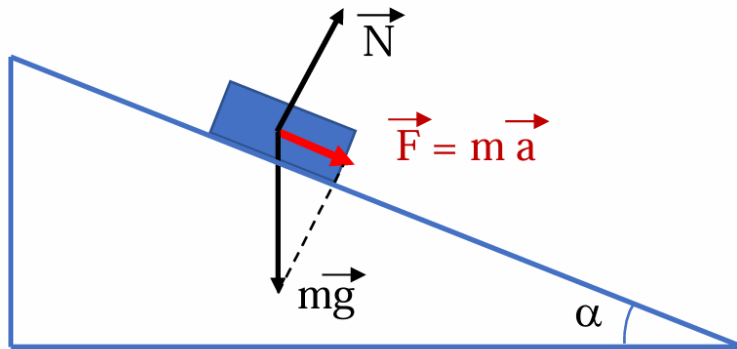


Рис. 4.11. Сили на похилій площині без тертя

Задача 2. Рух з тертям. Тіло маси m ковзає вниз по похилій площині з коефіцієнтом тертя μ . Знайти прискорення та умову початку руху.

Розв'язання.

Прискорення знайдемо з рівнодійної сили $\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тер}}$, де сила тертя: $F_{\text{тер}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$. Отже, прискорення:

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

Рух почнеться, якщо $mg \sin \alpha > \mu mg \cos \alpha$, тобто

$$\tan \alpha > \mu.$$

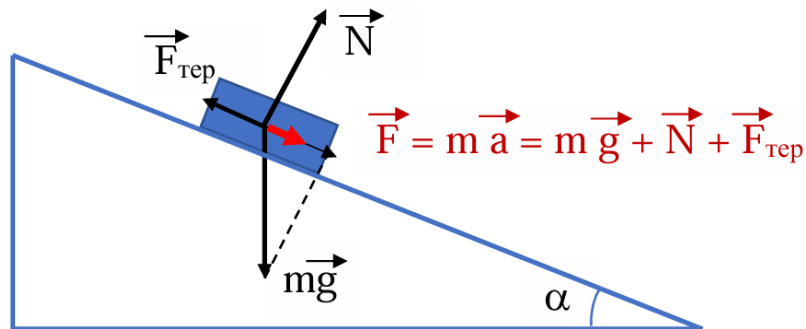


Рис. 4.12. Сили на похилій площині з тертям

4.7. Скочування циліндра по похилій площині

Однорідне тіло масою m , радіусом r та моментом інерції $I = kmr^2$ скочується без ковзання з похилої площини довжиною L , нахиленої під кутом α до горизонту. Початкова швидкість тіла дорівнює нулю.

Визначити: 1) швидкість v центра мас у кінці спуску; 2) час t спуску; 3) прискорення a центра мас.

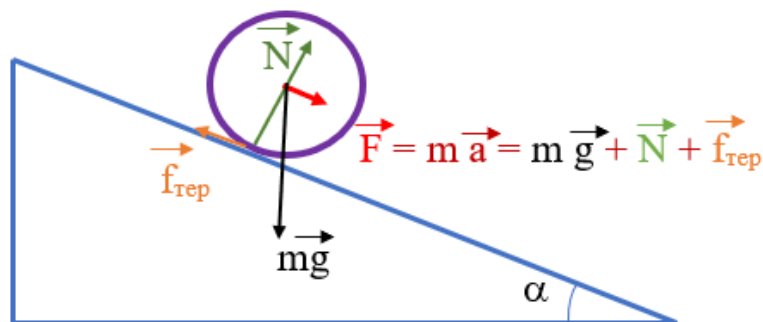


Рис. 4.13. Сили, що діють на циліндр, що скочується з похилої площини

Розв'язок методом закону збереження енергії

Початкова енергія: лише потенціальна

$$\Pi = mgL \sin \alpha \quad (4.10)$$

Кінцева енергія: кінетична поступальна + кінетична обертальна

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (4.11)$$

Оскільки рух без ковзання: $\omega = \frac{v}{r}$, $I = kmr^2$, маємо:

$$mgL \sin \alpha = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kmr^2 \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2(1 + k)$$

Звідси:

$$v = \sqrt{\frac{2gL \sin \alpha}{1 + k}} \quad (4.12)$$

Розв'язок методом другого закону Ньютона

Розглянемо сили, що діють на циліндр вздовж похилої площини. Згідно з другим законом Ньютона:

$$mg \sin \alpha - f_{\text{тер}} = ma \quad (4.13)$$

Сила тертя $f_{\text{тер}}$, що входить у це рівняння, — це сила тертя спокою, яка забезпечує умову скочування без ковзання. Вона повинна бути меншою або рівною максимально можливому значенню:

$$f_{\text{тер}} \leq \mu N = \mu mg \cos \alpha \quad (4.14)$$

Щоб знайти її величину, скористаємося рівнянням моменту сили відносно осі циліндра. Сила тертя створює обертальний момент:

$$f_{\text{тер}} \cdot r = I \cdot \varepsilon \quad (4.15)$$

Оскільки рух без ковзання, маємо зв'язок між кутовим і лінійним прискоренням:

$$\varepsilon = \frac{a}{r}$$

Підставимо момент інерції $I = kmr^2$:

$$f_{\text{тер}} = kmr^2 \cdot \frac{a}{r} = kma$$

Таким чином, сила тертя, необхідна для забезпечення скочування без ковзання, дорівнює:

$$f_{\text{тер}} = kma$$

Підставимо це значення в рівняння (4.13):

$$\begin{aligned} mg \sin \alpha - kma &= ma \\ a &= \frac{g \sin \alpha}{1 + k} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Примітка. Це прискорення відповідає умові скочування без ковзання. Якщо умова 4.14 не виконується, то виникає ковзання, і тіло зісковзуватиме вниз без обертання.

Використовуючи вираз для прискорення 4.16 знайдемо час спуску з співвідношення: $L = \frac{1}{2}at^2$

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{2L(1+k)}{g \sin \alpha}} \quad (4.17)$$

Швидкість:

$$v = at = \frac{g \sin \alpha}{1 + k} \cdot \sqrt{\frac{2L(1+k)}{g \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2gL \sin \alpha}{1 + k}} \quad (4.18)$$

Порівняння для різних тіл

Тіло	I	k	Швидкість	Час
Суцільний циліндр	$\frac{1}{2}mr^2$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{4gL \sin \alpha}{3}}$	$\sqrt{\frac{3L}{g \sin \alpha}}$
Порожній циліндр	mr^2	1	$\sqrt{gL \sin \alpha}$	$\sqrt{\frac{4L}{g \sin \alpha}}$
Сфера	$\frac{2}{5}mr^2$	$\frac{2}{5}$	$\sqrt{\frac{10gL \sin \alpha}{7}}$	$\sqrt{\frac{14L}{5g \sin \alpha}}$

Висновок. Чим менший приведений момент інерції тіла, тобто менше значення коефіцієнта

$$k = \frac{I}{mr^2},$$

тим більша його кінцева швидкість при скочуванні без ковзання. Наприклад, масивна сфера ($k = \frac{2}{5}$) скочується швидше, ніж суцільний циліндр ($k = \frac{1}{2}$), а порожнистий циліндр ($k = 1$) — найповільніше.

Якщо циліндр заповнений рідиною, яка не бере участі в обертанні (тобто не має моменту інерції відносно осі обертання), і маса рідини значно перевищує масу оболонки, то ефективний момент інерції системи стає дуже малим, тобто $k \approx 0$. У цьому випадку кінцева швидкість наближається до значення для ковзання без тертя:

$$v = \sqrt{2gh},$$

що відповідає максимальному можливому прискоренню при русі вниз похилою площиною.

Розв'язання методом миттєвої осі обертання

Такий же вираз для прискорення можна отримати іншим методом. При скочуванні без проковзування миттєва швидкість точки дотику з площиною дорівнює нулю. Отже, рух можна розглядати як чисте обертання циліндра відносно цієї точки.

Момент сили тяжіння відносно точки дотику дорівнює

$$M = mg \sin \alpha \cdot r. \quad (4.19)$$

Момент інерції відносно точки дотику знаходимо за теоремою Гюйгенса–Штейнера:

$$I_{\text{т. д.}} = I_{\text{центр}} + mr^2 = kmr^2 + mr^2 = (1 + k)mr^2. \quad (4.20)$$

З рівняння динаміки обертального руху:

$$M = I_{\text{т. д.}} \cdot \varepsilon, \quad (4.21)$$

де ε — кутове прискорення.

Звідси:

$$mgr \sin \alpha = (1 + k)mr^2 \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{g \sin \alpha}{(1 + k)r}. \quad (4.22)$$

Прискорення центра мас:

$$a = \varepsilon r = \frac{g \sin \alpha}{1 + k}. \quad (4.23)$$

4.8. Задача про пружину

До стелі підвішена пружина жорсткістю k , до кінця якої прикріплено гумову нитку, другий кінець якої вільно звисає на відстані L від підлоги. Яку силу потрібно прикласти до кінця гумової нитки, щоб дотягнути його до підлоги. Залежність видовження гумової нитки $x(F)$ від сили F наведено на рисунку 4.14. ($k = 14$ Н/м, $L = 1$ м)

Розв'язок

Оскільки пружина та нитка з'єднані послідовно, загальне видовження системи дорівнює

$$\Delta x(F) = x_{\text{пруж}}(F) + x_{\text{гум}}(F) = \frac{F}{k} + x(F),$$

де $x(F)$ — видовження гумової нитки, яке зчитується з графіка, а $x_{\text{пруж}}(F) = F/k$ — видовження пружини.

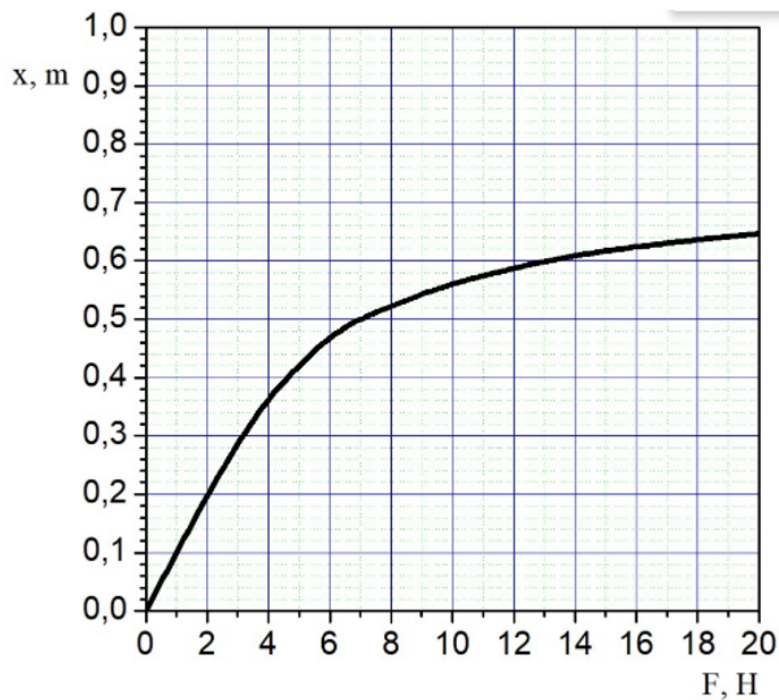


Рис. 4.14. Деформаційна характеристика гумової нитки

Умова задачі: кінець нитки повинен зміститися вниз на $L = 1$ м. Тому рівняння для сили має вигляд

$$\frac{F}{14} + x(F) = 1.$$

Розв'язання графічним методом: на полі графіка $x(F)$ будуємо пряму, що задається правою частиною рівняння

$$x(F) = 1 - \frac{F}{14},$$

і знаходимо точку перетину кривої $x(F)$ з цією прямою. Пряма проходить через такі дві точки: $(0, 1)$ та $(14, 0)$ і при $F \approx 7$ Н пряма перетинає криву. Отже, шукане значення сили:

$$\boxed{F \approx 7 \text{ Н}}$$

4.9. Прямий одновимірний пружний удар

Задача про зіткнення куль. Дві кулі масами m_1 і m_2 рухаються по одній прямій у взаємно протилежних напрямках. Перед ударом

$$\begin{aligned} m_1 &= 0.5 \text{ кг}, & v_{1i} &= +6 \text{ м/с}, \\ m_2 &= 1.0 \text{ кг}, & v_{2i} &= -2 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Удар вважається ідеально пружним. Знайти швидкості v_{1f} і v_{2f} після удару. Індeksi i та f означають *initial* та *finish* відповідно.

Аналітичне виведення

Для пружного зіткнення зберігаються сумарний лінійний імпульс P та сумарна кінетична енергія K системи:

$$P_i = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}, \quad P_f = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}, \quad (4.24)$$

$$K_i = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2, \quad K_f = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2. \quad (4.25)$$

З умов збереження маємо систему двох рівнянь невідомих v_{1f}, v_{2f} :

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}, \quad (4.26)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2. \quad (4.27)$$

Стандартно для 1D пружного удару зручно скористатися відомими аналітичними формулами, що отримуються із розв'язання системи (4.26)–(4.27) або через перетворення в системі відліку центра мас (виведення див. нижче):

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}, \quad (4.28)$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}. \quad (4.29)$$

Числові розрахунки

Для v_{1f} за формулою (4.28) отримаємо:

$$v_{1f} = \frac{0.5 - 1.0}{1.5} \cdot 6 + \frac{2 \cdot 1.0}{1.5} \cdot (-2) = \frac{-0.5}{1.5} \cdot 6 + \frac{2}{1.5} \cdot (-2) = -\frac{3}{1.5} - \frac{4}{1.5} = -\frac{14}{3}.$$

Отже $v_{1f} = -\frac{14}{3} \text{ м/с} \approx -4.67 \text{ м/с}$.

Аналогічно для v_{2f} за (4.29):

$$v_{2f} = \frac{2 \cdot 0.5}{1.5} \cdot 6 + \frac{1.0 - 0.5}{1.5} \cdot (-2) = \frac{1}{1.5} \cdot 6 - \frac{0.5}{1.5} \cdot 2 = \frac{6}{1.5} - \frac{1}{1.5} = \frac{5}{1.5} = \frac{10}{3} \text{ м/с}.$$

Отже $v_{2f} \approx 3.33 \text{ м/с}$.

Коментар. Знак мінус у v_{1f} означає, що після удару перша куля рухається в протилежному напрямку щодо свого початкового руху.

Розв'язок задачі через систему центра мас

Розглянемо задачу про пружний одновимірний удар в системі центра мас (СЦМ), а потім повернемося в лабораторну систему.

1. Швидкість центра мас Швидкість центра мас визначається з формули для сумарного імпульсу системи часток

$$V_{\text{цм}} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}.$$

Підставляємо числові значення:

$$V_{\text{цм}} = \frac{0.5 \cdot 6 + 1.0 \cdot (-2)}{0.5 + 1.0} = \frac{3 - 2}{1.5} = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3} \text{ м/с} \approx 0.6667 \text{ м/с}.$$

2. Перехід у СЦМ: початкові швидкості в СЦМ Швидкості тіл у СЦМ:

$$u_1 = v_{1i} - V_{\text{цм}}, \quad u_2 = v_{2i} - V_{\text{цм}}.$$

Тому

$$u_1 = 6 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3} \approx 5.3333 \text{ м/с}, \quad u_2 = -2 - \frac{2}{3} = -\frac{8}{3} \approx -2.6667 \text{ м/с}.$$

Перевірка: дійсно $m_1 u_1 + m_2 u_2 = 0.5 \cdot \frac{16}{3} + 1.0 \cdot (-\frac{8}{3}) = \frac{8}{3} - \frac{8}{3} = 0$.

3. Пружний удар у СЦМ Для абсолютно пружного 1D зіткнення в СЦМ модулі швидкостей зберігаються, а напрямки міняються на протилежні (доведення див. нижче). Отже

$$u'_1 = -u_1 = -\frac{16}{3} \text{ м/с}, \quad u'_2 = -u_2 = \frac{8}{3} \text{ м/с}.$$

4. Повернення в лабораторну систему Додаємо назад $V_{\text{цм}}$:

$$v_{1f} = u'_1 + V_{\text{цм}} = -\frac{16}{3} + \frac{2}{3} = -\frac{14}{3} \text{ м/с} \approx -4.6667 \text{ м/с},$$

$$v_{2f} = u'_2 + V_{\text{цм}} = \frac{8}{3} + \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \text{ м/с} \approx 3.3333 \text{ м/с}.$$

5. Виведення формул через систему центра мас Щоб отримати стандартні формули для v_{1f}, v_{2f} через m_1, m_2, v_{1i}, v_{2i} , скористаємося виразом

$$v_{1f} = -(v_{1i} - V_{\text{цм}}) + V_{\text{цм}} = -v_{1i} + 2V_{\text{цм}}.$$

Підставляючи $V_{\text{цм}} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$, маємо

$$v_{1f} = -v_{1i} + 2 \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{-(m_1 + m_2) + 2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2},$$

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1i} + 2m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}.$$

Аналогічно для другого тіла:

$$v_{2f} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2i} + 2m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2}.$$

6. Чисельна перевірка збереження імпульсу і енергії Сумарний імпульс до взаємодії:

$$P_i = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = 0.5 \cdot 6 + 1.0 \cdot (-2) = 1 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Сумарний імпульс після взаємодії:

$$P_f = 0.5 \cdot \left(-\frac{14}{3}\right) + 1.0 \cdot \frac{10}{3} = -\frac{7}{3} + \frac{10}{3} = \frac{3}{3} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

Сумарна кінетична енергія до:

$$K_i = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.5 \cdot 6^2 + \frac{1}{2} \cdot 1.0 \cdot (-2)^2 = 0.25 \cdot 36 + 0.5 \cdot 4 = 9 + 2 = 11 \text{ Дж}.$$

Після:

$$K_f = \frac{1}{2} \cdot 0.5 \cdot \left(-\frac{14}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 1.0 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 = 0.25 \cdot \frac{196}{9} + 0.5 \cdot \frac{100}{9} = \frac{49}{9} + \frac{50}{9} = \frac{99}{9} = 11 \text{ Дж}.$$

Отже перевірки підтверджують збереження імпульсу та кінетичної енергії.

Висновок. Через симетрію та те, що в СЦМ сумарний імпульс дорівнює нулю, пружний 1D удар у СЦМ виглядає як відбиття швидкостей (заміна знака). Повернення в лабораторну систему дає звичні формули

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1i} + 2m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}, \quad v_{2f} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2i} + 2m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2},$$

які для наведених чисел дають $v_{1f} = -\frac{14}{3} \text{ м/с} \approx -4.67 \text{ м/с}$ та $v_{2f} = \frac{10}{3} \text{ м/с} \approx 3.33 \text{ м/с}$.

Доведення: збереження модулів швидкостей у СЦМ при пружному 1D зіткненні

Нехай у системі центра мас (СЦМ) дві частинки мають швидкості u_1, u_2 до удару і u'_1, u'_2 після удару. У СЦМ сумарний імпульс дорівнює нулю як до, так і після удару:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = 0, \tag{4.30}$$

$$m_1 u'_1 + m_2 u'_2 = 0. \tag{4.31}$$

З рівності (4.30) маємо

$$u_2 = -\frac{m_1}{m_2} u_1,$$

а з (4.31) аналогічно

$$u'_2 = -\frac{m_1}{m_2} u'_1.$$

Для пружного зіткнення зберігається сумарна кінетична енергія. Запишемо її в СЦМ до і після удару:

$$\frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2^2 = \frac{1}{2}m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 u_2'^2.$$

Підставимо вирази для u_2 та u'_2 :

$$\frac{1}{2}m_1 u_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \left(-\frac{m_1}{m_2} u_1\right)^2 = \frac{1}{2}m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 \left(-\frac{m_1}{m_2} u_1'\right)^2.$$

Після спрощення:

$$\frac{1}{2}m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) u_1^2 = \frac{1}{2}m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) u_1'^2.$$

Скорочуємо однакові множники $\frac{1}{2}m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)$ і отримуємо

$$u_1^2 = u_1'^2.$$

Отже

$$|u'_1| = |u_1|.$$

Аналогічно впливає $|u'_2| = |u_2|$.

Тепер потрібно вибрати знак. Рівність квадратів дає два варіанти: $u'_1 = u_1$ або $u'_1 = -u_1$ (і відповідно для u_2). Пояснимо фізично:

- Випадок $u'_1 = u_1$, $u'_2 = u_2$ означав би, що швидкості не змінились — тобто жодної взаємодії не відбулося (наприклад випадок коли частинки рухались не назустріч, а в напрямку одна від одної). Це тривіальний випадок не відповідає умові задачі.

- Для нетривіального пружного зіткнення маємо зміну напрямків руху в СЦМ: тіла, що рухалися назустріч, після удару розлітаються у протилежні сторони з тими ж модулями швидкостей. Отже фізично реалістичний варіант:

$$u'_1 = -u_1, \quad u'_2 = -u_2.$$

Таким чином, із поєднання законів збереження імпульсу і енергії випливає, що у СЦМ модулі швидкостей зберігаються, а їх напрямки змінюються на протилежні (тобто відбувається заміна знака).

4.10. Непружний удар (злипання)

Задача про непружний удар. Дві платформи масами $m_1 = 200 \text{ кг}$ і $m_2 = 300 \text{ кг}$ рухаються назустріч по горизонтальній поверхні без тертя зі швидкостями

$$v_{1i} = +4 \text{ м/с}, \quad v_{2i} = -1 \text{ м/с}.$$

Після зіткнення вони злипаються і рухаються разом. Знайти спільну швидкість v_f після зіткнення і втрату кінетичної енергії в процесі.

Аналітичне виведення

При абсолютно непружному зіткненні (злипання) кінетична енергія не зберігається, але зберігається сумарний імпульс системи. Тому:

$$(m_1 + m_2)v_f = m_1v_{1i} + m_2v_{2i}. \quad (4.32)$$

Отже

$$v_f = \frac{m_1v_{1i} + m_2v_{2i}}{m_1 + m_2}. \quad (4.33)$$

Кінетична енергія до і після даються виразами:

$$K_i = \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2, \quad (4.34)$$

$$K_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2. \quad (4.35)$$

Втрачена енергія:

$$\Delta K = K_i - K_f.$$

Підстановка і обчислення

Обчислимо чисельне значення швидкості (4.33):

$$v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{200 \cdot 4 + 300 \cdot (-1)}{500} = 1 \text{ м/с.}$$

Обчислимо енергії до зіткнення за (4.34):

$$K_i = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 4^2 + \frac{1}{2} \cdot 300 \cdot (-1)^2 = \frac{1}{2} (3200 + 300) = \frac{1}{2} \cdot 3500 = 1750 \text{ Дж.}$$

Після зіткнення за (4.35):

$$K_f = \frac{1}{2} \cdot 500 \cdot 1^2 = 250 \text{ Дж.}$$

Отже втрата енергії

$$\Delta K = 1750 - 250 = 1500 \text{ Дж.}$$

Коментар

Приклад ілюструє, що навіть якщо імпульс зберігається, істотні втрати кінетичної енергії можливі при непружних процесах.

4.11. Падіння тонкого ланцюжка на стіл

Задача 1. Тонкий гнучкий однорідний ланцюжок довжиною L і масою M утримують за верхній кінець над горизонтальним столом так, що нижній кінець ледь торкається стола. У момент $t = 0$ ланцюжок відпускають; далі він вільно падає і без відскоку нашаровуються на столі. Знайти залежність сили $F(t)$, з якою ланцюжок діє на стіл, і визначити її максимальне значення.

Розв'язок. Позначимо лінійну густину ланцюжка $\lambda = \frac{M}{L}$. Нехай $x(t)$ — довжина частини ланцюжка, що вже лежить на столі, а $v(t)$ —

швидкість ланок, які саме досягають столу в момент часу t . Оскільки будь-яка ланка падає вільно з нуля, то її закон падіння:

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2, \quad v(t) = \dot{x}(t) = gt,$$

доки не впаде весь ланцюг (тобто для $0 \leq t \leq T = \sqrt{\frac{2L}{g}}$).

Сила, що діє ланцюжком на стіл, має дві складові:

1. *Вага* вже розміщеної на столі частини:

$$F_{\text{в}} = (\lambda \cdot x)g = \lambda \cdot \frac{1}{2}gt^2 \cdot g = \frac{1}{2}\lambda g^2 t^2.$$

2. *Динамічна* складова від зупинки падаючих ланок.

За час Δt на стіл падає маса Δm з швидкістю v . Після падіння швидкість змінюється до нуля. Зміна імпульсу цієї частини ланцюжка дорівнює імпульсу сили (добутку сили на час її дії) $F_{\text{імп}} \Delta t = \Delta m \cdot v$. Враховуючи $\Delta m = \lambda v \Delta t$, отримаємо

$$F_{\text{імп}} = \lambda v^2 = \lambda g^2 t^2.$$

Разом для $0 \leq t < T$:

$$F(t) = F_{\text{в}} + F_{\text{імп}} = \frac{3}{2}\lambda g^2 t^2 = \frac{3Mg^2}{2L} t^2.$$

Коли весь ланцюг упав ($t \geq T$), рух припиняється і сила дорівнює вазі:

$$F(t) = Mg, \quad t \geq T.$$

Отже, залежність є кусочно-заданою:

$$F(t) = \begin{cases} \frac{3Mg^2}{2L} t^2, & 0 \leq t < T, \\ Mg, & t \geq T. \end{cases}$$

Максимальне значення сили. Безпосередньо перед падінням останньої ланки ($t \rightarrow T$)

$$F_{\max} = \frac{3Mg^2}{2L} T^2 = \frac{3Mg^2}{2L} \cdot \frac{2L}{g} = \boxed{3Mg}.$$

Після завершення падіння сила стрибкоподібно зменшується до Mg .

4.12. Рівняння реактивного руху (рівняння Ціолковського)

Ракета має початкову (повну) масу з паливом $M_0 = 20000 \text{ кг}$, а маса порожньої конструкції (кінцева) $M_f = 5000 \text{ кг}$. Швидкість викиду відпрацьованих газів відносно ракети $u = 3000 \text{ м/с}$. Знайти максимально можливий приріст швидкості Δv у міжпланетному просторі (не враховуючи зовнішніх сил).

Виведення рівняння Ціолковського

Розглянемо момент, коли ракета має масу M і швидкість v . Після того, як маса палива dm відкидається з відносною швидкістю u (відносно ракети), маса ракети зменшується на dm і її швидкість змінюється на dv . Закон збереження імпульсу для цього нескінченно малого процесу:

$$Mv = (M - dM)(v + dv) + dM(v - u). \quad (4.36)$$

Розкриємо праву частину і нехтуватимемо добутками малих величин порядку $dm dv$:

$$\begin{aligned} Mv &= Mv + Mdv - vdM - dM dv + vdM - udM \\ &\approx Mv + Mdv - udM. \end{aligned}$$

Після спрощення отримуємо

$$M dv = u dM.$$

Зверніть увагу, що тут dM — це від'ємна величина (маса ракети зменшується), тому для зручності випишемо в інтегральній формі із врахуванням знаків:

$$dv = -u \frac{dM}{M}.$$

Інтегруємо від початкової маси M_0 до кінцевої M_f :

$$\Delta v = v_f - v_i = -u \int_{M_0}^{M_f} \frac{dM}{M} = u \int_{M_f}^{M_0} \frac{dM}{M} = u \ln \frac{M_0}{M_f}.$$

Підстановка чисел

$$\Delta v = 3000 \text{ м/с} \cdot \ln \frac{20000}{5000} = 3000 \cdot \ln 4 \approx 3000 \cdot 1.38629 \approx 4158.9 \text{ м/с}.$$

Коментар

Рівняння показує логарифмічну залежність приросту швидкості від коефіцієнта відношення мас і гарантує, що для значного приросту швидкості потрібна експоненціальна кількість палива.

4.13. Закони збереження

Обертання диску. Тонкий диск із моментом інерції $I_1 = 0.02 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ обертається зі швидкістю $\omega_1 = 50 \text{ рад/с}$. На ту саму вісь насаджуються кільце з моментом інерції $I_2 = 0.01 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, яке спочатку не обертається. При відсутності зовнішніх моментів імпульсу знайти кінцеву кутову швидкість ω_f і зміну кінетичної енергії обертання.

Розв'язок

За законом збереження моменту імпульсу:

$$I_1\omega_1 + I_2 \cdot 0 = (I_1 + I_2)\omega_f. \quad (4.37)$$

Відтак

$$\omega_f = \frac{I_1}{I_1 + I_2} \omega_1. \quad (4.38)$$

Кінетична енергія обертання до і після:

$$K_i = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2, \quad (4.39)$$

$$K_f = \frac{1}{2} (I_1 + I_2) \omega_f^2. \quad (4.40)$$

Числові розрахунки

Кінцева кутова швидкість

$$\omega_f = \frac{0.02}{0.03} \cdot 50 = \frac{2}{3} \cdot 50 = 33.3 \text{ рад/с.}$$

Початкова кінетична енергія:

$$K_i = \frac{1}{2} \cdot 0.02 \cdot 50^2 = 0.01 \cdot 2500 = 25 \text{ Дж.}$$

Кінцева кінетична енергія:

$$K_f = \frac{1}{2} \cdot 0.03 \cdot (33.3)^2 = 0.015 \cdot 1111.1 \approx 16.666 \dots \text{ Дж.}$$

Втрати кінетичної енергії (передано у внутрішню енергію):

$$\Delta K = K_i - K_f \approx 25 - 16.666 \dots = 8.333 \dots \text{ Дж.}$$

Коментар

Втрачена енергія з'являється через внутрішні сили та перетворюється на тепло при терті під час пришвидшення кільця до спільної кутової швидкості. Цей випадок подібний на непружний удар двох куль, які після удару рухаються разом з однаковою швидкістю.

Збереження енергії: похила площина та пружина. Тіло масою $m = 2 \text{ кг}$ відпускають із вершини гладкої похилої площини висотою $h = 1.5 \text{ м}$. Внизу біля основи похилої площини встановлено пружину жорсткістю $k = 800 \text{ Н/м}$. Тертям нехтуємо. Визначити максимальне стискання пружини $x_{\max}$.

Розв'язок

За законом збереження механічної енергії (без дисипації): потенціальна енергія тіла на висоті h перетворюється у пружну енергію пружини у момент найбільшого стискання:

$$mgh = \frac{1}{2}kx_{\max}^2. \quad (4.41)$$

звідси

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{2mgh}{k}}. \quad (4.42)$$

Підставимо $m = 2 \text{ кг}$, $g = 9.81 \text{ м/с}^2$, $h = 1.5 \text{ м}$, $k = 800 \text{ Н/м}$:

$$2mgh = 2 \cdot 2 \cdot 9.81 \cdot 1.5 = 58.86,$$

$$\frac{2mgh}{k} = \frac{58.86}{800} = 0.073575,$$

$$x_{\max} = \sqrt{0.073575} \approx 0.271 \text{ м}.$$

Рівняння неперервності та рівняння Бернуллі. Через звуження трубопроводу тече нестислива та нерозривна рідина густини $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$. У широкому перерізі площа $S_1 = 0.02 \text{ м}^2$ швидкість $v_1 = 1.5 \text{ м/с}$ та тиск $p_1 = 1.0 \times 10^5 \text{ Па}$. Площа вузького перерізу $S_2 = 0.01 \text{ м}^2$. Знайти v_2 і p_2 .

Розв'язок

Рівняння неперервності для нестисливої рідини:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1. \quad (4.43)$$

Рівняння Бернуллі (по одній лінії потоку, без урахування втрат):

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2. \quad (4.44)$$

Звідси

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2). \quad (4.45)$$

Підстановка

За (4.43):

$$v_2 = \frac{0.02}{0.01} \cdot 1.5 = 3.0 \text{ м/с.}$$

Підставимо у (4.45):

$$\begin{aligned} v_1^2 - v_2^2 &= 1.5^2 - 3.0^2 = 2.25 - 9 = -6.75, \\ \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) &= \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot (-6.75) = -3375 \text{ Па}, \\ p_2 &= 100000 - 3375 = 96\,625 \text{ Па}. \end{aligned}$$

Коментар

Тиск у вузькому перерізі зменшується порівняно з широким перерізом — класичний ефект, що пояснює, наприклад, піднімання крили літального апарата (спрощено) або роботу струменевих насосів.

Задача про скочування циліндрів

Три циліндри однакового радіуса R скочуються без ковзання з похилої площини. Перший — суцільний циліндр, другий — тонкостінний порожнистий циліндр, третій — циліндр, заповнений водою (маса води значно більша за масу оболонки). Який із циліндрів скотиться площини першим, а який — останнім?

Розв'язання методом закону збереження енергії

Для циліндра, що скочується без ковзання, виконується закон збереження енергії: потенціальна енергія перетворюється в кінетичну енергію поступального і обертального рухів:

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \quad (4.46)$$

де h — висота, з якої скочується циліндр, v — швидкість центра мас, I — момент інерції відносно осі обертання, а ω — кутова швидкість.

Оскільки немає ковзання, то

$$v = \omega R.$$

Тоді з (4.46) отримуємо:

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\frac{v^2}{R^2}. \quad (4.47)$$

Звідси

$$v^2 = \frac{2gh}{1 + \frac{I}{MR^2}}. \quad (4.48)$$

Позначимо $I = \lambda MR^2$, де λ — безрозмірний коефіцієнт (для суцільного циліндра $\lambda = \frac{1}{2}$, для кільця $\lambda = 1$ тощо). Враховуючи, що висота h та довжина похилої площини s зв'язані формулою $h = s \sin \alpha$ та зв'язок кінцевої швидкості з прискоренням $v^2 = 2as$ отримаємо

$$v^2 = \frac{2gs \sin \alpha}{1 + \lambda}, \quad a = \frac{g \sin \alpha}{1 + \lambda}. \quad (4.49)$$

Розв'язання методом миттєвої осі обертання

Такий же вираз для прискорення можна отримати іншим методом. При котінні без просковзування миттєва швидкість точки дотику з площиною дорівнює нулю. Отже, рух можна розглядати як чисте обертання циліндра відносно цієї точки.

Момент сили тяжіння відносно точки дотику дорівнює

$$M = mg \sin \alpha \cdot R. \quad (4.50)$$

Момент інерції відносно точки дотику знаходимо за теоремою Гюйгенса–Штейнера:

$$I_{\text{т. д.}} = I_{\text{центр}} + mR^2 = \lambda mR^2 + mR^2 = (1 + \lambda)mR^2. \quad (4.51)$$

З рівняння динаміки обертального руху:

$$M = I_{\text{т. д.}} \cdot \varepsilon, \quad (4.52)$$

де ε — кутове прискорення.

Звідси:

$$mgR \sin \alpha = (1 + \lambda)mR^2 \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{g \sin \alpha}{(1 + \lambda)R}. \quad (4.53)$$

Прискорення центра мас:

$$a = \varepsilon R = \frac{g \sin \alpha}{1 + \lambda}. \quad (4.54)$$

Висновок

В обох методах отримуємо однаковий результат:

$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + \lambda},$$

який показує, що чим більший момент інерції (порожнистий циліндр, сфера, диск тощо), тим меншим буде прискорення скочування.

Випадки:

Суцільний циліндр: $I = \frac{1}{2}MR^2$, тому $\lambda = 1/2$

$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}g \sin \alpha.$$

Порожнистий циліндр: $I = MR^2$, тому $\lambda = 1$

$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + 1} = \frac{1}{2}g \sin \alpha.$$

Циліндр, заповнений водою: Вода всередині не обертається разом із оболонкою, тому вся енергія переходить у поступальний рух оболонки:

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 \Rightarrow v^2 = 2gh.$$

$$a = g \sin \alpha.$$

Висновок:

Найшвидше донизу площини скотиться циліндр, заповнений рідиною ($v = \sqrt{2gh}$). Слідом за ним – суцільний циліндр ($v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$). Останнім скотиться порожнистий циліндр ($v = \sqrt{gh}$).

4.14. Електрика**Максимальна потужність від джерела напруги**

Задано джерело постійної напруги з ЕРС $\mathcal{E}$ та внутрішнім опором r . До джерела під'єднано зовнішній опір R . Знайти таке значення R , за якого потужність, що виділяється на навантаженні, максимальна.

Розв'язок. Струм у колі:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r + R}.$$

Потужність на навантаженні:

$$P = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{(r + R)^2} R.$$

Залежність $P(R)$ зображена на рис. 4.15.

Максимум залежності $P(R)$ з умови $\frac{dP}{dR} = 0$:

$$\frac{dP}{dR} = \mathcal{E}^2 \frac{(r + R)^2 - 2R(r + R)}{(r + R)^4} = \mathcal{E}^2 \frac{r - R}{(r + R)^3} = 0 \Rightarrow R = r.$$

Отже, максимум потужності, яку можна отримати від джерела при зовнішньому опорі, що дорівнює його внутрішньому опору.

$$\boxed{R = r}.$$

Максимальна потужність, яку можна отримати від джерела обмежується його внутрішнім опором:

$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}.$$

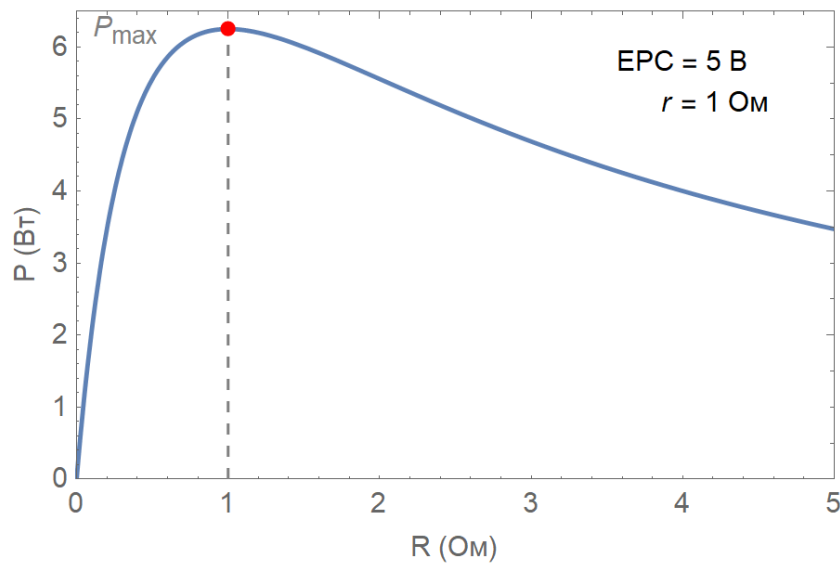


Рис. 4.15. Залежність потужності на навантаженні від величини опору зовнішнього навантаження

Потужніше джерело має менший внутрішній опір.

Додатково: ККД при $R = r$ дорівнює 50%, бо половина потужності йде на втрати в джерелі. Для збільшення коефіцієнта корисної дії і зменшенні втрат на нагрівання джерела потрібно зменшити струм у колі збільшенням опору навантаження. Розрахуємо залежність коефіцієнта корисної дії η від зовнішнього опору R

$$\eta = \frac{P_R}{P_{R+r}} = \frac{R}{R+r}$$

Графік залежності $\eta(R)$ зображено на рис. 4.16.

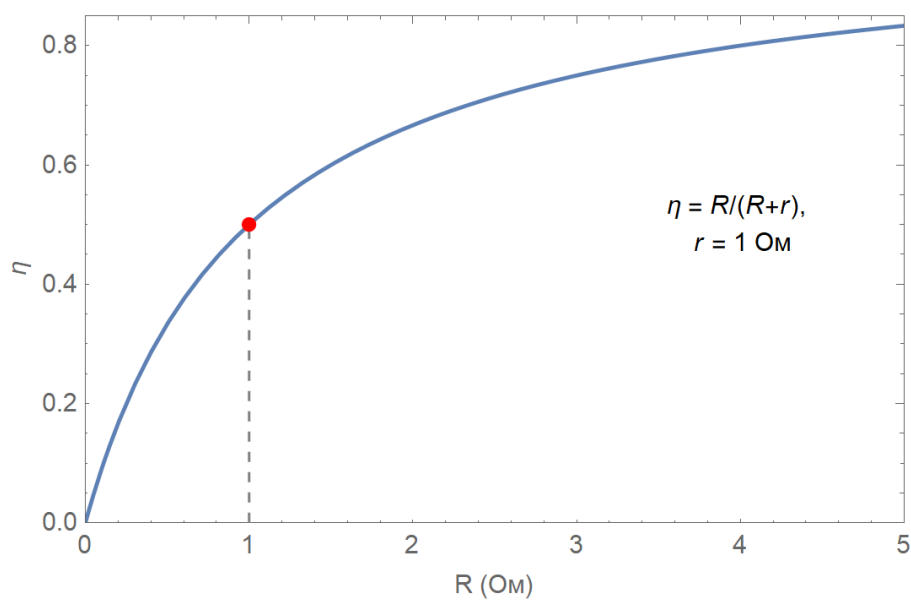


Рис. 4.16. Залежність коефіцієнта корисної дії від опору навантаження

Розділ 5

ЗБІРНИК ЗАДАЧ

5.1. Рух тіла в однорідному полі сили тяжіння

1. **Похила площина і час руху.** Тіло маси m починає рухатися з нерухомого стану з вершини гладкої похилої площини висотою h . Порівняйте час скочування тіла по площині з часом його вільного падіння з тієї ж висоти. Визначте кут нахилу α площини, за якого час скочування буде у два рази більшим за час вільного падіння.
2. **Мисливець і мавпа.** Мисливець прицілився на мавпу, яка сидить на гілці дерева на висоті H та на відстані L від нього. В момент пострілу мавпа зіскочила з гілки і почала вільно падати. Куля вилітає зі швидкістю v_0 у напрямку лінії прицілювання. Чи влучить куля в мавпу, якщо нехтувати опором повітря?
3. **Кидок під кутом до горизонту.** Тіло кинуто з поверхні землі під кутом θ до горизонту зі швидкістю v_0 . Визначте:
 - (а) максимальну висоту підйому тіла;
 - (б) дальність польоту;
 - (в) час польоту.

4. **Камінь з вежі.** З вершини вежі висотою H кидають камінь горизонтально зі швидкістю v_0 . Визначте час падіння каменя, дальність його падіння від основи вежі та швидкість при ударі об землю.
5. **Дві кулі з різними напрямками кидання.** Дві кулі кинуті одночасно з однієї точки: одна вертикально вгору зі швидкістю v_0 , а інша горизонтально з тією ж швидкістю v_0 . Визначте, яка з куль раніше впаде на землю, якщо вони рухаються в однорідному полі сили тяжіння і опором повітря знехтувати.

5.2. Закони збереження імпульсу

1. Дві кулі масами $m_1 = 0,5 \text{ кг}$ та $m_2 = 0,3 \text{ кг}$ рухаються назустріч одна одній зі швидкостями $v_1 = 2 \text{ м/с}$ та $v_2 = -1 \text{ м/с}$. Після пружного зіткнення знайти швидкості обох куль.
2. Візок масою $M = 50 \text{ кг}$ рухається без тертя зі швидкістю $v_0 = 1 \text{ м/с}$. З нього горизонтально в напрямку протилежному до напрямку руху викидають тіло масою $m = 10 \text{ кг}$ зі швидкістю $u = 2 \text{ м/с}$ відносно візка. Знайти швидкість візка після викидання.
3. Платформа масою 100 кг стоїть на горизонтальній поверхні без тертя. Людина масою 50 кг стоїть на платформі. З якою швидкістю почне рухатись платформа, якщо людина почне йти по ній зі швидкістю 1 м/с відносно платформи?
4. Куля масою $m = 20 \text{ г}$, що летить зі швидкістю $v = 300 \text{ м/с}$, влучає у дерев'яний брусок масою $M = 2 \text{ кг}$, який лежить на гладкій поверхні. Визначити швидкість бруска після непружного удару, якщо куля застрягає в ньому.
5. Два ковзанярі масами 70 кг та 80 кг відштовхуються один від одного на льоду. Якщо швидкість першого ковзаняря $1,5 \text{ м/с}$, знайти швидкість другого.

5.3. Закони збереження моменту імпульсу

1. Льодяний ковзаняр, обертаючись з частотою $f_1 = 1 \text{ Гц}$, притискає руки до тіла, зменшуючи момент інерції у 4 рази. Знайти нову частоту обертання.
2. Тонкий диск з моментом інерції $I_1 = 0,05 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ обертається зі швидкістю $\omega_1 = 20 \text{ рад/с}$. На ту саму вісь насаджується другий диск з моментом інерції $I_2 = 0,02 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$, який спочатку не обертається. Знайти кінцеву кутову швидкість системи.
3. Супутник масою m рухається по коловій орбіті радіуса R_1 . Двигуни змінюють його орбіту на R_2 без зміни напрямку швидкості. Вважаючи дію центральних сил, визначити нову орбітальну швидкість.
4. Куля масою $m = 0,2 \text{ кг}$ вривається у двері на відстані $r = 0,8 \text{ м}$ від осі обертання. Знайти початкову кутову швидкість дверей, якщо вони мають момент інерції $I = 5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ і куля застрягає в них зі швидкістю $v = 10 \text{ м/с}$.
5. Диск, що обертається зі швидкістю 30 об/хв , уповільнюється через падіння на нього піску, який рівномірно розподіляється по краю. Як зміниться кутова швидкість, якщо маса піску становитиме $0,2$ маси диска?

5.4. Закон збереження енергії

1. Тіло масою $m = 1 \text{ кг}$ ковзає без тертя з висоти $h = 5 \text{ м}$. Знайти швидкість тіла внизу похилої площини.
2. Пружина з коефіцієнтом жорсткості $k = 400 \text{ Н/м}$ стиснута на $x = 0,1 \text{ м}$. Знайти максимальну швидкість тіла масою $m = 2 \text{ кг}$, яке вивільняється пружиною.
3. Маятник довжиною $l = 1 \text{ м}$ відводять на кут 30° від вертикалі та відпускають. Знайти швидкість вантажу в найнижчій точці.

4. Камінь масою $0,5 \text{ кг}$ падає з висоти 20 м . Яку швидкість він матиме перед ударом, якщо втрати енергії на опір повітря становлять 20% ?
5. Кулька масою $m = 0,1 \text{ кг}$ рухається по горизонтальній поверхні, вдаряється в пружину та стискає її на $0,05 \text{ м}$. Визначити початкову швидкість кульки, якщо $k = 500 \text{ Н/м}$.

5.5. Рівняння Бернуллі

1. Через горизонтальну трубу, що звужується від $S_1 = 0,02 \text{ м}^2$ до $S_2 = 0,01 \text{ м}^2$, тече вода зі швидкістю $v_1 = 2 \text{ м/с}$. Знайти v_2 , якщо густина води $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ і різниця тисків між перерізами.
2. Вода витікає з бака через отвір діаметром $d = 2 \text{ см}$ на глибині $h = 1 \text{ м}$ під дією сили тяжіння. Використовуючи рівняння Бернуллі, знайти швидкість витікання.
3. У вертикальній трубі діаметр змінюється з 10 см до 5 см . У верхньому перерізі швидкість рідини $v_1 = 1 \text{ м/с}$, тиск $p_1 = 1,2 \times 10^5 \text{ Па}$, висота $z_1 = 2 \text{ м}$; нижній переріз знаходиться на висоті $z_2 = 0$. Знайти швидкість v_2 і тиск p_2 .
4. Струмінь води б'є вертикально вгору на висоту $H = 2 \text{ м}$. Яка швидкість води на виході з насадки? Знехтувати втратами.
5. Повітря рухається по горизонтальній трубі від широкого перерізу ($d_1 = 10 \text{ см}$) до вузького ($d_2 = 5 \text{ см}$). Якщо тиск у широкому перерізі $1,05 \times 10^5 \text{ Па}$ і швидкість 5 м/с , знайти тиск у вузькому.

5.6. Рівняння Ціолковського

1. Ракета маси $m_0 = 5000 \text{ кг}$ має швидкість витікання газів $u = 2000 \text{ м/с}$. Знайти швидкість ракети після зменшення маси на

1000 кг.

2. Супутник-носій стартує з орбіти, маючи масу палива, яка складає 60% від його початкової маси, і швидкість витікання газів $u = 2500 \text{ м/с}$. Знайти максимально можливий приріст швидкості.
3. Міжпланетний зонд масою $m_0 = 2000 \text{ кг}$ планує виконати маневр, витративши 500 кг палива зі швидкістю витікання $u = 3000 \text{ м/с}$. Обчислити зміну швидкості.
4. Ракета має початкову масу $m_0 = 10 \text{ т}$ і швидкість витікання газів $u = 2200 \text{ м/с}$. Яку масу палива треба спалити, щоб збільшити швидкість на 2000 м/с ?
5. Космічний апарат має залишок палива 200 кг при масі апарата 1200 кг (разом із паливом). Швидкість витікання $u = 2900 \text{ м/с}$. Знайти максимальний можливий приріст швидкості.

Бібліографія

- [1] Книш М., Котик Л. Глобальні проблеми людства: навч. посібник. 2-ге вид., допов. і перероб. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2025. 188 с.
- [2] Д.М. Фреїк, Л.І. Никируй, М.О. Галушак ГДМ. Досягнення і проблеми термоелектрики II. Основні положення теорії термоелектричних явищ (огляд). Phys Chem SOLID STATE. 2012;13(3):574-585.
- [3] Круподьорова Л.М. Алгоритмізація і основи програмування. Навчальний посібник. – Вінниця: ВНТУ, 2005. - 168 с.
- [4] Д. І. Угрин, Ю. О. Ушенко, М. Л. Ковальчук Структури даних та алгоритми. Підручник. – Чернівці: Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича, 2022. – 357 с.
- [5] Чорний О. П., Титюк В. К., Істоміна Н. М., Власенко В. А. Математичні методи моделювання [Навчальний посібник] – Кременчук, 2016. – 234 с.
- [6] Головацький В. А. Система комп'ютерної алгебри Mathematica 5: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2008. – 352 с.
- [7] Stephen Wolfram. An Elementary Introduction to the Wolfram Language. – Wolfram Media, 2017. – 325 p.

- [8] Математичне моделювання в науково-технічних дослідженнях. Моделювання у середовищі Wolfram Mathematica: навчально-методичний посібник / Укладачі: Петрик М. Р., Бойко І. В. – Тернопіль: Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2017. – 108 с. [Електронний ресурс]. <https://core.ac.uk/download/pdf/161834216.pdf>
- [9] Шигорін П.П. Математичні обчислення в програмному пакеті Mathematica 5: Методичні рекомендації. — Луцьк: РВВ «Вежа» Волинського національного університету імені Лесі Українки, 2009. — 48 с. — Режим доступу: <https://evnuir.vnu.edu.ua/bitstream/123456789/18858/1/WolframMath.pdf>
- [10] Holovatsky V., Holovatska Y. Oscillations of an elastic pendulum. 2019. — Режим доступу: <http://demonstrations.wolfram.com/OscillationsOfAnElasticPendulum/>
- [11] Holovatsky V., Holovatskyi I., Holovatska Ya., Struk Ya. (2023). Rozrakhunok syly vzaiemodii tsylindrychnykh ta kiltsevykh mahnitiv [Oscillations of the resonant elastic pendulum]. Physics and Educational Technology, 1, 10–17, doi: <https://doi.org/10.32782/pet-2023-1-2>
- [12] Volodymyr Holovatsky, Yana Holovatska (2020), "Magnetic Field of a Hollow Cylindrical Magnet" Wolfram Demonstrations Project. demonstrations.wolfram.com/MagneticFieldOfAHollowCylindricalMagnet/
- [13] Volodymyr Holovatsky, Yana Holovatska (2020), "Interacting Cylindrical Magnets" Wolfram Demonstrations Project. demonstrations.wolfram.com/InteractingCylindricalMagnets/
- [14] Головацький, В., Головацький, І. (2022). Розрахунок сили взаємодії циліндричних магнітів. Фізика та освітні технології, (1), 3–14. <https://doi.org/10.32782/pet-2022-1-1>

- [15] Задачі з механіки та методика їх розв'язування. Методичний посібник. Укл.: Курек І.Г., Курек Є.І., Ткач О.О., Олійнич-Лисюк А. В. – Чернівці, 2021 – 120 с.
- [16] Задачі з фізики та методика їх розв'язування / Укладачі: Курек І. Г., Курек Є. І, Олійнич-Лисюк А. В., Струк Я. М. – Чернівці, 2022. – 172с.