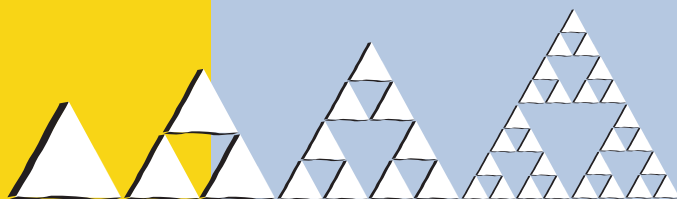


Математичні олімпіади Буковини

2015-2025

Тарас Звоздецький
Олена Карлова
Володимир Михайлюк
Едвард Туркевич



Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

Тарас Звоздецький
Олена Карлова
Володимир Михайлюк
Едвард Туркевич

МАТЕМАТИЧНІ ОЛІМПІАДИ БУКОВИНИ

2015-2025



Чернівці

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича
2025

УДК 51-8
3-436

Друкується за ухвалою Вченої Ради
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича
(протокол № 7 від 23 червня 2025 року)

Рецензенти:

Кінашук Наталія Леонідівна, заслужений вчитель України,
директор Чернівецького ліцею № 1 математичного та економічного
профілів Чернівецької міської ради;

Рубльов Богдан Владиславович, доктор фізико-математичних
наук, професор Київського національного університету імені
Тараса Шевченка, голова журі IV етапу Всеукраїнської олімпіади з
математики.

Звоздецький Т.І., Карлова О.О., Михайлюк В.В., Туркевич Е.Й.
3- 436 Математичні олімпіади Буковини 2015-2025 / Т.І.Звоздецький,
О.О.Карлова, В.В.Михайлюк, Е.Й. Туркевич. – Чернівці :
Чернівець. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2025. – 180 с.
ISBN 978-966-423-987-2

У книзі зібрані завдання математичних олімпіад, які проводилися для
школярів Чернівецької області протягом 2015-2025 років. Збірник містить
задачі II етапу Всеукраїнських олімпіад з математики, задачі відбіркових
турів команди Чернівецької області для участі в IV етапі Всеукраїнської
олімпіади з математики, завдання, які пропонувалися на олімпіадах
«МініМудрик» для учнів 5-7 класів, а також «Олімпіади однієї задачі».
Усі задачі супроводжуються відповідями та вказівками до розв'язання.

Книга призначена для студентів спеціальностей «Математика» та
«Математика (середня освіта)», школярів, вчителів математики та керівників
гуртків математичного спрямування, а також для усіх любителів красивих
математичних задач.

УДК 51-8

ISBN 978-966-423-987-2

© Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, 2025

© Звоздецький Т.І., Карлова О.О.,
Михайлюк В.В., Туркевич Е.Й., 2025

Передмова

Для чого потрібні математичні змагання? В першу чергу для того, щоб віднайти серед школярів тих, хто схильний до інтелектуальної творчості, і показати їм красу математики. В подальшому це може захопити учня, і він пов'яже своє майбутнє з більш серйозною, сучасною математикою. А можливо він обере своїм майбутнім інженерний або ІТ-напрямок чи природничі науки, але навички нестандартного мислення, розвинені під час участі в математичних олімпіадах, неодноразово стануть у пригоді.

Кожна олімпіада вчить програвати і перемогти. Навіть дуже здібний учень може зазнати поразки чимало разів, перш ніж отримує свою першу нагороду. Ймовірно також, що спочатку інші будуть здаватися набагато кращими за вас, і буде спокуса опустити руки. Але зрештою, ви засвоїте важливий урок: щоб стати переможцем, потрібно докласти чимало зусиль, які варті досягнення омріяної мети.

Крім того, будь-яке математичне змагання – це знайомство з новими людьми зі схожими інтересами. Дискусії зі школярами-учасниками чи членами журі, які також люблять математику, покращують математичні навички, і з часом дають змогу знайти хороших друзів зі спільним захопленням – математикою.

Саме тому вже протягом десяти років науково-творче об'єднання „Математична Майстерня” організовує гуртки, цикли лекцій, математичні фестивалі та олімпіади, які стають справжніми математични-

ми святами. „Математична Майстерня” – це спільнота однодумців, утворена на факультеті математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, яка має на меті популяризацію та розвиток математики і математичної освіти в Чернівецькій області, пропагує і підтримує чесність та прозорість у проведенні змагань з математики серед школярів і об’єднує людей різного віку, професій та соціального статусу – від старшокласників Чернівецьких шкіл, студентів європейських університетів, аспірантів та викладачів ЧНУ до успішних підприємців і бізнесменів, які й досі захоплюються математикою.

У книзі зібрані завдання математичних олімпіад різного рівня, які проводилися впродовж десяти років (від 2015-2016 до 2024-2025 н.р.) для школярів Чернівецької області в більшості під егідою творчої групи Математичної Майстерні. Усі задачі супроводжуються розв’язками чи вказівками, але читачі можуть придумати свої, відмінні від наведених, розв’язання.

Сподіваємося, що кожний, хто тримає в руках цю книгу, знайде для себе щось корисне.

І пам’ятаймо – математика не навчить нас додавати кохання чи віднімати ненависть, проте вона допоможе зрозуміти, що кожна проблема має розв’язок.

Зміст

1 Умови задач	7
II етап Всеукраїнських учнівських олімпіад	7
2015-2016	10
2016-2017	12
2017-2018	16
2018-2019	19
2019-2020	23
2020-2021	26
2021-2022	29
2022-2023	33
2023-2024	36
2024-2025	39
Олімпіада „МініМудрик” для учнів 5-7 класів	40
2015-2016	41
2016-2017	42
2017-2018	44
2018-2019	46
2020-2021	48
2022-2023	50
2023-2024	51
2024-2025	53

Відбори на IV етап Всеукраїнських олімпіад з математики .	54
2015-2016	55
2016-2017	57
2017-2018	58
2020-2021	60
2022-2023	60
Олімпіада однієї задачі	61
2 Вказівки до розв'язання	63
II етап Всеукраїнських учнівських олімпіад	63
2015-2016	71
2016-2017	79
2017-2018	86
2018-2019	94
2019-2020	102
2020-2021	109
2021-2022	120
2023-2024	127
2024-2025	132
Олімпіада „МініМудрик” для учнів 5-7 класів	133
2015-2016	134
2016-2017	137
2017-2018	140
2018-2019	144
2020-2021	149
2022-2023	152
2023-2024	155
2024-2025	157
Відбори на IV етап Всеукраїнських олімпіад з математики .	158
2015-2016	160
2016-2017	165
2017-2018	170
2020-2021	171
2022-2023	172
Олімпіада однієї задачі	173
Література	178

Умови задач



ІІ етап Всеукраїнських учнівських олімпіад

2015 – 2016

7 клас

- ① Доведіть, що

$$\frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18} > \frac{1}{3}.$$

- ② Градусна міра кута ABC дорівнює 88° , D – деяка точка з внутрішньої області цього кута. Знайдіть кут між бісектрисами кутів ABD і DBC .
- ③ Знайдіть усі чотиризначні числа, які діляться на 35 і отримані з числа 35 дописуванням справа і зліва по одній цифрі.
- ④ Після зниження ціни вхідного квитка на стадіон для перегляду футбольного матчу кількість глядачів зросла на 30%, а виручка від продажу квитків – на 10,5%. На скільки відсотків була знижена ціна квитка?
- ⑤ У таблиці розміром 2015×2015 записані числа так, що добуток усіх чисел у кожному стовпчику від'ємний. Доведіть, що знайдеться рядок, у якому добуток усіх чисел також від'ємний.

8 клас

- ① Додатні числа a та b такі, що $a^2 + b^2 = 12$ і $ab = 2$. Чому дорівнює значення $(a + b)^3$?
- ② На продовженні сторони AC , яка лежить навпроти найбільшого кута трикутника ABC , відкладено такий відрізок CD , що $CD = CB$. Доведіть, що кут ABD не гострий.
- ③ Дорога довжиною 8 кілометрів від туристичного табору до гірського озера складається з трьох частин – підйому на хребет, рівної ділянки та спуску з хребта до озера. Турист витратив на дорогу від табору до озера і назад 5 годин і 40 хвилин, а його середня швидкість на підйомах складала 2 км/год, на рівній ділянці – 3 км/год, а на спусках – 4 км/год. Яка довжина рівної ділянки дороги між табором та озером?
- ④ Чи можна подати число 2015 у вигляді суми квадратів двох натуральних чисел?
- ⑤ На дні народження у Тарасика було 10 гостей, яких іменинник частував цукерками. Відомо, що гості з'їли 44 цукерки. Доведіть, що знайдеться хоча б двоє гостей, які з'їли однакову кількість цукерок.

9 клас

- ① Яке з чисел більше: $2015 \cdot 2016 + 6050$ чи 2017^2 ?
- ② В трапеції $ABCD$ основа AD в три рази довша, ніж BC . Точка M лежить на відрізку AD , причому відрізок CM паралельний до AB , а відрізки CM і DB перетинаються в точці P . Знайдіть відношення CP до MP .
- ③ Остап на канікулах готувався до олімпіади з математики і розв'язував задачі: спочатку – простіші, а потім – складніші. Кожен день кількість задач, які він розв'язав, зменшувалася на деяку сталу кількість відсотків. Через три дні виявилось, що кількість задач, які Остап всього розв'язав за три дні, становить 231,25% від кількості задач, які він розв'язав за перший день. На скільки відсотків щодня зменшувалась кількість розв'язаних ним задач?
- ④ Розв'яжіть рівняння

$$7[x] + 10\{x\} = 12,$$

де $[x]$ – ціла частина числа x , тобто, найбільше ціле число, яке не перевищує x , а $\{x\}$ – дробова частина числа x , тобто, $\{x\} = x - [x]$.

- ⑤ В першому класі однієї з шкіл китайського міста Тяньцзинь навчається 99 учнів. В обідню перерву усі діти з цього класу стають в рядок, і директор школи Тянь та його заступник Цзинь по черзі пригощають дітей пиріжками з рисом, причому за один раз кожний з них може пригостити одного чи двох учнів, які стоять поруч. Тому, хто пригощає останнього учня, кухар Пунь завжди готує смачний юай. Кому дістанеться смачний юай, якщо першим почне пригощати учнів директор Тянь?

10 клас

- ① Доведіть, що для довільного дійсного числа a виконується нерівність

$$a^4 + 1 \geq a^3 + a.$$

- ② Розв'яжіть рівняння $(3x^2 - 2x)^2 + 9x^2 = 6x + 4$.
 ③ Обчисліть значення дробу

$$\frac{(3 + 6 + \dots + 99)^2 - (7 + 14 + 21 + \dots + 147)^2}{(1 + 2 + 3 + \dots + 100) + 1000}.$$

- ④ Точка D ділить бічну сторону BC рівнобедреного трикутника ABC з основою AB на відрізки довжиною 2 см і 6 см. Знайдіть довжини сторін трикутника ABC , якщо $AB = AD$.
 ⑤ За круглим столом сидять 2015 дорослих і 2015 дітей. Доведіть, що у одного з присутніх за столом обидва сусіди – діти.

11 клас

- ① Розв'яжіть рівняння

$$2 \cos^2 x + 5 \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) - 4 = 0.$$

- ② Нехай a, b – дійсні числа такі, що $a + b = 2016$. Доведіть, що

$$a^2 + b^2 - 2ab - a + 3b \geq 2015.$$

- ③ Точки D і E ділять гіпотенузу AB прямокутного трикутника ABC на три відрізки AD , DE і EB , довжини яких відносяться як $1 : 4 : 7$ відповідно. Знайдіть кути трикутника ABC , якщо $CD = CE$.
- ④ Знайдіть всі цілі розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{x + 2015} = y \\ x + 10 \cos(\pi y) = 0. \end{cases}$$

- ⑤ Кожну точку на колі радіуса 1 см пофарбовано у зелений або чорний колір. Доведіть, що можна вибрати на колі дві точки одного кольору так, що відстань між ними
- а) не менша, ніж $\sqrt{3}$ см; б) не менша, ніж $2 \sin 72^\circ$ см.

2016 – 2017

6 клас

- ① Козак Іван Сірошапка два дні їхав верхи із села Вишневе у Запорізьку Січ. Першого дня він проїхав $\frac{9}{17}$ усього шляху, а другого – решту 104 км. Яку відстань подолав Іван за два дні?
- ② Перша цифра п'ятицифрового числа на 1 більша за останню. На скільки зменшиться це число, якщо першу і останню цифри поміняти місцями, а інші не змінювати?
- ③ Знайдіть найбільше шестицифрове число, яке ділиться націло на 45 та має усі різні цифри.
- ④ Протягом першого півріччя 2016 року було 25 днів з опадами, а решта – без опадів. Доведіть, що протягом вказаного півріччя був хоча б один тижневий період (тобто сім днів поспіль) без опадів.

7 клас

- ① Дано два добутки: $11 \cdot 44$ і $16 \cdot 32$. На яке число треба збільшити кожний із цих чотирьох множників, щоб нові добутки дорівнювали один одному?
- ② Одна сторона прямокутника на 30% більша за сторону квадрата, а інша сторона – на 30% менша за сторону цього ж квадрата. Скільки відсотків від площі цього квадрата становить площа такого прямокутника?

- ③ Доведіть, що число $7^{2016} - 3^{2016}$ ділиться націло на 10.
- ④ У меню шкільної їдальні є 3 види перших страв, 4 види других страв і 2 види третіх страв. Кожен учень класу вибрав собі на обід повний комплекс страв (по одній першій, другій та третій страві). Доведіть, що хоча б два учні вибрали собі однакові обідні комплекси, якщо у класі є 25 учнів.

8 клас

- ① Доведіть, що число $2^{18} - 2^{12} + 2^{11} - 2^5$ кратно 2016.
- ② Знайдіть кути прямокутного трикутника, якщо бісектриси двох його кутів перетинаються під кутом 60° .
- ③ Знайдіть найменше натуральне число n , при якому $n!$ кратно 2016 (нагадаємо, що символом $n!$ позначається добуток перших n натуральних чисел, тобто, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$).
- ④ У кожного марсіанина по 3 руки. Чи можуть 7 марсіан взятися за руки так, щоб кожна рука тримала рівно одну іншу руку?
- ⑤ Герміона задумала 4 числа і обчислила всі можливі їхні попарні суми. Вона повідомила Гаррі п'ять таких сум: 43, 60, 81, 103 і 120. Чому дорівнює шоста сума?

9 клас

- ① Розв'яжіть рівняння

$$(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12.$$

- ② У прямокутному трикутнику ABC з гіпотенузи AB проведено серединний перпендикуляр, який перетинає сторону AC в точці M так, що $CM : MA = 1 : 2$. Знайдіть кути трикутника ABC .
- ③ У відділі Магічного Транспорту Міністерстві Магії 20162016 поверхів, з'єднані магічним ліфтом. В кабіні ліфта є дві кнопки: "+15" і "-55" (перша кнопка піднімає кабінку ліфта на 15 поверхів, а друга – опускає кабінку на 55 поверхів). Чи може Гаррі Поттер проїхати з першого поверху на тринадцятий?
- ④ Деяке число a при діленні на 2015 і на 2016 дає одну і ту ж остачу 42. Яку остачу може давати число a при діленні на 15?
- ⑤ Сума S двох додатних чисел менша, ніж половина добутку цих двох чисел. Доведіть, що $S > 8$.

10 клас

- ① Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$$f(x) = \cos 2x + |\cos x|.$$

- ② Розв'яжіть рівняння

$$747(2x - x^2) - 1269(y^2 + 2y) = 2016.$$

- ③ У рівнобічну трапецію вписано коло, радіус якого дорівнює 12 см. Одна з бічних сторін трапеції точною дотику ділиться на відрізки, один з яких має довжину 16 см. Знайдіть площу трапеції.
- ④ Відомо, що жодні три діагоналі опуклого 8-кутника не перетинаються в одній точці (вершини не вважаються точками перетину діагоналей). Знайдіть кількість усіх точок перетину діагоналей цього 8-кутника.
- ⑤ Нехай a, b, c – такі різні дійсні числа, що $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Доведіть, що $a + b + c = 0$.

11 клас

- ① Розв'яжіть рівняння

$$4 \cdot 9^x - 7 \cdot 12^x + 3 \cdot 16^x = 0.$$

- ② У трикутника ABC сторона AC дорівнює $6\sqrt{3}$ см, а кут при вершині B дорівнює 60° . Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника AOC , де O – центр кола, вписаного в трикутник ABC .
- ③ Розв'язати в натуральних числах рівняння

$$(x + y + 6)^2(x^2 - y) = 2016.$$

- ④ Відомо, що жодні три діагоналі опуклого 9-кутника не перетинаються в одній точці (вершини не вважаються точками перетину діагоналей). Знайдіть кількість всіх точок перетину діагоналей цього 9-кутника.
- ⑤ Нехай a, b, c – такі різні дійсні числа, що $a^3 - b^3 + c^3 + 3abc = 0$. Доведіть, що $a - b + c = 0$.

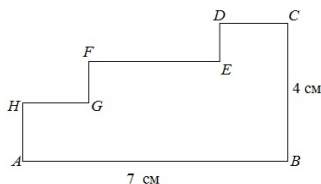
2017 – 2018

6 клас

- ① Сума двох натуральних чисел дорівнює 700. Одне з них закінчується цифрою 7. Якщо її закреслити, то отримаємо друге число. Знайдіть ці числа.
- ② Знайти таке найменше натуральне число, при множенні якого на 2 виходить квадрат деякого натурального числа, а при множенні на 3 – куб деякого натурального числа.
- ③ Перед фінальним забігом чотирьох бігунів А, Б, В та Г було висловлено три прогнози щодо його результатів: АБВГ, ВАГБ та АВГБ. Після забігу виявилося, що в жодному прогнозі для жодного учасника не було вказане хоча б одне правильне підсумкове місце. В якому порядку фінішували бігуни?
- ④ На дошці записані числа 1, 2, 3, 4, 5 та 6. За один крок дозволяється, вибравши два числа, кожне з них збільшити або зменшити на 1. Чи можна за скінченну кількість таких кроків домогтися того, щоб усі числа, записані на дошці, виявилися рівними 2017?

7 клас

- ① Визначте периметр многокутника $ABCDEFGH$, зображеного на малюнку:



- ② Для приготування зілля Гаррі Поттер зібрав 20 кг коренів мандраги. З них 20% пішло у відходи при підготовці до сушіння, а під час сушіння частина коренів мандраги, що залишилася, втратила 75% своєї маси. Скільки кілограмів сухих коренів мандраги отримав Гаррі Поттер для свого зілля?
- ③ Вкажіть дві останні цифри числа $20^{17} + 201^7 + 2017$.

- ④ Чи можна всі натуральні числа від 1 до 15 розбити на дві групи так, щоби добутки чисел кожної групи були рівними?

8 клас

- ① Знайдіть значення виразу $\frac{4y^2 + 3xy}{6x^2 - xy}$, якщо $\frac{y}{x} = 3$.
- ② Точка дотику кола, вписаного в трикутник, ділить одну з його сторін на відрізки довжиною 4 см та 9 см. Знайдіть сторони трикутника, якщо відомо, що його периметр дорівнює 50 см.
- ③ Якщо від трицифрового числа відняти число, записане тими ж цифрами, але в оберненому порядку, то отримається 396. Яке це число, якщо сума його цифр дорівнює 6?
- ④ В магічному зоопарку живуть п'ятиногі дракончики та шестиногі динозаврики. Коли на кожну з цих тваринок сідає людина, то загальна кількість ніг стає рівною 88. Скільки в зоопарку дракончиків?
- ⑤ Розріжте квадрат в клітинку розміром 4×4 на найбільшу кількість клітчастих (тобто, таких, що складаються тільки з цілих клітинок) прямокутників, жодні два з яких не є рівними.

9 клас

- ① Спростіть вираз $\sqrt{55 + 14\sqrt{6}} + \sqrt{55 - 14\sqrt{6}}$.
- ② Знайдіть середню лінію рівнобічної трапеції, якщо її діагональ має довжину 20 см та нахилена до основи трапеції під кутом 60° .
- ③ Доведіть, що для будь-якого дійсного числа a виконується нерівність

$$\frac{1 + a + a^2 + \dots + a^8}{1 + a^3 + a^6} \geq 3a.$$

- ④ Розріжте квадрат в клітинку розміром 5×5 на найбільшу кількість клітчастих (тобто, таких, що складаються тільки з цілих клітинок) прямокутників, жодні два з яких не є рівними.
- ⑤ Знайдіть усі пари простих чисел (p, q) , які задовольняють рівняння

$$7q^2 - 7q - 111 = p - pq.$$

10 клас

- ① Обчисліть значення суми

$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{9} + \sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{121} + \sqrt{117}}.$$

- ② Довжина однієї бічної сторони трапеції у 2 рази менша, ніж довжина більшої основи трапеції, а обидві діагоналі трапеції є бісектрисами відповідних кутів при більшій основі. Знайдіть кути даної трапеції.
- ③ Розв'яжіть рівняння $x^2 + 4xy + 5y^2 = 2y - 1$.
- ④ Доведіть нерівність $\left(\frac{1 + a + a^2 + \cdots + a^{2017}}{1 + a + a^2 + \cdots + a^{1008}} \right)^2 \geq 4a^{1009}$.
- ⑤ Таблиця розміром 5×5 заповнена цілими числами з відрізка $[0, 4]$. За один крок кожне число таблиці замінюється остачею від ділення на 5 суми всіх чисел таблиці, які знаходяться в одному рядку або одному стовпці з числом, котре замінюється. Наприклад, число з першого рядка і першого стовпця замінюється остачею від ділення на 5 суми всіх чисел таблиці, які знаходяться в першому рядку або першому стовпці. Відомо, що в початковій таблиці записано 6 нулів, а всі решта – одиниці. Чи можна за скінченну кількість описаних кроків з початкової таблиці отримати таблицю, заповнену лише нулями?

11 клас

- ① Обчисліть значення суми

$$\frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{9} + \sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10201} + \sqrt{10197}}.$$

- ② Розв'яжіть рівняння $3x^3 + x^{2017} = 4$.
- ③ Розв'яжіть нерівність $3 \cdot 4^x + 9^x + 2 > 2^{x+1} 3^x + 2^{x+2}$.
- ④ На колі ω вибрано точки A, B, C і D так, що промені DA і CB перетинаються в точці E , яка знаходиться зовні кола ω , а промені AB і DC перетинаються в точці F , яка також знаходиться зовні кола ω . Доведіть, що точки E, F, C і A лежать на одному колі тоді і лише тоді, коли BD є діаметром кола ω .

- ⑤ Таблиця розміром 7×7 заповнена цілими числами з відрізка $[0, 6]$. За один крок кожне число таблиці замінюється остачею від ділення на 7 суми всіх чисел таблиці, які знаходяться в одному рядку або одному стовпці з числом, котре замінюється. Наприклад, число з першого рядка і першого стовпця замінюється остачею від ділення на 7 суми всіх чисел таблиці, які знаходяться в першому рядку або першому стовпці. Відомо, що в початковій таблиці записано 5 нулів, а всі решта – одиниці. Чи можна за скінченну кількість описаних кроків з початкової таблиці отримати таблицю, заповнену лише нулями?

2018 – 2019

6 клас

- ① Квадрат і прямокутник мають рівні площі. Знайдіть периметр квадрата, якщо сторони прямокутника дорівнюють 4 м і 9 м.
- ② Три велетні їли на обід куліш. Один із них з'їв 120 кг кулішу, другий – $\frac{8}{15}$ того, що з'їв перший, а третій – 0,75 того, що з'їв другий. Скільки кілограмів кулішу з'їли велетні разом?
- ③ У записі 9 999 999 999 поставте між деякими цифрами знаки додавання, віднімання, множення або ділення так, щоб значення отриманого виразу було рівне 2018.
- ④ Тарас і Славко записують одинадцятицифрове число, використовуючи тільки цифри 1, 2 і 4. Першу цифру пише Тарас, другу – Славко, третю – знову Тарас, і так далі по черзі. Тарас хоче отримати в результаті число, кратне 3.
- 1) Чи завжди Славко зможе завадити йому це зробити? Якщо так, то пояснити, як це зробити, а якщо ні, то пояснити, як Тарас може забезпечити собі бажаний результат.
- 2) Дайте відповідь на перше питання у випадку, якщо хлопці можуть використовувати лише цифри 1, 2 і 3.

7 клас

- ① Дано 13 прямокутників розмірами $1 \times 1, 1 \times 2, \dots, 1 \times 13$. Використовуючи прямокутник кожного виду рівно один раз, складіть прямокутник, кожна сторона якого більша за 1.

- ② У три магазини завезли 680 кг апельсинів. Кількості апельсинів, завезених у перший і другий магазини, відносяться як 3 : 5, а в третій завезли на 12% більше, ніж у другий. Скільки кілограмів апельсинів завезли в кожний магазин?
- ③ Із старовинної книги випала частина сторінок, які йдуть поспіль. Перша сторінка, що випала, мала номер 437, а номер останньої записано тими самими цифрами в іншому порядку. Який номер останньої сторінки, що випала?
- ④ Гаррі Поттер повинен перенести магичні камінці, які розміщені в двох купках: в одній купці є 2018 сірих камінців, а в іншій – 2019 білих. Поки в обох купках разом є більше одного камінця, він повинен брати по 2 якихось камінці (одного чи різних кольорів), а коли залишиться один останній камінець, то він його забирає одного. При цьому, кожен раз, коли Гаррі бере 2 камінці одного кольору, то з'являється 1 новий камінець у купці сірих камінців, а коли бере 2 камінці різних кольорів, то з'являється 1 новий камінець у купці білих.
- 1) Камінець якого кольору забере Гаррі останнім?
 - 2) Скільки всього магичних камінців перенесе Гаррі?

8 клас

- ① В трикутнику ABC проведено бісектрису BL . Через вершину A проведено пряму, що перпендикулярна до BL і перетинає сторону BC в точці K . Доведіть, що $AL = LK$.
- ② Відомо, що магичні істоти Швидкорослики дуже швидко ростуть. Наприклад, швидкорослик Енді виростає за рік на 1 метр, а швидкорослик Банді – на 2 метри. Відомо, що 6 років тому Банді був в одинадцять разів довший за Енді, а 4 роки тому – в дев'ять разів довший. Який зріст зараз мають Енді та Банді?
- ③ *Факторіалом* натурального числа n називається добуток всіх натуральних чисел від 1 до n включно (позначається цей добуток символом $n!$). Доведіть, що число
- $$2017! + 2018! + 2019!$$
- ділиться націло на 2019^2 .
- ④ У натурального числа n обчислили суму його цифр та відняли її від самого числа. У числа, яке при цьому отрималося, знову обчислили суму цифр і позначили її через m . Знайдіть всі такі натуральні числа n , для яких $m = 10$.

- ⑤ В країні Діагоналії є n міст (географам точно відомо, що $n \geq 5$), які розташовані на колі, причому всі відстані між сусідніми містами рівні. Відомо, що всі несусідні міста з'єднані прямими дорогами, які місцеві мешканці називають "діагоналями" (так вже історично склалося). Знайдіть найбільшу та найменшу кількість однакових за довжиною діагоналей.

9 клас

- ① *Факторіалом* натурального числа n називається добуток всіх натуральних чисел від 1 до n включно (позначається цей добуток символом $n!$). Доведіть, що число $2017! + 2018!$ ділиться націло на 2019.
- ② Розв'яжіть рівняння $x^3 + 3x = 4$.
- ③ В трикутнику ABC на стороні AB вибрано точку D , на стороні BC – точку E так, що $BD = BE$. На стороні AC вибрано точку F так, що $CE = CF$. Відомо, що $\angle DEF = 40^\circ$. Знайдіть $\angle BAC$.
- ④ Задача 8-5.
- ⑤ У натурального числа n обчислили суму його цифр та відняли її від самого числа. У числа, яке при цьому отрималося, знову обчислили суму цифр і позначили її через m . Знайдіть всі такі натуральні числа n , для яких $m = 100$.

10 клас

- ① Чи існує зростаюча геометрична прогресія, у якої перші 100 членів є цілими числами, а всі решта членів не є цілими числами?
- ② Розв'яжіть в цілих числах рівняння

$$xy + 2018x - 2018y = 2019 \cdot 2017.$$

- ③ Розв'яжіть нерівність

$$\sqrt{x + 4\sqrt{x - 4}} > x - 8.$$

- ④ В опуклому чотирикутнику $ABCD$ сторони AB і CD мають однакову довжину, а відрізки, які сполучають середини протилежних сторін перетинаються під прямим кутом. Доведіть, що $AD \parallel BC$.

- ⑤ Денис і Максим грають у гру. Вони по черзі зафарбовують клітинки таблиці розміром 6×6 . Спочатку одну клітинку за своїм вибором зафарбовує Денис, потім одну клітинку за своїм вибором зафарбовує Максим, і так далі. Гра закінчується, якщо у таблиці повністю зафарбовано два рядки, а гравець, який зробив останній хід, виграє гру. Чи може хтось з гравців забезпечити собі виграш?

11 клас

- ① Розв'яжіть рівняння

$$9^x + 1 = 10 \cdot 3^{x-1}.$$

- ② Розв'яжіть рівняння в невід'ємних цілих числах

$$2018^x = y^2 + y - 1.$$

- ③ В опуклому чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD є бісектрисами кутів чотирикутника при вершинах A і D відповідно. Крім того, відомо, що навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло і сторона AD має вдвічі більшу довжину, ніж сторона BC . Знайдіть кути чотирикутника $ABCD$.

- ④ Розв'яжіть нерівність

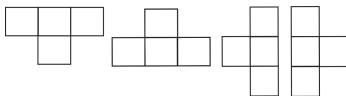
$$3 \cos x + \cos(2x) + \sin^2 x \geq \frac{|x|}{\pi} + \frac{4\pi}{|x|}.$$

- ⑤ Денис і Максим грають у гру. Вони по черзі зафарбовують клітинки таблиці розміром 7×7 . Спочатку одну клітинку за своїм вибором зафарбовує Денис, потім одну клітинку за своїм вибором зафарбовує Максим, і так далі. Гра закінчується, якщо у таблиці повністю зафарбовано хоча б один рядок, а гравець, який зробив останній хід, виграє гру. Чи може хтось з гравців забезпечити собі виграш?

2019 – 2020

6 клас

- ① У деякому місяці три неділі припали на парні числа. Яким днем тижня було 24 число цього місяця? Відповідь обґрунтуйте.
- ② Василько намагався розкласти горіхи на рівні купки, але щоразу, коли він розкладав їх по 4, по 5 або по 6, один горіх залишався зайвим. Скільки горіхів було у Василька, якщо відомо, що їх було менше ста? Відповідь обґрунтуйте.
- ③ У 2019 році учневі виповнюється така кількість років, яка дорівнює потроєній сумі цифр його року народження. Скільки років виповнюється цьому учневі в 2019 році? Відповідь обґрунтуйте.
- ④ Чи можна прямокутник розміром 7×4 розрізати на сім Т-подібних фігурок з чотирьох клітинок? (Т-подібні фігурки зображені на малюнку) Відповідь обґрунтуйте.

**7 клас**

- ① Периметр прямокутника дорівнює 76 см. Знайдіть площу цього прямокутника, якщо його сторони пропорційні числам 15 і 4.
- ② Доведіть, що сума чисел $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ і $\overline{ca}$ кратна 11 (запис $\overline{xy}$ означає десяткове число, записане цифрами x та y).
- ③ Вкажіть чотири останні цифри числа $201^9 + 2019$. Відповідь обґрунтуйте.
- ④ Чи можна квадрат розміром 6×6 розрізати на дев'ять Г-подібних фігурок з чотирьох клітинок? (Г-подібні фігурки зображені на малюнку) Відповідь обґрунтуйте.



8 клас

- ① Розв'яжіть рівняння

$$3 + \frac{x}{1 + \frac{1}{1-x}} = 1$$

- ② В трикутнику ABC кут $\angle B = 155^\circ$. На стороні AC відмічено точки P, Q , а на стороні BC відмічено точку R так, що $AB = BP = PR = RQ = QC$. Знайдіть кути трикутника ABC .
- ③ В олімпіаді з математики беруть участь 37 восьмикласників. Їм пропонується розв'язати 5 задач, за кожно з яких вони можуть отримати від 0 до 7 балів. Доведіть, що після перевірки робіт знайдуться двоє учасників олімпіади, які набрали однакову кількість балів.
- ④ Чи існує таке натуральне число k , що в десятковому записі числа 2019^k кожна з цифр 0, 1, 2, 4, 5, 8, 9 зустрічається рівно 2018 разів, а цифри 3, 6 і 7 не зустрічаються взагалі?
- ⑤ (а) Розріжте квадрат 8×8 на один квадратик розміром 2×2 та прямокутники розмірами 1×5 і 5×1 .
- (б) Доведіть, що при будь-якому розрізанні квадрату 8×8 на один квадратик розміром 2×2 та прямокутники розмірами 1×5 і 5×1 , квадратик 2×2 не може мати спільної межі з межею квадрату 8×8 .

9 клас

- ① Розв'яжіть рівняння

$$\frac{x^2}{1 + \frac{1}{1 + \frac{x}{1-x}}} = \frac{9}{5}$$

- ② На сторонах AC і BC трикутника ABC з кутом $\angle ABC = 144^\circ$ відмічені точки P, R і Q, S , відповідно, так, що $AB = BP = PQ = QR = RS = SC$. Знайдіть кути трикутника ABC .
- ③ Доведіть, що для будь-яких дійсних чисел x та y справедлива нерівність

$$\pi x^2 + \frac{2019}{2018} y^2 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{y^2} \geq 8.$$

- ④ Знайдіть всі натуральні числа n , які задовольняють рівнянню

$$2019n + (n + 1)(n + 2)(n + 3) = n^4 + 2020.$$

- ⑤ (а) Розріжте квадрат 8×8 на один квадратик розміром 2×2 та прямокутники розмірами 1×5 і 5×1 .
 (б) Доведіть, що при будь-якому розрізанні квадрату 8×8 на один квадратик розміром 2×2 та прямокутники розмірами 1×5 і 5×1 , квадратик 2×2 не може мати спільної межі з межею квадрату 8×8 .

10 клас

- ① Функція f є такою, що $f(0) = 1$ і $f(x+2) = \frac{f(x)}{5f(x)-1}$ для кожного $x \in \mathbb{R}$. Знайдіть $f(50)$.
 ② Розв'яжіть нерівність

$$x^{19} + 1 > x^{10} + x^9.$$

- ③ Розв'яжіть в натуральних числах рівняння:

$$4x^2 + y^2 = 75 - 4x - 6y.$$

- ④ У трикутнику медіана, проведена до однієї сторони трикутника, проходить через центр описаного навколо цього трикутника кола, а її довжина дорівнює довжині іншої сторони. Знайдіть кути трикутника.
 ⑤ За один крок замість n -цифрового числа $A = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$, записаного на дошці, записують число $f(A) = \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} + a_n$, де $n \geq 2$ – кількість цифр числа A і $a_1, a_2, \dots, a_n$ – цифри його запису в десятковій системі.
 а) Доведіть, що з довільного багаточислового числа, послідовно застосовуючи описану вище операцію, можна одержати одноцифрове число.
 б) У початковий момент часу на дошці записано 2019-цифрове число, яке складається з 1010 одиниць і 1009 двійок, записаних у деякому порядку. Яке одноцифрове число одержиться на дошці після багаторазового застосування описаної вище операції?

11 клас

- ① Функція f є такою, що $f(0) = 1$ і $f(x+2) = \frac{f(x)}{5f(x)-1}$ для кожного $x \in \mathbb{R}$. Знайдіть $f(100)$.
- ② Розв'яжіть нерівність:

$$19^x > 3^x + 5^x + 11^x.$$

- ③ Розв'яжіть рівняння:

$$1009 \cos^2 \frac{\pi x}{3} + 1010 \cos^2 \frac{\pi x}{673} = 2019.$$

- ④ У трикутнику ABC медіана AD проходить через центр кола, описаного навколо цього трикутника. Знайти периметр трикутника ABC , якщо $AD = 13$ см і $AB = 10$ см.
- ⑤ За один крок замість n -цифрового числа $A = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$, записаного на дошці, записують число $f(A) = \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} + a_n$, де $n \geq 2$ – кількість цифр числа A і $a_1, a_2, \dots, a_n$ – цифри його запису у десятковій системі.
- а) Доведіть, що з довільного багатоцифрового числа, послідовно застосовуючи описану операцію, можна одержати одноцифрове число.
- б) У початковий момент часу на дошці записано зліва направо всі натуральні числа від 1 до 2019 і в результаті одержано одне число $123456789 \dots 2019$. Яке одноцифрове число одержиться на дошці після багаторазового застосування описаної вище операції?

2020 – 2021

8 клас

- ① На сторонах квадрата записано чотири натуральних числа. У кожній вершині квадрата записано число, яке дорівнює добутку чисел, записаних на сторонах, для яких ця вершина є спільною. Сума чисел, записаних у вершинах, дорівнює 91. Знайдіть суму чисел, записаних на сторонах квадрата.

- ② Нехай A – довільне трицифрове число, у якого перша цифра перевищує останню щонайменше на 2, а B – число, записане тими ж цифрами, що й A , але в зворотному порядку. Позначимо через C різницю $A - B$, а через D – число записане тими ж цифрами, що й C , але в зворотному порядку. Доведіть, що $C + D = 1089$.
- ③ В рівнобічній трапеції бічна сторона дорівнює меншій основі і вдвічі менша, ніж більша основа. Знайдіть кути трапеції.
- ④ На дошці написано вирази $2a + 3$ і $b + 4$. Дозволяється записати суму, різницю або добуток будь-яких двох з уже написаних виразів. Чи може на дошці з'явитися вираз

$$2a^2 + 3b^2 - ab + 2a - b + 2021?$$

- ⑤ У купці лежать 6 однакових на вигляд монет, три з яких важать по 11 г, а три – по 10 г. Також є ще одна монета, що важить або 11 г, або 10 г. За яку найменшу кількість зважувань на шалькових терезах без гирь можна дізнатися її вагу?

9 клас

- ① Відомо, що обидва корені рівняння $x^2 + 572x + q = 0$ є цілими числами. Знайдіть число q , якщо відомо, що воно просте.
- ② Знайдіть всі пари натуральних чисел (a, b) , які задовольняють умови:
- $a < 300$;
 - число a в чотири рази більше, ніж сума цифр числа b ;
 - число b в три рази більше, ніж сума цифр числа a ;
- ③ На сторонах AB і BC паралелограма $ABCD$ поза ним побудовано рівносторонні трикутники ABM і BCK . Довести, що трикутник MKD рівносторонній.
- ④ На дошці написано многочлени $2x + 3$ і $x + 4$. Дозволяється записати суму, різницю або добуток будь-яких двох з уже написаних многочленів. Чи може на дошці з'явитися многочлен

$$x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1?$$

- ⑤ Задача 8-5.

10 клас

- ① Розв'яжіть рівняння

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2020} = 2x^2 + 4x + 1.$$

- ② Функція f така, що для довільного дійсного числа x виконується рівність

$$f(x+1) = \sqrt{2}f(x) - f(x-1).$$

Довести, що функція f є періодичною.

- ③ Знайдіть усі пари натуральних чисел a і b таких, що число a є у два рази більшим, ніж сума цифр числа b , а число b є у три рази більшим, ніж сума цифр числа a .
- ④ В гострокутному трикутнику ABC вибрана точка M така, що радіуси кіл, описаних навколо трикутників AMB , BMC і CMA , рівні. Довести, що точка M є точкою перетину висот трикутника ABC .
- ⑤ В олімпіаді з математики беруть участь 298 учнів, причому кожен учасник олімпіади має не більше двох знайомих серед інших учасників. Доведіть, що серед учасників олімпіади знайдеться 100 учнів, які попарно незнайомі між собою. Чи залишиться вірним твердження задачі для 297 учасників олімпіади?

11 клас

- ① Розв'яжіть рівняння

$$1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2021} = 4x^3 + 6x^2 + 3x.$$

- ② Розв'яжіть нерівність на проміжку $[0, 2\pi]$:

$$\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) \geq \cos x + \cos(2x) + \cos(3x).$$

- ③ Знайдіть усі натуральні числа, які в п'ять разів більше суми своїх цифр.
- ④ В гострокутному трикутнику ABC вибрана точка M така, що радіуси кіл, описаних навколо трикутників AMB , BMC і CMA , рівні. Довести, що точка M є точкою перетину висот трикутника ABC .

- ⑤ В олімпіаді з математики беруть участь $5n - 4$ учнів, причому кожен учасник олімпіади має не більше 4-х знайомих серед інших учасників. Доведіть, що серед учасників олімпіади знайдеться n учнів, які попарно незнайомі між собою. Чи залишиться вірним твердження задачі для $5n - 5$ учасників олімпіади?

2021 – 2022

6 клас

- ① В соцмережі "ТукТук" при реєстрації нового акаунту обов'язково вказується колір волосся. Руді користувачі становлять 10% загальної кількості користувачів мережі, серед них 30% мають нік, що починається літерою "Т". Скільки всього користувачів соцмережі, якщо рудих користувачів з ніком на літеру "Т" зареєстровано 12324?
- ② Чотири прямокутні фотографії однакового розміру можна розмістити в три різні фоторамки способами, як показано на малюнках. Відомо, що периметр однієї з цих фоторамок 98 см. Знайдіть периметри інших двох, якщо периметр фотографії 44 см.



- ③ Мама Каріна, Владик та Сашко йдуть в магазин. Поки мама Каріна робить 4 кроки, Владик робить 7 кроків. Поки Владик робить 4 кроки, Сашко робить 7 кроків. Дорогою до магазину Владик і Сашко порахували, що разом вони зробили 462 кроки. Скільки кроків зробила мама Каріна? Поясніть свою відповідь.

- ④ Зафарбуйте клітинки таблиці 8×8 максимально можливою кількістю різних кольорів так, щоб кожна клітинка мала хоча б дві сусідні до неї (по стороні) клітинки її кольору. Кожну клітинку можна зафарбувати тільки одним кольором. Обґрунтуйте, чому не можна розфарбувати таблицю більшою кількістю кольорів.

7 клас

- ① Ромчик погано вчив математику у вересні та жовтні, тому в його щоденнику одна двійка, дві трійки, дві четвірки, одна п'ятірка, три сімки і навіть одна вісімка. У листопаді він зібрався з силами і почав отримувати тільки десятки. Яку найменшу кількість десятків потрібно заробити Ромчику, щоб його середній бал з математики в кінці семестру став рівний 8?
- ② Відомо, що містеру Аутофейджу більше 9 років і менше 100 років. Одного листопадового вечора він написав на серветці свій вік тричі поспіль. Доведіть, що отримане число ділиться націло на 7.
- ③ Знайдіть кути прямокутного трикутника, якщо бісектриси двох його кутів перетинаються під кутом 50° .
- ④ Задача 6-4.

8 клас

- ① У виразі $(x^3 - 2)^2 + (x^2 + *)^2$ замініть $*$ на одночлен так, щоб після розкриття дужок та зведення подібних доданків залишилося 4 доданки.
- ② Наведіть приклад тризначного числа, яке не ділиться націло на 114, але виписане 12 разів поспіль дає число, яке ділиться націло на 114. Відповідь обґрунтуйте.
- ③ Настала осінь. На дереві висять зелені, жовті та червоні листочки. Зелені листочки можуть пожовтіти або почервоніти. Жовті та червоні листочки трохи повисять, а потім відпадають. Вчора на дереві зелених листочків було стільки ж, скільки червоних, а жовтих – у 9 разів більше, ніж червоних. Сьогодні на дереві порівну зелених та жовтих листочків, а червоних – в 9 разів більше, ніж жовтих. Доведіть, що за ніч кількість листочків на дереві зменшилася хоча би в 5 разів.
- ④ Чи існують такі цілі числа a, b, c, d , що числа $a - b, b - c, c - d, d - a$, виписані в деякому порядку, будуть чотирма послідовними цілими числами?

- ⑤ В трикутнику ABC проведено бісектрису AE . Знайдіть кути трикутника ABC , якщо $AC = 2AB$ і $AE = EC$.

9 клас

- ① Розв'яжіть рівняння

$$\frac{x\sqrt{2} + \sqrt{5}}{x\sqrt{2} - \sqrt{5}} + \frac{x\sqrt{2} - \sqrt{5}}{x\sqrt{2} + \sqrt{5}} = \frac{14x}{2x^2 - 5}.$$

- ② Довжина сторони квадрата $ABCD$ дорівнює 2. На сторонах AB , BC і CD вибрали точки U , V і W відповідно. Відомо, що

$$AU + DW = BU + CW = 2CV.$$

Знайдіть площу трикутника UVW .

- ③ Знайдіть всі пари натуральних чисел a та b , які задовільняють рівність

$$a^2 = 2021 + b^2.$$

- ④ Десяткові записи кожного з двох п'ятицифрових чисел A та B складаються з різних цифр і, крім того, ці записи не мають спільних цифр. Довести, що сума цих чисел націло ділиться на 9.
- ⑤ У таблиці розміром 6×6 розмістили n додатних чисел і n від'ємних чисел так, що в кожному рядку і кожному стовпці немає чисел різних знаків. Для якого найбільшого n можна це зробити?

10 клас

- ① Розв'яжіть рівняння

$$\frac{x^2 + 6}{x} + \frac{x}{x^2 + 6} = \frac{26}{5}.$$

- ② У прямокутному трикутнику ABC з прямим кутом при вершині C проведено висоту CD . Знайти кути трикутника, якщо

$$CD^2 = BD^2 - 6AD^2.$$

- ③ Знайдіть всі трійки натуральних чисел a , b та c , які задовільняють рівність

$$25a^2 - 2bc = 2021 + b^2 + c^2.$$

- ④ Десяткові записи кожного з двох п'ятицифрових чисел A та B складаються з різних цифр i , крім того, ці записи не мають спільних цифр. Довести, що сума кубів цих чисел націло ділиться на 9.
- ⑤ У таблиці розміром 8×8 розмістили n чисел 1 і n чисел -1 так, що в кожному рядку і кожному стовпці немає чисел різних знаків. Для якого найбільшого n можна це зробити?

11 клас

- ① Розв'яжіть рівняння

$$9^{x+1} - 4 \cdot 25^x = 5 \cdot 15^x.$$

- ② Знайдіть кути ромба, якщо

$$\sqrt{3} \cdot d_1 d_2 = 16r^2,$$

де d_1 і d_2 – довжини діагоналей ромба, а r – радіус кола, вписаного в ромб.

- ③ Знайдіть всі трійки натуральних чисел a , b та c , які задовільняють рівність

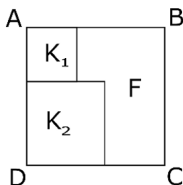
$$81a^2 - 2bc = 2021 + b^2 + c^2.$$

- ④ Десяткові записи кожного з двох п'ятицифрових чисел A та B складаються з різних цифр i , крім того, ці записи не мають спільних цифр. Довести, що для кожного непарного натурального числа n сума $A^n + B^n$ націло ділиться на 9. Чи обов'язково число $A^2 + B^2$ націло ділиться на 9?
- ⑤ У таблиці розміром 8×8 розмістили n чисел 1 і n чисел -1 так, що в кожному рядку і кожному стовпці немає чисел різних знаків.
- (а) Для якого найбільшого n можна це зробити?
- (б) Скількома способами можна розмістити числа в таблиці для найбільшого значення n ?

2022 – 2023

6 клас

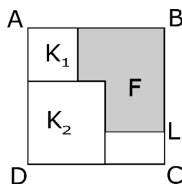
- ① Андрійко проводить кожного дня $2\frac{7}{12}$ години, граючи на комп'ютері. Скільки часу присвятив Андрійко комп'ютерним іграм протягом жовтня?
- ② У дядечка Василя і тітоньки Надії троє дітей. Андрійкові та Богдану разом 19 років, Андрійкові та Оленці разом 14 років, а молодшим разом 7 років. Скільки років кожному з дітей дядечка Василя і тітоньки Надії? Поясніть свою відповідь.
- ③ Периметр квадрата $ABCD$ (див. малюнок) дорівнює 1600 міліметрів, а периметр квадрата K_1 – 5,6 дециметрів. Чому дорівнює периметр фігури F , якщо фігура K_2 – це квадрат?



- ④ Дядечко Василь має мотузку довжиною 100 см, з якої він збирається вирізати 6 шматків довжиною 1, 2, 4, 10, 17, 24 і 40 см. Чи може тітонька Надія розрізати мотузку на дві частини (не обов'язково цілої довжини) так, щоб дядечко Василь не зміг вирізати потрібні йому 7 шматків? Не забудьте пояснити свою відповідь.

7 клас

- ① До новорічних свят дядечко Василь важив 91,5 кг, а тітонька Надія 72,4 кг. На скільки кілограмів змінилася сума їхніх ваг після новорічних свят, якщо дядечко Василь став важчим на $\frac{2}{61}$ своєї попередньої ваги, а тітонька Надія схудла на 0,05% тонни?
- ② Периметр квадрата $ABCD$ (див. малюнок) дорівнює 16000 міліметрів, а периметр квадрата K_1 – 5,6 дециметрів. Чому дорівнює периметр фігури F , якщо фігура K_2 – це квадрат, а довжина CL – 10 сантиметрів?



- ③ Дядечко Василь має мотузку довжиною 150 см, з якої він збирається вирізати 8 шматків довжиною 1, 2, 3, 5, 12, 26, 39 і 60 см. Чи може тітонька Надія розрізати мотузку на дві частини (не обов'язково цілої довжини) так, щоб дядечко Василь не зміг вирізати потрібні йому 8 шматків? Не забудьте пояснити свою відповідь.
- ④ Аліса розфарбовує листочок в клітинку 6×6 двома кольорами завжди гарно – тобто так, що кожна клітинка листочка має сусідню за стороною клітинку такого ж кольору. Злий чарівник Оскар може перефарбувати один рядок чи один стовпчик на листочку так, що колір кожної клітинки змінюється на протилежний. Придумайте приклад гарного розфарбування, яке при перефарбуванні Оскаром будь якого рядка чи стовпчика перстає бути гарним.

8 клас

- ① На пошиття однієї мантиї та чотирьох магістерських шапочок професорка Макґонегел витратила 9 метрів чарівної тканини. Відпочивши, вона пошила ще три такі мантиї та вісім таких самих шапочок і витратила на це 21 метр чарівної тканини. Скільки метрів чарівної тканини витратила професорка Макґонегел на кожну мантию та кожну шапочку окремо?
- ② Кут A в трикутнику ABC дорівнює 49° , а кут B дорівнює 71° . Знайдіть кут між висотою та бісектрисою трикутника, проведеними з вершини C .
- ③ Ширина і довжина прямокутної коробки дорівнюють по 1 см, об'єм дорівнює 2022 см^3 , а висота коробки має вигляд

$$(x^3 + 333x^2 - 334x) \text{ см.}$$

Знайдіть значення x , якщо відомо, що воно є цілим числом.

- ④ Задача 7-4.

- ⑤ З перших десяти натуральних чисел $1, 2, \dots, 10$ вибрали п'ять чисел так, що кожне з вибраних чисел не ділиться націло на кожне з решти чотирьох вибраних чисел. Чи може серед вибраних чисел бути число 3?

9 клас

- ① Встановіть, яке з наступних двох чисел є більшим: $2022^{2022} \cdot 2021^{2021}$ чи $2022^{2021} \cdot 2021^{2022}$?
- ② Розв'яжіть рівняння $(x^2 + x)^2 - x^2 - 2 = x$.
- ③ На гіпотенузі AB та катетах AC і BC прямокутного трикутника ABC вибрано точки Q , P і R так, що чотирикутник $CPQR$ є квадратом. Знайдіть кути трикутника ABC , якщо $AP = 3BR$.
- ④ Серед чисел вигляду $n^4 + 4$, де n – довільне натуральне число, знайдіть всі прості числа.
- ⑤ Задача 8-5.

10 клас

- ① Розв'яжіть рівняння $x^4 + 331x^2 = 2022$.
- ② Доведіть, що для довільних натуральних чисел n і m виконується нерівність

$$n^n \cdot m^m \geq n^m \cdot m^n.$$

- ③ Задача 9-4.
- ④ На стороні BC квадрата $ABCD$ вибрали точку M і побудували квадрат $BKLM$. Виявилось, що $AC = AL$. Знайдіть $\angle CAL$.
- ⑤ З перших двадцяти натуральних чисел $1, 2, \dots, 20$ вибрали десять чисел так, що кожне з вибраних чисел не ділиться націло на кожне з решти дев'яти вибраних чисел. Чи може серед вибраних чисел бути число 3?

11 клас

- ① Задача 10-1.
- ② Доведіть, що для довільних додатних дійсних чисел a і b виконується нерівність

$$a^a \cdot b^b \geq a^b \cdot b^a.$$

- ③ Знайдіть всі цілі числа x і y , які задовольняють рівність

$$y^3 - y = \cos(\pi x) + 5.$$

- ④ Натуральне число n має рівно два різні непарні дільники. Доведіть, що серед довільних трьох дільників числа n обов'язково знайдуться два дільники такі, що один з них націло ділиться на інший.
- ⑤ PQ – діаметр кола з радіусом 1. Хорда AB перетинає діаметр PQ в точці C під кутом 45° . Доведіть, що значення виразу $AC^2 + BC^2$ не залежить від положення точки C , і знайдіть це значення.

2023 – 2024

6 клас

- ① В чарівній країні Пельменія зголодніла після уроків Даринка хоче купити порцію пельменів, яка коштує 1 кнедлик, і продається в автоматі "Пельмені". Автомат приймає монети тільки по 5 або 7 кнедликів, та видає решту тільки такими монетами. Яку найменшу кількість кнедликів повинна дати Даринці її мама, щоб дівчинка купила порцію пельменів і принесла мамі повністю всю решту?
- ② На безлюдний острів винесло 3 ящика з солодошами. В одному з них знаходиться тільки зефірки, в іншому – тільки шоколад, а в третьому – і зефірки, і шоколад. Кожний ящик закритий і позначений стікером. На одному стікері написано "Зефір", на іншому стікері написано "Шоколад", а на третьому – "Зефір і шоколад", але жодний ящик не позначений правильно. Робінзон має можливість витягти і оглянути тільки один смаколик тільки з одного ящика. Як він повинен це зробити, щоб після того правильно переклеїти всі стікери?
- ③ Чи можна зі смужок 1×1 , 1×2 , 1×3 , ..., 1×13 скласти прямокутник, обидві сторони якого більші за 1?
- ④ На дошці записано три двозначних числа, одне з яких починається цифрою 5, друге – цифрою 6, а третє – цифрою 7. Вчителька попросила трьох учнів вибрати собі по два різних числа і додати їх. У першого учня вийшло 147, а у другого і третього – різні тризначні числа, які починаються на 12. Які числа були написані на дошці? Поясніть свою відповідь.

7 клас

- ① Власник піцерії на початку січня знизив вартість піци "Чотири сири" на 20% і назвав її в меню "Три сири". Потім у квітні знизив вартість піци "Три сири" на 25% і назвав її "Два сири", а у серпні, аби привабити більше відвідувачів – знизив вартість піци "Два сири" на 50%, і включив її до меню під назвою "Сир". На скільки відсотків піца "Сир" дешевша, ніж піца "Чотири сири"?
- ② Задача 6-2.
- ③ Два двозначних числа відрізняються одне від одного на 5, обидва діляться націло на 5, а їхня сума, піднесена до квадрату, є числом, яке ми отримаємо, коли напишемо ці числа поруч. Які це числа?
- ④ На годиннику одна стрілка, яка вказує на 12 годину. Петрик і Павлик грають за правилом: за один хід гравець може повернути цю стрілку на дві або на три години вперед. Виграє той, хто поставить стрілку на шосту годину. Першим ходить Петрик. Чи може хтось з хлопців завжди вигравати? Якщо так, то опишіть, яким чином?

8 клас

- ① Скільки прямокутників різних розмірів можна скласти зі смужок 1×9 , 1×10 , ..., 1×22 ?
- ② В опуклому чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $AB = BC$. Промені BA і CD перетинаються в точці E , а промені AD і BC – в точці F . Також відомо, що $BE = BF$ і $\angle DEF = 33^\circ$. Знайдіть $\angle EFD$.
- ③ Учасники олімпіади з математики отримали завдання з шести задач. За відповідь до задачі учасник може отримати 0, 1, 2 або 3 бали. Є тільки один спосіб набрати 18 балів, і шість різних способів набрати 17 балів. А скількома різними способами можна отримати 16 балів?
- ④ Число $A22 \dots 22B$ має 2024 цифри (всі цифри між цифрами та дорівнюють 2) і ділиться націло на 72. Знайдіть A та B .
- ⑤ Діти гуляють у дворі садочка. Тих дітей, в кого на ногах порівну шкарпеток, у 5 разів менше, ніж тих, у кого не порівну. Вихователька сказала дітям переодягнутися, і кожна дитина зняла шкарпетку з однієї ноги і одягнула на іншу. Тепер тих, у кого на ногах порівну шкарпеток, стало в 2 рази менше, ніж тих, у кого

не порівну. Чи могло статися так, що на початку прогулянки більше, ніж половина дітей на одній нозі мали рівно на одну шкарпетку менше, ніж на іншій?

9 клас

- ① Розв'яжіть рівняння $x^2 + 2x = 99$.
- ② Знайдіть найбільший спільний дільник чисел 123456789 та 987654321.
- ③ В гострокутному трикутнику ABC проведено висоти BP та CQ . Точка M – середина BC , а точка N – середина PQ . Доведіть, що $MN \perp PQ$.
- ④ Знайдіть всі пари натуральних чисел x і y таких, що

$$3xy + x + 6y = 2023.$$

- ⑤ Яку найменшу кількість клітинок квадрата 5×5 потрібно зафарбувати так, щоб у кожному прямокутнику 2×3 , сторони якого йдуть лініями сітки, була зафарбована хоча б одна клітинка?

10 клас

- ① Розв'яжіть рівняння $x^4 + 2x^2 = 99$.
- ② З вершини C прямого кута прямокутного трикутника ABC проведено медіану CM і висоту CH . Знайдіть кути цього трикутника, якщо площа трикутника CMH у 4 рази менша, ніж площа трикутника ABC .
- ③ Розв'яжіть нерівність

$$3 \cos(3x) + 5 \cos(5x) + 7 \cos(7x) + \dots + 89 \cos(89x) \leq 2024.$$

- ④ Задача 9-4.
- ⑤ На дошці записано числа

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{99}.$$

За один крок дозволяється витерти будь-які два числа a і b , які на той момент записані на дошці, і записати одне з наступних чисел: $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ або $\sqrt{a^2 + b^2}$. Яке найбільше число можна отримати на дошці після застосування 98-ми таких кроків?

11 клас

- ① Розв'яжіть рівняння

$$x^4 + 2x^2 = 2499.$$

- ② Середини сторін опуклого чотирикутника $ABCD$ лежать на одному колі. Відомо, що $AB = CD = 5$ см і $BC = 7$ см. Знайдіть довжину сторони DA .

- ③ Розв'яжіть нерівність

$$3^{x+1} + 5^{x+1} + 7^{x+1} + \dots + 89^{x+1} \leq 2024^{x+1}.$$

- ④ Знайдіть всі пари натуральних чисел x і y таких, що

$$5xy + 10x + y = 2023.$$

- ⑤ На дошці записано числа

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{99}.$$

За один крок дозволяється витерти будь-які k чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$, які на той момент записані на дошці, і записати одне з наступних чисел:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{\sqrt{k}} \quad \text{або} \quad \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2}.$$

Яке найбільше число можна отримати на дошці?

2024 – 2025

6 клас

- ① Знайдіть найменше чотирицифрове число, яке ділиться націло на 41, а при діленні на 5 дає в остачі 3. Відповідь обґрунтуйте.
- ② В лабораторії зіллеваріння знаходяться колби із зіллям стрибучості, швидкості, сили та шкоди. Колби із зіллям стрибучості складають $\frac{1}{6}$ від кількості колб із зіллям швидкості, колб із зіллям сили в 3 рази більше, ніж колб із зіллям швидкості, а колби із зіллям шкоди складають 20% від колб із зіллям сили та зіллям стрибучості разом. Скільки всього колб в лабораторії, якщо відомо, що колб із зіллям стрибучості є 10? Відповідь обґрунтуйте.

- ③ У магічному зоопарку мешкають 11 однолапиків. Скільки було б лапостискань, якби кожних двоє однолапиків привітались по одному разу, одночасно потиснувши один одному лапу? Відповідь обґрунтуйте.
- ④ На дошці записані числа $1, 2, 3, \dots, 2024$. Кожну хвилину з усіма числами роблять наступну операцію: якщо число ділиться націло на 100, то його ділять на 100, а якщо не ділиться на 100, то від нього віднімають 1. Яке найбільше число залишиться на дошці через 87 хвилин? Відповідь обґрунтуйте.

7 клас

- ① На занятті гуртка з математики вчителька хотіла поділити учнів на групи по троє, але один учень залишився без групи. Коли вчителька поділила учнів на пари, то знову виявилося, що один учень залишився без пари. Скільки учнів було на занятті гуртка, якщо відомо, що їх більше, ніж $\left(\frac{250}{100} \cdot 4 + 10 \cdot \frac{1}{2}\right)$ і менше, ніж $(7,9 - 2,9)^2$? Відповідь обґрунтуйте.
- ② Задача 6-3.
- ③ В лабораторії зіллеваріння знаходяться колби із зіллям стрибучості, швидкості, сили та шкоди. Колби із зіллям стрибучості складають $\frac{1}{6}$ від кількості колб із зіллям швидкості, колб із зіллям сили в 3 рази більше, ніж колб із зіллям швидкості, а колби із зіллям шкоди складають 40% від усіх наявних колб із зіллями. Скільки всього колб в лабораторії, якщо відомо, що колб із зіллям стрибучості є 12? Відповідь обґрунтуйте.
- ④ На дошці записане число 23. Кожну хвилину число на дошці втирають і записують на його місце добуток його цифр, збільшений на 12. Яке число буде на дошці через добу? Відповідь обґрунтуйте.

8 клас

- ① Музей науки відвідала група в складі 31-го студента. Середній вік групи студентів 23 роки. Якби до студентів долучився викладач, то середній вік групи став би 24 роки. Скільки років викладачеві?
- ② Бісектриса тупого кута паралелограма ділить його сторону у відношенні 3 : 1, рахуючи від вершини гострого кута. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 70 см.

- ③ У магічному зоопарку мешкають 20 однолапиків. Скільки було б лапостискань, якби кожних двоє однолапиків привітались по одному разу, одночасно потиснувши один одному лапу?
- ④ Професор Інтеграленко вибрав кілька натуральних чисел, кожне з яких не перевищує 2024. Відомо, що жодне з цих чисел не ділиться на жодне інше. Яку найбільшу кількість чисел міг вибрати професор?
- ⑤ Знайдіть найменше натуральне число, яке можна отримати при підстановці натуральних чисел замість змінних у вираз

$$13x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 6xz + y.$$

9 клас

- ① Розв'яжіть рівняння $x^4 - 8x^2 = 2009$.
- ② У магічному зоопарку знаходиться 45 однолапиків. Скільки було б лапостискань, якби кожних двоє однолапиків привітались по одному разу, одночасно потиснувши один одному лапу?
- ③ Два кола з центрами в точках A і B та однаковим радіусом $R = AB$ перетинаються в точці C . У криволінійний трикутник ABC вписано квадрат так, що дві вершини цього квадрата лежать на стороні AB , і ще по одній – на дугах AC і BC відповідно. Знайдіть довжину сторони квадрата, якщо $AB = 10$ см.
- ④ Знайдіть всі пари натуральних чисел x і y таких, що

$$x^2 = 10^y + 2025.$$

- ⑤ Таблиця розміром 10×10 заповнена числами $\pm 1, \pm 10, \pm 10^2, \dots, \pm 10^{99}$, причому для кожного k використовується лише одне з двох чисел 10^k і -10^k . Доведіть, що всі суми чисел, які знаходяться в одному рядку таблиці або в одному стовпці таблиці, є різними.

10 клас

- ① Розв'яжіть рівняння $121x^4 + 22x^2 = 2024$.
- ② Три кола з радіусами 1 см, 2 см та 3 см відповідно попарно дотикаються зовнішнім чином. Кола радіусом 1 см та радіусом 2 см дотикаються в точці A , а кола радіусом 2 см та радіусом 3 см – в точці B . Знайдіть довжину відрізка AB .

- ③ Задача 9-4.
 ④ Розв'яжіть нерівність

$$\sqrt[3]{2x^3 + 5x^2 + 2x - 1} \geq x + 1.$$

- ⑤ Таблиця розміром 10×10 заповнена числами $\pm 1, \pm 2, \pm 2^2, \dots, \pm 2^{99}$, причому для кожного k використовується лише одне з двох чисел 2^k і -2^k . Доведіть, що всі суми чисел, які знаходяться в одному рядку таблиці або в одному стовпці таблиці, є різними.

11 клас

- ① Розв'яжіть рівняння $22x^2 + 121 = 2024x^4$.
 ② Бісектриса AD трикутника ABC ділить сторону, до якої вона проведена, на відрізки довжиною 9 см і 16 см. Відомо, що $AD = DC$. Знайдіть довжину сторони AB .
 ③ Розв'яжіть нерівність

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geq 4^{\sin x \cdot \cos x}.$$

- ④ Знайдіть всі можливі значення цілого невід'ємного числа k такого, що для деякого натурального числа n десятковий запис числа

$$A_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n$$

містить в кінці рівно k нулів.

- ⑤ Таблиця розміром 45×45 заповнена числами $\pm 1, \pm 2, \pm 2^2, \dots, \pm 2^{2024}$, причому для кожного k використовується лише одне з двох чисел 2^k і -2^k . Доведіть, що всі суми чисел, які знаходяться в одному рядку таблиці або в одному стовпці таблиці, є різними.



ОЛІМПІАДА „МІНІМУДРИК” ДЛЯ УЧНІВ 5-7 КЛАСІВ

2015 – 2016

5 клас

- ① Сьогодні неділя, 15 травня. Який день тижня буде через 1000 днів?
- ② Скільки є різних двоцифрових чисел, у яких обидві цифри різні?
- ③ Знайдіть суму чисел

$$3574 + 1265 + 2183 + 4392 + 3817 + 4735 + 2426 + 1608.$$

- ④ По колу розташовано декілька нулів та декілька одиниць: всього 7 чисел. Тьотя Мотя кожного дня записує між двома сусідніми числами 0, якщо ці числа однакові, і 1, якщо вони різні. Після цього тьотя Мотя витирає старі числа. Чи можна через деякий час отримати по колу усі однакові числа?

6 клас

- ① Задача 5-2.
- ② Скільки літрів молока жирності 9 відсотків потрібно змішати з двома літрами молока жирності 6 відсотків, щоб одержати молоко жирності 8 відсотків?
- ③ Якщо до п'ятицифрового числа A дописати на початку цифру 1, то одержиться шестицифрове число B , а якщо до числа дописати цифру 1 в кінці, то одержиться шестицифрове число , яке втричі більше, ніж число . Знайдіть число .
- ④ Задача 5-4.

7 клас

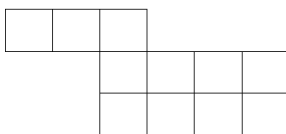
- ① Задача 5-2.
- ② З риболовецької пристані у напрямку до бази відпочинку за течією річки з прямолінійним руслом вирушив пліт. Одночасно з плотом з бази відпочинку у напрямку риболовецької пристані вирушив катер, який через 30 хвилин зустрівся з плотом. Знайдіть відстань від риболовецької пристані до бази відпочинку, якщо швидкість катера в стоячій воді дорівнює 20 км/год?

- ③ Розкладіть на множники вираз $x^4 + 3x^2 + 4$.
- ④ Зовнішня бісектриса кута A трикутника ABC паралельна до сторони BC цього трикутника. Відомо, що $AB = 5$ см і $BC = 3$ см. Знайдіть довжину сторони AC .
- ⑤ Задача 5-4.

2016 – 2017

5 клас

- ① Зобразіть на малюнку, як можна розрізати фігуру на дві рівні частини.



- ② Допоможіть Гаррі Поттеру знайти частку, якщо вона в п'ять разів менше діленого і у шість разів більше дільника.
- ③ Гноми Тіллі, Віллі, Дорін, Корін і Одді Буркотун натрапили на печеру зі скарбами. Двоє гномів збирали золоті монети, а інші троє – срібні келихи. Тіллі та Віллі збирали однакові скарби, Дорін і Корін – різні, Тіллі та Корін – теж різні. Які скарби збирав Одді Буркотун?
- ④ Скільки всього прабабусь і прадідусів було у всіх ваших прабабусь і прадідусів?

6 клас

- ① Знайдіть невідому цифру x , якщо число $12223x725$ кратне 11.
- ② Що менше: $8765 \cdot 5678$ чи $8888 \cdot 5555$?
- ③ Задача 5-3.
- ④ На дерев'яних табличках записані всі трицифрові числа, причому на кожній табличці записано лише одне число. Спочатку, всі таблички, на яких записано числа, що мають хоча б дві однакові цифри, пофарбували у червоний колір. Потім всі непофарбовані таблички з непарними числами пофарбували у зелений колір.

Після цього всі непофарбовані таблички пофарбували у синій колір. Знайдіть, скільки табличок кожного кольору при цьому одержиться.

7 клас

- ① Задача 6-2.
- ② Знайдіть останню цифру числа 2017^{2017} .
- ③ Розріжте трикутник з кутами 40° , 60° і 80° на три трикутники, кожен з яких має хоча б дві рівні сторони.
- ④ З таблиці розміром 5×5 вирізали нецентральну клітинку. Чи можна фігуру, що залишилась, розрізати на 8 прямокутників розміром 3×1 ? (Клітинка, яка знаходиться в центрі квадрата називається центральною, а всі решта – нецентральні). Відповідь обґрунтуйте.

2017 – 2018

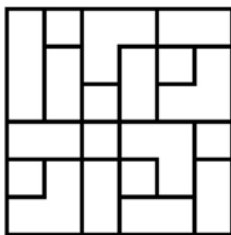
5 клас

- ① Містер Бабайкінз хоче вишикувати своїх п'явок по зросту (від найдовшої до найкоротшої).
 - Я ані найдовша, ані найкоротша, – сказала Бетті.
 - Я не найкоротша, – сказала Кетті.
 - Я найдовша, – сказала Доллі.
 - Я найкоротша, – сказала Моллі.
- Відомо, що три п'явки сказали правду, а одна збрехала. Розташуйте п'явок в порядку зростання їхньої довжини. Відповідь обґрунтуйте.
- ② Чи існують різні натуральні числа m та n , які задовольняють всі три наступні умови:
 - m ділиться націло на n ,
 - $m + 1$ ділиться націло на $n + 1$,
 - $m + 2$ ділиться націло на $n + 2$?

- ③ У містера Бабайкінза є 26 монет. Йому відомо, що одна з них фальшива і за вагою важча, ніж кожна справжня монета. Як за 3 зважування на терезах без гир визначити фальшиву монету?
- ④ Містер Бабайкінз розкладає на квадратному болоті пастки. Кожна пастка має форму прямокутника 2×3 метри. Містер Бабайкінз хоче розкласти 7 пасток так, щоб вони не дотикалися ані сторонами, ані кутами. Яку найменшу цілу довжину метрів може мати сторона болота? Відповідь обґрунтуйте.

6 клас

- ① У містера Бабайкінза і Домовятка є 9 цукерок. Вони грають в таку гру: першим ходить містер Бабайкінз і бере рівно одну цукерку. Далі кожний гравець своїм ходом бере або стільки ж цукерок, скільки до нього взяв інший гравець, або на одну більше. Виграє той, хто зможе взяти більше цукерок, ніж суперник. Хто виграє в цій грі, якщо і містер Бабайкінз, і Домовятко прагнуть здобути перемогу? Відповідь обґрунтуйте.
- ② Покажіть, як розрізати квадрат, зображений на малюнку нижче, на чотири частини однакових за формою та розміром, якщо розрізати можна тільки по проведених лініях.



- ③ Назвемо натуральне число „прикольним”, якщо всі цифри, що входять в його запис, повторюються в ньому хоча б двічі (наприклад, 3622623 – прикольне, а 3622622 – ні). Скільки існує чотирицифрових прикольних чисел без нуля в записі?
- ④ Задача 5-4.

7 клас

- ① Дві мами та дві доньки з'їли разом 14 цукерок. При цьому кожна мама з'їла вдвічі менше цукерок, ніж її донька. Скільки цукерок з'їла кожна мама, якщо відомо, що кожна з'їла цілу кількість цукерок?

- ② Задача 6-3.
- ③ На стороні CD квадрата $ABCD$ відмічено точку K . Бісектриси кутів KAB і KAD перетинають сторони BC і CD в точках M і N , відповідно. На промені AK відмічено таку точку F , що $AF = AB$. Доведіть, що точка F лежить на прямій MN .
- ④ Задача 5-4.

2018 – 2019

5 клас

- ① Знайдіть найбільше двоцифрове число, що складається з різних цифр і різниця між ним самим та числом, записаним тими ж цифрами, але у зворотному порядку, ділиться без остачі на 7. Відповідь обґрунтуйте.
- ② Покажіть на малюнку, як розрізати прямокутник 1×5 одним прямолінійним розрізом на дві частини, з яких можна скласти без накладань прямокутний трикутник. Відповідь обґрунтуйте.
- ③ Беккі Тетчер сиділа під деревом і читала книжку.
- Споримо, що у Беккі більше, ніж 1876 книжок, – сказав Том Сойєр.
- Ні, книжок у неї менше, ніж 1876, – сказав Гекльберрі Фінн.
- Ну хоча б дві книги в неї точно є, – заявила тітонька Поллі.
- Скільки книжок може бути у Беккі, якщо відомо, що тільки одне з цих тверджень істинне?
- ④ У країні є 2019 міст, які з'єднані дорогами, причому
- з кожного міста виходить хоча б одна дорога, і
 - кожна дорога з'єднує два міста та через інші міста не проходить.
- Доведіть, що обов'язково можна знайти таке місто в країні, з якого виходить парна кількість доріг.

6 клас

- ① Знайдіть найбільше двоцифрове число, що складається з різних цифр і різниця між ним самим та числом, записаним тими ж цифрами, але у зворотному порядку, ділиться без остачі на 36. Відповідь обґрунтуйте.
- ② Роботи Допомогаач та Іграшкозбирач розміщені на числовій прямій в точках з координатами -5 і 2019 , відповідно, і починають рухатись одночасно назустріч один одному. Знайдіть координати точки зустрічі, якщо відомо, що роботи рухалися з постійною швидкістю і Допомогаач пройшов до зустрічі відстань, яка у три рази довша за відстань, що пройшов Іграшкозбирач. Відповідь обґрунтуйте.
- ③ Якось у неділю 20 учнів одного класу вирішили провести вихідний разом. Не дійшовши спільної думки, вони розбились на три групи. Перша група пішла у кіно з квитками по 75 гривень, друга – у зоопарк з квитками по 40 гривень, а третя – на футбольний матч з квитками по 15 гривень. Скільки учнів було в кожній групі, якщо всі школярі разом витратили 800 гривень на квитки? Відповідь обґрунтуйте.
- ④ З квадрата розміром 5×5 Том Соєр вирізав одну клітинку, яка знаходиться скраю біля однієї з кутових клітинок. Чи може Гекльбері Фінн розрізати фігуру, що залишилась, на 12 прямокутників розміром 2×1 або 1×2 ? Відповідь обґрунтуйте.

7 клас

- ① Знайдіть найбільше трицифрове число, в якому всі цифри різні та різниця між ним самим і числом, записаним тими ж цифрами, але у зворотному порядку, ділиться без остачі на 7. Відповідь обґрунтуйте.
- ② Відомо, що з трьох чисел x, y, z тільки одне додатне, тільки одне від'ємне і тільки одне рівне нулеві. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x = y^2(y^2 + z^2), \\ x + y^4 + z^4 = 162. \end{cases}$$

- ③ Том Соєр та Гекльберрі Фінн розфарбовували паркан. Тітонька Поллі наполягла на тому, що кожна дошка паркану повинна бути пофарбована в жовтий або синій колір, причому хоча б

одна сусідня дошка поруч із дошкою жовтого кольору повинна бути синьою. Визначте, яка найбільша кількість жовтих дошок може бути в повністю зафарбованому паркані, якщо він складається з 80 дошок? Відповідь обґрунтуйте.

④ Задача 6-4.

2020 – 2021

5 клас

① У числі

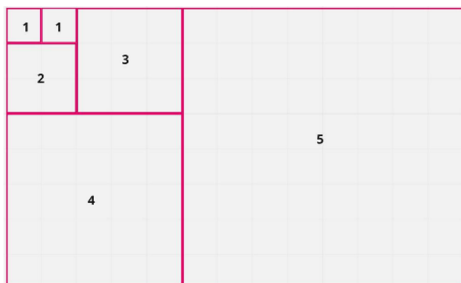
7 * * * * * 1

замініть зірочки цифрами так, щоб сума будь-яких трьох сусідніх цифр дорівнювала 11. Відповідь обґрунтуйте.

② Лото містить 15 комірок, які повинні бути заповнені фішками. Розфарбуйте кожну комірку одним з трьох кольорів: синій, жовтий, зелений так, щоб два твердження були правильними, а одне – неправильним:

- синіх фішок на одну більше, ніж червоних;
- червоних і зелених порівну;
- синіх фішок на 5 більше, ніж зелених.

③ Фігури 1, 2, 3, 4, 5 – квадрати. Знайдіть площу квадрата 5, якщо периметр квадрата 1 складає 24 см.



④ Сімка скаче за 1 секунду на відстань 3 см, а Шпуля скаче на 1 см за пів секунди. Вони одночасно стартують від мікрохвильової печі до пральної машинки. Скільки секунд буде чекати Сімка на Шпулю, якщо відстань від пральної машинки до мікрохвильової печі становить 240 см?

6 клас

- ① На відрізьку AB позначено його кінці та кілька точок всередині. В результаті утворилося 10 відрізків з кінцями у позначених точках. Скільки точок всередині відрізка AB було позначено?
- ② Чотири сім'ї вирушили разом у подорож. У першій родині було троє братів і сестер: Аліна, Беата і Кирило. У другій родині було четверо братів і сестер: Данило, Олена, Федір і Галинка. У третій сім'ї було двоє братів і сестер: Єгор та Іринка. У четвертій родині було троє родичів: Михайло, Костя і Богдан. Діти в дорозі розділилися на групи так, що в кожній групі були тільки ті діти, які мають однакову кількість братів. Як могли розділитися діти? Наведіть всі можливі розв'язки.
- ③ Яка найменша кількість учнів може бути в математичному гуртку, якщо відомо, що хлопців у ньому більше ніж 50%, але менше ніж 60%?
- ④ Тетянка і Дмитрик на листочку записали по одному числу, а на дошці – суму цих чисел. На дошці записано число 11,11. Відомо, що числа, які записали Тетянка і Дмитрик на своїх листочках мають однакову кількість цифр до і після коми. Всі цифри в числі Дмитрика були різні, а число Тетянки мало тільки дві однакові цифри. Вкажіть найбільше серед чисел, які міг написати на листочку Дмитрик. Відповідь обґрунтуйте.
- ⑤ Про натуральне число n відомо, що якщо додати до нього суму всіх його цифр, ми отримаємо число 2021. Знайдіть усі такі натуральні числа.

7 клас

- ① Знайдіть усі натуральні числа n такі, що число $n^2 + 3n - 1$ є квадратом деякого натурального числа.
- ② Всередині трикутника ABC зі сторонами 6 см, 7 см і 9 см взято довільну точку O . Доведіть, що $OA + OB + OC \geq 11$ см.
- ③ Знайдіть усі трицифрові числа, сума цифр яких в 13 разів менша, ніж саме число.
- ④ Числа від 1 до 9 так записали по одному в кожну клітинку квадратної таблиці розміром 3×3 . При цьому виявилось, що сума чисел при кожній стороні квадрата дорівнює 18 і в одній з кутових клітинок знаходиться число 4. Знайдіть число, записане в серединній клітинці цього квадрата.

- ⑤ В олімпіаді з математики взяли участь 44 учні. На початку олімпіади кожен учень одержав завдання і чарівну паличку, якою можна скористатись не більше одного разу за весь час олімпіади. За допомогою чарівної палички учень може або вичарувати плитку шоколаду або одержати розв'язання однієї задачі, яке може бути правильним, а може бути помилковим. Правильне розв'язання задачі учень може вичарувати в тому і тільки в тому випадку, коли виконується така умова:

$$47m + 50n = 2021,$$

де m – це кількість учнів, які уже вичарували шоколадку, а n – це кількість учнів, які уже вичарували неправильне розв'язання. Скільки учнів змогли вичарувати правильне розв'язання, якщо останній учень вичарував шоколадку?

2022 – 2023

5 клас

- ① Одного дощового дня Сашко складав пазли. Перший пазл містив 150 однакових квадратних елементів, і з них Сашко склав картинку розміром 20×30 сантиметрів. Потім Сашко склав другий пазл, елементи якого були такої самої форми та розміру, як і в першому. В результаті Сашко склав картинку розміром 40×60 сантиметрів. Зі скількох елементів складається другий пазл?
- ② Поки йшов дощ, Сашко поклав дві квадратні серветки зі стороною 20 см одна на одну так, що утворився прямокутник зі сторонами 20 см і 30 см. Яку площу має спільна частина цих серветок?
- ③ Цього ж самого дощового дня Сашко читав оповідання про Цифроїжку. Останнє речення на сьомій сторінці починалося так: „Перемноживши всі натуральні числа від 2 до 39, стомлений Цифроїжка порахував, що кількість нулів, якими закінчується цей величезний добуток, дорівнює...”. Сашко перегорнув сторінку, щоб дізнатися, на скільки ж нулів закінчується цей добуток, і виявив, що сторінка заляпана чорнилом. Яке число було написано на наступній сторінці до того, як вона була заляпана?

- ④ Будинки Наталки і Сашка розташовані за 3200 метрів один від одного. Коли дощ закінчився, Наталка виїхала до Сашка на велосипеді, проїхала 300 метрів, як до неї подзвонив Сашко. Виявилося, що він виїхав назустріч Наталці і вже проїхав 500 метрів. Вони домовилися далі їхати один одному назустріч, поки не зустрінуться. На якій відстані від будинку кожного з них зустрілися Наталка і Сашко, якщо після розмови по телефону кожен з них продовжував рух з тою ж швидкістю, що й до дзвінка?
- ⑤ Професорка Макґонегел володіє такими фразами на мові суахілі:

ninakupenda	Я тебе люблю
anakupenda	Він тебе любить
nimekupenda	Я тебе любив
anawapenda	Він їх любить
nitawapenda	Я буду їх любити
utampenda	Ти будеш його любити
umenipenda	Ти мене любив

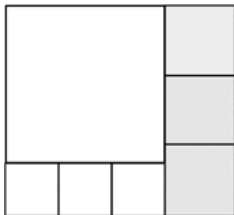
Щоби привернути увагу Дамблдора, їй конче треба перекласти мовою суахілі ось ці речення:

- а) Я буду тебе любити; б) Він їх любив;
в) Я його люблю; г) Він мене любить.

Допоможіть професорці Макґонегел зробити переклади.

6 клас

- ① Задача 5-1.
- ② На дошці записане число 20. Дозволяється або замість цього числа записати на дошці подвоєне число, або витерти останню цифру. Чи можна за декілька таких кроків отримати на дошці число 25?
- ③ Задача 5-3.
- ④ Прямокутник розрізали на 7 квадратів, як показано на малюнку. Сторона кожного сірого квадрата дорівнює 4 см. Знайдіть площу великого прямокутника.



⑤ Задача 5-5.

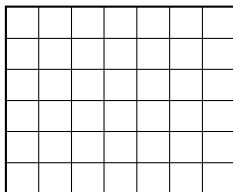
7 клас

- ① Для того, щоб пофарбувати кубик розміром $2 \times 2 \times 2$ потрібний 1 грам фарби. Скільки грамів фарби потрібно, щоб пофарбувати кубик розміром $6 \times 6 \times 6$?
- ② Яке число треба відняти від чисельника дробу $\frac{3459}{7891}$ і додати до знаменника цього ж дробу так, щоб після скорочення отримався дріб $\frac{1}{4}$?
- ③ Задача 6-3.
- ④ Задача 5-5.
- ⑤ На площині відмічено 60 точок. Відомо, що 39 з них лежать на одній прямій, а всі інші точки не лежать на цій прямій. Доведіть, що ці 60 точок можна розбити на 20 трійок так, щоб точки з кожної трійки не лежали на одній прямій.

2023 – 2024

5 клас

- ① Замість * впишіть цифри так, щоб число $7 * 1*$ ділилося без остачі на 2, 5 і 9.
- ② На яку найменшу кількість квадратів можна розрізати прямокутник, зображений на малюнку? Розрізати прямокутник дозволяється тільки по сторонах клітинок.



- ③ Чотири сестри приміряли нові шапки. Анастасія на рік старша за дівчинку в синій шапці, Богдана на рік старша за дівчинку в червоній шапці, Вікторія на рік старша за дівчинку в зеленій шапці. Хто з дівчаток старша – Ганна чи дівчинка з жовтій шапці? І на скільки років?
- ④ На столі стоять 8 стаканів з водою, кількість води в цих стаканах не обов'язково однакова. Дозволяється взяти довільних два стакани та вирівняти в них кількість води переливанням частини води з одного стакана в інший. Чи можна після певної кількості таких переливань досягти того, щоб у всіх стаканах була однакова кількість води?
- ⑤ На залізничній станції до потягу увійшли 102 пасажери і зайняли всі місця у п'ятнадцяти купе. Деякі купе були на 6 місць, а деякі – на 8. Скільки шестимісних купе зайняли пасажери?

6 клас

- ① Задача 5-2.
- ② Знайдіть суму натуральних чисел та B , якщо – це найменше число, що має суму цифр 30, а B – найменше число, що має добуток цифр 1080.
- ③ Оленка і Денис грають в таку гру. Оленка називає число від 1 до 10. Потім діти по черзі до останнього названого числа додають число від 1 до 10 та називають суму. Програє той, хто назве трицифрове число. Хто з дітей завжди може забезпечити собі виграш і яким чином?
- ④ Задача 5-5.
- ⑤ В 6-А класі майже всі учні мають білі навушники. Відомо, що таких учнів не менше, ніж 92,4% і не більше, ніж 92,8% від усіх учнів класу. Яка найменша кількість учнів повинна бути в 6-А класі, щоб це було можливо?

2024 – 2025

4 клас

- ① Розставте деякі (або всі) із знаків «+», «-», «×» чи «:» так, щоб рівність

$$2024 = 0$$

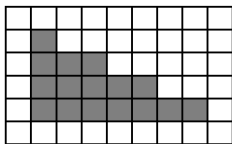
стала правильною.

- ② Злодій Оскар перехопив зашифрований текст

АЯМЯМЗМДПНРСТСЩМЯАЯНАЯАИАНА

Розшифруйте текст, якщо відомо, що останні три літери в шифрограмі – це підпис „Боб”.

- ③ В рядок записали 4 числа – чотирицифрове, трицифрове, двоцифрове та одноцифрове. Перед кожним з них поставили знак плюс або мінус так, щоб результатом обчислення отриманого виразу було число 2024. Яку найменшу кількість різних цифр могли використати для запису цих чотирьох чисел?
- ④ Розріжте фігуру, що зображена темним на рисунку
- на 4 однакові фігурки;
 - на дві фігурки, з яких можна скласти квадрат.



Різати можна лише по сторонах клітинок.

- ⑤ Петрик склеїв пазл рівно за 2 години, при цьому він за 1 хв склеював разом 2 шматочки – окремих чи вже раніше склеєних. За який час цей пазл склеїла б Даринка, якщо вона може за хвилину склеювати 3 шматочки? Відповідь обґрунтуйте.

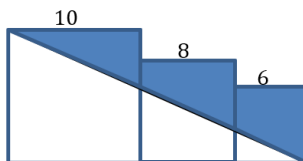
5 клас

- ① Між цифрами лівої частини рівності $2024 = 12$ розставте знаки «+», «-», «×» чи «:» так, щоб рівність стала правильною.
- ② Злодій Оскар перехопив зашифрований текст

ХМЄАРКЮЖІЩХЛХЛЮЬНЬКФЄІХЛК

Розшифруйте текст, якщо відомо, що останні три літери в шифрограмі – це підпис «Шон».

- ③ Петрик вважає, що рік є щасливим, якщо цифри, які його утворюють, є послідовними чотирма цифрами, які можуть бути записаними у будь-якому порядку. Наприклад, 2431 є щасливим. Які перші два роки є щасливими у XXI сторіччі (тобто після 2000 року) та два останні щасливі роки в XX сторіччі (тобто до 2000 року)? Відповідь обґрунтуйте.
- ④ Задача 4-3.
- ⑤ Три квадрати зі сторонами 10, 8 та 6 розташовані таким чином, як це показано на рисунку. Знайдіть площу темної частини фігурки, що утворилася.



Відповідь обґрунтуйте.

6 клас

- ① Між цифрами лівої частини рівності $2024 = -12$ розставте знаки «+», «-», «×», «:» або дужки так, щоб рівність стала правильною.
- ② Злодій Оскар перехопив зашифрований текст

ЇОМЙЖІЖНМАРЗЇЮЙЖЙМАЗРШЄЮІФЗАМЙЬ

Розшифруйте текст, якщо відомо, що останні три літери в шифрограмі – це підпис «Оля».

- ③ Задача 5-3.
- ④ Петрик та Василь мають по декілька монет. Якщо Петрик віддає 2 свої монети Василю, то в них стане однакова кількість монет. Якщо Василь віддає 1 свою монету Петрикові, то в того стане утричі більше монет, ніж у Василя. Скільки монет разом мають Петрик та Василь? Відповідь обґрунтуйте.
- ⑤ Задача 5-5.



ВІДБОРИ НА IV ЕТАП ВСЕУКРАЇНСЬКИХ ОЛІМПІАД З МАТЕМАТИКИ

2015 – 2016

8 клас

- ① Розв'яжіть у цілих числах рівняння

$$(x + 7y)(y + 7z)(z + 7x) = 201520152015.$$

- ② В опуклому шестикутнику проведено всі діагоналі. Яка найбільша кількість точок перетину діагоналей може лежати на одній прямій? (Вершини не вважаються точками перетину діагоналей)
- ③ Дано прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою AB . На катетах цього трикутника, як на основах побудовано рівнобедрені трикутники ACD та BCE , причому $AD = DC = CE = EB$, а точки D , C і E лежать на одній прямій. Доведіть, що чотирикутник $ADEB$ – паралелограм.
- ④ На площині дано 25 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Два брати Чіп і Дейл грають у таку гру: дозволяється по черзі з'єднувати довільні дві з цих точок відрізком і гра проходить до тих пір, поки не утвориться замкнена ламана, яка складається з деяких (можливо й усіх) проведених відрізків. Програвшим вважається той, хто зробив останній хід. Хто з братів може забезпечити собі виграш, якщо починає гру Дейл?
- ⑤ Знайдіть усі пари простих чисел (p, q) , які задовольняють рівняння

$$\frac{3p}{2016q} + \frac{8}{q} = \frac{q}{2016} + \frac{251}{252}.$$

9 клас

- ① Знайдіть усі функції $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, які задовольняють рівняння

$$(2x^2 - 1) \cdot f(1 - x^2) + \frac{5 - 3x^2}{1 + f^2(x^2)} = 2x + 3.$$

для кожного $x \in \mathbb{R}$.

- ② Задача 8-2.
- ③ На сторонах AB і AC гострокутного трикутника ABC вибрано точки F і E , відповідно, так, що $\angle ABE = \angle ACF$. Відрізки BE і CF перетинаються в точці H . Відомо, що навколо чотирикутника $BFEC$ можна описати коло. Доведіть, що AH лежить на висоті трикутника ABC .
- ④ На площині дано 2016 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Два брати Чіп і Дейл грають у таку гру: дозволяється по черзі з'єднувати довільні дві з цих точок відрізком і гра проходить до тих пір, поки не утвориться замкнена ламана, яка складається з деяких (можливо й усіх) проведених відрізків. Програвшим вважається той, хто зробив останній хід. Хто з братів може забезпечити собі виграш, якщо починає гру Дейл?
- ⑤ Задача 8-5.

10-11 класи

- ① Задача 9-1.
- ② На колі розташовано 2016 точок. Два брати Чук і Гек грають у таку гру: дозволяється по черзі з'єднувати довільні дві з цих точок відрізком, але забороняється перетинати вже проведені відрізки. Програє той, хто не може зробити хід. Хто з братів може забезпечити собі виграш, якщо починає гру Чук?
- ③ Задача 9-3.
- ④ Задача 8-5.
- ⑤ Доведіть, що

$$\sqrt[3]{24 + \sqrt[4]{25 + \sqrt[5]{26 + \cdots + \sqrt[2015]{2036 + \sqrt[2016]{2037}}} < 3.$$

2016 – 2017

8 клас

- ① Відомо, що $25! = 155112100433309x5984000000$. Знайдіть невідому цифру x .

- ② Знайдіть найбільше натуральне число n таке, що серед чисел $n^2 + 1, n^2 + 2, n^2 + 3, \dots, n^2 + 99$ обов'язково знайдеться повний квадрат.
- ③ Доведіть, що серед будь-яких 7 натуральних чисел можна знайти 4, сума яких ділиться на 4.
- ④ На колі вибрано точки A, B, C і D так, що прямі AB і CD перетинаються зовні кола в точці E . Відомо, що $AB = BE$ і $CD = DE$. Доведіть, що $AB = CD$.
- ⑤ Шахова фігура „Кентавр” ходить на 1 клітинку по вертикалі чи горизонталі, а потім на 3 клітинки перпендикулярно до попереднього напрямку. Чи може Кентавр пройти з довільної клітинки нескінченної шахової дошки на будь-яку іншу клітинку?

9 клас

- ① Задача 8-1.
- ② Знайдіть найбільше натуральне число n таке, що серед чисел $n^2 + 1, n^2 + 3, n^2 + 5, \dots, n^2 + 2017$ обов'язково знайдеться повний квадрат.
- ③ Доведіть, що серед будь-яких 15 натуральних чисел можна знайти 8, сума яких ділиться на 8.
- ④ Задача 8-4.
- ⑤ Задача 8-5.

10-11 класи

- ① Відомо, що $26! = 4032x1461126605635584000000$. Знайдіть невідому цифру x .
- ② Дійсні числа a та b такі, що $a + b = 2017$. Знайдіть найменше значення виразу

$$a^3 + b^3 - 2017ab.$$
- ③ Для кожного натурального k знайдіть таке найменше натуральне n , що серед будь-яких n натуральних чисел можна вибрати 2^k чисел, сума яких ділиться на 2^k .
- ④ Хорди AC і BD перетинаються в точці E . Відомо, що трикутники ABE і CDE мають однакові площі. Доведіть, що $AD \parallel BC$.
- ⑤ Доведіть, що число $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$

а) є коренем деякого многочлена третього степеня з цілими коефіцієнтами;

- б) не є коренем жодного многочлена другого степеня з цілими коефіцієнтами.

2017 – 2018

8 клас

- ① Доведіть, що натуральне число не є повним квадратом, якщо сума його цифр дорівнює 30.
- ② Доведіть, що для довільних натуральних чисел $n_1, n_2, \dots, n_{2018}$ не може виконуватися рівність

$$\frac{1}{2n_1 - 1} + \frac{1}{2n_2 - 1} + \dots + \frac{1}{2n_{2018} - 1} = 1.$$

- ③ В трикутнику ABC проведено висоту AH . Відомо, що радіуси кіл, вписаних в трикутники ABH і ACH однакові. Доведіть, що $AB = AC$.
- ④ Доведіть нерівність $a^4 + b^4 + 4c^4 + \frac{3}{2} \geq 2ab + 4c$.
- ⑤ На дошці записано 100 додатних чисел, добуток яких дорівнює 1. За один крок два числа із записаних на дошці, наприклад, a та b , замінюються на одне з чисел

$$ab, \quad \frac{a^2 + b^2}{2}, \quad \frac{a^3 + b^3}{a + b}.$$

Чи можна за 99 таких кроків отримати число 0,99?

9 клас

- ① Розв'яжіть рівняння $[x] + [x^2] + [x^3] = 0$.
- ② Доведіть, що для довільних натуральних чисел $n_1, n_2, \dots, n_{2017}$ не може виконуватися рівність

$$\frac{1}{3n_1 - 1} + \frac{1}{3n_2 - 1} + \dots + \frac{1}{3n_{2017} - 1} = 1.$$

- ③ В трикутнику ABC проведено бісектрису AL . Відомо, що радіуси кіл, вписаних в трикутники ABL і ACL однакові. Доведіть, що $AB = AC$.

- ④ Для довільних додатних чисел a, b, c доведіть нерівність

$$\frac{a^2}{bc(a^2 + b^2)} + \frac{b^2}{ca(b^2 + c^2)} + \frac{c^2}{ab(c^2 + a^2)} \geq \frac{9}{2(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

- ⑤ Задача 8-5.

10 клас

- ① Знайдіть усі функції $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, які задовольняють рівність

$$f(x + y) = f(f(x)) + y$$

для всіх $x, y \in \mathbb{R}$.

- ② В кінотеатрі 7 рядів по 10 місць кожний. Група з 50 дітей пішла на ранковий сеанс, а потім на вечірній. Доведіть, що знайдуться двоє дітей, які на ранковому сеансі сиділи в одному ряду і на вечірньому також сиділи в одному ряду.

- ③ Задача 9-3.

- ④ Задача 9-4.

- ⑤ На дошці записано два ненульових числа. За один крок числа a і b , записані на дошці, замінюються на числа

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot a + \frac{1}{2} \cdot b \quad \text{і} \quad \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} \cdot b - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot a.$$

Чи можна через 2018 таких кроків отримати початкові числа?

11 клас

- ① Задача 10-1.

- ② В прямокутному трикутнику ABC з гіпотенузою AB проведено висоту CH і медіану CM . Відомо, що радіуси кіл, вписаних в трикутники ACM і BCN однакові. Доведіть, що $AC = BC$.

- ③ Нехай $n_1, n_2, \dots, n_{101}$ — натуральні числа, сума яких рівна 150. Доведіть, що всі числа можна робити на три рівні за сумою групи. Чи можна це зробити для 100 натуральних чисел?

- ④ Для довільних додатних чисел a, b, c доведіть нерівність

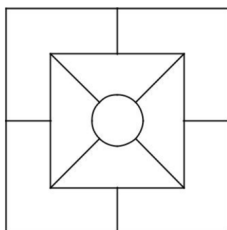
$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + a^2} \geq a + b + c.$$

- ⑤ Задача 10-5.

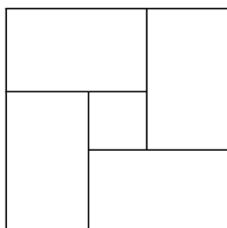
2020 – 2021

5 клас

- ① Знайдіть найбільше чотирицифрове число, всі цифри якого є різними, і сума цифр цього числа дорівнює 20. Відповідь обґрунтуйте.
- ② В кутових комірках зовнішнього квадрату записані числа 2, 4, 6, 8 по одному в кожній комірці і так, що вони не повторюються. У кожній комірці трикутного вигляду внутрішнього квадрата ту записані добутки сусідніх з цією коміркою чисел зовнішнього квадрата. В кружечку записана сума всіх чисел внутрішнього квадрата. Які числа можуть бути записані в кружечку? Наведіть всі можливі варіанти.



- ③ На малюнку зображена керамічна плитка, що складається з чотирьох однакових прямокутників та одного квадрату. Сторона плитки – 10 см. Периметр маленького квадрату в 5 разів менший, ніж периметр всієї плитки. Знайдіть сторони прямокутників. Відповідь обґрунтуйте.



- ④ За круглим столом сидять 10 людей. Деякі з них завжди говорять правду, а решта – завжди говорять неправду. Кожен з цих десяти людей сказав, що справа від нього сидить брехун. Скільки за столом сидить чесних людей? Відповідь обґрунтуйте.

2022 – 2023

9 клас

- ① В олімпіаді брали участь 99 учнів, причому кожний учасник знайомий не менше, ніж з 49 учасниками олімпіади. Доведіть, що за круглий стіл на 4 особи можна посадити 4 учасника олімпіади так, щоб кожен сидів між своїми знайомими.
- ② В кут вписані два кола, що не перетинаються: менше коло дотикається кута в точках A і B , більше – в точках C і D , причому точки A і C належать одній стороні кута. Відрізок AD перетинає кола в точках P і Q (точка P лежить між точками A і Q). Відомо, що $AD = 4$ см і $PQ = 2$ см. Знайдіть AP .
- ③ Нехай $a \geq 0$, $b \geq 0$. Доведіть нерівність

$$2(a^3 + b^3) + a + b + 1 \geq 7ab.$$

Коли досягається рівність?

- ④ Знайдіть всі такі прості числа p , що число $p^2 + 11$ має рівно шість різних дільників (включаючи одиницю та саме число).

10 клас

- ① В олімпіаді брали участь 2023 учня, причому кожний учасник знайомий не менше, ніж з 1011 учасниками олімпіади. Доведіть, що за круглий стіл на 4 особи можна посадити 4 учасника олімпіади так, щоб кожен сидів між своїми знайомими.
- ② Задача 9-2.
- ③ Нехай $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$. Доведіть нерівність:

$$(a + b + c)^3 + 3(a^4 + b^4 + c^4) + a + b + c + 1 \geq 40abc.$$

Коли досягається рівність?

- ④ Задача 9-4.

ОЛІМПІАДА ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ

6 клас

- ① Знайдіть натуральне число N , яке задовольняє наступні властивості:
- А) число N ділиться без остачі на 10 і сума цифр числа N дорівнює 10;
 - Б) число N є найменшим серед усіх натуральних чисел, які діляться без остачі на 10 і сума цифр яких дорівнює 10;
 - В) число N ділиться без остачі на 100 і сума цифр числа N дорівнює 100;
 - Г) число N є найменшим серед усіх натуральних чисел, які діляться без остачі на 5 і сума цифр яких дорівнює 25.

7 клас

- ① Знайдіть всі пари натуральних чисел (x, y) , які є розв'язками рівняння:
- А) $11x - 7y = 0$ (в цьому пункті досить знайти три різні розв'язки);
 - Б) $5x - 8y = 0$;
 - В) $4x - 3y = 1$;
 - Г) $15x^2 + 8y^2 = 22xy + 1$.

8 клас

- ① Чи подається число M у вигляді суми квадратів двох парних натуральних чисел, якщо:
- А) $M = 200$?
 - Б) $M = 2002$?
 - В) $M = 2^{2001}$?
 - Г) $M = 200012$?

9 клас

- ① Чи існує квадратний тричлен $y = ax^2 + bx + c$ з цілими коефіцієнтами, коренем якого є число:

- А) 3?
- Б) $\sqrt{3}$?
- В) $2 + \sqrt{3}$?
- Г) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$?

10 клас

- ① В групі з N людей немає жодної трійки, в якій всі знайомі між собою. Чи можна поділити цю групу людей на дві групи так, що в кожній групі ніхто ні з ким не знайомий, якщо:

- А) $N = 3, N = 4$?
- Б) $N = 5$?
- В) $N \geq 5$ і відомо, що серед кожних п'яти людей є троє, які мають спільного знайомого серед цієї п'ятірки?
- Г) $N \geq 5$ і відомо, що серед кожних п'яти людей є троє, які мають спільного знайомого не обов'язково з цієї п'ятірки?

Вказівки до розв'язання



II ЕТАП ВСЕУКРАЇНСЬКИХ УЧНІВСЬКИХ ОЛІМПІАД

2015 – 2016

7 клас

- ① Зрозуміло, що кожний дріб лівої частини нерівності не менший, ніж $\frac{1}{18}$. Тому

$$\frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \frac{1}{18} > 6 \cdot \frac{1}{18} = \frac{1}{3}.$$

- ② Якщо позначити через BE і BF відповідно бісектриси кутів ABD та DBC , то

$$\angle EBF = \angle EBD + \angle DBF = \frac{1}{2}\angle ABD + \frac{1}{2}\angle DBC = \frac{1}{2} \cdot 88^\circ = 44^\circ.$$

- ③ Шукане число A має вигляд $A = \overline{a35b}$, де $a \neq 0$. Оскільки A ділиться на 5, то $b = 0$ або $b = 5$. Тоді $A = 1000a + 350$ або $A = 1000a + 355$. З першої рівності випливає, що $a = 7$, адже A повинно ділитися на 7. Другу рівність перепишемо у вигляді $A = 1001a + 350 + (5 - a)$. Оскільки $1001a + 350 = 7(143a + 50)$, то $5 - a = 0$. Отже, $a = 7$ або $a = 5$. Таким чином, $A = 7350$ або $A = 5355$.

- ④ Позначимо через x гривень ціну вхідного квитка до зниження, через y гривень – ціну квитка після зниження, а через b – кількість глядачів до зниження ціни. Тоді виручка від продажу квитків до зниження ціни становила nx гривень, а після зниження ціни – $1,105 \cdot nx$ гривень. З іншого боку, після зниження ціни вхідного квитка виручка становила $1,3 \cdot ny$ гривень. Тому $1,3 \cdot ny = 1,105 \cdot nx$, звідки $y = 0,85x$. Отже, ціна вхідного квитка на стадіон була знижена на 15%.
- ⑤ Оскільки добуток усіх чисел кожного стовпчика від'ємний і кількість стовпчиків непарна, то добуток усіх чисел даної таблиці від'ємний. Якщо б добуток усіх чисел у кожному рядку був невід'ємний, то і добуток усіх чисел даної таблиці був би невід'ємний, що суперечить умові задачі.

8 клас

- ① Оскільки $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 16$ і числа a та b додатні, то $a + b = 4$. Тому $(a + b)^3 = 64$.
- ② Нехай $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$. Тоді $\angle ACB = 180^\circ - \alpha - \beta$. Оскільки $\angle ACB$ є зовнішнім для рівнобедреного трикутника BCD і $\angle CBD = \angle CDB$, то

$$\angle CBD = \frac{1}{2}\angle ACB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}.$$

тому

$$\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD = 90^\circ + \frac{\beta - \alpha}{2} \geq 90^\circ.$$

- ③ Нехай довжина рівної ділянки дороги між табором та озером складає x км, а сума довжин підйому на хребет і спуску з хребта y км. Оскільки турист пройшов відстань від табору до озера і назад, то він підіймався на хребет на двох ділянках дороги загальною довжиною y км, спускався з хребта на двох ділянках дороги загальною довжиною y км та двічі пройшов рівну ділянку дороги довжиною x км. Тому числа x та y є розв'язками такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} x + y &= 8 \\ \frac{x}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{y}{4} &= \frac{17}{3}. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо, що $x = 4$ км.

- ④ Припустимо, що існують такі натуральні числа n та m , що

$$2015 = n^2 + m^2.$$

Тоді числа n, m повинні бути різної парності, оскільки сума їх квадратів є непарним числом. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що число n – парне, а m – непарне. Тоді n^2 ділиться на 4, а m^2 дає остачу 1 при діленні на 4. Звідси випливає, що $n^2 + m^2$ дає остачу 1 при діленні на 4. З іншого боку, 2015 дає в остачі 3 при діленні на 4. Отже, ми прийшли до суперечності, і наше припущення не вірне.

- ⑤ Припустимо, що всі гості з'їли різну кількість цукерок і розташуємо ці кількості в порядку зростання:

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{10}.$$

Зрозуміло, що тоді $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 1$, $\dots$, $a_{10} \geq 9$. За умовою задачі

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 44.$$

З іншого боку,

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{10} \geq 0 + 1 + \dots + 9 = 45.$$

Отримуємо суперечливу нерівність $44 \geq 45$. Таким чином, знайдуться двоє гостей, які з'їли однакову кількість цукерок.

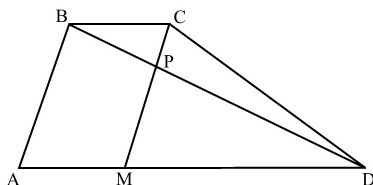
9 клас

- ① Оскільки

$$\begin{aligned} 2017^2 - 2015 \cdot 2016 &= 2017^2 - (2016 - 1) \cdot 2016 = 2017^2 - 2016^2 + 2016 \\ &= (2017 - 2016)(2017 + 2016) + 2016 = 4033 + 2016 = 6049 < 6050, \end{aligned}$$

то перше число більше, ніж друге.

- ② Нехай $BC = a$. Тоді $AD = 3a$.



З побудови випливає, що $AM = BC = a$. Тоді $MD = 2a$. З подібності трикутників BSP та MPD випливає, що

$$\frac{CP}{MP} = \frac{BC}{DM} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

- ③ Нехай z – кількість задач, які Остап розв'язав у перший день, а x – кількість відсотків, на яку кожного дня зменшувалося число розв'язаних ним задач. Тоді за другий день Остап розв'язав $z(1 - \frac{x}{100})$ задач, а за третій день – $z(1 - \frac{x}{100})^2$ задач. Розв'язуючи рівняння

$$z + z(1 - \frac{x}{100}) + z(1 - \frac{x}{100})^2 = z \cdot \frac{231,25}{100},$$

ми отримаємо відповідь $x = 25\%$.

- ④ Оскільки дробова частина числа знаходиться на проміжку $[0, 1)$, то з вихідного рівняння випливає нерівність

$$0 \leq \frac{12 - 7[x]}{10} < 1.$$

Звідси випливає, що

$$\frac{2}{7} < [x] \leq \frac{12}{7}.$$

Єдине ціле число, яке задовольняє цю нерівність – це 1. Отже, $[x] = 1$. Підставимо у вихідне рівняння і отримаємо, що $\{x\} = 0,5$. Таким чином, $x = 1,5$.

- ⑤ Сmachний юай дістанеться директору. Для цього першим ходом директор Тянь повинен пригостити учня, який стоїть по центру, тобто, порядковий номер якого 50. Далі, після кожного ходу свого заступника, який пригощає одного чи двох учнів, що стоять поруч, директор повинен пригостити таку ж кількість учнів, які стоять симетрично до них відносно 50-го учня.

10 клас

- ① Перенесемо всі змінні величини у ліву сторону нерівності і одержимо таку рівносильну нерівність:

$$a^4 - a^3 - a + 1 \geq 0.$$

Після рівносильних перетворень одержимо

$$a^4 - a^3 - a + 1 = (a - 1)(a^3 - 1) = (a - 1)^2(a^2 + a + 1).$$

Залишилось використати, що $(a-1)^2 \geq 0$ і

$$a^2 + a + 1 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq 0.$$

Зауваження. Можна використати, що вирази $a-1$ і a^3-1 є виразами одного знаку. Звідси випливає, що

$$a^4 - a^3 - a + 1 = (a-1)(a^3-1) \geq 0.$$

- ② Перенесемо всі вирази у ліву сторону рівняння і, зробивши прості перетворення, одержимо таке рівносильне рівняння:

$$(3x^2 - 2x)^2 + 3(3x^2 - 2x) - 4 = 0.$$

Зробимо заміну $t = 3x^2 - 2x$ і розв'яжемо рівняння $t^2 + 3t - 4 = 0$.
Тоді

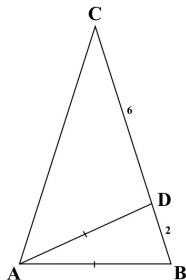
$$t = -4 \quad \text{або} \quad t = 1.$$

Рівняння $3x^2 - 2x = -4$ розв'язків не має. Тому всіма розв'язками вихідного рівняння будуть розв'язки рівняння $3x^2 - 2x = 1$. Отже, $x \in \{-\frac{1}{3}, 1\}$.

- ③ Застосовуючи до трьох виразів, які знаходяться в дужках, формулу суми n членів арифметичної прогресії, одержимо

$$\begin{aligned} & \frac{(3+6+\dots+99)^2 - (7+14+21+\dots+147)^2}{(1+2+3+\dots+100) + 1000} = \\ & = \frac{\left(\frac{(3+99) \cdot 33}{2}\right)^2 - \left(\frac{(7+147) \cdot 21}{2}\right)^2}{\frac{(1+100) \cdot 100}{2} + 1000} = \\ & = \frac{(51 \cdot 33)^2 - (77 \cdot 21)^2}{101 \cdot 50 + 1000} = \frac{3^2 \cdot 11^2 (51^2 - 49^2)}{50(101 + 20)} = \\ & = \frac{3^2 \cdot 11^2 (51 - 49)(51 + 49)}{50 \cdot 121} = 36. \end{aligned}$$

- ④ Зрозуміло, що $CA = CB = 8$ см. Розглянемо спочатку випадок, коли $CD = 6$ см і $DB = 2$ см.



Зауважимо, трикутники ABC і DBA подібні, як рівнобедрені трикутники, які мають однакові кути при основах ($\angle ABC = \angle DBA$). Тому сторони даних трикутників пропорційні. Зокрема,

$$CB : AB = AB : DB.$$

Отже, $AB = \sqrt{CB \cdot DB}$. Якщо $CD = 6$ см і $DB = 2$ см, то $AB = 4$ см. Якщо ж $CD = 2$ см і $DB = 6$ см, то $AB = 4\sqrt{3}$ см.

- ⑤ Розфарбуємо 4030 стільців за столом у червоний та синій кольори по 2015 стільців так, щоб вони чергувались за столом: червоний, синій, червоний, синій, і т.д. Зазначимо, що принаймні 1008 дітей сидять на стільцях одного кольору. Справді, якщо б на стільцях одного кольору сиділо б менше, ніж 1008 дітей, то на стільцях червоного і синього кольору разом сиділо б не більше, ніж $1007 + 1007 = 2014$ дітей. А це суперечить умові.

Для певності вважатимемо, що за синіми стільцями сидить принаймні 1008 дітей. Залишимо за столом лише сині стільці розам з дітьми і дорослими, які на них сидять, а червоні стільці заберемо. Нам залишилось довести, що в утвореному розміщенні за круглим столом 2015 людей хоча би двоє дітей сидять поруч.

Припустимо, що це не так. Тоді справа біля кожної дитини сидить дорослий. Тому дорослих, які сидять справа від дітей, не менше, ніж дітей. Оскільки дітей не менше, ніж 1008, то і дорослих також не менше, ніж 1008. А разом їх не менше, ніж 2016, що приводить до суперечності.

11 клас

- ① Використовуючи тригонометричні рівності $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ і $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, одержимо таке рівносильне рівняння:

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0.$$

Зробивши заміну $t = \sin x$ і розв'язавши рівняння $2t^2 - 5t + 2 = 0$, одержимо, що

$$t = \frac{1}{2} \quad \text{або} \quad t = 2.$$

Рівняння $\sin x = 2$ розв'язків не має, адже $|\sin x| \leq 1$. Тому всіма розв'язками вихідного рівняння будуть розв'язки рівняння $\sin x = \frac{1}{2}$. Отже, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

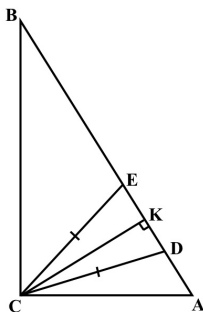
- ② Використовуючи рівність $2015 = a + b - 1$ і зробивши рівносильні перетворення, одержимо рівносильну нерівність

$$a^2 + b^2 - 2ab - 2a + 2b + 1 \geq 0.$$

Залишилось зауважити, що

$$a^2 + b^2 - 2ab - 2a + 2b + 1 = (a - b - 1)^2.$$

- ③ Нехай $AD = x$. Тоді $DE = 4x$ і $EB = 7x$.



Проведемо висоту CK трикутника ABC , яка є також висотою рівнобедреного трикутника DCE , проведеною до основи DE . Тому CK також є медіаною трикутника DCE , тобто $DK = KE = 2x$. Таким чином,

$$AK = AD + DK = x + 2x = 3x$$

і

$$BK = BE + EK = 7x + 2x = 9x.$$

За властивістю висоти у прямокутному трикутнику, проведеної до гіпотенузи, маємо

$$CK = \sqrt{AK \cdot BK} = 3\sqrt{3}x.$$

Тепер

$$\operatorname{tg} \angle CAB = \frac{CK}{AK} = \frac{3\sqrt{3}x}{3x} = \sqrt{3}, \quad \angle CAB = 60^\circ \quad \text{і} \quad \angle CBA = 30^\circ.$$

Таким чином, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$.

- ④ Оскільки $-1 \leq \cos(\pi y) \leq 1$, то

$$-10 \leq -10 \cos(\pi y) \leq 10.$$

Отже, з другого рівняння випливає, що

$$-10 \leq x \leq 10,$$

тобто

$$2005 \leq x + 2015 \leq 2025.$$

З першого рівняння випливає, що число $\sqrt{x + 2015}$ є цілим, тобто число $x + 2015$ – повний квадрат. Оскільки на відрізку $[2005, 2025]$ є лише один повний квадрат ($2025 = 45^2$), то можливий лише один розв'язок $x = 10$, $y = 45$. Залишилось зробити перевірку.

- ⑤ а) Впишемо в коло правильний трикутник. Довжина його сторони дорівнює $\sqrt{3}$ см. Залишилось вибрати дві вершини даного трикутника одного кольору.

б) Міркуватимемо від супротивного. Припустимо, що кожні дві точки на колі, які знаходяться на відстані не меншій, ніж $d = 2 \sin 72^\circ$ см, пофарбовано різними кольорами. Впишемо в коло правильний п'ятикутник $ABCDE$. Довжина його найбільшої діагоналі дорівнює $d = 2 \sin 72^\circ$ см. Покажемо, що кожні дві сусідні вершини пофарбовано однаковим кольором.

Розглянемо, для певності, вершини A і B . Оскільки $AD = BD = d$, то згідно з припущенням вершини A і B мають колір, відмінний від кольору точки D . Отже, A і B – точки одного кольору. Для решти пар вершин міркуємо аналогічно.

Отже, кожні дві сусідні вершини пофарбовано однаковим кольором. Значить, всі вершини пофарбовано однаковим кольором. Зокрема, A і D . Оскільки $AD = d$, то ми одержали суперечність.

2016 – 2017

6 клас

- ① Нехай за два дні козак проїхав x км. Тоді за другий день він проїхав $\frac{8}{17}x$ км. За умовою задачі, $\frac{8}{17}x = 104$, звідки $x = 221$ км.
- ② Запишемо задане число у вигляді $\overline{abcde}$, де a, b, c, d, e – цифри. За умовою задачі, $a = e + 1$. Тоді

$$\begin{aligned}\overline{abcde} - \overline{ebcda} &= 10000(e + 1) + 1000b + 100c + 10d + e - \\ &\quad - 10000e - 1000b - 100c - 10d - (e + 1) = 9999.\end{aligned}$$

Таким чином, число зменшиться на 9999.

- ③ Оскільки шукане число ділиться на 45, то воно ділиться на 9 і на 5. Тому сума його цифр ділиться на 9 і останньою цифрою має бути 0 або 5. Щоб шукане число було найбільшим і мало різні цифри, першими чотирма його цифрами мають бути послідовно цифри 9, 8, 7 і 6, сума яких рівна 30. Якщо б останньою цифрою був 0, то п'ятою цифрою мала б бути 6, яка зустрічається вже раніше. Тому останньою цифрою буде 5, а п'ятою – 1.

Отже, шукане число – це 987615.

- ④ Оскільки 2016 рік високосний, то перші його шість місяців складаються зі 182 днів. Ці 182 дні можна розбити рівно на 26 тижневих періодів. Якщо б кожний тижневий період містив хоча б один день з опадами, то протягом вказаного півріччя було би принаймні 26 днів з опадами, що суперечить умові задачі. Отже, серед розглянутих вище тижневих періодів хоча б один не містить жодного дня з опадами.

7 клас

- ① Позначимо шукане число через x . Тоді з умови задачі будемо мати, що воно є розв'язком рівняння $(13 + x)(44 + x) = (16 + x)(32 + x)$. Розв'язавши його, отримаємо, що $x = 4$.
- ② Позначимо сторону заданого квадрата через a . Тоді одна сторона прямокутника дорівнює $1,3a$, а інша $-0,7a$. Отже, площа цього прямокутника рівна $0,91a^2$, тобто вона становить 91% від площі заданого квадрата.
- ③ При $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ остання цифра числа 7^n послідовно набуває значень $7, 9, 3, 1, 7, \dots$, а остання цифра числа 3^n — значень $3, 9, 7, 1, 3, \dots$, які в обох випадках періодично повторюються з періодом 4. Оскільки число 2016 націло ділиться на 4, то обидва числа 7^{2016} і 3^{2016} закінчуються на 1, а тому їхня різниця закінчується нулем. Отже, різниця цих чисел ділиться націло на 10.
- ④ Із 3 перших страв, 4 других страв і 2 третіх страв можна скласти $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ різні повні обідні комплекси. Тому всі 25 учнів вибрати собі різні комплекси не могли, отже хоча б 2 учні вибрали собі однакові комплекси.

8 клас

- ① Позначимо $a = 2^{18} - 2^{12} + 2^{11} - 2^5$. З перетворень

$$\begin{aligned} a &= 2^{12}(2^6 - 1) + 2^5(2^6 - 1) = 2^5(2^6 - 1)(2^7 + 1) = \\ &= 32 \cdot 63(2^7 + 1) = 2016(2^7 + 1) \end{aligned}$$

випливає, що число a ділиться націло на 2016.

- ② Нехай $\angle C$ — прямий кут трикутника ABC . Зауважимо спочатку, що бісектриси кутів $\angle A$ та $\angle B$ перетинаються під кутом 135° . Отже, розглянемо бісектриси CK і AL кутів $\angle C$ і $\angle A$, відповідно. Позначимо через I точку перетину цих бісектрис. Оскільки за умовою задачі $\angle CIL = 60^\circ$, то кути трикутника AIC наступні: $\angle ACI = 45^\circ$, $\angle CIA = 120^\circ$ і $\angle CAI = 15^\circ$. Отже, кути трикутника ABC : 30° , 60° і 90° .
- ③ Найменше таке число $n = 8$, оскільки $6! = 720 < 2016 < 5040 = 7!, 7!$ не ділиться на 2016, а $8! = 7! \cdot 8 = 10 \cdot 504 \cdot 8 = 20 \cdot 2016$.

- ④ Ні, не можуть, адже у випадку, коли кожній руці ставиться у відповідність рівно одна інша рука, яка її тримає, загальна кількість рук повинна бути парною. А у 7 марсіан всього 21 рука.
- ⑤ Шоста сума дорівнює 82. Справді, оскільки $43 + 120 = 60 + 103 = 163$, то сума всіх чотирьох задуманих чисел – це 163. Тоді невідома сума – це різниця між 163 і 81.

9 клас

- ① Зробимо заміну $x^2 + x + 1 = t$. Тоді дане в умові рівняння зводиться до рівняння $t^2 + t - 12 = 0$, звідки $t = -4$ або $t = 3$. Повертаючись до заміни, ми отримаємо, що $x = 1$ або $x = -2$.
- ② Нехай LM – серединний перпендикуляр. Зауважимо, що $\triangle ALM = \triangle BLM$, звідки випливає, що $AM = MB$. Тоді гіпотенуза MB прямокутного трикутника вдвічі більша, ніж катет MC . Тому кут MBC дорівнює 30° , а кут CMB дорівнює 60° . Звідси випливає, що $\angle BML = \angle LMA = 60^\circ$. Отже, $\angle CAB = 30^\circ$, а $\angle ABC = 60^\circ$.
- ③ Ні, не може. Для того, щоб проїхати з першого поверху на тринадцятий Гаррі Поттеру необхідно піднятися на 12 поверхів, натиснувши при цьому a разів кнопку "+15" і b разів кнопку "-55". Але рівняння

$$15a - 55b = 12$$

не має розв'язків в натуральних числах, оскільки ліва частина цього рівняння кратна 5, а права – ні.

- ⑤ Зауважимо, що число a можна зобразити у вигляді

$$a = 2015 \cdot 2016 \cdot b + 42,$$

де b – ціле число. Оскільки $2015 \cdot 2016$ ділиться націло на 15, а 42 дає в остачі 2 при діленні на 15, то a дає в остачі 2 при діленні на 15.

10 клас

- ① Оскільки $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ і $0 \leq |\cos x| \leq 1$, то $-1 \leq f(x) \leq 2$. Залишилось зауважити, що $f(0) = 2$ і $f(\pi/2) = -1$. Таким чином, найменше значення $f(x)$ – це -1 , а найбільше – це 2.

- ② Оскільки $747 + 1269 = 2016$, то вихідне рівняння записується у вигляді

$$-747(x^2 - 2x + 1) - 1269(y^2 + 2y + 1) = 0,$$

або

$$747(x - 1)^2 + 1269(y + 1)^2 = 0.$$

Звідси легко одержується, що $x = 1$ і $y = -1$.

- ③ Нехай $ABCD$ – дана рівнобічна трапеція з більшою основою AD і меншою основою BC , O – центр вписаного кола, а K , L , M і N – точки дотику вписаного кола до сторін AB , BC , CD і DA , відповідно. Нескладно довести, що

$$KA = AN = ND = DM \quad \text{і} \quad KB = BL = LC = CM.$$

Крім того, $LN = 2R = 24$ см, причому LN – висота трапеції.

Проведемо висоту BE трапеції. Тепер розглянемо два випадки.

- а) $KA = 16$. Позначимо $KB = x$. Тоді

$$AB = AK + KB = 16 + x$$

і

$$AE = AN - EN = AE - BL = 16 - x.$$

Згідно з теоремою Піфагора маємо $AE^2 + BE^2 = AB^2$, тобто

$$(16 - x)^2 + 24^2 = (16 + x)^2.$$

Звідси $x = 9$ і площа $S = 25 \cdot 24 = 600$ см².

- б) $KB = 16$. Тепер позначимо $KA = x$ і аналогічно одержимо рівняння

$$(x - 16)^2 + 24^2 = (16 + x)^2$$

з єдиним розв'язком $x = 9$. А це неможливо, адже $x > 16$.

- ④ **І спосіб (безпосередній підрахунок).** Кожна діагональ опуклого 8-кутника з'єднує дві його вершини і ділить многокутник на дві частини. При цьому кожна з решти 6-ти вершин многокутника належить одній і тільки одній частині, і в кожній частині є хоча б одна з решти 6-ти вершин. Тому всі діагоналі даного 8-кутника можна розбити на такі три типи:

- I тип – 1 вершина знаходиться на одній частині, і 5 вершин знаходиться в іншій частині;
- II тип – 2 вершини знаходиться на одній частині, і 4 вершини знаходиться в іншій частині;
- III тип – 3 вершини знаходиться на одній частині, і 3 вершини знаходиться в іншій частині.

З кожної вершини виходить по 2 діагоналі I і II типу, тому кількість k діагоналей I і II типу можна знайти так:

$$k = \frac{1}{2}(8 \cdot 2) = 8.$$

(тут множник $1/2$ з'явився тому, що при підрахунку у дужках кожна діагональ враховується двічі: по одному разу з кожною вершиною, які вона з'єднує).

Аналогічно, діагоналей III типу є 4.

Зафіксуємо довільну діагональ. Зауважимо, що відрізок, який з'єднує дві вершини, що знаходяться з одного боку від даної діагоналі, не перетинає дану діагональ. З іншого боку, діагональ, яка з'єднує дві вершини, що знаходяться з різних боків від даної діагоналі, обов'язково перетинає пряму, на якій лежить діагональ. При цьому точка перетину є внутрішньою точкою многокутника. Отже, вона є точкою перетину діагоналей. Таким чином, на діагоналі знаходиться така кількість точок перетину з іншими діагоналями, яка дорівнює кількості різних відрізків, які з'єднують дві вершини з різних боків даної діагоналі.

Отже, на діагоналі I типу знаходиться $n_1 = 1 \cdot 5 = 5$ точок перетину, на діагоналі II типу знаходиться $n_2 = 2 \cdot 4 = 8$ точок перетину, і на діагоналі III типу знаходиться $n_3 = 3 \cdot 3 = 9$ точок перетину. Тому кількість N всіх точок перетину можна знайти так:

$$N = \frac{1}{2}(8n_1 + 8n_2 + 4n_3) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (10 + 16 + 9) = 70.$$

(тут множник $1/2$ з'явився тому, що при підрахунку у дужках кожна точка перетину враховується двічі: по одному разу з кожною діагоналлю, які в цій точці перетинаються).

II спосіб. Кожній точці перетину діагоналей поставимо у відповідність множину, що складається з 4-х вершин нашого 8-кутника, які з'єднують дві діагоналі, що перетинаються в даній

точці. Тобто, точці перетину діагоналей AC і BD ми ставимо у відповідність множину $\{A, B, C, D\}$.

З опуклості 8-кутника випливають такі властивості:

- різним точкам перетину відповідають різні набори вершин;
- для довільної множини $\{A, B, C, D\}$ чотирьох різних вершин 8-кутника існує точка перетину діагоналей, якій ставиться у відповідність множина $\{A, B, C, D\}$.

З цих властивостей випливає, що кількість N всіх точок перетину діагоналей дорівнює кількості 4-елементних підмножин 8-елементної множини вершин 8-кутника. Тобто,

$$N = C_8^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70.$$

⑤ Зазначимо, що

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc).$$

Залишилось зауважити, що

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{1}{2}((a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2) \neq 0,$$

адже числа a, b, c — різні.

11 клас

① Поділимо обидві сторони рівності на 16^x , зробимо заміну $t = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ і одержимо рівняння

$$4t^2 - 7t + 3 = 0,$$

розв'язками якого є $t_1 = \frac{3}{4}$ і $t_2 = 1$. Повертаючись до заміни, одержимо розв'язки $x_1 = 1$ і $x_2 = 0$.

② Знайдемо спочатку кут $\angle AOC$. Оскільки центр O вписаного кола є точкою перетину бісектрис трикутника, то $\angle CAO = \frac{1}{2}\angle A$ і $\angle ACO = \frac{1}{2}\angle C$. Тому

$$\begin{aligned} \angle AOC &= 180^\circ - \angle CAO - \angle ACO = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) = \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B) = 120^\circ. \end{aligned}$$

Згідно з наслідком з теореми синусів знаходимо шуканий радіус R кола, описаного навколо трикутника AOC :

$$R = \frac{AC}{2 \sin \angle AOC} = \frac{6\sqrt{3}}{2 \sin 120^\circ} = 6.$$

- ③ Зауважимо, що $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$. Тому серед дільників числа 2016 повними квадратами є такі числа:

$$1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, 2^4 = 16, 2^2 \cdot 3^2 = 36, 2^4 \cdot 3^2 = 144.$$

З іншого боку, число $A = (x + y + 6)^2$ є повним квадратом і дільником числа 2016, причому $A \geq (1 + 1 + 6)^2 = 64$. Отже, $A = 144$. Таким чином,

$$\begin{cases} x + y + 6 = 12 \\ x^2 - y = 14. \end{cases}$$

Додавши два рівняння системи, ми одержимо рівняння

$$x^2 + x - 20 = 0,$$

розв'язками якого є $x_1 = -5$ (сторонній корінь) та $x_2 = 4$. Тоді $y = 2$. Отже, єдиний розв'язок вихідного рівняння – це пара $(4, 2)$.

- ④ **І спосіб (безпосередній підрахунок).** Кожна діагональ опуклого 9-кутника з'єднує дві його вершини і ділить многокутник на дві частини. При цьому кожна з решти 7-ми вершин многокутника належить одній і тільки одній частині, і в кожній частині є хоча б одна з решти 7-ми вершин. Тому всі діагоналі даного 9-кутника можна розбити на такі три типи:

- І тип – 1 вершина знаходиться на одній частині, і 6 вершин знаходиться в іншій частині;
- II тип – 2 вершини знаходиться на одній частині, і 5 вершини знаходиться в іншій частині;
- III тип – 3 вершини знаходиться на одній частині, і 4 вершини знаходиться в іншій частині.

З кожної вершини виходить по 2 діагоналі I і II типу, тому кількість k діагоналей I і II типу можна знайти так:

$$k = \frac{1}{2}(9 \cdot 2) = 9.$$

(тут множник $1/2$ з'явився тому, що при підрахунку у дужках кожна діагональ враховується двічі: по одному разу з кожною вершиною, які вона з'єднує).

Аналогічно, діагоналей III типу є 4.

Зафіксуємо довільну діагональ. Зауважимо, що відрізок, який з'єднує дві вершини, що знаходяться з одного боку від даної діагоналі, не перетинає дану діагональ. З іншого боку, діагональ, яка з'єднує дві вершини, що знаходяться з різних боків від даної діагоналі, обов'язково перетинає пряму, на якій лежить діагональ. При цьому точка перетину є внутрішньою точкою многокутника. Отже, вона є точкою перетину діагоналей. Таким чином, на діагоналі знаходиться така кількість точок перетину з іншими діагоналями, яка дорівнює кількості різних відрізків, які з'єднують дві вершини з різних боків даної діагоналі.

Отже, на діагоналі I типу знаходиться $n_1 = 1 \cdot 6 = 6$ точок перетину, на діагоналі II типу знаходиться $n_2 = 2 \cdot 5 = 10$ точок перетину, і на діагоналі III типу знаходиться $n_3 = 3 \cdot 4 = 12$ точок перетину. Тому кількість N всіх точок перетину можна знайти так:

$$N = \frac{1}{2}(9n_1 + 9n_2 + 9n_3) = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot (6 + 10 + 12) = 126.$$

(тут множник $1/2$ з'явився тому, що при підрахунку у дужках кожна точка перетину враховується двічі: по одному разу з кожною діагоналлю, які в цій точці перетинаються).

II спосіб. Кожній точці перетину діагоналей поставимо у відповідність множину, що складається з 4-х вершин нашого 9-кутника, які з'єднують дві діагоналі, що перетинаються в даній точці. Тобто, точці перетину діагоналей AC і BD ми ставимо у відповідність множину $\{A, B, C, D\}$.

З опуклості 9-кутника випливають такі властивості:

- різним точкам перетину відповідають різні набори вершин;
- для довільної множини $\{A, B, C, D\}$ чотирьох різних вершин 9-кутника існує точка перетину діагоналей, якій ставиться у відповідність множина $\{A, B, C, D\}$.

З цих властивостей випливає, що кількість N всіх точок перетину діагоналей дорівнює кількості 4-елементних підмножин 9-елементної множини вершин 9-кутника. Тобто,

$$N = C_9^4 = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126.$$

- ⑤ Зазначимо, що

$$a^3 - b^3 + c^3 + 3abc = (a - b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab - ac + bc).$$

Крім того,

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab - ac - bc = \frac{1}{2}((a+b)^2 + (b+c)^2 + (a-c)^2) \neq 0,$$

оскільки з умови задачі $a \neq c$. Тоді $a - b + c = 0$.

2017 – 2018

6 клас

- ① Перше число буде трицифровим, а друге – двоцифровим. Оскільки сума цих чисел рівна 700, то перше число починається цифрою 6, а друге закінчується цифрою 3. Отже, шукані числа – 637 та 63.
- ② Позначимо через x шукане число. З умови задачі випливає, що x ділиться націло на 2 і на 3. Тому його можна подати у вигляді $x = 2^m 3^n y$, де натуральне число y не ділиться ні на 2, ні на 3.
- Оскільки число $2x = 2^{m+1} 3^n y$ є квадратом натурального числа, то число m непарне, а число n парне.
- Оскільки число $3x = 2^m 3^{n+1} y$ є кубом натурального числа, то числа m і $n + 1$ діляться на 3.
- Але найменшими такими натуральними числами є $m = 3$ і $n = 2$. Крім цього, щоб число x було найменшим, потрібно взяти $y = 1$. Тому $x = 2^3 \cdot 3^2 = 72$.
- ③ Оскільки в жодному прогнозі не вказано правильно підсумкове місце жодного бігуна, то другим був бігун Г. Тоді першим міг бути лише бігун Б, третім – бігун А, а четвертим – бігун В. Отже, порядок фінішу бігунів – БГАВ.
- ④ Ні, не можна. Сума всіх записаних на дошці чисел непарна. Після кожного кроку вона може збільшитись на 2, зменшитись на 2 або залишитись без змін, тому вона залишатиметься непарним числом. Отже, за допомогою описаних в умові кроків домогтись того, щоб усі записані на дошці числа стали однако-вими, неможливо, бо сума шести однакових чисел парна.

7 клас

- ① Оскільки $CD + EF + GH = AB = 7$ см і $AH + GF + ED = BC = 4$ см, то периметр заданого многокутника рівний 22 см.
- ② При підготовці до сушіння у відходи пішло $0,2 \cdot 20$ кг = 4 кг коренів мандрагори. З решти 16 кг свіжих коренів мандрагори отримали 25%, тобто $0,25 \cdot 16$ кг = 4 кг сухих коренів мандрагори.
- ③ Число 20^{17} закінчується цифрами 00, а число 201^7 – цифрами 01, оскільки для будь-яких натуральних чисел m і n маємо, що

$$(100m + 1)(100n + 1) = 10000mn + 100(m + n) + 1.$$

Тому задане число закінчується цифрами 18.

- ④ Не можна, оскільки в протилежному випадку число

$$15! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 15$$

було би квадратом натурального числа, тому в розкладі на прості множники числа $15!$ кожне просте число мало би парний степінь. Але, наприклад, просте число 13 входить у розклад на прості множники числа $15!$ у першому степені.

8 клас

- ① Оскільки $A = \frac{4y^2 + 3xy}{6x^2 - xy} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \frac{4 + 3\frac{y}{x}}{6 - \frac{y}{x}}$, то $A = 15$.
- ② За властивістю кола, вписаного в трикутник, довжини двох невідомих сторін трикутника мають вигляд $(4 + x)$ та $(9 + x)$. Тоді

$$13 + (4 + x) + (9 + x) = 50,$$

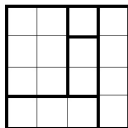
звідки $x = 12$. Отже, сторони трикутника мають довжини 13 см, 16 см і 21 см.

- ③ Нехай $\overline{abc}$ – невідоме трицифрове число. За умовою задачі, $c \neq 0$ і $a > c$. Оскільки $\overline{abc} - \overline{cba} = 99(a - c) = 396$, то $a - c = 4$. Крім того, $a + b + c = 6$. Звідси $a = 5$, $b = 0$ і $c = 1$.
- ④ Нехай a – кількість дракончиків, а b – кількість динозавриків. Тоді

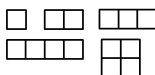
$$7a + 8b = 88.$$

Звідси $a : 8$. Тому $a = 8$, бо при $a > 8$ ліва частина рівняння > 88 .

- ⑤ Приклад розрізання квадрату на 5 прямокутників наведений на малюнку:



Покажемо, що не можна розрізати квадрат більше, ніж на 5 попарно різних прямокутників. Розглянемо всі можливі прямокутники, площа яких не перевищує 4. Їх є п'ять:



Сумарна площа цих прямокутників дорівнює 14. Якщо існує розрізання квадрату більше, ніж на 5 попарно різних клітчастих прямокутників, то 5 найменших за площею прямокутників будуть мати сумарну площу ≥ 14 . Оскільки шостий прямокутник повинен мати площу > 4 , то сумарна площа буде більшою, ніж 18, що, очевидно, більше площі квадрата.

9 клас

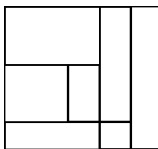
- ① Розглянемо перетворення

$$\sqrt{55 + 14\sqrt{6}} + \sqrt{55 - 14\sqrt{6}} = \sqrt{(7 + \sqrt{6})^2} + \sqrt{(7 - \sqrt{6})^2} = 14.$$

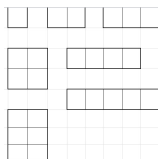
- ② Нехай $ABCD$ – трапеція, BC – менша основа трапеції, AD – більша основа. Проведемо висоту CH . За умовою задачі, $AH = \frac{1}{2}AC = 10$. Оскільки трапеція рівнобічна, то $AH = (BC + AD)/2$. Отже, довжина середньої лінії трапеції дорівнює 10 см.
- ③ Шукана нерівність випливає з перетворень

$$\frac{1 + a + a^2 + \dots + a^8}{1 + a^3 + a^6} = \frac{(1 + a + a^2)(1 + a^3 + a^6)}{1 + a^3 + a^6} = (1 - a)^2 + 3a \geq 3a.$$

- ④ Приклад розрізання квадрату на 7 прямокутників наведений на малюнку:



Покажемо, що не можна розрізати квадрат більше, ніж на 7 попарно різних прямокутників. Розглянемо всі можливі прямокутники, площа яких не перевищує 6, а довжина кожної сторони менша, ніж 5. Таких прямокутників є сім:



Якщо існує розрізання квадрату більше, ніж на 7 попарно різних клітчастих прямокутників, то 7 найменших за площею прямокутників будуть мати сумарну площу ≥ 25 . Оскільки шостий прямокутник повинен мати площу > 0 , то сумарна площа буде більшою, ніж площа квадрата.

⑤ Запишемо рівняння у вигляді

$$(7q + p)(q - 1) = 111.$$

Якщо $q > 2$, то ліва частина рівняння завжди є парним числом. Тому $q = 2$. Звідси $p = 97$.

10 клас

① Зробимо перетворення

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{9} + \sqrt{5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{121} + \sqrt{117}} = \\ &= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{1}}{(\sqrt{5} + \sqrt{1})(\sqrt{5} - \sqrt{1})} + \cdots + \frac{\sqrt{121} - \sqrt{117}}{(\sqrt{121} + \sqrt{117})(\sqrt{121} - \sqrt{117})} = \\ &= \frac{1}{4}(\sqrt{5} - \sqrt{1} + \sqrt{9} - \sqrt{5} + \cdots + \sqrt{121} - \sqrt{117}) = \\ &= \frac{1}{4}(\sqrt{121} - 1) = \frac{1}{4}(11 - 1) = 2,5. \end{aligned}$$

- ② Нехай BC – менша основа трапеції $ABCD$, а AD – більша основа цієї трапеції. Оскільки AC – бісектриса кута $\angle BAD$ і $\angle BCA = \angle CAD$, то $\angle BCA = \angle BAC$. Отже, трикутник ABC рівнобедрений і $AB = BC$. Аналогічно $BC = CD$.

Нехай E – середина більшої основи AD . Тоді

$$AE = ED = AB = BC = CD.$$

Тому чотирикутник $BCDE$ – паралелограм (дві протилежні сторони паралельні і рівні). Отже,

$$BE = CD = AE = ED = AB$$

і трикутник ABE рівносторонній. Тому

$$\angle BAD = \angle CDA = 60^\circ \quad \text{і} \quad \angle ABC = \angle BCD = 120^\circ.$$

- ③ Перенесемо всі вирази в ліву частину і зробимо деякі рівносильні перетворення:

$$\begin{aligned} x^2 + 4xy + 5y^2 &= 2y - 1 \\ x^2 + 4xy + 5y^2 - 2y + 1 &= 0 \\ (x^2 + 4xy + 4y^2) + (y^2 - 2y + 1) &= 0 \\ (x + 2y)^2 + (y - 1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Тепер одержуємо таку систему

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$$

яка має єдиний розв'язок $x = -2$, $y = 1$.

- ④ Зауважимо, що

$$\begin{aligned} 1 + a + a^2 + \dots + a^{2017} &= \\ &= (1 + a + a^2 + \dots + a^{1008}) + (a^{1009} + a^{1010} + \dots + a^{2017}) = \\ &= (1 + a + a^2 + \dots + a^{1008}) + a^{1009}(1 + a + a^2 + \dots + a^{1008}) = \\ &= (1 + a^{1009})(1 + a + a^2 + \dots + a^{1008}). \end{aligned}$$

Тому вихідна нерівність має такий вигляд

$$(1 + a^{1009})^2 \geq 4a^{1009}.$$

Оскільки $(1 + a^{1009})^2 = (1 - a^{1009})^2 + 4a^{1009}$, то

$$(1 + a^{1009})^2 \geq 4a^{1009}.$$

⑤ Не можна. Розіб'ємо перетворення таблиці на дві частини (які виконуються послідовно – спочатку перша, а потім друга):

1) кожне число таблиці замінюється сумою всіх чисел таблиці, які знаходяться в одному рядку або одному стовпці з числом, котре замінюється;

2) кожне число таблиці замінюється остачею від ділення на 5.

Зауважимо, що для кожної клітинки таблиці кількість клітинок, які знаходяться в одному рядку або одному стовпці з даною клітинкою = 9 (це сама клітинка і по 4 інших клітинок, які знаходяться з даною або в одному рядку або в одному стовпці). Тому кожне число таблиці в частині 1) бере участь, як один доданок, при утворенні сум, записаних в 9 клітинках. Отже, в частині 1) сума всіх чисел таблиці збільшується в 9 разів.

З іншого боку, в частині 2) остача від ділення на 5 суми всіх чисел таблиці не змінюється.

Тепер покажемо, з таблиці, сума всіх чисел якої S не ділиться на 5, за один крок отримується таблиця, у якої сума всіх чисел T також не ділиться на 5. Згідно з описаним вище, маємо

$$T = 9S - 5k$$

для деякого цілого невід'ємного числа k . Тому S ділиться на 5 тоді і лише тоді, коли T ділиться на 5.

Оскільки в початковий момент сума всіх чисел таблиці = 19 і не ділиться на 5, то отримати з неї таблицю, у якої сума всіх чисел ділиться на 5 не можна. Зокрема, не можна отримати таблицю, складену з нулів.

11 клас

- ① Розглянемо перетворення

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{9} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10201} + \sqrt{10197}} = \\
 &= \frac{\sqrt{5} - \sqrt{1}}{(\sqrt{5} + \sqrt{1})(\sqrt{5} - \sqrt{1})} + \frac{\sqrt{9} - \sqrt{5}}{(\sqrt{9} + \sqrt{5})(\sqrt{9} - \sqrt{5})} + \dots + \\
 & \quad + \frac{\sqrt{10201} - \sqrt{10197}}{(\sqrt{10201} + \sqrt{10197})(\sqrt{10201} - \sqrt{10197})} = \\
 &= \frac{1}{4}(\sqrt{5} - \sqrt{1} + \sqrt{9} - \sqrt{5} + \dots + \sqrt{10201} - \sqrt{10197}) = \\
 & \quad = \frac{1}{4}(\sqrt{10201} - 1) = \frac{1}{4}(101 - 1) = 25.
 \end{aligned}$$

- ② Розглянемо функцію $f(x) = 3x^3 + x^{2017}$, яка строго зростає на всій числовій прямій. Легко бачити, що $f(1) = 4$. Тому $x = 1$ – єдиний розв'язок рівняння.
- ③ Перенесемо всі вирази в ліву частину і зробимо деякі рівносильні перетворення:

$$\begin{aligned}
 & 3 \cdot 4^x + 9^x + 2 - 2^{x+1}3^x - 2^{x+2} > 0 \\
 & 3 \cdot 4^x + 9^x + 2 - 2 \cdot 2^x 3^x - 4 \cdot 2^x > 0 \\
 & (4^x + 9^x - 2 \cdot 2^x 3^x) + 2(4^x + 1 - 2 \cdot 2^x) > 0 \\
 & (2^x - 3^x)^2 + 2(2^x - 1)^2 > 0.
 \end{aligned}$$

Оскільки ліва частина невід'ємна, то розв'язками нерівності не є ті і лише ті значення x , які є розв'язками відповідного рівняння. Легко бачити, що рівняння

$$(2^x - 3^x)^2 + 2(2^x - 1)^2 = 0$$

має єдиний розв'язок $x = 0$.

Отже, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

- ④ Спочатку доведемо достатність. Нехай BD діаметр кола ω . Тоді

$$\angle DCE = \angle DAF = 90^\circ$$

i

$$\angle AEC = 90^\circ - \angle CDA = \angle AFC.$$

Використовуючи теорему про кут, вписаний в коло, легко довести, що рівність $\angle AEC = \angle AFC$ означає, що точки E, F, C і A лежать на одному колі.

Тепер нехай точки E, F, C і A лежать на одному колі. Тоді $\angle AEC = \angle AFC$, як два кути, вписані в коло, які опираються на дугу AC . Звідси випливає, що $\angle DAB = \angle DCB$. Оскільки $\angle DAB + \angle DCB = 180^\circ$, то $\angle DAB = \angle DCB = 90^\circ$ і BD діаметр кола ω .

- ⑤ Не можна. Розіб'ємо перетворення таблиці на дві частини (які виконуються послідовно – спочатку перша, а потім друга):

1) кожне число таблиці замінюється сумою всіх чисел таблиці, які знаходяться в одному рядку або одному стовпці з числом, котре замінюється;

2) кожне число таблиці замінюється остачею від ділення на 7.

Зауважимо, що для кожної клітинки таблиці кількість клітинок, які знаходяться в одному рядку або одному стовпці з даною клітинкою $= 13$ (це сама клітинка і по 6 інших клітинок, які знаходяться з даною або в одному рядку або в одному стовпці). Тому кожне число таблиці в частині 1) бере участь, як один доданок, при утворенні сум, записаних в 13 клітинках. Отже, в частині 1) сума всіх чисел таблиці збільшується в 13 разів.

З іншого боку, в частині 2) остача від ділення на 7 суми всіх чисел таблиці не змінюється.

Тепер покажемо, з таблиці, сума всіх чисел якої S , не ділиться на 7, за один крок отримується таблиця, у якої сума всіх чисел T також не ділиться на 7. Згідно з описаним вище, маємо, що $T = 13S - 7k$ для деякого цілого невід'ємного числа k . Тому S ділиться на 7 тоді і лише тоді, коли T ділиться на 7.

Оскільки в початковий момент сума всіх чисел таблиці $= 44$ і не ділиться на 7, то отримати з неї таблицю, у якої сума всіх чисел ділиться на 7 не можна. Зокрема, не можна отримати таблицю, складену з нулів.

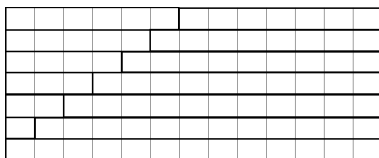
 2018 – 2019

6 клас

- ① Площа прямокутника рівна 36 м^2 , тому сторона квадрата рівна 6 м. Отже, периметр квадрата рівний 24 м.
- ② Другий велетень з'їв $120 \cdot \frac{8}{15} = 64 \text{ кг}$ кулешу, а третій велетень – $64 \cdot 0,75 = 48 \text{ кг}$ кулешу. Тому разом вони з'їли 232 кг кулешу.
- ③ $999 + 999 + 99 : 9 + 9$.
- ④ 1) Так. Славко повинен писати другу, четверту, ..., десятую цифри так, щоб відповідне двоцифрове, чотирицифрове, ..., десятицифрове число ділилося на 3 (після цифри 1 або 4 писати цифру 2, а після цифри 2 писати цифру 1 або 4). Тоді, яку 6 цифру не написав одинадцятю Тарас, отримане одинадцятицифрове число не буде ділитися на 3.
- 2) Ні. Тарас повинен першою написати цифру 3, а далі після цифри 1 писати цифру 2, після цифри 2 писати цифру 1, а після цифри 3 писати цифру 3.

7 клас

- ① Шуканий прямокутник має вигляд



- ② Нехай в перший магазин завезли $3x \text{ кг}$ апельсинів, тоді в другий – $5x \text{ кг}$, а в третій – $5x \cdot 1,12 = 5,6x \text{ кг}$. Оскільки $13,6x = 680$, то $x = 50$. **Відповідь.** 150 кг, 250 кг та 280 кг.
- ③ Оскільки номер першої сторінки, що випала, є непарним числом, то номер останньої сторінки, що випала, має бути парним і більшим за 437 числом. Тому він рівний 734.

- ④ Зауважимо, що кожного разу, коли Гаррі забирає 2 якихось камінців, то загальна кількість камінців у двох купках зменшується на 1, а кількість білих камінців залишається непарним числом. Тому після того, як Гаррі забере 4035 пар камінців, в обох купках залишаться по одному камінцю. Отже, 4036-ю парою буде пара різнокольорових камінців, тому останнім з'явиться білий камінець, якого Гаррі і забере на завершення своєї місії. Всього Гаррі перенесе 8073 магічних камінця.

8 клас

- ① Нехай D – точка перетину прямих AK і BL . Оскільки $\angle ABD = \angle DBK$, то $\angle BAD = \angle BKD$. Отже, трикутник ABK рівнобедрений, адже має два рівні кути про основі. Звідси випливає, що бісектриса BD є також і медіаною в трикутнику ABK . Тоді LD – це висота і медіана в трикутнику ALK . Значить, трикутник ALK рівнобедрений, тому $AL = LK$.
- ② Нехай a – це зріст Енді, а b – це зріст Банді. За умовою задачі

$$\begin{cases} b - 12 = 11(a - 6), \\ b - 8 = 9(a - 4). \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему і отримаємо, що $a = 13$, $b = 89$.

- ③ З перетворень

$$2017! + 2018! + 2019! = 2017!(1 + 2018 + 2018 \cdot 2019) = 2017! \cdot 2019^2$$

випливає, що ліва частина рівності ділиться на 2019^2 .

- ④ Позначимо через $S(n)$ суму цифр числа n . Покажемо, що число $n - S(n)$ кратне дев'яти. Якщо n – одноцифрове число, що $n - S(n) = 0$. Нехай n – k -цифрове число ($k \geq 2$), $n = \overline{a_1 \dots a_k}$. Тоді

$$\begin{aligned} n - S(n) &= \\ &= 10^k a_1 + 10^{k-1} a_2 + \dots + 10 a_{k-1} + a_k - (a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + a_k) = \\ &= a_1(10^k - 1) + a_2(10^{k-1} - 1) + \dots + a_{k-1}(10 - 1). \end{aligned}$$

Зрозуміло, що всі числа, які знаходяться в кожній дужці правої частини рівності складаються з одних дев'яток і тому кратні 9. Отже, і вся сума кратна 9.

Згідно з доведеним вище, сума цифр числа $n - S(n)$ також кратна дев'яти. З іншого боку, $m = 10$ не кратне дев'яти. Отже, **не існує натуральних чисел** n , які задовольняють умову задачі.

- ⑤ Нехай $M_1, \dots, M_n$ – міста в Діагоналії та K – коло, на якому лежать всі міста.

Нехай $n \geq 5$ – непарне число. Зауважимо спочатку, що з кожного міста виходить $(n-3)$ діагоналі, з яких рівно по дві діагоналі мають однакову довжину. Справді, зрозуміло, що всі міста, що з'єднані з деяким містом M_k діагональною довжиною r лежать на колі K_r радіуса r з центром в точці M_k . Оскільки два кола K і K_r перетинаються щонайбільше в двох точках, то і таких міст щонайбільше два. Отже, у випадку непарного n найменша кількість однакових за довжиною діагоналей та найбільша кількість однакових за довжиною діагоналей збігаються і дорівнюють $\frac{2n}{2} = n$.

Якщо ж n – парне, то з кожного міста виходить непарна кількість діагоналей: по дві однакових довжин і по одній найдовшій, що проходить через діаметр кола. В цьому випадку найбільша кількість однакових діагоналей – n (аналогічно як і у випадку непарного n), а найменша кількість однакових діагоналей – $\frac{n}{2}$.

9 клас

- ① 3 перетворень

$$2017! + 2018! = 2017!(1 + 2018) = 2017! \cdot 2019$$

випливає, що ліва частина рівності ділиться на 2019.

- ② Запишемо рівняння у вигляді $x^3 + 3x - 4 = 0$ і зауважимо, що

$$\begin{aligned} x^3 + 3x - 4 &= x^3 - 1 + 3x - 3 = \\ &= (x-1)(x^2 + x + 1) + 3(x-1) = (x-1)(x^2 + x + 4). \end{aligned}$$

Оскільки $x^2 + x + 4 > 0$ для всіх дійсних чисел x , то $x = 1$.

- ③ За умовою задачі трикутники DBE та CEF рівнобедрені. Позначимо $\alpha = \angle BDE = \angle BED$ і $\beta = \angle CEF = \angle CFE$. З трикутника ABC маємо, що

$$\angle BAC = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) - (180^\circ - 2\beta) = 2(\alpha + \beta) - 180^\circ.$$

З іншого боку, кут BEC – розгорнутий, тому $\alpha + \beta = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$. Отже, $\angle BAC = 100^\circ$.

- ④ Див. задачу 8-5.

- ⑤ Див. задачу 8-4.

10 клас

- ① Існує. Достатньо розглянути, наприклад, зростаючу геометричну прогресію з

$$b_1 = 2^{99} \quad \text{і} \quad q = \frac{3}{2}.$$

Тоді $b_n = 2^{100-n} \cdot 3^{n-1}$ для кожного натурального n . Цілі числа $100 - n$ і $n - 1$ є невід'ємними при $1 \leq n \leq 100$, тому перші 100 членів цієї прогресії - цілі числа. А при $n \geq 101$ дріб $\frac{3^{n-1}}{2^{n-100}}$ - нескоротний.

Підходить також будь-яка зростаюча геометрична прогресія з

$$b_1 = a^{99} \quad \text{і} \quad q = \frac{b}{a},$$

де a і b - прості числа і $b > a$.

- ② Оскільки $2019 \cdot 2017 = 2018^2 - 1$, то дане рівняння записується у вигляді

$$(x - 2018)(y + 2018) = -1.$$

Тому числа $x - 2018$ і $y + 2018$ є дільниками числа -1 . Отже, маємо

$$\begin{cases} x - 2018 = 1 \\ y + 2018 = -1 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x - 2018 = -1 \\ y + 2018 = 1. \end{cases}$$

Отже, $(x, y) = (2019, -2019)$ або $(x, y) = (2017, -2017)$.

- ③ Оскільки

$$x + 4\sqrt{x-4} = (\sqrt{x-4} + 2)^2,$$

то

$$\sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} = \sqrt{(\sqrt{x-4} + 2)^2} = |\sqrt{x-4} + 2| = \sqrt{x-4} + 2.$$

Тому нерівність має такий рівносильний вигляд

$$\sqrt{x-4} + 2 > x - 8.$$

Нехай $t = \sqrt{x-4}$. Тоді отримаємо нерівність

$$t^2 - t - 6 < 0,$$

розв'язками якої є

$$t \in (-2; 3).$$

Врахувавши, що $t \geq 0$, одержимо

$$0 \leq \sqrt{x-4} < 3,$$

тобто

$$4 \leq x < 13.$$

- ④ Нехай A_1 , B_1 , C_1 і D_1 – середини сторін AB , BC , CD і DA відповідно. Тоді

1) $A_1B_1C_1D_1$ – паралелограм, оскільки його сторони паралельні до діагоналей чотирикутника $ABCD$ як середні лінії відповідних трикутників.

2) Оскільки $A_1C_1 \perp B_1D_1$, то $A_1B_1C_1D_1$ – ромб, тобто $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1A_1$.

3) $\triangle A_1BB_1 = \triangle C_1CB_1$ (за трьома сторонами). Тому $\angle B = \angle C$.

4) $\triangle A_1AD_1 = \triangle C_1DD_1$ (за трьома сторонами). Тому $\angle A = \angle D$.

Тепер маємо

$$360^\circ = \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 2(\angle A + \angle B),$$

тобто $\angle A + \angle B = 180^\circ$. Тому $AD \parallel BC$.

- ⑤ Зауважимо, що за один хід кількість повністю зафарбованих рядків може збільшитись на 1. Тому кожна гра закінчиться перемогою одного з гравців.

Максим може забезпечити собі виграш, граючи згідно з таким правилом:

якщо Денис зафарбовує клітинку A , то Максим зафарбовує клітинку B , яка є симетричною клітинці A відносно центра таблиці O .

Оскільки всі клітинки таблиці розбиваються на пари симетричних клітинок і Максим ходить другим, то описане правило є коректним і Максим завжди може грати згідно з ним.

Нехай Максим грає згідно з цим правилом. Тоді після кожного ходу Максима всі зафарбовані клітинки утворюють фігуру,

симетричну відносно центра таблиці O . Оскільки всі рядки таблиці розбиваються на три пари симетричних рядків, то кількість повністю зафарбованих рядків після ходу Максима є парною (0 або 2). Отже, **якщо хід Максима не є виграшним, то кількість повністю зафарбованих рядків після його ходу дорівнює нулю. Тому наступний хід Дениса не є виграшним**, бо не можуть за один хід з'явитись 2 повністю зафарбованих рядки.

Таким чином, **якщо хід Максима не є виграшним, то наступний хід Дениса також не є виграшним**. Тому Денис виграти не може. Значить, виграє Максим.

11 клас

- ① Зробимо заміну $t = 3^x$ і отримаємо рівняння

$$t^2 + 1 = \frac{10}{3}t,$$

яке має розв'язки $t_1 = 3$ і $t_2 = \frac{1}{3}$. Тому $x_1 = 1$ і $x_2 = -1$.

- ② Якщо $x > 0$, то число 2018^x парне. З іншого боку, число $y^2 + y - 1$ непарне, оскільки число $y^2 + y = y(y + 1)$ парне, як добуток двох сусідніх цілих чисел. Тому при $x > 0$ рівняння розв'язків не має.

Тепер нехай $x = 0$. Тоді отримуємо рівняння

$$y^2 + y - 2 = 0,$$

яке має лише один невід'ємний розв'язок $y = 1$. Отже, $x = 0$, $y = 1$.

- ③ Оскільки вписані в коло кути, які опираються на одну дугу є рівними, то з умови задачі випливає рівність

$$\angle CBD = \angle CAD = \angle CAB = \angle CDB = \angle BDA = \angle BCA = \alpha.$$

Трикутники $\triangle ABC$ і $\triangle BCD$ рівнобедрені. Тому

$$AB = BC = CD = a.$$

Оскільки $AB = CD = a$ і $\angle BAD = \angle CDA = 2\alpha$, чотирикутник $ABCD$ є рівнобедреною трапецією з основами $BC = a$ і $AD = 2a$.

Нехай E – середина AD . Тоді $AE = ED = a$, а чотирикутники $ABCE$ і $BCDE$ – паралелограми, як чотирикутники з парою рівних і паралельних сторін. Отже,

$$BE = CD = AB = CE = a.$$

Трикутники $\triangle ABE$, $\triangle BCE$ і $\triangle CDE$ – рівносторонні. Тому $\angle A = \angle D = 60^\circ$ і $\angle B = \angle C = 120^\circ$.

- ④ Оскільки $|\cos x| \leq 1$, то

$$\begin{aligned} 3 \cos x + \cos(2x) + \sin^2 x &= \\ &= 3 \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x = 3 \cos x + \cos^2 x \leq 4. \end{aligned}$$

З іншого боку, згідно з нерівністю Коші

$$\frac{|x|}{\pi} + \frac{4\pi}{|x|} \geq 2\sqrt{\frac{|x|}{\pi} \frac{4\pi}{|x|}} = 4.$$

Отже, дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} 3 \cos x + \cos^2 x = 4 \\ \frac{|x|}{\pi} + \frac{4\pi}{|x|} = 4. \end{cases}$$

З другого рівняння маємо $|x| = 2\pi$. Залишилось підставити у перше рівняння. Таким чином, $x = -2\pi$ або $x = 2\pi$.

- ⑤ Зауважимо, що за один хід кількість повністю зафарбованих рядків може збільшитись на 1. Тому кожна гра закінчиться перемогою одного з гравців.

Денис може забезпечити собі виграш, граючи згідно з такими правилами:

- 1) першим ходом Денис зафарбовує центральну клітинку;
- 2) якщо перед його ходом в якомусь рядку зафарбовано 6 клітинок, то він зафарбовує в цьому рядку останню клітинку і виграв гру;
- 3) якщо перед його ходом в жодному рядку не зафарбовано 6 клітинок і Максим попереднім ходом зафарбовує клітинку A , то Денис зафарбовує клітинку B , яка є симетричною клітинці A відносно центра таблиці O .

Оскільки всі клітинки таблиці, крім центральної, розбиваються на пари симетричних клітинок, то Денис завжди може грати згідно з даними правилами.

Розглянемо два послідовні ходи: Дениса і Максима. Перед ходом Дениса немає рядків, в яких зафарбовано 6 клітинок, бо інакше Денис закінчує гру. Тому після ходу Дениса **рядків, в яких зафарбовано 6 клітинок, є не більше одного**. Всі зафарбовані клітинки утворюють фігуру, симетричну відносно центра таблиці O , адже Денис до цього моменту грав лише симетрично. Зокрема, 4-й рядок заповнений симетрично і в ньому зафарбовано непарну кількість клітинок і **ця кількість не дорівнює 6**. Всі рядки таблиці, крім 4-го, розбиваються на три пари симетричних рядків. Тому і серед них **немає такого, у якому зафарбовано 6 клітинок**, бо інакше таких рядків була б парна кількість >1 . Отже, після ходу Дениса **рядків, в яких зафарбовано 6 клітинок, немає**. Тому наступним ходом Максим не може завершити гру.

Таким чином, **жодний хід Максима не є виграшним**. Тому виграє Денис.

2019 – 2020

6 клас

- ① У вказаному місяці три неділі могли припасти лише на такі парні числа: 2, 16 і 30. Тому 24-го числа цього місяця буде понеділок.
- ② Нехай у Василька було n горіхів, тоді число $n - 1$ має бути спільним кратним для чисел 4, 5 і 6. А єдиним таким числом, меншим за сто, є 60. Тому $n = 61$.
- ③ Нехай остання цифра року народження учня рівна x . Якщо учень народився між 2000 і 2009 роками включно, то з умови отримаємо, що $3(2 + x) = 19 - x$, тобто $4x = 13$, що неможливо. А якщо учень народився в 2010 році або пізніше, то одержимо, що $3(3 + x) = 9 - x$, звідки $4x = 0$, тобто $x = 0$. Отже, учень народився в 2010 році, тому в 2019 році йому виповнюється 9 років.

- ④ Доведемо, що так розрізати вказаний прямокутник не можна. Розфарбуємо клітинки заданого прямокутника білим і чорним кольорами подібно до шахівниці. Тоді клітинок обох кольорів буде порівну – по 14. Зауважимо, що при будь-якому положенні Т-подібної фігурки всередині так розфарбованого прямокутника три її клітинки будуть одного кольору, а одна – іншого. Припустимо, що такий прямокутник можна розрізати на 7 Т-подібних фігурок з чотирьох клітинок. Якщо позначимо через x кількість отриманих Т-подібних фігурок з трьома білими клітинками, то одержимо, що білих клітинок на цих фігурках буде $3x + 7 - x$ і ця кількість має бути рівна 14, звідки $2x = 7$, що неможливо.

7 клас

- ① Сторони вказаного прямокутника рівні 30 см і 8 см, тому його площа дорівнює 240 см^2 .
- ② Оскільки

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{ca} = 10a + b + 10b + c + 10c + a = 11(a + b + c),$$

то сума вказаних чисел ділиться на 11.

- ③ Останні чотири цифри числа 201^2 – це 0401. Оскільки нас цікавлять тільки останні чотири цифри числа 201^9 , то достатньо помножити 401 на 201, щоб дізнатися останні цифри числа 201^3 , і це будуть цифри 0601. Далі, останні 4 цифри числа 201^4 – це останні 4 цифри числа $601 \cdot 201$, тобто, 0801. Міркуючи подібним чином, дізнаємося, що останні 4 цифри числа 201^9 – це 1801. Тоді останні чотири цифри числа $201^9 + 2019$ – це $1801 + 2019 = 3820$.
- ④ Доведемо, що так розрізати вказаний квадрат не можна. Розфарбуємо стовпчики заданого квадрата по чергово білим і чорним кольорами. Тоді клітинок обох кольорів буде порівну – по 18. Зауважимо, що при будь-якому положенні Г-подібної фігурки всередині так розфарбованого квадрата три її клітинки будуть одного кольору, а одна – іншого. Припустимо, що такий квадрат можна розрізати на 9 Г-подібних фігурок з чотирьох клітинок. Якщо позначимо через x кількість отриманих Г-подібних фігурок з трьома білими клітинками, то одержимо, що білих клітинок на цих фігурках буде $3x + 9 - x$ і ця кількість має бути рівна 18, звідки $2x = 9$, що неможливо.

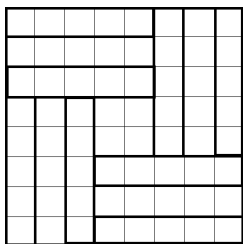
8 клас

- ① Зрозуміло, що чисельник та знаменник дробу в лівій частині рівняння повинні бути рівні, тобто,

$$x = 3 + \frac{1}{1 + \frac{x}{1-x}}.$$

Перетворюючи дріб в правій частині останньої рівності, отримуємо рівняння $x = 3 + (1 - x)$, звідки випливає, що $x = 2$.

- ② Позначимо $\alpha = \angle ACB$. Оскільки трикутник RQC рівнобедрений, то $\angle QRC = \alpha$. Тоді $\angle RQC = 180^\circ - 2\alpha$, а $\angle RQP = 2\alpha = \angle RPQ$, адже трикутник RPQ рівнобедрений. Звідси $\angle PRC = 180^\circ - 3\alpha$, а $\angle BRP = RBP = 3\alpha$, що випливає з рівнобедреності трикутника RBP . Тоді $\angle CPB = 180^\circ - 4\alpha$, звідки $\angle BAC = \angle BPA = 4\alpha$. Отже, в трикутнику ABC маємо, що $\angle BCA = \alpha$, $\angle BAC = 4\alpha$, $\angle ABC = 155^\circ$. Таким чином, $5\alpha = 180^\circ - 155^\circ = 25^\circ$, $\alpha = 5^\circ$. Кути трикутника ABC рівні 5° , 20° і 155° .
- ③ Кожний учасник може набрати від 0 до 35 балів. Звідси випливає, що найбільша кількість різних результатів учасників після перевірки – 36. Оскільки всього учасників 37, то принаймні двоє з них наберуть однакову кількість балів.
- ④ Нехай x – це число, в якому кожна з цифр 0, 1, 2, 4, 5, 8, 9 зустрічається рівно 2018 разів, а цифри 3, 6 і 7 не зустрічаються взагалі. Тоді сума цифр числа x дорівнює $2018(1+2+4+5+8+9) = 2018 \cdot 29$, звідки випливає, що x не ділиться націло на 3. З іншого боку, число 2019^k ділиться націло на 3, бо є степенем числа, кратного трьом. Отже, таких натуральних чисел k не існує.
- ⑤ (а)



- (б) Припустимо, що існує розрізання на вказані фігури, при чому квадрат 2×2 має спільну межу з великим квадратом. З

міркувань симетрії, можна вважати, що квадратик 2×2 розташований в першому і другому рядках таблиці. Занумеруємо кожний рядок таблиці числами від 1 до 8, як показано на малюнку.

1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8

Тоді сума чисел, які знаходяться в квадратику 2×2 при будь-якому його розміщенні в першому і другому рядках дорівнює 6. Сума чисел в кожному прямокутнику 1×5 чи 5×1 буде або сумою послідовних п'яти натуральних чисел, або сумою п'яти однакових чисел, отже, буде кратною 5. Таким чином, сума чисел у всіх фігурках при діленні на 5 буде давати в остачі 1. З іншого боку, сума чисел в таблиці дорівнює

$$8(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = 8 \cdot 36 = 288$$

і дає при діленні на 5 остачу 3. Отже, таке розрізання неможливе.

9 клас

- ① Після перетворень рівняння зводиться до вигляду

$$\frac{x^2}{2-x} = \frac{9}{5},$$

звідки отримуємо квадратне рівняння

$$5x^2 + 9x - 18 = 0.$$

Розв'язками цього рівняння є $x = -3$ та $x = \frac{6}{5}$.

- ② Позначимо $\alpha = \angle ACB$. Тоді $\angle CRS = \alpha$, адже трикутник CRS рівнобедрений. Оскільки $\angle QSR = \pi - \angle RSC$, а трикутник QSR рівнобедрений, то $\angle QSR = \angle RQS = 2\alpha$ і $\angle QRS = \pi - 4\alpha$. Далі,

$\angle QRP = 3\alpha$, бо $\angle QRC = \pi - 3\alpha$. Продовжуючи аналогічні міркування, знаходимо, що $\angle BAC = 5\alpha$. Отже, $\alpha + 5\alpha = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$. Таким чином, $\alpha = 6^\circ$. Кути трикутника ABC рівні 6° , 30° і 144° .

- ③ Розглянемо ланцюжок нерівностей

$$\begin{aligned} \pi x^2 + \frac{2019}{2018}y^2 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{y^2} &> 3x^2 + y^2 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \\ &= 3\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 6 + \left(y - \frac{1}{y}\right)^2 + 2 \geq 8, \end{aligned}$$

з якого все і випливає.

- ④ Зауважимо, що серед трьох послідовних натуральних чисел $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ одне ділиться без остачі на 3. Оскільки 2019 теж ділиться на 3, то ліва частина рівняння кратна трьом. Тоді число n^4 повинно давати в остачі 2 при діленні на 3, бо число 2020 дає в остачі 1 при діленні на 3. Але n^4 — це квадрат деякого натурального числа. Нескладно переконатися, що квадрат натурального числа при діленні на 3 може давати в остачі тільки 0 і 1. Отже, дане рівняння не має розв'язків в натуральних числах.
- ⑤ Див. задачу 8.5.

10 клас

- ① Знайдемо спочатку $f(2)$ і $f(4)$. Маємо

$$f(2) = f(0 + 2) = \frac{f(0)}{5f(0) - 1} = \frac{1}{5 \cdot 1 - 1} = \frac{1}{4}$$

і

$$f(4) = f(2 + 2) = \frac{f(2)}{5f(2) - 1} = \frac{\frac{1}{4}}{5 \cdot \frac{1}{4} - 1} = 1.$$

Тепер аналогічно, $f(6) = f(4 + 2) = \frac{1}{4}$, $f(8) = f(6 + 2) = 1$, $f(10) = f(8 + 2) = \frac{1}{4}$, $f(12) = f(10 + 2) = 1$ і так далі. Отже, для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо $f(4k - 2) = \frac{1}{4}$ і $f(4k) = 1$. Зокрема, $f(50) = f(4 \cdot 13 - 2) = \frac{1}{4}$.

- ② Дана нерівність рівносильна наступним нерівностям

$$(x^{10} - 1)(x^9 - 1) > 0$$

$$(x^5 - 1)(x^5 + 1)(x^9 - 1) > 0.$$

Нулями лівої частини останньої нерівності є точки $x = \pm 1$. Методом інтервалів одержуємо, що $x \in (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

- ③ Перенесемо всі вирази, які містять змінні, з правої частини у ліву частину рівняння і утворимо повні квадрати. Одержимо наступні рівносильні рівняння:

$$4x^2 + 4x + y^2 + 6y = 75$$

$$(2x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 85.$$

Отже, число 85 потрібно подати у вигляді суми квадратів двох натуральних чисел. Легко перевірити, що це можна зробити двома способами: $85 = 49 + 36 = 81 + 4$. Оскільки число $2x + 1$ – непарне, то $2x + 1 = 7$ і $y + 3 = 6$, або $2x + 1 = 9$ і $y + 3 = 2$. Оскільки розв'язки повинні бути натуральними, то $x = 3$, $y = 3$.

- ④ Нехай ABC – даний трикутник, D – середина сторони BC , AD – відповідна медіана, O – центр описаного кола і $AB = AD$.

Доведемо, що $D = O$. Припустимо, що $D \neq O$. Зауважимо, що центр описаного навколо трикутника кола є точкою перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника. Отже, дві різні точки D і O лежать на медіані AD і серединному перпендикулярі до сторони BC . Це означає, що медіана AD є висотою трикутника ABC . Тому трикутник ABC рівнобедрений, а саме $AB = AC$. Але тоді $AD < AB$, адже AD – висота. Таким чином, ми отримали суперечність і $D = O$.

Оскільки центр описаного кола O є серединою сторони BC , то BC є діаметром цього кола і трикутник ABC прямокутний з гіпотенузою BC . Отже, $\angle A = 90^\circ$. Оскільки $AB = \frac{B}{C}$, то $\angle C = 30^\circ$ і $\angle B = 60^\circ$.

- ⑤ Для довільного числа $A = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$, де $n \geq 2$, позначимо

$$B = \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} > 0.$$

Тоді згідно з умовою маємо

$$A - f(A) = (10B + a_n) - (B + a_n) = 9B > 0.$$

Зокрема, число $A - f(A)$ ділиться на 9 і $f(A) < A - 1$.

а) Нехай на дошці записане багатоцифрове число C . Припустимо, що ми зможемо застосувати описану операцію до цього числа принаймні $k = C$ разів. Позначимо

$$C_0 = C, C_1 = f(C_0), C_2 = f(C_1), \dots, C_k = f(C_{k-1}).$$

Тоді маємо

$$0 < C_k < C_{k-1} - 1 < C_{k-2} - 2 < \dots < C_1 - (k-1) < \\ < C_0 - k = C - C = 0.$$

Отже, ми отримали суперечність і застосувати операцію k ми не зможемо. Це означає, що за менше, ніж k кроків ми одержимо одноцифрове число.

б) Нехай D — це число, яке складається з 1010 одиниць і 1009 двійок, і d — це одноцифрове число, яке одержиться на дошці після багаторазового застосування описаної вище операції. З доведеного на початку випливає, що остача від ділення на 9 числа, записаного на дошці, не змінюється з кожним кроком. Тому число d при діленні на 9 дає таку ж остачу, як і початкове число D . Знайдемо цю остачу.

Оскільки число при діленні на 9 дає таку ж остачу, як і сума його цифр, то шукана остача r є остачею від ділення на 9 числа $1 \cdot 1010 + 2 \cdot 1009 = 3028$. Отже, $r = 4$, тобто цифра d дає остачу 4 при діленні на 9. Таким чином, $d = 4$.

11 клас

① Знайдемо спочатку $f(2)$ і $f(4)$. Маємо

$$f(2) = f(0 + 2) = \frac{f(0)}{5f(0) - 1} = \frac{1}{5 \cdot 1 - 1} = \frac{1}{4}$$

і

$$f(4) = f(2 + 2) = \frac{f(2)}{5f(2) - 1} = \frac{\frac{1}{4}}{5 \cdot \frac{1}{4} - 1} = 1.$$

Тепер аналогічно, $f(6) = f(4 + 2) = \frac{1}{4}$, $f(8) = f(6 + 2) = 1$, $f(10) = f(8 + 2) = \frac{1}{4}$, $f(12) = f(10 + 2) = 1$ і так далі. Отже, для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо $f(4k - 2) = \frac{1}{4}$ і $f(4k) = 1$. Зокрема, $f(100) = f(4 \cdot 25) = 1$.

- ② Дана нерівність рівносильна наступній нерівності

$$1 > \left(\frac{3}{19}\right)^x + \left(\frac{5}{19}\right)^x + \left(\frac{11}{19}\right)^x.$$

Зауважимо, що функція $f(x) = \left(\frac{3}{19}\right)^x + \left(\frac{5}{19}\right)^x + \left(\frac{11}{19}\right)^x$ є строго спадною, як сума строго спадних функцій, і $f(1) = 1$. Тому розв'язком нерівності $f(x) < 1$ є інтервал $(1, +\infty)$.

- ③ Оскільки

$$1009 \cos^2 \frac{\pi x}{3} \leq 1009 \quad \text{і} \quad 1010 \cos^2 \frac{\pi x}{673} \leq 1010,$$

то початкове рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \cos^2 \frac{\pi x}{3} = 1 \\ \cos^2 \frac{\pi x}{673} = 1. \end{cases}$$

Зауважимо, що $\cos^2 t = 1$ при $t = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тому залишається розв'язати таку систему:

$$\begin{cases} \frac{\pi x}{3} = \pi n \\ \frac{\pi x}{673} = \pi m, \end{cases}$$

де m, n – довільні цілі числа. Звідси маємо

$$\begin{cases} x = 3n \\ x = 673m, \end{cases}$$

Отже, x – ціле число, яке націло ділиться на 3 і на 673. Оскільки 3 і 673 – взаємно прості, то x ділиться на $3 \cdot 673 = 2019$. Таким чином, $x = 2019k$, де $k \in \mathbb{Z}$.

- ④ Нехай O – центр описаного кола навколо трикутника ABC . Доведемо, що $D = O$. Припустимо, що $D \neq O$. Зауважимо, що центр описаного навколо трикутника кола є точкою перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника. Отже, дві різні точки D і O лежать на медіані AD і серединному перпендикулярі до сторони BC . Це означає, що медіана AD є висотою трикутника ABC . Тому трикутник ABC рівнобедрений, а саме $AB = AC$. Але тоді $AD < AB$, адже AD – висота. З іншого боку, $AD = 13$ см і $AB = 10$ см. Таким чином, ми отримали суперечність і $D = O$.

Оскільки центр описаного кола O є серединою сторони BC , то BC є діаметром цього кола і трикутник ABC прямокутний з гіпотенузою BC . Тоді $BC = 2OA = 2DA = 26$ см, і $AC = 24$ см. Периметр трикутника дорівнює 60 см.

⑤ Для довільного числа $A = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$, де $n \geq 2$, позначимо

$$B = \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} > 0.$$

Тоді згідно з умовою маємо

$$A - f(A) = (10B + a_n) - (B + a_n) = 9B > 0.$$

Зокрема, число $A - f(A)$ ділиться на 9 і $f(A) < A - 1$.

а) Нехай на дошці записане багатоцифрове число C . Припустимо, що ми зможемо застосувати описану операцію до цього числа принаймні $k = C$ разів. Позначимо

$$C_0 = C, C_1 = f(C_0), C_2 = f(C_1), \dots, C_k = f(C_{k-1}).$$

Тоді маємо

$$\begin{aligned} 0 < C_k < C_{k-1} - 1 < C_{k-2} - 2 < \dots < C_1 - (k-1) < \\ < C_0 - k = C - C = 0. \end{aligned}$$

Отже, ми отримали суперечність і застосувати операцію k разів ми не зможемо. Це означає, що за менше, ніж k кроків ми одержимо одноцифрове число.

б) Нехай $D = 123456789 \dots 2019$ і d — це одноцифрове число, яке одержиться на дошці після багаторазового застосування описаної вище операції. З доведеного на початку випливає, що остача від ділення на 9 числа, записаного на дошці, не змінюється з кожним кроком. Тому число d при діленні на 9 дає таку ж остачу, як і початкове число D . Знайдемо цю остачу.

Оскільки число при діленні на 9 дає таку ж остачу, як і сума його цифр, то шукана остача r є остачою від ділення на 9 числа

$$1 + 2 + 3 + \dots + 2019 = 1010 \cdot 2019.$$

У свою чергу, число $1010 \cdot 2019$ при діленні на 9 дає таку ж остачу, як і число $(1 + 0 + 1 + 0)(2 + 0 + 1 + 9) = 24$. Отже, $r = 6$, тобто цифра d дає остачу 6 при діленні на 9. Таким чином, $d = 6$.

2020 – 2021

8 клас

- ① Позначимо числа, записані на сторонах квадрата, через a , b , c та d . Тоді у вершинах квадрата будуть записані числа ab , bc , cd , ad . За умовою,

$$ab + bc + cd + ad = 91 \quad \Leftrightarrow \quad (a + c)(b + d) = 91.$$

Оскільки кожний з натуральних множників $a + c$ та $b + d$ строго більший за одиницю і число 91 єдиним чином розкладається у добуток двох натуральних множників, більших за одиницю, то один з цих множників дорівнює 7, а інший дорівнює 13. Отже,

$$a + b + c + d = 20.$$

- ② Нехай $A = \overline{abc}$, де $a - c \geq 2$. Тоді

$$B = \overline{cab},$$

$$C = \overline{abc} - \overline{cab} = \overline{(a - c - 1)9(10 + c - a)},$$

$$D = \overline{(10 + c - a)9(a - c - 1)}.$$

Тому $C + D = \overline{1089}$.

- ③ Нехай $ABCD$ – задана трапеція, а E – середина більшої основи AD . Оскільки у чотирикутнику $ABCE$ протилежні сторони BC і AE паралельні та рівні, то цей чотирикутник – паралелограм. Отже, $CE = AB$. Аналогічно, $BE = CD$. Тому трикутники ABE , BCE та CDE правильні. Таким чином, $\angle A = \angle D = 60^\circ$, $\angle B = \angle C = 120^\circ$.
- ④ Ні. Оскільки значення початкових двох виразів при $a = b = 1$ кратні 5, то значення будь-яких записаних на дошці відповідно до умови задачі виразів при $a = b = 1$ також повинні бути кратні 5. Але значення вказаного в умові виразу при $a = b = 1$ рівне 2026, тому воно не кратне 5.

- ⑤ Одного зважування, очевидно, не вистачить. Покажемо, що достатньо двох зважувань. Зауважимо, що вага 6 монет з купки непарна.

Перше зважування: Відкладаємо одну з 6 монет в сторону, кладемо на шальки по три монети, включаючи сьому монету (назвемо її X).

I випадок. Рівновага. Тоді ваги відкладеної монети та монети X – різної парності. Тому в **другому зважуванні** досить порівняти ці дві монети: легша важить 10 г, важча – 11 г.

II випадок. Переважила шалька з монетою X . Тоді на цій шальці не менше, ніж дві монети вагою по 11 г. Тому в **другому зважуванні** порівнюємо монету X з довільною монетою з шальки, де монета X . Якщо рівновага, то X важить 11 г, в інших випадках легша монета важить 10 г, важча – 11 г.

III випадок. Переважила шалька без монети X . Тоді на шальці з монетою X не менше, ніж дві монети вагою по 10 г. Тому в **другому зважуванні** порівнюємо монету X з довільною монетою з шальки, де монета X . Якщо рівновага, то X важить 10 г, в інших випадках легша монета важить 10 г, важча – 11 г.

9 клас

- ① Позначимо x_1 та x_2 корені рівняння. За теоремою Вієта, $x_1 \cdot x_2 = q$. Оскільки q – просте, то один з коренів рівняння (скажімо, x_1) дорівнює 1 або -1 .

Припустимо, що $x_1 = 1$. Тоді з рівняння маємо $q = -573$, що неможливо. Отже, $x_1 = -1$. Підставляючи в рівняння, отримуємо, що $q = 571$.

- ② Позначимо через S_a – суму цифр числа a , S_b – суму цифр числа b . Тоді $a = 4S_b$ і $b = 3S_a$. Звідси випливає, що $b \vdots 3$. Тоді $S_b \vdots 3$. Тому $a \vdots 12$. Зокрема, $a \vdots 3$. А тоді $S_a \vdots 3$, звідки $b \vdots 9$. Звідси випливає, що $S_b \vdots 9$, отже, $a \vdots 36$. Зокрема, $a \vdots 9$, звідки $b \vdots 27$. Таким чином,

$$a \in \{36, 72, 108, 144, 180, 216, 252, 288\}.$$

Якщо $a = 36$, то $b = 27$. Решта чисел не підходять.

- ③ Нехай $\angle BAD = \alpha$. Тоді $\angle MAD = 60^\circ + \alpha$, оскільки трикутник MAB рівносторонній. Аналогічно, $\angle KCD = 60^\circ + \alpha$. З того, що трикутники MAB і CBK рівносторонні та з означення паралелограма випливає, що $MA = AB = CD$ і $CK = BC = AD$. Отже, трикутники MAD і DKC рівні за першою ознакою рівності трикутників. Тому $MD = KD$.

Зауважимо тепер, що $\angle ABC = 180^\circ - \alpha$, $\angle MBA = \angle KBC = 60^\circ$, звідки $\angle MBK = 360^\circ - \angle MBA - \angle KBC = 60^\circ + \alpha$. Отже, $\angle MBK = \angle MAD$. Далі, оскільки $MB = MA$, а $BK = AD$, то $\triangle MBK = \triangle DAM$. Таким чином, $MK = MD$.

- ④ Не може. Оскільки значення початкових двох виразів при $x = 1$ кратні 5, то значення будь-яких записаних на дошці відповідно до умови задачі виразів при $x = 1$ також повинні бути кратні 5. Але значення вказаного в умові виразу при $x = 1$ рівне 11, що не кратне 5.
- ⑤ Див. задачу 8-5.

10 клас

- ① Використовуючи формулу суми геометричної прогресії, отримуємо рівносильне рівняння

$$2^{2021} - 1 = 2x^2 + 4x + 1,$$

тобто

$$2^{2020} = (x + 1)^2.$$

Звідки

$$x = \pm 2^{1010} - 1.$$

- ② Послідовно виражаємо через $f(x)$ і $f(x - 1)$ значення $f(x + 2)$ і $f(x + 3)$. Отримуємо

$$\begin{aligned} f(x + 2) &= \sqrt{2}f(x + 1) - f(x) = \\ &= \sqrt{2}(\sqrt{2}f(x) - f(x - 1)) - f(x) = f(x) - \sqrt{2}f(x - 1) \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} f(x + 3) &= \sqrt{2}f(x + 2) - f(x + 1) = \\ &= \sqrt{2}(f(x) - \sqrt{2}f(x - 1)) - (\sqrt{2}f(x) - f(x - 1)) = -f(x - 1). \end{aligned}$$

Отже,

$$f(x + 3) = -f(x - 1)$$

для довільного дійсного числа x . Тому

$$f(x+8) = -f(x+4) = f(x)$$

і функція f періодична з періодом 8.

- ③ Спочатку міркуємо, використовуючи ознаки подільності на 3 і 9. Число b ділиться (націло) на 3. Тому сума цифр числа b ділиться на 3. Отже, число a ділиться на 3. Тому число b ділиться на 9. Тому сума цифр числа b ділиться на 9. Отже, число a ділиться на 9. Звідки число b ділиться на 27.

Тепер оцінимо число b зверху. Нехай число b складається з n цифр. Тоді сума його цифр $S(b) \leq 9n$. Тоді

$$a = 2S(b) \leq 18n.$$

Тому для суми цифр $S(a)$ числа a маємо

$$S(a) \leq a \leq 18n.$$

Отже,

$$b = 3S(a) \leq 54n.$$

Таким чином,

$$10^{n-1} \leq b \leq 54n.$$

Оскільки

$$10^3 > 54 \cdot 4,$$

то

$$10^{n-1} > 54n$$

для всіх $n \geq 4$. Таким чином, $n \leq 3$ і $b \leq 54n \leq 162$.

Легко бачити, що підходить лише $b = 27$ і $a = 18$.

- ④ Нехай P – точка перетину BM з AC . З умови задачі випливають наступні рівності кутів, які опираються в рівних колах на однакові дуги,

$$\angle MAC = \angle MBC, \quad \angle MBA = \angle MCA \quad \text{і} \quad \angle MCB = \angle MAB.$$

Додавши ці три рівності, отримаємо:

$$\angle MAC + \angle MBA + \angle MCB = \angle MBC + \angle MCA + \angle MAB.$$

Оскільки сума всіх цих кутів 180° , то

$$\angle MAC + \angle MBA + \angle MCB = 90^\circ.$$

В трикутнику BPC маємо

$$\begin{aligned}\angle BPC &= 180^\circ - (\angle MBC + \angle MCA + \angle MCB) = \\ &= 180^\circ - (\angle MAC + \angle MBA + \angle MCB) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,\end{aligned}$$

отже, BP - висота.

- ⑤ Розв'яжемо загальнішу задачу: для $3n - 2$ учасників, серед яких потрібно знайти n попарно незнайомих учнів (наша задача відповідає $n = 100$). Ми будемо міркувати індукцією відносно $n \geq 2$.

Для $n = 2$ задача має тривіальний розв'язок.

Припустимо, що твердження є воним вірно для $3k - 2$ учасників і доведемо його для $3k + 1$ учасника. Виберемо будь-якого учасника олімпіади. Він знайомий не більш ніж з двома учасниками. Тому він незнайомий не менш, ніж з $3k - 2$ учасниками. Згідно з припущенням індукції серед них знайдуться k учасників, попарно незнайомих між собою. Вони разом з раніше вибраним учасником утворюють групу з $k + 1$ учасника, які попарно незнайомі між собою, що і доводить твердження для $3k + 1$ учасника.

Твердження для $3n - 3$ учасників не є вірним. Для підтвердження цього досить розбити всіх учасників на $(n - 1)$ групу по 3 учасника, які знайомі лише з усіма учнями, які входять з ними в одну групу.

11 клас

- ① Використовуючи формулу суми геометричної прогресії, отримуємо рівносильне рівняння

$$3^{2022} - 1 = 2(4x^3 + 6x^2 + 3x),$$

тобто

$$3^{2022} = (2x + 1)^3.$$

Звідки

$$x = \frac{3^{674} - 1}{2}.$$

- ② Застосовуючи формулу перетворення суми синусів чи косинусів в добуток, отримуємо

$$\sin x + \sin(3x) = 2 \sin(2x) \cos x$$

і

$$\cos x + \cos(3x) = 2 \cos(2x) \cos x.$$

Тому вихідна нерівність рівносильна наступній нерівності

$$(\sin(2x) - \cos(2x))(1 + 2 \cos x) > 0.$$

Розв'язуючи на проміжку $[0, 2\pi]$ рівняння

$$\sin(2x) = \cos(2x) \quad \text{і} \quad \cos x = \frac{1}{2},$$

знаходимо розв'язки:

$$x = \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{2\pi}{3}, \frac{9\pi}{8}, \frac{4\pi}{3}, \frac{13\pi}{8}.$$

Методом інтервалів одержуємо відповідь:

$$x \in \left[\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{9\pi}{8}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{13\pi}{8}\right].$$

- ③ Оскільки число a і сума його цифр $S(a)$ мають однакові остачі при діленні на 9, то число

$$4S(a) = a - S(a)$$

ділиться на 9. Тому $S(a)$ ділиться на 9. Отже число a ділиться на 45.

Тепер оцінимо число a зверху. Нехай число a складається з n цифр. Тоді $S(a) \leq 9n$ і

$$a = 5S(a) \leq 45n.$$

Таким чином,

$$10^{n-1} \leq a \leq 45n.$$

Оскільки

$$10^3 > 45 \cdot 4,$$

то

$$10^{n-1} > 45n$$

для всіх $n \geq 4$. Таким чином, $n \leq 3$ і $a \leq 45n \leq 135$.

Легко бачити, що підходить лише $a = 45$.

- ④ Нехай P – точка перетину BM з AC . З умови задачі випливають наступні рівності кутів, які опираються в рівних колах на однакові дуги,

$$\angle MAC = \angle MBC, \quad \angle MBA = \angle MCA \quad \text{і} \quad \angle MCB = \angle MAB.$$

Додавши ці три рівності, отримаємо:

$$\angle MAC + \angle MBA + \angle MCB = \angle MBC + \angle MCA + \angle MAB.$$

Оскільки сума всіх цих кутів 180° , то

$$\angle MAC + \angle MBA + \angle MCB = 90^\circ.$$

В трикутнику BPC маємо

$$\begin{aligned} \angle BPC &= 180^\circ - (\angle MBC + \angle MCA + \angle MCB) = \\ &= 180^\circ - (\angle MAC + \angle MBA + \angle MCB) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ, \end{aligned}$$

отже, BP – висота.

- ⑤ Будемо міркувати методом математичної індукції відносно $n \geq 2$.

Для $n = 2$ задача має тривіальний розв'язок.

Припустимо, що твердження є вірним вірно для $5k - 4$ учасників і доведемо його для $5k + 1$ учасника. Виберемо будь-якого учасника олімпіади. Він знайомий не більш ніж з 4-ма учасниками. Тому він незнайомий не менш, ніж з $5k - 4$ учасниками. Згідно з припущенням індукції серед них знайдуться k учасників, попарно незнайомих між собою. Вони разом з раніше вибраним учасником утворюють групу з $k + 1$ учасника, які попарно незнайомі між собою, що і доводить твердження для $5k + 1$ учасника.

Твердження для $5n - 5$ учасників не є вірним. Для підтвердження цього досить розбити всіх учасників на $(n - 1)$ групу по 5 учасників, які знайомі лише з усіма учнями, які входять з ними в одну групу.

2021 – 2022

6 клас

- ① Рудих користувачів всього $12324 : \frac{3}{10} = 41080$, а тоді усіх користувачів соцмережі $41080 : \frac{1}{10} = 410800$.
- ② Для знаходження периметру другої фоторамки потрібно чотири рази додати ширину фотографії та чотири рази додати довжину фотографії, тобто, периметр цієї фоторамки є вдвічі більшим за периметр фотографії, а значить 88. Периметр першої фоторамки складається з чотирьох периметрів фотографії за винятком шести довжин бічної сторони. Якщо цей периметр 98, то шість довжин бічної сторони складають $4 \cdot 44 - 98 = 78$, звідки довжина бічної сторони фотографії $78 : 6 = 13$ см. Тоді довжина іншої бічної сторони фотографії дорівнює 9 см, адже периметр фотографії 44 см за умовою задачі. Тоді периметр третьої фоторамки складає $8 \cdot 13 + 2 \cdot 9 = 122$ см. Розв'язання не змінюється, якщо припустити, що периметр третьої фоторамки 98 см.

Відповідь: 88 см і 122 см.

- ③ Поки Владик робить $4 \cdot 7 = 28$ кроків, то мама робить $4 \cdot 4 = 16$, а Сашко $7 \cdot 7 = 49$ кроків. Отже разом Владик і Сашко роблять $28 + 49 = 77$ кроків, поки мама робить 16. Тоді, якщо Владик та Сашко зробили $462 = 77 \cdot 6$ кроків, то мама зробила $16 \cdot 6 = 96$ кроків.
- ④ Найменша фігурка одного кольору, що відповідає умові задачі, містить ≥ 4 клітинки, бо довільна фігурка з трьох клітинок має дві клітинки, що не мають однокольорових сусідок. Таблиця 8×8 має 64 клітинки, отже 4-клітинних фігурок різного кольору може поміститися щонайбільше 16. Ось приклад такого розфарбування в 16 різних кольорів:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

7 клас

- ① Нехай x – необхідна кількість десятків. Тоді загальна кількість оцінок у Ромчика буде $10 + x$, а сума оцінок

$$2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 5 + 3 \cdot 7 + 8 + 10x = 50 + 10x.$$

Складемо рівняння

$$(50 + 10x) : (10 + x) = 8.$$

Тоді $50 + 10x = 8(10 + x)$, звідки $x = 15$.

- ② Нехай вік містера Аутофейджа записується двозначним числом $\overline{ab}$. Запишемо його вік тричі поспіль та отримаємо шестизначне число $\overline{ababab}$ Оскільки

$$\begin{aligned}\overline{ababab} &= 100000 \cdot a + 10000 \cdot b + 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot a + b = \\ &= 101010a + 10101b = 10101(10a + b) = 7 \cdot 1443 \cdot (10a + b),\end{aligned}$$

то $\overline{ababab}$ ділиться націло на 7.

- ③ Нехай C – прямий кут трикутника ABC . Бісектриси кутів A і B прямокутного трикутника перетинаються під кутом 135° , що не задовольняє умову задачі. Нехай бісектриси CM і AK кутів C і A перетинаються під кутом 50° в точці I . В трикутнику CIK :

$$\angle CKI = 180^\circ - 45^\circ - 50^\circ = 85^\circ,$$

а в трикутнику CAK :

$$\angle CAK = 90^\circ - \angle CKA = 90^\circ - 85^\circ = 5^\circ.$$

Отже, $\angle CAB = 2\angle CAK = 10^\circ$ і $\angle CBA = 80^\circ$.

- ④ Див. задачу 6-4.

8 клас

- ① Підставимо замість $*$ одночлен ax . Тоді після розкриття дужок отримаємо вираз

$$x^6 + x^4 + x^3(2a - 4) + a^2x^2 + 4.$$

Для того, щоб залишилося 4 доданки потрібно підставити $a = 2$ або $a = 0$. Відповідь: $2x$ або 0 .

- ② Число ділиться на $114 = 2 \cdot 3 \cdot 19$ тоді і тільки тоді, коли воно ділиться на кожне з чисел 2, 3, 19. Розглянемо тризначне число, яке ділиться на 2 і 19, і не ділиться на 3, наприклад, $152 = 8 \cdot 19$. Зрозуміло, що 152 не кратне 114. Випишемо 152 поспіль 12 разів:

$$A = 152152 \dots 152 = 152(10^9 + 10^8 + \dots + 10 + 1).$$

Звідси A ділиться націло на 2 і на 19, адже це дільники числа 152. Крім того, довільне число, виписане 12 разів поспіль має суму цифр, кратну 3, отже, ділиться на 3.

Відповідь: 152. *Примітка:* можуть бути й інші відповіді.

- ③ Позначимо через a кількість зелених листочків вчора і через b – кількість зелених листочків сьогодні. Тоді вчора на дереві було a червоних та $9a$ жовтих листочків, а сьогодні – b жовтих і $9b$ червоних. За умовою задачі, сума зелених та червоних листочків може тільки зменшитися, тому $10b \leq 2a$. Звідси $b \leq \frac{1}{5}a$. Отже, сьогодні на дереві $11b \leq \frac{1}{5} \cdot 11a$ листочків, що принаймні в 5 разів менше, ніж учора.
- ④ Припустимо, що такі числа існують. Тоді їх сума дорівнює нулеві. З іншого боку – це чотири послідовних цілих числа виду $n, n+1, n+2, n+3$, сума яких $4n+6$. Зрозуміло, що $4n+6 \neq 0$ для жодного цілого числа n . Отримана суперечність доводить, що наше початкове припущення не вірне. Отже, таких чисел не існує.
- ⑤ Проведемо медіану EM в трикутнику AEC . За умовою $AM = MC = AB$. Оскільки $\triangle AEC$ рівнобедрений, то EM є також і висотою. Розглянемо трикутники ABE і AME . Вони рівні, адже $AB = BM$, $\angle BAE = \angle EAM$, а сторона AE спільна. Отже, $\angle ABE = \angle AME = 90^\circ$. Таким чином, $\triangle ABC$ – прямокутний, в якому гіпотенуза вдвічі більша за катет. А такий трикутник має гострі кути 30° та 60° .

9 клас

- ① У лівій частині рівняння зведемо вирази до спільного знаменника і зробимо рівносильні перетворення чисельника. В результаті одержимо таке рівняння

$$\frac{4x^2 + 10}{2x^2 - 5} = \frac{14x}{2x^2 - 5}.$$

Отже, залишилось розв'язати таке квадратне рівняння

$$2x^2 - 7x + 5 = 0,$$

коренями якого є числа $x_1 = 1$ і $x_2 = \frac{5}{2}$.

- ② Позначимо $AU = x$ і $CW = y$. Тоді $BU = 2 - x$ і $D = 2 - y$.
Згідно з першою рівністю з умови задачі маємо

$$x + (2 - y) = y + (2 - x),$$

звідки $x = y$. Отже, відрізок UW ділить квадрат $ABCD$ на дві рівні трапеції $AUWD$ і $CWUB$, площа кожної з яких дорівнює половині площі квадрата, тобто 2.

З другої рівності з умови задачі маємо

$$2CV = AU + DW = x + (2 - x) = 2,$$

отже, $BV = CV = 1$. Тому

$$S_{UBV} + S_{WCV} = \frac{1}{2} \cdot BU \cdot BV + \frac{1}{2} \cdot CW \cdot CV = \frac{1}{2}((2 - x) + x) = 1.$$

Таким чином,

$$S_{UVW} = S_{CWUB} - S_{UBV} - S_{WCV} = 2 - 1 = 1.$$

- ③ Дану рівність можна записати у такому вигляді

$$(a + b)(a - b) = 2021.$$

Зауважимо, що $2021 = 2021 \cdot 1 = 43 \cdot 47$, причому числа 43 і 47 є простими. Беручи до уваги, що $a + b > a - b$, ми одержуємо наступні дві системи рівнянь

$$\begin{cases} a + b = 2021, \\ a - b = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} a + b = 47, \\ a - b = 43. \end{cases}$$

Розв'язавши ці системи одержуємо відповідь: $a = 1011$, $b = 1010$ або $a = 45$, $b = 2$.

- ④ Оскільки всі цифри п'ятицифрових чисел A та B є різними і всього різних цифр є 10, то у десятковому записі цих чисел зустрічається рівно по одному разу кожна цифра від 0 до 9. Позначимо через S_A і S_B суми цифр чисел A та B відповідно. Тоді

$$S_A + S_B = 0 + 1 + 2 + \dots + 9 = 45.$$

Оскільки всі числа $10 - 1$, $100 - 1$, $1000 - 1$ і $10000 - 1$ діляться націло на 9, то числа $A - S_A$ та $B - S_B$ також націло діляться на 9. Справді,

$$\begin{aligned} A - S_A &= \overline{abcde} - (a + b + c + d + e) = \\ &= (10000 - 1)a + (1000 - 1)b + (100 - 1)c + (10 - 1)d. \end{aligned}$$

Тому число

$$\begin{aligned} A + B &= (A - S_A) + (B - S_B) + (S_B + S_A) = \\ &= (A - S_A) + (B - S_B) + 45 \end{aligned}$$

націло ділиться на 9, як сума трьох чисел з такою властивістю.

⑤ Спочатку доведемо, що $n \leq 9$.

Назвемо рядок або стовпчик таблиці *додатним (від'ємним)*, якщо в ньому є хоча б одне додатне (від'ємне) число. Згідно з умовою задачі кожний рядок (стовпчик) таблиці є або додатним, або від'ємним або немає назви. Позначимо через r^+ , r^- , s^+ і s^- кількість додатних і від'ємних рядків і стовпчиків відповідно. Оскільки таблиця має 6 рядків і 6 стовпчиків, то

$$r^+ + r^- \leq 6 \quad \text{і} \quad s^+ + s^- \leq 6.$$

Тому $r^+ + s^+ \leq 6$ або $r^- + s^- \leq 6$.

Розглянемо випадок $r^+ + s^+ \leq 6$ (якщо $r^- + s^- \leq 6$, то міркуємо аналогічно). Зазначимо, що кожне із n додатних чисел записане в клітинці, яка знаходиться на перетині додатного рядка і додатного стовпчика. З іншого боку, клітинок, які знаходяться на перетині додатного рядка і додатного стовпчика, є $r^+ \cdot s^+$. Тому

$$n \leq r^+ \cdot s^+.$$

Тепер з допомогою нерівності $4ab \leq (a + b)^2$ отримуємо

$$n \leq r^+ \cdot s^+ \leq \frac{1}{4}(r^+ + s^+)^2 \leq \frac{1}{4} \cdot 6^2 = 9.$$

Залишилось навести приклад розташування дев'яти додатних чисел і дев'яти від'ємних чисел. Одним з таких прикладів є такий: у верхньому лівому квадраті розміром 3×3 записуємо додатні числа, а у нижньому правому квадраті розміром 3×3 записуємо від'ємні числа.

Отже, $n = 9$.

10 клас

- ① Зробимо заміну $y = \frac{x^2+6}{x}$ і одержимо рівняння

$$y + \frac{1}{y} = \frac{26}{5},$$

звідки $y = \frac{1}{5}$ або $y = 5$. Отже, залишилось розв'язати два наступні рівняння

$$\frac{x^2+6}{x} = \frac{1}{5}, \quad \frac{x^2+6}{x} = 5,$$

які стандартним чином зводяться до квадратних. Перше з них розв'язків не має, а друге має розв'язки 2 і 3.

- ② Зауважимо, що трикутники ABC , ACD і CBD подібні. Тому, зокрема,

$$AD : CD = CD : BD,$$

тобто

$$CD^2 = BD \cdot AD.$$

Врахувавши рівність з умови задачі маємо

$$BD \cdot AD = BD^2 - 6AD^2.$$

Тепер поділивши на AD^2 і позначивши $k = \frac{BD}{AD}$, одержимо таке рівняння

$$k = k^2 - 6.$$

Оскільки $k > 0$, то $k = 3$. Тому

$$CD^2 = BD \cdot AD = 3 \cdot AD^2,$$

звідки

$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{CD}{AD} = \sqrt{3},$$

тобто $\angle A = 60^\circ$ і $\angle B = 30^\circ$.

- ③ Дану рівність можна записати у такому вигляді

$$25a^2 - (b+c)^2 = 2021,$$

тобто

$$(5a + b + c)(5a - b - c) = 2021.$$

Зауважимо, що $2021 = 2021 \cdot 1 = 43 \cdot 47$, причому числа 43 і 47 є простими. Таким чином, ми одержуємо наступні дві системи рівнянь

$$\begin{cases} 5a + b + c = 2021, \\ 5a - b - c = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 5a + b + c = 47, \\ 5a - b - c = 43. \end{cases}$$

Ров'язуючи першу систему, одержуємо $10a = 2022$, що неможливо. Розв'язавши другу систему, одержуємо, що $a = 9$ і $b + c = 2$. Оскільки $b \leq 1$ і $c \leq 1$, то $b = c = 1$.

- ④ Оскільки всі цифри п'ятицифрових чисел A та B є різними і всього різних цифр є 10, то у десятковому записі цих чисел зустрічається рівно по одному разу кожна цифра від 0 до 9. Тому сума цифр S чисел A та B дорівнює

$$S = 0 + 1 + 2 + \dots + 9 = 45.$$

Позначимо через S_A і S_B суми цифр чисел A та B відповідно. зрозуміло, що

$$S_A + S_B = S = 45.$$

Оскільки всі числа $10 - 1$, $100 - 1$, $1000 - 1$ і $10000 - 1$ діляться націло на 9, то числа $A - S_A$ та $B - S_B$ також націло діляться на 9. Справді,

$$\begin{aligned} A - S_A &= \overline{abcde} - (a + b + c + d + e) = \\ &= (10000 - 1)a + (1000 - 1)b + (100 - 1)c + (10 - 1)d. \end{aligned}$$

Тому число

$$\begin{aligned} A + B &= (A - S_A) + (B - S_B) + (S_B + S_A) = \\ &= (A - S_A) + (B - S_B) + 45 \end{aligned}$$

націло ділиться на 9, як сума трьох чисел з такою властивістю. Залишилось зауважити, що число $A^3 + B^3$ націло ділиться на $A + B$, адже $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$.

- ⑤ Спочатку доведемо, що $n \leq 16$.

Назвемо рядок або стовпчик таблиці *додатним* (від'ємним), якщо в ньому є хоча б одна число 1 (число -1). Згідно з умовою задачі кожний рядок (стовпчик) таблиці є або додатним, або від'ємним або немає назви. Позначимо через r^+ , r^- , s^+ і s^-

кількість додатних і від'ємних рядків і стовпчиків відповідно. Оскільки таблиця має 8 рядків і 8 стовпчиків, то

$$r^+ + r^- \leq 8 \quad \text{і} \quad s^+ + s^- \leq 8.$$

Тому $r^+ + s^+ \leq 8$ або $r^- + s^- \leq 8$.

Розглянемо випадок $r^+ + s^+ \leq 8$ (якщо $r^- + s^- \leq 8$, то міркуємо аналогічно). Зазначимо, що кожне із n чисел 1 записане в клітинці, яка знаходиться на перетині додатного рядка і додатного стовпчика. З іншого боку, клітинок, які знаходяться на перетині додатного рядка і додатного стовпчика, є $r^+ \cdot s^+$. Тому

$$n \leq r^+ \cdot s^+.$$

Тепер з допомогою нерівності $4ab \leq (a+b)^2$ отримуємо

$$n \leq r^+ \cdot s^+ \leq \frac{1}{4}(r^+ + s^+)^2 \leq \frac{1}{4} \cdot 8^2 = 16.$$

Залишилось навести приклад розташування шістнадцяти чисел 1 і шістнадцяти чисел -1 . Одним з таких прикладів є такий: у верхньому лівому квадраті розміром 4×4 записуємо числа 1, а у нижньому правому квадраті розміром 4×4 записуємо числа -1 .

Отже, $n = 16$.

11 клас

- ① Поділивши рівняння на 25^x і зробивши заміну $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$, одержимо рівняння

$$9y^2 - 4 = 5y,$$

звідки $y = -\frac{4}{9}$ (що не підходить, адже $y > 0$) або $y = 1$. Звідки $x = 0$.

- ② Нехай a – довжина сторони ромба і S – площа ромба. Відомо, що

$$S = \frac{1}{2} \cdot d_1 d_2 = p \cdot r = 2a \cdot r,$$

де $p = 2a$ – півпериметр ромба. Тепер маємо

$$16r^2 = \sqrt{3} \cdot d_1 d_2 = 2\sqrt{3} \cdot S = 4\sqrt{3} \cdot a \cdot r.$$

Звідки $r = \frac{\sqrt{3}}{4}a$.

Нехай 2α – один з кутів ромба, наприклад, з якого виходить діагональ довжиною d_1 . Тоді

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{r}{a} = \frac{r}{\frac{1}{2}d_1} \cdot \frac{\frac{1}{2}d_1}{a} = \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin(2\alpha).$$

Звідки $2\alpha = 60^\circ$ або $2\alpha = 120^\circ$.

- ③ Дану рівність можна записати у такому вигляді

$$81a^2 - (b + c)^2 = 2021,$$

тобто

$$(9a + b + c)(9a - b - c) = 2021.$$

Зауважимо, що $2021 = 2021 \cdot 1 = 43 \cdot 47$, причому числа 43 і 47 є простими. Таким чином, ми одержуємо наступні дві системи рівнянь

$$\begin{cases} 9a + b + c = 2021, \\ 9 - b - c = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} 9a + b + c = 47, \\ 9a - b - c = 43. \end{cases}$$

Розв'язуючи першу систему, одержуємо $18a = 2022$, що неможливо. Розв'язавши другу систему, одержуємо, що $a = 5$ і $b + c = 2$. Оскільки $b \leq 1$ і $c \leq 1$, то $b = c = 1$.

- ④ Зауважимо спочатку, що для кожного непарного натурального числа n сума $A^n + B^n$ націло ділиться на $A + B$. Справді, згідно з формулою суми n членів геометричної прогресії з першим членом $b_1 = A^{n-1}$ і знаменником $q = -\frac{B}{A}$, маємо

$$\begin{aligned} A^{n-1} - A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 - \dots - AB^{n-2} + B^{n-1} = \\ = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{A^n + B^n}{A + B}. \end{aligned}$$

Тому для доведення першої частини достатньо показати, що число $A + B$ націло ділиться на 9.

Оскільки всі цифри п'ятицифрових чисел A та B є різними і всього різних цифр є 10, то у десятковому записі цих чисел зустрічається рівно по одному разу кожна цифра від 0 до 9. Тому сума цифр S чисел A та B дорівнює

$$S = 0 + 1 + 2 + \dots + 9 = 45.$$

Позначимо через S_A і S_B суми цифр чисел A та B відповідно. зрозуміло, що

$$S_A + S_B = S = 45.$$

Оскільки всі числа $10 - 1$, $100 - 1$, $1000 - 1$ і $10000 - 1$ діляться націло на 9, то числа $A - S_A$ та $B - S_B$ також націло діляться на 9. Справді,

$$\begin{aligned} A - S_A &= \overline{abcde} - (a + b + c + d + e) = \\ &= (10000 - 1)a + (1000 - 1)b + (100 - 1)c + (10 - 1)d. \end{aligned}$$

Тому число

$$\begin{aligned} A + B &= (A - S_A) + (B - S_B) + (S_B + S_A) = \\ &= (A - S_A) + (B - S_B) + 45 \end{aligned}$$

націло ділиться на 9, як сума трьох чисел з такою властивістю.

Число $A^2 + B^2$ не обов'язково націло ділиться на 9. Для прикладу достатньо взяти такі числа A і B , які містять всі різні цифри, але кожне з них не ділиться на 3. Тоді добуток $2AB$ також не ділиться на 3. Тому число

$$A^2 + B^2 = (A + B)^2 - 2AB$$

не ділиться на 3, адже $(A + B)^2$ ділиться на 9.

⑤ Спочатку доведемо, що $n \leq 20$.

Назвемо рядок або стовпчик таблиці *додатним* (*від'ємним*), якщо в ньому є хоча б одна число 1 (число -1). Згідно з умовою задачі кожний рядок (стовпчик) таблиці є або додатним, або від'ємним або немає назви. Позначимо через r^+ , r^- , s^+ і s^- кількість додатних і від'ємних рядків і стовпчиків відповідно. Оскільки таблиця має 9 рядків і 9 стовпчиків, то

$$r^+ + r^- \leq 9 \quad \text{і} \quad s^+ + s^- \leq 9.$$

Тому $r^+ + s^+ \leq 9$ або $r^- + s^- \leq 9$.

Розглянемо випадок $r^+ + s^+ \leq 9$ (якщо $r^- + s^- \leq 9$, то міркуємо аналогічно). Зазначимо, що кожне із n чисел 1 записане в клітинці, яка знаходиться на перетині додатного рядка і додатного

стовпчика. З іншого боку, клітинок, які знаходяться на перетині додатного рядка і додатного стовпчика, є $r^+ \cdot s^+$. Тому

$$n \leq r^+ \cdot s^+ = \frac{1}{4}((r^+ + s^+)^2 - (r^+ - s^+)^2).$$

Якщо $r^+ + s^+ \leq 8$, то

$$n \leq \frac{1}{4}((r^+ + s^+)^2) \leq 16.$$

Якщо ж $r^+ + s^+ = 9$, то $|r^+ - s^+| \geq 1$ (як різниця чисел різної парності) і

$$n \leq \frac{1}{4}((r^+ + s^+)^2 - (r^+ - s^+)^2) \leq \frac{1}{4}(9^2 - 1) = 20.$$

Залишилось навести приклад розташування двадцяти чисел 1 і двадцяти чисел -1 . Одним з таких прикладів є такий: у верхньому лівому прямокутнику розміром 5×4 записуємо числа 1, а у нижньому правому прямокутнику розміром 4×5 записуємо числа -1 .

Отже, $n = 20$.

2023 – 2024

6 клас

- ① Найменша кількість кнедликів – 15. Така кількість є достатньою, бо $1 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7$. Менше Даринка може мати тільки 5, 7, 10, 12 і 14 кнедликів. Перевіркою переконуємося, що ці суми не підходять.
- ② Робінзон повинен дістати смаколик з ящика „Зефір і шоколад”. В цьому ящику за умовою задачі повинні бути або тільки зефірки, або тільки шоколадки. Якщо він дістав зефір, то потрібно переклеїти стікери так:

„Зефір і шоколад” $\rightarrow$ „Зефір”;

„Зефір” $\rightarrow$ „Шоколад”;

„Шоколад” $\rightarrow$ „Зефір і шоколад”.

Якщо він дістав шоколад, то потрібно переклеїти стікери так:

„Зефір і шоколад” $\rightarrow$ „Шоколад”;

„Зефір” $\rightarrow$ „Зефір і шоколад”;

„Шоколад” $\rightarrow$ „Зефір”.

- ③ Можна. Наприклад так, як показано на малюнку:

- ④ На дошці записані числа 51, 69 і 78. В сумі 147 можуть дати тільки числа, які починаються на 6 та 7. Отже, останні цифри цих чисел в сумі дають 17. Тобто, ці числа – 68 і 79 або 69 і 78. Якщо третє число 79, то перше може бути тільки 50, але тоді в сумі з 68 дає 118. Отже, залишається варіант 51, 69 і 78.

7 клас

- ① Нехай x – вартість піци „Чотири сири”. Тоді піца „Сир” коштує

$$50\%(75\%(80\%x)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot x = \frac{3}{10} \cdot x = 30\%x.$$

Отже, вартість піци знизилася на 70%.

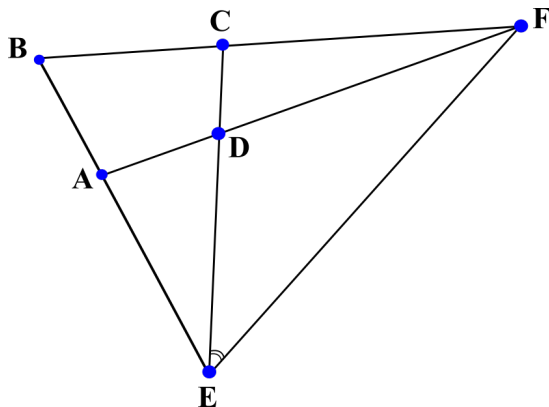
- ② Задача 6-2.
- ③ Нехай ці числа мають вигляд $X0$ та $Y5$. Сума цих чисел закінчується на 5, тому в квадраті закінчується на 25. Отже, $Y = 2$. Оскільки різниця між числами 5, то їх перші цифри або рівні, або відрізняються на 1. Тому $X = 1, 2$ або 3. Перевіркою переконуємося, що шукані числа – це 20 і 25 та 30 і 25.
- ④ Виграшна позиція стрілки – це перша година, оскільки після довільного ходу суперника гравець однозначно переводить стрілку на 6 годину. Петрик має виграшну стратегію. Першим ходом рухає стрілку на позначку 2 години, тоді Павлик вимушений перевести на 5 годину. Другим ходом Петрик переводить на 8 годину і виграє, оскільки після будь-якого ходу Павлика він може поставити стрілку на першу годину.

8 клас

- ① Два прямокутники розмірами 1×217 та 7×31 (див. малюнок). Складений прямокутник має цілі сторони, а його площа дорівнює сумі площ всіх смужок, тобто, $9+10+\dots+22 = 217$. Оскільки $217 = 7 \times 31 = 1 \times 217$, то інших прямокутників скласти не можна.

22		9
21		10
20		11
19		12
18		13
17		14
16		15

- ② Оскільки $\triangle EBF$ рівнобедрений, то $\triangle BEF = \triangle BFE$. Крім того, $AE = CF$, сторона EF – спільна, отже, $\triangle ECF = \triangle FAE$. Тоді $\angle EAD = \angle DCF$. Далі, $\angle ADE = \angle CDE$ як вертикальні. Тоді в трикутниках $\triangle ADE$ та $\triangle CDF$ маємо $\angle AED = \angle CFD$. Отже, $\angle EFD = \angle DEF = 33^\circ$.



- ③ Отримати 16 балів можна тільки отримавши за дві задачі по 2 бали, а за решту – 3 бали, або за одну задачу 1 бал, а за решту – 3 бали. Отримати 1 бал за одну задачу і по 3 за всі інші можна 6-ма способами. Отримати по 2 бали за дві задачі і по 3 за інші чотири задачі можна так: за першу задачу 2 бали та одну з 5-ти, що залишилися – 5 способів; за другу задачу 2 бали та одну з 5-ти, що залишилися (крім першої) – 4 способи; за третю 2 бали і одну з 4,5,6 задач два бали – це 3 способи; за четверту і п'яту та за четверту і шосту по два бали – 2 способи, і за п'яту

і шосту – 1 спосіб. Отже, всього $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ спосіб отримати 16 балів.

- ④ Позначимо $x = A22 \dots 22B$. Зауважимо, що $72 = 8 \cdot 9$, тому x ділиться націло на 8 і на 9. Запишемо число x у вигляді

$$x = A22 \dots 2000 + 22B,$$

тоді

$$22B = x - A22 \dots 2 \cdot 1000 = x - A22 \dots 2 \cdot 8 \cdot 125.$$

Отже, $22B$ ділиться націло на 8. Звідси $B = 4$. Сума цифр числа x дорівнює

$$A + 2022 \cdot 2 + 4 = A + 4048 = A + 9 \cdot 449 + 7.$$

З того, що сума цифр ділиться на 9 випливає, що $A = 2$.

- ⑤ Ні, не могло. Нехай X дітей на початку прогулянки мають на ногах порівну шкарпеток. Тоді $5X$ дітей мають на ногах не порівну шкарпеток, і загальна кількість дітей – $6X$. Після того, як діти переодягнулися, $2X$ мають на ногах порівну шкарпеток і $4X$ – різну кількість. Позначимо через Y кількість дітей, які на початку мали на одній нозі рівно на 1 шкарпетку менше. Після переодягання ті X дітей, які мали на початку порівну шкарпеток, увійдуть до групи $4X$ дітей, у кого не порівну. Ті Y дітей, які мали рівно на 1 шкарпетку менше, після переодягання все одно залишаться в групі тих, у кого не порівну. Отже, разом $X + Y \leq 4X$. Звідси $Y \leq 3X = \frac{1}{2} \cdot 6X$. Таким чином, кількість дітей з різницею в 1 шкарпетку не може бути більше половини усіх дітей.

9 клас

- ① Додамо до обидвох частин рівняння 1, тоді

$$x^2 + 2x + 1 = 100,$$

$$(x + 1)^2 = 100.$$

Таким чином, $x + 1 = \pm 10$, звідки випливає, що $x = 9$ або $x = -11$.

- ② Нехай $a = 123456789$, $b = 987654321$. Сума цифр a та b однакова і дорівнює 45, тому a і b діляться націло на 9. Крім того,

$$987654321 = 123456789 \cdot 8 + 9.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \text{НСД}(a, b) &= \text{НСД}(a, b - a) = \text{НСД}(a, b - 2a) = \\ &= \dots = \text{НСД}(a, b - 8a) = 9. \end{aligned}$$

Таким чином, $\text{НСД}(123456789, 987654321) = 9$.

- ③ Прямокутні трикутники BQC і BPC вписані в коло з центром в точці M . Отже, PQ – хорда цього кола, MN лежить на діаметрі і ділить PQ навпіл, тому $MN \perp PQ$.
- ④ Перепишемо рівняння у вигляді

$$3xy + x + 6y + 2 = 2025,$$

звідки

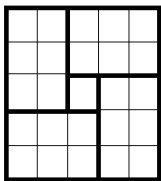
$$(x + 2)(3y + 1) = 25 \cdot 81.$$

Оскільки права частина ділиться націло на 3, а $(3y + 1) -$ ні, то

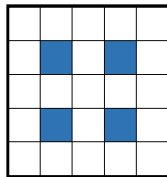
$$\begin{cases} x + 2 &= 81, \\ 3y + 1 &= 25. \end{cases}$$

Звідси $x = 79$, $y = 8$.

- ⑤ 4 клітинки. Менше бути не може, оскільки в квадраті без центральної клітинки можна розташувати 4 прямокутники 2×3 без накладань (мал. 1), на кожний з яких потрібна 1 зафарбована клітинка. Приклад розфарбування на 4 клітинки наведений на мал. 2.



Мал.1



Мал.2

10 клас

- ① Запишемо рівняння у вигляді

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 100.$$

Далі маємо $(x^2 + 1)^2 = 10^2$. Отже, $x^2 = -11$ (розв'язків немає) або $x^2 = 9$, тобто $x = \pm 3$.

- ② Для певності вважаємо, що
- $H \in BM$
- . Оскільки
- $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CH$
- і
- $S_{\triangle CMH} = \frac{1}{2}MH \cdot CH$
- , то
- $MH = \frac{1}{4}AB$
- . Тоді

$$BH = BM - MH = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{4}AB = \frac{1}{4}AB = MH.$$

Тому трикутник CBM рівнобедрений ($CB = CM$), адже CH — його висота. З іншого боку, M — центр кола, описаного навколо трикутника ABC . Тому $CM = BM$. Отже, трикутник CBM рівносторонній і $\angle CBA = 60^\circ$.

- ③ Оскільки
- $\cos x \leq 1$
- то

$$\begin{aligned} 3 \cos(3x) + 5 \cos(5x) + \dots + 89 \cos(89x) &\leq 3 + 5 + \dots + 89 = \\ &= \frac{(3 + 89) \cdot 44}{2} = 2024. \end{aligned}$$

Отже, $x \in (-\infty, +\infty)$.

- ④ Запишемо рівняння у вигляді

$$3xy + x + 6y + 2 = 2025,$$

тобто

$$(x + 2)(3y + 1) = 45^2.$$

Натуральне число $3y + 1$ є дільником числа $45^2 = 3^4 \cdot 5^2$. Звідси випливає, що $3y + 1 = 25$. Таким чином, $y = 8$ і $x = 79$.

- ⑤ З нерівності Коші між середніми випливає, що
- $\frac{a+b}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{a^2 + b^2}$
- ,

тобто $\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 \leq a^2 + b^2$. Тому з кожним кроком сума квадратів чисел, які записані на дошці, не збільшується. Отже, після застосування 98-ми кроків одержиться число, квадрат якого не перевищує початкової суми квадратів чисел. З іншого боку, якщо на кожному кроці вибирати друге число, то сума квадратів чисел, які записані на дошці, не змінюватиметься і ми, таким чином, отримаємо найбільше число A , для якого

$$A^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2 + \dots + (\sqrt{99})^2 = 50 \cdot 99.$$

Таким чином, $A = \sqrt{50 \cdot 99}$.

11 клас

- ① Запишемо рівняння у вигляді

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 2500.$$

Далі маємо $(x^2 + 1)^2 = 50^2$. Отже, $x^2 = -51$ (розв'язків немає) або $x^2 = 49$, тобто, $x = \pm 7$.

- ② Оскільки середини сторін опуклого чотирикутника є вершинами паралелограма (його сторони паралельно діагоналям чотирикутника), а паралелограм, вписаний в коло, — це прямокутник, то діагоналі чотирикутника $ABCD$ перпендикулярні. Нехай O — точка перетину діагоналей. Тоді

$$AB^2 + CD^2 = AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = BC^2 + DA^2.$$

Звідси отримуємо, що $DA = 1$ см.

- ③ Оскільки

$$3 + 5 + \dots + 89 = \frac{(3 + 89) \cdot 44}{2} = 2024,$$

то ми можемо записати нерівність у такому вигляді

$$3 \cdot 3^x + 5 \cdot 5^x + \dots + 89 \cdot 89^x \leq 3 \cdot 2024^x + 5 \cdot 2024^x + \dots + 89 \cdot 2024^x.$$

Тобто,

$$3(3^x - 2024^x) + 5(5^x - 2024^x) + \dots + 89(89^x - 2024^x) \leq 0.$$

Для кожного $k = 3, 5, \dots, 89$ вираз

$$k^x - 2024^x = k^x \left(1 - \left(\frac{2024}{k}\right)^x\right)$$

строго більший нуля при $x \in (-\infty, 0)$, і більший або рівний нулеві на проміжку при $x \in [0, +\infty)$. Тому значення такого ж знаку набуває і відповідна сума таких виразів. Таким чином, $x \in [0, +\infty)$.

- ④ Запишемо рівняння у вигляді

$$5xy + 10x + y + 2 = 2025,$$

Тобто

$$(5x + 1)(y + 2) = 45^2.$$

Натуральне число $5x + 1$ є дільником числа $45^2 = 3^4 \cdot 5^2$. Звідси випливає, що $5x + 1 = 81$. Отже, $x = 16$ і $y = 23$.

- ⑤ З нерівності Коші між середніми випливає, що

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{\sqrt{k}} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2},$$

тобто,

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{\sqrt{k}} \right)^2 \leq a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2.$$

Тому з кожним кроком сума квадратів чисел, які записані на дошці, не збільшується. Отже, після кожного застосування такого кроку обов'язково одержиться число, квадрат якого не перевищує початкової суми квадратів чисел. З іншого боку, якщо на кожному кроці вибирати друге число, то сума квадратів чисел, які записані на дошці, не змінюватиметься і ми, застосувавши, наприклад, друге число 98 разів при $k = 2$, отримаємо найбільше число A , для якого

$$A^2 = 1^2 + \sqrt{2}^2 + \dots + \sqrt{99}^2 = 50 \cdot 99.$$

Таким чином, найбільше значення $A = \sqrt{50 \cdot 99}$.

2024 – 2025

6 клас

- ① Найменше чотирицифрове число, яке ділиться на 41 – це число $1025 = 25 \cdot 41$. Оскільки це число ділиться націло на 5, то шукане число – це $28 \cdot 41$, тобто 1148.
- ② Якщо колб із зіллям стрибучості 10, то колб із зіллям швидкості 60. Тоді колб із зіллям сили – 180. Колби із зіллям шкоди складають $\frac{1}{5}$ від 190, тобто 38. Отже, всього колб в лабораторії $10 + 38 + 60 + 180 = 288$.
- ③ Занумеруємо однолапиків від 1 до 11. Перший однолапик потисне лапу 10 іншим, другий – 9-м іншим (бо його лапостискання з однолапиком №1 вже пораховане), третій – 8-ми іншим (бо його лапостискання з однолапиками №1 та №2 вже враховані), і так далі, наприкінці залишиться додати 1 лапостискання однолапика №10 з однолапиком №11. Всього буде $10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 55$ лапостискань.

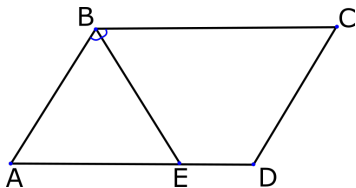
- ④ Зрозуміло, що потрібно розглянути число, яке є найближчим до 2024 зліва і яке за 87 кроків не буде ділитися на 100 жодного разу. Це число 1999. Через 87 хвилин воно зміниться на $1999 - 87 = 1912$.

7 клас

- ① З умови задачі випливає, що кількість учнів на занятті гуртка була в межах від 16 до 24. Число учнів повинно бути непарним і давати остачу 1 при діленні на 3. Отже, всього на занятті було 19 учнів.
- ② Задача 6-3.
- ③ Колб із зіллям швидкості є 72, а колб із зіллям сили є 216. Якщо x – це кількість колб із зіллям шкоди, то $\frac{2}{5}(300 + x) = x$, звідки $x = 200$. Отже, всього колб було 500.
- ④ Послідовність 23, 18, 20, 12, 14, 16, 18, ... з другої хвилини є періодичною з періодом 5. Тому через добу на дошці буде записано число 16.

8 клас

- ① З умови задачі випливає, що сумарний вік студентів $31 \cdot 23 = 713$. Тоді $\frac{713+x}{32} = 24$, де x – це вік викладача. Звідси $x = 55$.
- ② Оскільки $BC \parallel AD$, то $\angle CBE = \angle BEA$. Тоді $\triangle BAE$ – рівнобедрений, $AB = AE$. Нехай $ED = x$. Тоді $AE = 3x$. Маємо рівняння $2(3x + 4x) = 70$. Звідси $x = 5$. Отже, $AD = 4x = 20$, $AB = 3x = 15$.



- ③ Занумеруємо однолапиків від 1 до 20. Перший однолапик потисне лапу 19 іншим, другий – 18-м іншим (бо його лапостискання з однолапиком №1 вже пораховане), третій – 17-м іншим (бо його лапостискання з однолапиками №1 та №2 вже враховані), і так далі, наприкінці залишиться додати 1 лапостискання однолапика №19 з однолапиком №20. Всього буде $19 + 18 + 17 + \dots + 2 + 1 = 9 \cdot 20 + 10 = 190$ лапостискань.

- ④ Послідовні числа 1013, 1014, 1015, ..., 2024 задовольняють умову задачі, їх є 1012. Покажемо, що ця кількість є максимальною. Розіб'ємо всі натуральні числа від 1 до 2024 на 1012 пар вигляду $(n, 2n)$:

$$(1, 2), (2, 4), (3, 6), \dots, (1012, 2024).$$

Якщо професор вибрав більше, ніж 1012 чисел, то хоча б два з них попадуть в одну пару. А тоді друге число з пари ділиться на перше, що суперечить умові задачі.

- ⑤ Зробимо перетворення:

$$= 13x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 6xz + y = (2x - y)^2 + (3x - z)^2 + y$$

Тоді найменші значення виразів $(2x - y)^2$ та $(3x - z)^2$ дорівнюють нулю при $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. Звідси $A \geq y = 2$.

9 клас

- ① Запишемо рівняння у вигляді $x^4 - 8x^2 + 16 = 2025$, звідки $(x^2 - 4)^2 = 45^2$. Отже, $x^2 = -41$ (розв'язків немає) або $x^2 = 49$, тобто $x = \pm 7$.
- ② Кожний із 45 однолапиків візьме участь у 44 лапостисканнях. Крім того, у кожному лапостисканні беруть участь рівно 2 однолапики. Тому загальна кількість лапостискань можна обчислити так:

$$\frac{45 \times 44}{2} = 45 \times 22 = 990.$$

- ③ Нехай $DFGH$ – це вписаний квадрат, причому вершини D і F лежать на відрізку AB , точка D лежить між точками A і F , точка G лежить на дузі BC і точка H лежить на дузі AC .

Позначимо $DF = x$ і $AD = y$. Оскільки криволінійний трикутник симетричний відносно серединного перпендикуляра до відрізка AB , який проходить через точку C , то вписаний квадрат також симетричний відносно цього серединного перпендикуляра. Тому $BF = AD$. Отже, $y = \frac{R-x}{2}$ і $BD = \frac{R+x}{2}$. За теоремою Піфагора у трикутнику BDH маємо

$$R^2 = BH^2 = BD^2 + DH^2 = \left(\frac{R+x}{2}\right)^2 + x^2 = \frac{R^2 + 2Rx + 5x^2}{4}.$$

Звідси

$$5x^2 + 2Rx - 3R^2 = 0.$$

Тоді $x = \frac{3R}{5} = 6$ см.

- ④ Запишемо рівняння у вигляді

$$(x - 45)(x + 45) = 10^y.$$

Тоді існують цілі невід'ємні числа n і k такі, що $x - 45 = 10^n$ і $x + 45 = 10^k$. Тепер маємо

$$10(10 - 1) = 90 = (x + 45) - (x - 45) = 10^k - 10^n = 10^n(10^{n-k} - 1).$$

Отже, $n = 1$ і $k - n = 1$, тобто $k = 2$. Таким чином, $y = 3$ і $x = 55$.

- ⑤ Спочатку зауважимо, що для кожного натурального n виконується нерівність

$$10^n > 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1},$$

адже зліва знаходиться $(n + 1)$ -цифрове число, а справа – n -цифрове.

Розглянемо різницю S довільних двох сум чисел, які розглядаються в задачі. Ця різниця складається із суми різних доданків вигляду $\pm 10^k$, бо лише у випадку, коли ми розглядаємо суми чисел стовпчика і рядочка у цих сумах є один спільний доданок (він записаний у перетині цього рядка і стовпця і у різниці він знищиться). Нехай n – це найбільший степінь серед доданків $\pm 10^k$, які входять у суму S . Без обмеження загальності ми можемо вважати, що цей доданок входить зі знаком $+$. Тепер маємо

$$S \geq 10^n - (1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1}) > 0.$$

Отже, $S \neq 0$.

10 клас

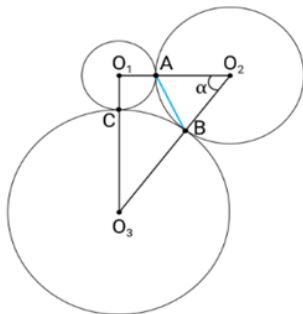
- ① Запишемо рівняння у вигляді

$$121x^4 + 22x^2 + 1 = 2025.$$

Звідси $(11x^2 + 1)^2 = 45^2$. Отже, $11x^2 = 44$, тобто $x = \pm 2$.

- ② Нехай O_1, O_2, O_3 – центри кіл радіусами 1 см, 2 см, 3 см відповідно. Трикутник $O_1O_2O_3$ прямокутний (зі сторонами 3 см, 4 см і 5 см), $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. Тепер за теоремою косинусів маємо

$$AB = \sqrt{O_2A^2 + O_2B^2 - 2O_2A \cdot O_2B \cos \alpha} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$



③ Задача 9-4.

④ Запишемо нерівність у рівносильному вигляді

$$2x^3 + 5x^2 + 2x - 1 - (x + 1)^3 \geq 0.$$

Тобто, $x^3 + 2x^2 - x - 2 \geq 0$, звідки $(x - 1)(x + 1)(x + 2) \geq 0$.
Методом інтервалів отримуємо відповідь $x \in [-2, -1] \cup [1, +\infty)$.

⑤ Спочатку зауважимо, що для кожного натурального n виконується нерівність

$$2^n > 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1},$$

адже $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

Розглянемо різницю S довільних двох сум чисел, які розглядаються в задачі. Ця різниця складається із суми різних доданків вигляду $\pm 2^k$, бо лише у випадку, коли ми розглядаємо суми чисел стовпчика і рядочка у цих сумах є один спільний доданок (він записаний у перетині цього рядка і стовпця і у різниці він знищиться). Нехай n — це найбільший степінь серед доданків $\pm 2^k$, які входять у суму S . Без обмеження загальності ми можемо вважати, що цей доданок входить зі знаком $+$. Тепер маємо

$$S \geq 2^n - (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) > 0.$$

Отже, $S \neq 0$.

11 клас

① Запишемо рівняння у вигляді

$$x^4 + 22x^2 + 121 = 2025x^4.$$

Далі маємо $(x^2 + 11)^2 = (45x^2)^2$. Отже, $44x^2 = 11$, тобто $x = \pm \frac{1}{2}$.

- ② Нехай $AB = x$ см і $DC = y$ см. Оскільки

$$\angle ADB = \angle DAC + \angle DCA = 2\angle DAC = \angle CAB,$$

то трикутники ABC і DBA подібні. Тому $AB : DB = BC : BA$, тобто $\frac{x}{25-y} = \frac{25}{x}$. Звідси $x = 5\sqrt{25-y}$.

Якщо $y = 9$ см, то $x = 20$ см. Якщо $y = 16$ см, то $x = 15$ см.

- ③ Перепишемо нерівність у такому рівносильному вигляді

$$\frac{1}{\sin x \cdot \cos x} \geq 4^{\sin x \cdot \cos x}.$$

Зробимо заміну $t = \sin x \cdot \cos x$ і одержимо нерівність $\frac{1}{t} \geq 4^t$, яка, зрозуміло, має розв'язки лише для додатних значень t . Оскільки функція $f(t) = \frac{1}{t}$ строго спадає, а функція $g(t) = 4^t$ строго зростає на проміжку $(0, +\infty)$ і $f(\frac{1}{2}) = 2 = g(\frac{1}{2})$, то розв'язком даної нерівності є $t \in (0, \frac{1}{2})$.

Зауважимо, що нерівність $0 < t < \frac{1}{2}$ рівносильна нерівності

$$0 < \sin(2x) < 1.$$

Отже, $2x \in (2\pi n, (2n+1)\pi)$, тобто, $x \in (\pi n, \frac{2n+1}{2}\pi)$, де $n \in \mathbb{Z}$.

- ④ Зауважимо, що $A_1 = 10$, $A_2 = 30$, $A_3 = 100$, $A_4 = 354$. З іншого боку, числа вигляду 3^n при діленні на 8 дають остачу 3 для непарних n і остачу 1 для парних n . Тому при $n > 4$ число A_n не ділиться на 8, отже не може мати в кінці запису більше двох нулів.

Таким чином, $k \in \{0, 1, 2\}$.

- ⑤ Див. задачу 10-5.



Олімпіада „МініМудрик” для учнів 5-7 класів

2015 – 2016

5 клас

- ① Зрозуміло, що через 7 (14, 21, ...) днів буде понеділок. Отже, через 1001 день також буде понеділок (оскільки 1001 кратно 7). Значить, через 1000 днів буде неділя.
- ② Оскільки двоцифрових чисел, у яких обидві цифри однакові, є 9 (це – 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 і 99), а всього двоцифрових чисел є 90, то залишається 81 число, у якого обидві цифри різні.
- ③ Згрупуємо числа наступним чином:

$$(3574 + 2426) + (1265 + 4735) + (2183 + 3817) + (4392 + 1608) = \\ = 6000 + 6000 + 6000 + 6000 = 24000.$$

- ④ Ні, не можна. Припустимо, що на деякому кроці усі 7 чисел стали однакові. Розглянемо випадок, коли вони всі одиниці. Тоді на попередньому кроці, очевидно, всі числа теж були однакові, що неможливо. Тепер розглянемо випадок, коли всі числа на останньому кроці дорівнюють нулеві. Тоді кожний нуль на останньому кроці утворився з пари (0; 1) на передостанньому кроці. Отже, на передостанньому кроці на колі знаходилася певна кількість пар (0; 1), що неможливо, адже кількість чисел на колі за умовою задачі непарна.

6 клас

- ① Задача 5-2.
- ② Позначимо через x шукану кількість літрів молока жирності 9 відсотків. Нехай m – маса одного літра молока, а M – загальна маса жиру у суміші. Тоді, з одного боку,

$$M = (2 + x) \cdot m \cdot 0,08,$$

а з іншого боку, маса жиру у суміші молока дорівнює сумі мас жиру у кожному складовому, тобто

$$M = 2 \cdot m \cdot 0,06 + x \cdot m \cdot 0,09.$$

Прирівнявши праві частини виразів для маси M і зробивши нескладні перетворення, одержимо

$$8(x + 2) = 12 + 9x.$$

Звідси $x = 4$.

- ③ Позначимо $A = abcde$. Тоді

$$\begin{array}{r} 1abcde \\ 3 \\ \hline abcde1 \end{array}$$

Звідси легко вгадується, що $e = 7$. Підставляючи це число в останню рівність, ми поступово отримаємо, що $d = 5, c = 8, b = 2$ і $a = 4$. Отже, $A = 42857$.

- ④ Задача 5-4.

7 клас

- ① Задача 5-2.

- ② Позначимо шукану відстань через S км, а швидкість течії через v км/год. Тоді до моменту зустрічі пліт проплив $S_1 = \frac{1}{2}v$ км, а катер $S_2 = \frac{1}{2}(20 - v)$ км. Оскільки $S = S_1 + S_2$, то

$$S = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}(20 - v) = 10 \text{ км.}$$

- ③ Зробимо перетворення

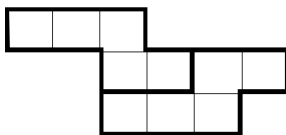
$$\begin{aligned} x^4 + 3x^2 + 4 &= x^4 + 4x^2 + 4 - x^2 = (x^2 + 2)^2 - x^2 = \\ &= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2). \end{aligned}$$

- ④ Проведемо внутрішню бісектрису AL кута A в трикутнику ABC . Тоді кут ALB прямий, оскільки зовнішня бісектриса паралельна до BC . Розглянемо прямокутні трикутники ALB і ALC : вони рівні, бо мають спільний катет і однакові кути. Отже, $AC = AB = 5$ см.
- ⑤ Задача 5-4.

 2016 – 2017

5 клас

- ① Приклад розрізання:



- ② Оскільки частка в п'ять разів менше діленого, то дільник дорівнює 5. Тоді частка – це $5 \cdot 6 = 30$.
- ③ З того, що Тіллі та Віллі збирали однакові скарби, а Тіллі та Корін – різні, випливає, що Дорін збирав такі ж скарби, як Тіллі та Віллі. Оскільки їх троє, то вони збирали срібні келихи. Отже, Корін на Одді збирали золоті монети.
- ④ Неважко порахувати, що у людини було 4 прабабусі і 4 прадідусі (всього 8). Значить, в кожного з них теж було по 4 прабабусі і по 4 прадідус. Отже, разом їх було 64.

6 клас

- ① За ознакою подільності на 11 різниця суми цифр, які стоять на парних місцях, та суми цифр, які стоять на непарних місцях, повинна ділитися на 11. Тому $(1+2+3+7+5) - (2+2+x+2):11$. Звідси $(10+x):11$. Отже, $x = 1$.
- ② Зауважимо, що

$$\begin{aligned}
 8765 \cdot 5678 &= (8888 - 123) \cdot (5555 + 123) = \\
 &= 8888 \cdot 5555 - 123 \cdot 5555 + 123 \cdot 8888 - 123 \cdot 123 = \\
 &= 8888 \cdot 5555 + 123 \cdot (8888 - 5555 - 123) = \\
 &8888 \cdot 5555 + 123 \cdot 3210 > 8888 \cdot 5555.
 \end{aligned}$$

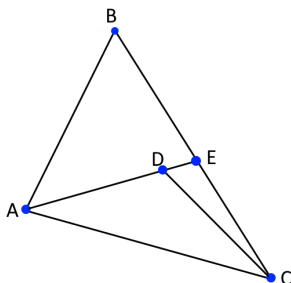
- ③ Задача 5-3.

- ④ Обчислимо, скільки є трицифрових чисел, у яких всі цифри різні. Перша цифра такого числа – це або 1, або 2, ..., або 9. Друга – будь-яка з цифр 0, 1, ..., 9, крім першої вибраної цифри, тобто, кількість способів підібрати другу цифру – теж 9. Третя цифра може бути будь-якою з цифр 0, 1, ..., 9, крім тих двох, які вже вибрані. Тобто, кількість способів вибрати третю цифру – 8. Отже, трицифрових чисел, у яких всі цифри різні є $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$. Всіх трицифрових чисел є 900, тому червоних табличок є $900 - 648 = 252$.

Обчислимо тепер, скільки є непарних трицифрових чисел, у яких всі цифри різні. Третя цифра такого числа обов'язково одна з п'яти цифр: 1, 3, 5, 7 або 9. Якщо остання цифра вже вибрана, то перша – це будь-яка, крім нуля і тої цифри, яка стоїть на третьому місці. Тобто, кількість способів вибрати першу цифру – 8. Тоді друга цифра – це будь-яка з цифр 0, 1, ..., 9, крім тих, які вже вибрані на першому і третьому місцях. Тобто, кількість варіантів вибрати другу цифру – 8. Отже, кількість зелених табличок складає $5 \cdot 8 \cdot 8 = 320$. Тоді кількість синіх табличок дорівнює $900 - 252 - 320 = 328$.

7 клас

- ① Задача 6-2.
- ② Розглянемо останні цифри степенів сімки: 7^0 – остання цифра 1, 7^1 – остання цифра 7, 7^2 – остання цифра 9, 7^3 – остання цифра 3, 7^4 – остання цифра 1. Отже, послідовність останніх цифр періодична з періодом 4. Оскільки 2017 дає остачу 1 при діленні на 4, то остання цифра числа 2017^{2017} така ж сама, як і у числа 2017^1 , тобто, 7.
- ③ Нехай в трикутнику ABC : $\angle A = 80^\circ$, $\angle B = 40^\circ$ і $\angle C = 60^\circ$. Нехай AE – бісектриса кута A , а D – така точка на бісектрисі AE , що $\angle ACD = 40^\circ$. Тоді кожний з трикутників ABE , ADC і DEC рівнобедрений, як легко випливає з обчислення кутів цих трикутників.



- ④ Ні, не можна. Розфарбуємо квадрат 5×5 в три різні кольори так, як показано на малюнку ліворуч. Тоді клітинок другого та третього кольору буде по 8, а клітинок першого кольору – 9. Кожний прямокутник розміру 3×1 , незалежно від його розташування, містить по одній клітинці кожного кольору. Тому для того, щоб можна було розрізати квадрат без однієї нецентральної клітинки на прямокутники 3×1 вирізана клітинка повинна бути першого кольору. Тепер повернемо квадрат 5×5 на 90°

1	2	3	1	2
3	1	2	3	1
2	3	1	2	3
1	2	3	1	2
3	1	2	3	1

3	1	2	3	1
2	3	1	2	3
1	2	3	1	2
3	1	2	3	1
2	3	1	2	3

за годинниковою стрілкою, і одержимо квадрат, зображений на малюнку праворуч. При цьому вирізана клітинка залишилася на своєму місці, але змінила колір, оскільки вона нецентральна. В такому випадку ця клітинка другого або третього кольору. Тоді для розрізання залишається або тільки 7 клітинок другого, або тільки 7 клітинок третього кольору, що неможливо.

2017 – 2018

5 клас

- ① Бетті говорить правду. Якби вона збрехала, то була б або найдовшою, або найкоротшою. Але найдовша Доллі, а найкоротша Моллі.

Кетті теж говорить правду. Якби вона збрехала, то була б найкоротшою, але найкоротша Моллі.

Також Моллі говорить правду. Якби вона збрехала, то була б не найкоротшою, але всі решта п'явки також не є найкоротшими.

Отже, збрехала Доллі. Тоді найкоротша – Моллі, ані найдовша, ані найкоротша – Бетті і Долі, найдовша – Кетті. Таким чином, порядок розташування п'явок такий: Моллі, Бетті, Доллі, Кетті, або Моллі, Доллі, Бетті, Кетті.

- ② Існують, наприклад, $m = 14$, $n = 2$. Ці числа задовольняють умову задачі, оскільки 14 ділиться націло на 2, 15 ділиться націло на 3, а 16 ділиться націло на 4.

- ③ Розділимо монети на 3 купки: дві по 9 монет і одна 8 монет. Порівняємо вагу двох купок по 9 монет. Можливі такі два випадки.

- a. На шалькових вагах не вийшло рівності. Тоді фальшива монета знаходиться серед 9 важчих монет.

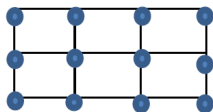
Далі розділимо ці 9 монет на 3 купки по 3 монети і порівняємо дві купки. Якщо не вийшло рівності, то фальшива монета серед 3 важчих монет. Якщо вийшла рівність, то фальшива монета серед 3 монет, які не порівнювалися.

За останнім зважуванням порівняємо масу 2 монет з купки, що містить фальшиву монету, а третю монету залишимо. Якщо якась з них важча, то вона і є фальшивою. Якщо монети однакової маси, то фальшивою є монета, що залишилась.

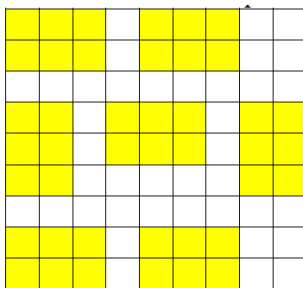
- b. На шалькових вагах вийшла рівність. Тоді фальшива монета знаходиться серед 8 монет, які ми не порівнювали.

Розділимо ці монети на 3 купки: дві по 3 монети і одна 2 монети. Порівняємо дві купки по 3 монети. Якщо одна з купок по 3 монети важча, то серед них фальшива монета. Тоді знаходимо фальшиву монету аналогічно до останнього зважування випадку a). Якщо ж вийшла рівність, то фальшива монета серед 2 монет, які ми не порівнювали, і за останнім зважуванням порівнюємо ці монети. Важча з них і буде фальшивою.

- ④ Розв'яжемо задачу в припущенні, що відстань між пастками повинна бути цілою. Кожна пастка містить 12 вузлів (вершин квадратиків), позначених на малюнку кружечками.

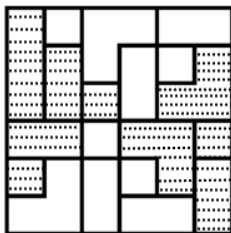


Пастки не повинні дотикатися, тому квадратне болото повинно вміщувати принаймні $7 \times 12 = 84$ вузликів. Болото 8×8 вміщує 81 вузлик, тому найменше болото, в яке можуть поміститися 7 пасток без дотиків – це болото 9×9 . Залишилося навести якийсь приклад такого розташування:



6 клас

- ① В будь-якому разі виграє Домовятко. Для цього йому потрібно після кожного ходу містера Бабайкінза брати більше цукерок, ніж містер Бабайкінз, або якщо цукерок не вистачає, то стільки ж скільки і містер Бабайкінз.
- ② Приклад розрізання наведено на малюнку.



- ③ Кожне прикольне число має вигляд

$$aabb, abab, abba, aaaa$$

де $a \neq b$ і $a, b \neq 0$.

Обчислимо кількість прикольних чисел від 1000 до 1999, тобто, при $a = 1$. Зрозуміло, що кількості чисел виду $aabb$, $abab$ і $abba$ однакові. Порахуємо кількість чисел виду $aabb$ при $a = 1$. Їх $\in 8$ (1122, 1133, ..., 1199). Значить, чисел виду $abab$ і $abba$ також по 8. Отже, від 1000 до 1999 прикольних чисел $\in 3 \times 8 = 24$ плюс ще одне число 1111, тобто, 25 чисел. Тоді в дев'яти тисячах буде $9 \cdot 25 = 225$ прикольних чисел.

④ Задача 5-4.

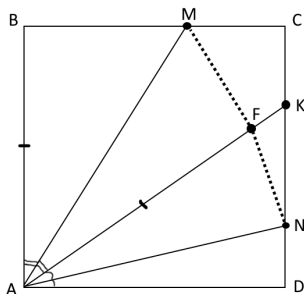
7 клас

① Припустимо, що дві мами та дві доньки – це четверо різних осіб. З умови задачі випливає, що разом вони з'їли кількість цукерок, яка націло ділиться на 6. З іншого боку, 14 не ділиться націло на 6. Отже, дві мами та дві доньки – це не четверо різних осіб, а троє: донька, її мама (яка одночасно є донькою своєї мами) та бабуся (яка одночасно є мамою для своєї доньки). За умовою задачі бабуся з'їла найменшу кількість цукерок x . Тоді мама з'їла $2x$, а донька – $4x$ цукерок. Складемо рівняння: $x + 2x + 4x = 14$.

Звідси $x = 2$ і відповідь: 2, 4 та 8 цукерок.

② Задача 6-3.

③ Розглянемо трикутники ABM та AFM . Вони рівні за двома сторонами та кутом між ними. Тоді $\angle AFM = \angle ABM = 90^\circ$. Оскільки $ABCD$ – квадрат, то $AD = AB = AF$. Тепер трикутники AFN та ADN рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси випливає, що $\angle AFN = \angle ADN = 90^\circ$. Отже, кут MFN розгорнутий, а тому точка F лежить на прямій MN .

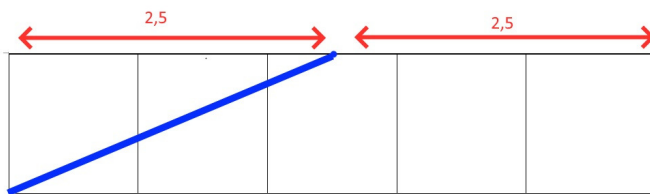


④ Задача 5-4.

 2018 – 2019

5 клас

- ① Оскільки число повинно бути найбільшим, то перша цифра може бути 9. Перебором можна переконатися, що підходить число 92.
- ② Розрізання наведено на малюнку.



- ③ Якщо твердження Тома Соїєра істинне, то у Беккі більше двох книг, а отже і тітка Поллі теж права, що суперечить умові. Якщо твердження Гекльбері Фінна істинне, то твердження тітки Поллі має бути хибним, тобто, книжок у Беккі менше двох. Оскільки Беккі читала книгу, то у неї є одна книга. Якщо твердження тітки Поллі істинне, то твердження Тома і Гека хибні, а тому у Беккі не більше 1876 книг і не менше 1876 книг. Отже, у неї рівно 1876 книг. Таким чином, у Беккі або 1 книга або 1876 книг.
- ④ Занумеруємо всі міста числами від 1 до 2019 і нехай з міста під номером k виходить рівно d_k доріг. Порахуємо кількість всіх доріг в країні (враховуючи, що кожна дорога з'єднує два міста):

$$\frac{d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{2018} + d_{2019}}{2}.$$

Кількість доріг має бути цілим числом, тому чисельник дробу повинен бути парним. Оскільки чисельник містить непарну кількість чисел, то всі вони непарними не можуть бути. Отже, хоча б одне з них парне.

6 клас

- ① Нехай шукане число складається з цифр a і b . Тоді різниця між цим числом та числом, записаним тими ж цифрами, але у зворотному порядку дорівнює

$$10a + b - (10b + a) = 9(a - b).$$

Оскільки $36 = 9 \cdot 4$, а 9 і 4 не мають спільних дільників, крім одиниці, то $a - b$ повинно ділитися без остачі на 4 . Шукане число повинно бути найбільшим, тому $a = 9$, $b = 5$.

- ② Відстань між точками -5 і 2019 складає 2024 одиниці. Тоді Допомогаач пройшов відстань $1518 = 3 \cdot 506$ одиниць, а Іграшкозбирач – відстань, що складає 506 одиниць. Отже, Допомогаач та Іграшкозбирач при зустрічі знаходилися в точці з координатою $-5 + 1518 = 1513$.

- ③ Нехай x учнів пішли у кіно, y – у зоопарк і z – на футбол. Тоді $x + y + z = 20$ і $75x + 40y + 15z = 800$. Зрозуміло, що $x \leq 10$. Зауважимо, що $75 = 40 + 35$, а $15 = 40 - 25$. Тоді друге рівняння можемо переписати у вигляді

$$(40 + 35)x + 40y + (40 - 25)z = 800.$$

Тоді, розкривши дужки, маємо

$$40x + 40y + 40z + 35x - 25z = 800,$$

звідки випливає

$$40 \cdot 20 + 35x - 25z = 800.$$

Отже,

$$7x = 5z.$$

З цієї рівності випливає, що z ділиться без остачі на 7 , а x – на 5 . Перебором отримуємо, що $x = 5$, $y = 8$ і $z = 7$.

Отже, 5 учнів пішли в кіно, 8 – у зоопарк і 7 – на футбол.

- ④ Ні, не можна.

Розфарбуємо клітинки всього квадрата 5×5 у шаховому порядку в чорний і білий колір, причому вважатимемо, що кутові клітинки є чорними. Таким чином одержимо 13 чорних клітинок і 12 білих.

Зауважимо, що вирізана клітинка є білою. Тому фігура, що залишилась, містить 13 чорних клітинок і 11 білих.

З іншого боку, кожний прямокутник 2×1 або 1×2 складається з однієї чорної клітинки і однієї білої. Тому 12 таких прямокутників мають 12 чорних клітинок і 12 білих. Отже, фігуру, що залишилась, розрізати на 12 прямокутників розміром 2×1 або 1×2 не можна.

7 клас

- ① Нехай трицифрове число A записане з допомогою цифр a , b і c , тобто

$$A = \overline{abc} = 100a + 10b + c.$$

Тоді трицифрове число B , записане тими ж цифрами зворотньому порядку, має такий вигляд

$$B = \overline{cba} = 100c + 10b + a.$$

Тому

$$A - B = 99(a - c).$$

Отже, число $A - B$ ділиться на 7 тоді і тільки тоді, коли число $a - c$ ділиться на 7. Для того, щоб число A було найбільшим, потрібно взяти $a = 9$. Тоді $c = 2$. Залишилось взяти $b = 8$.

Отже, шукане число – це 982.

- ② Якщо $x = 0$, то

$$y^2(y^2 + z^2) = 0$$

і обов'язково $y = 0$, що дає суперечність.

Якщо $y = 0$, то з першого рівняння випливає, що $x = 0$, що також неможливо.

Отже, $z = 0$. Звідси ми отримуємо таку систему

$$\begin{cases} x = y^4 \\ x + y^4 = 162. \end{cases}$$

Зрозуміло, що x не може бути від'ємним. Тому $x > 0$ і $y < 0$. Маємо

$$2y^4 = 162.$$

Отже, $y = -3$. Тоді $x = 81$.

- ③ Занумеруємо дошки зліва направо. Серед перших двох дошок хоча б одна синього кольору. Крім того, серед довільних трьох дошок, які ідуть підряд, обов'язково є хоча б одна синього кольору. Розіб'ємо дошки 3 – 80 на 26 трійок і отримаємо, що в кожній з них обов'язково є хоча б одна дошка синього кольору. Таким чином, синіх дошок є принаймні 27. Отже, жовтих дошок не більше, ніж 53.

Наступний приклад показує спосіб розфарбування, при якому є 53 жовті дошки:

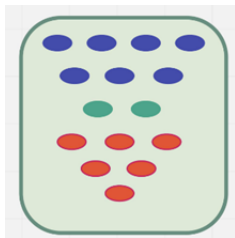
С, Ж, С, Ж, Ж, С, Ж, Ж, С, ... С, Ж, Ж

- ④ Задача 6-4.

2020 – 2021

5 клас

- ① Наприклад, число 71371371. Можливі також інші відповіді.
 ② Синіх – 7, червоних – 6, зелених – 2.



- ③ Периметр квадрата № 1 дорівнює 24 см, тоді сторони квадратів відповідно дорівнюють:

Номер квадрата	Довжина сторони
1	6
2	$6 + 6 = 12$
3	$6 + 12 = 18$
4	$12 + 18 = 30$
5	$18 + 30 = 48$

Тоді площа квадрата №5 дорівнює $48 \times 48 = 2304 \text{ см}^2$.

- ④ Шпуля скаче на 1 см за півсекунди, тому за 1 секунду вона відскочить на 2 см. Сімка „пробіжить” всю відстань за час $240 : 3 = 80$ (секунд), тобто біля печі вона буде через 80 секунд. За цей час Шпуля „пробіжить” $80 \times 2 = 160$ см, тобто їй залишається відстань в $240 - 160 = 80$ см. Час, за який Шпуля „пробіжить” відстань 80 см, і буде шуканим часом очікування Сімкою Шпулі. Таким чином, $80 : 2 = 40$ секунд.

6 клас

- ① Якщо на відрізку AB позначена одна точка C , то відрізків буде три – AC , AB і CB . Якщо на відрізку AB позначені дві точки C і D , то відрізків буде шість – AC , AD , AB , CD , CB і DB . Якщо на відрізку AB позначені три точки C , D і E , то відрізків буде десять – AC , AD , AE , AB , CD , CE , CB , DE , DB і EB .

Отже, відповідь: 3.

- ② Діти розділилися на три групи:

- жодного брата не мають Кирило і Єгор;
- по одному брату мають Аліна, Беата, Данило, Федір і Іринка;
- по два брати мають Олена, Галинка, Михайло, Костя і Богдан.

- ③ Нехай у математичному гуртку займаються n учнів. Позначимо через k найменше натуральне число, яке більше за $0,5n$. Тоді:

для $n = 1$ маємо $k = 1$ (100% від n);

для $n = 2$ маємо $k = 2$ (100%);

для $n = 3$ маємо $k = 2$ (66,7%);

для $n = 4$ маємо $k = 3$ (75%);

для $n = 5$ маємо $k = 3$ (60%);

для $n = 6$ маємо $k = 4$ (66,7%);

для $n = 7$ маємо $k = 4$ (57,1%).

Таким чином, відповідь: 7.

- ④ Якби обидва числа мали по одній цифрі до і після коми, то їхня сума мала би не більше однієї цифри після коми, що не так.

Якби обидва числа мали не менше двох цифр до і після коми, то їхня сума була би більша за 20, що не так.

Отже, одне число має по дві цифри до і після коми (позначимо його через T), а інше – по одній цифрі (позначимо його через D). Оскільки число T починається і закінчується цифрою 1, то його записала Тетянка. Щоб число $D = 11, 11 - T$ було найбільшим, потрібно, щоб число T було найменшим. Оскільки при цьому внутрішні цифри числа T мають бути різні і відмінні від 1, то $T = 10, 21$. Тому $D = 11, 11 - 10, 21 = 0, 9$.

7 клас

- ① Тільки при $n = 2$. Зауважимо, що при $n = 1$ число $n^2 + 3n - 1$ не є повним квадратом, а при $n = 2$ маємо $n^2 + 3n - 1 = 3^2$.

Тепер нехай $n \geq 3$. Тоді

$$(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 < n^2 + 3n - 1 < n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2.$$

Тобто число $n^2 + 3n - 1$ знаходиться між квадратами двох послідовних натуральних чисел. Отже, воно не може бути квадратом натурального числа.

- ② Використовуючи нерівність трикутника для трикутників AOB , BOC і COA , отримаємо

$$OA + OB \geq AB,$$

$$OB + OC \geq BC$$

і

$$OC + OA \geq CA.$$

Додамо ці три нерівності і одержимо

$$2(OA + OB + OC) \geq AB + BC + CA = 6 + 7 + 9 = 22.$$

Звідки

$$OA + OB + OC \geq 11.$$

- ③ Нехай шукане число

$$A = \overline{abc} = 100a + 10b + c.$$

Тоді сума S його цифр дорівнює $a + b + c$. Тепер маємо

$$A - 13S = 100a + 10b + c - 13(a + b + c) = 87a - 3b - 12c = 3(29a - b - 4c) = 0.$$

Отже, залишилось знайти цифри a, b, c такі, що

$$29a - b - 4c = 0,$$

тобто

$$29a = b + 4c.$$

Якщо $a \geq 2$, то

$$29a \geq 58 > 45 = 5 \cdot 9 \geq b + 4c.$$

Тому при таких a розв'язків немає.

Отже, $a = 1$ і ми отримуємо рівняння

$$b + 4c = 29,$$

тобто

$$4c = 29 - b.$$

Підставляючи цифри b такі, число $29 - b$ ділиться на 4, отримуємо $b = 1, c = 7$ або $b = 5, c = 6$ або $b = 9, c = 5$.

Отже, шукане число – це 117, 156, 195.

- ④ Спочатку зауважимо, що сума S всіх чисел таблиці дорівнює

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

Нехай в серединній клітинці записано число x . Крім того, нехай у другому рядку записані числа a, x, b . Оскільки у першому рядку і третьому рядку суми чисел $= 18$, то

$$18 + (a + x + b) + 18 = 45,$$

тобто

$$a + x + b = 9.$$

Аналогічно,

$$c + x + d = 9,$$

де c, x, d – числа другого стовпчика таблиці. Тоді

$$(a + x + b) + (c + x + d) = 18.$$

Тому

$$a + b + c + d + x = 18 - x \leq 18 - 1 = 17.$$

Крім того, оскільки цифра 4 знаходиться в кутку, то

$$a + b + c + d + x \geq 1 + 2 + 3 + 5 + 6 = 17.$$

Отже,

$$18 - x = a + b + c + d + x = 17$$

і $x = 1$.

Залишилось навести приклад такого розташування. Наприклад:

$$9 \quad 2 \quad 7$$

$$5 \quad 1 \quad 3$$

$$4 \quad 6 \quad 8$$

- ⑤ Зазначимо, що $m + n \leq 43$, причому $m + n = 43$ для останнього учасника олімпіади.

Спочатку зауважимо, що умова

$$47m + 50n = 2021$$

не може виконуватись при $m + n \leq 40$, адже тоді

$$47m + 50n \leq 50(m + n) = 50 \cdot 40 = 2000 < 2021.$$

Тепер врахувавши, що $2021 = 43 \cdot 47$, проаналізуємо рівність при $m + n = 41$. Маємо

$$47m + 50n = 47 \cdot 41 + 3n,$$

$$47 \cdot 41 + 3n = 47 \cdot 43$$

і

$$3n = 2 \cdot 43 = 86.$$

Оскільки 86 не ділиться на 3, то у цьому випадку рівність також неможлива.

Тепер проаналізуємо рівність при $m + n = 42$. Маємо

$$47m + 50n = 47 \cdot 42 + 3n,$$

$$47 \cdot 42 + 3n = 47 \cdot 43$$

i

$$3n = 43,$$

що також неможливо.

Отже рівність

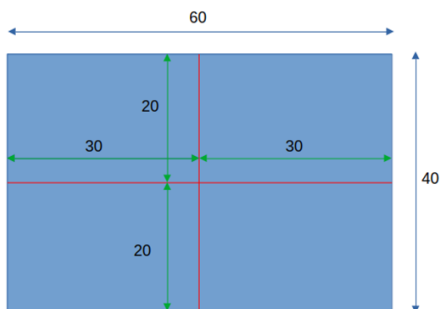
$$47m + 50n = 2021$$

може виконуватись лише, коли $m + n = 43$, тобто правильне розв'язання задачі міг вичарувати тільки останній учасник. Але згідно з умовою він вичарував шоколадку. Таким чином, відповідь: 0.

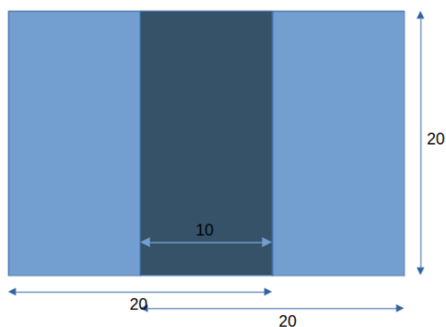
2022 – 2023

5 клас

- ① З малюнку бачимо, що великий пазл у 4 рази більший за маленький, а отже у ньому у 4 рази більше деталей. Таким чином, великий пазл містить $150 \times 4 = 600$ елементів.



- ② З малюнку бачимо, що розміри площі перекриття (темніша частина) це 10 см і 20 см. Оскільки це прямокутник, то його площа $10 \times 20 = 200 \text{ см}^2$.



- ③ Аби дізнатися скільки нулів у кінці такого добутку потрібно знати скільки разів ми можемо поділити його націло на 10. Щоб число ділилось на 10 потрібно щоб воно ділилось на 5 і на 2. Порахуймо кількість чисел, що діляться на п'ять у добутку. Це 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35. Всього 7 чисел, проте 25 можна двічі поділити на 5, тому загалом 8. Двійок у добутку очевидно більше, тому у результаті множення отримаємо число, що закінчується на 8 нулів.
- ④ Від кінця дощу до дзвінка діти зблизились на $500 + 300 = 800$ метрів. Тобто кожен такий проміжок часу діти зменшують відстань між собою на 800 метрів. Порахуємо за скільки таких проміжків вони зустрінуться: $\frac{3200}{800} = 4$. За цей час Наталка пройде $4 \cdot 300 = 1200$ метрів, а Сашко $4 \cdot 500 = 2000$ метрів. Відповідь: 1200 м від будинку Наталки і 2000 м від будинку Сашка.
- ⑤ Усі фрази мають частинку *penda*, з перекладу розуміємо, що це „любити”. Далі будемо аналізувати початки фраз. Перші три фрази мають частину *ku* перед *penda*, а також містять „тебе” в перекладі, як об’єкт любові, тому *ku* – це „тебе”. З 1-ї, 3-ї та 5-ї фраз бачимо, що *ni* на початку означає „Я”. Тому структура фраз наступна:

„суб’єкт любові” „часова частина” „об’єкт любові” *penda*

Складемо таблицю для зручності. Знаючи структуру фраз і деякі слова легко бачити, що переклади наступні.

я-ni	теперішній-na	тебе-ku
він-a	минулий-me	їх-wa
ти-u	майбутній-ta	мене-ni
		його-m

З таблиці легко записати всі фрази для професорки Макгонгел.

а) nitakupenda; б) amewapenda;

в) ninampenda; г) ananipenda.

6 клас

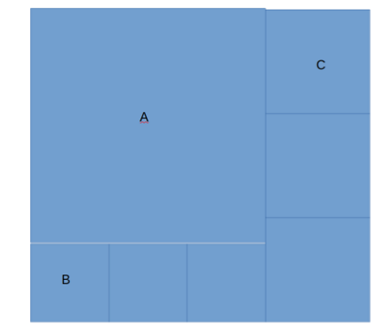
① Задача 5-1.

② Можна, наприклад так:

$$20 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 64 \rightarrow 128 \rightarrow 256 \rightarrow 25.$$

③ Задача 5-3.

④ Позначимо квадрати як показано на малюнку. Сторона квадрата втричі більша за сторону квадрата. Нехай сторона квадрата дорівнює x . Тоді сторона квадрата дорівнює $3x$.



З малюнка бачимо, що сума сторін квадрата і квадрата складає сторону великого прямокутника, яка дорівнює сумі трьох сторін квадрата. Тому $x + 3x = 12$, звідки $x = 3$. Знаючи це, легко порахувати площу:

$$S = 12 \cdot (3 + 4) = 12 \cdot 13 = 156.$$

⑤ Задача 5-5.

7 клас

- ① Для кубика $6 \times 6 \times 6$ потрібно 9 грам фарби. Площа маленького кубика $S_1 = 6 \cdot 2 \cdot 2$, великого $S_2 = 6 \cdot 6 \cdot 6$. Оскільки $\frac{S_2}{S_1} = 9$, то на великий кубик витратять у 9 разів більше фарби.
- ② Нехай x – шукане число. З умови:

$$\frac{3459 - x}{7891 + x} = \frac{1}{4},$$

$$4(3459 - x) = 7891 + x,$$

$$5x = 4 \cdot 3459 - 7891.$$

Отже, $x = 1799$.

- ③ Задача 6-3.
- ④ Задача 5-5.
- ⑤ Візьмемо дві довільні точки поза прямою, та до них точку з прямої, щоб вони не були на одній прямій (очевидно, що така існує). Це наша перша трійка. Лишилось 38 точок на прямій і 19 поза. Далі беремо по дві точки з прямої і одну поза нею. Таким чином, отримуємо розбиття на трійки точок так, щоб жодна трійка не лежала на одній прямій.

2023 – 2024

5 клас

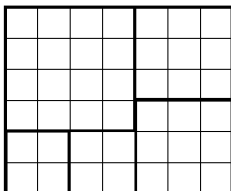
- ① Число ділиться націло на 2 і 5 тільки тоді, коли остання цифра цього числа – це нуль. Тобто, шукане число має вигляд $7 * 10$. Перебором переконаємося, що число 7110 ділиться на 9 (можна також використати ознаку подільності на 9).
- ② На малюнку з умови задачі зображений прямокутник розміром 6×7 клітинок із загальною сумою клітинок 42. Покажемо, що його не можна розрізати менше, ніж на 5 квадратів. Якщо таке розрізання можливе, то число 42 можна подати як суму чотирьох, трьох або двох цілих чисел, які є квадратами. Але можливі тільки варіанти:

$$42 = 25 + 16 + 1,$$

$$42 = 16 + 16 + 9 + 1,$$

жоден з яких не підходить, адже два квадрати 4×4 або квадрат 4×4 і 5×5 не можуть міститися в квадраті 6×7 без накладань.

Приклад розрізання на 5 квадратів наведений на малюнку нижче.



- ③ Вік Ганни – це вік усіх чотирьох дівчат разом без віку Анастасії, Богдани і Вікторії. Вік дівчинки в жовтій шапці – це вік усіх чотирьох дівчат разом без віку дівчини з червоної, дівчини в зеленій та дівчини в синій шапках. За умовою задачі сумарний вік Анастасії, Богдани і Вікторії на 3 більший, ніж сумарний вік дівчат в червоній, зеленій та синій шапках. Отже, дівчинка в жовтій шапці старша за Ганну на 3 роки.
- ④ Можна. Візьмемо стакани №1 і №2 та зробимо в них однакову кількість води. Так само із стаканами №3 і №4, №5 і №6, №7 і №8. Далі, візьмемо стакани №1 і №3 та №2 і №4 і зробимо в них однакову кількість води. Так само із парами №5 і №7 та №6 і №8. Тепер в стаканах №1,2,3,4 порівну води, і в стаканах №5,6,7,8 теж однакова кількість води. Залишається зробити ще 4 переливання з парами стаканів №1 і №5, №2 і №6, №3 і №7, №4 і №8.
- ⑤ Зрозуміло, що кількість пасажирів, які сидять в шестимісних купе, ділиться націло на 6. Загальна кількість пасажирів 102, і це число теж ділиться націло на 6. Отже, кількість пасажирів, які зайняли восьмимісні купе, теж повинна ділитися на 6. А для цього кількість восьмимісних купе повинна ділитися на 3. Тобто, їх може бути 3, 6, 9 або 12. Перевіркою переконуємося, що підходить тільки варіант 6 восьмимісних купе і 9 шестимісних ($6 \cdot 8 + 9 \cdot 6 = 102$). Отже, шестимісних купе було 9.

6 клас

- ① Задача 5-2.
- ② Число повинно бути як мінімум чотирицифрове, оскільки сума цифр найбільшого трицифрового числа складає 27. Далі, перша

цифра числа повинна бути більшою ніж 2, бо інакше сума цифр буде < 30 . Отже, найменше число, що задовольняє ці умови – це число 3999.

Цифри числа дають в добутку $1080 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Цифра 5 повинна бути присутня в записі числа, оскільки в добутку з 2 або 3 вже не є цифрою. Число не може бути менше, ніж чотирицифровим, бо не існує двох цифр, які в добутку дають $1080 : 5 = 216$. Отже, шукаємо найменше чотирицифрове число, яке містить цифру 5, і добуток всіх цифр 1080. Нехай перша цифра числа – це 2. Тоді добуток інших двох цифр (не п'ятірок) $= 108$, що неможливо. Нехай перша цифра числа – це 3. Тоді добуток інших двох цифр (не п'ятірок) $= 72$. Це можливо, коли ці дві цифри – це 8 і 9. Найменше серед чисел, які задовольняє всім цим умовам $B = 3589$. Відповідь: $3999 + 3589 = 7588$.

- ③ Виграє Денис. Проаналізуємо гру. Виграє той з дітей, хто назве число 99. Отже, стратегія кожного з гравців – змусити суперника назвати число від 89 до 98 – адже тоді, додавши до нього потрібне число від 1 до 10, можна назвати 99 і виграти. Як змусити суперника назвати число від 89 до 98 включно? Для цього потрібно на своєму ході назвати 88, а це можливо тільки тоді, коли суперник на попередньому ході називає число від 78 до 87 включно. Змусити суперника назвати число від 78 до 87 можливо тільки тоді, коли гравець називає число 77. Аналізуючи подібним чином цю стратегію, ми дійдемо до моменту, коли стає зрозуміло, що для виграшу потрібно назвати число 11. А це завжди може зробити Денис після довільного першого ходу Оленки.

- ④ Задача 5-5.

- ⑤ Оскільки потрібно знайти найменшу кількість учнів у класі, то почнемо аналізувати випадки, коли найменша кількість дітей не має білих навушників.

Нехай тільки 1 учень не має білих навушників. Тоді на нього припадає більше, ніж 7,2% і менше, ніж 7,6% від загальної кількості учнів. Тобто, загальна кількість учнів в цьому випадку знаходиться між числами $\frac{1}{0,072} > 13$ і $\frac{1}{0,076} < 14$. Такого цілого числа не існує.

Нехай тепер тільки 2 учні не мають білих навушників. Тоді загальна кількість учнів у класі повинна бути цілим числом в межах $\frac{2}{0,072}$ і $\frac{2}{0,076}$, тобто, числом між 26 і 28. Це число 27. Отже,

найменша можлива кількість учнів у класі – 27.

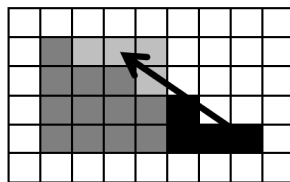
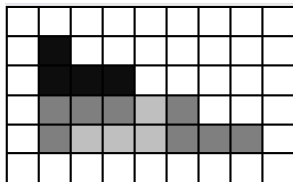
2024 – 2025

4 клас

- ① $2 + 0 + 2 - 4 = 0$ або $2 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 4 = 0$.
- ② Якщо „АНА” – це „БОБ”, то літера Б замінена на А, тоді як літера О замінена на Н. Оскільки це сусідні літери в алфавіті, то можна зробити висновок, що кожна літера при шифруванні замінена сусідньою зліва в алфавіті. Тоді зашифрований текст – це

Банани не ростуть на баобабі. Боб

- ③ Достатньо однієї цифри, бо $2222 - 222 + 22 + 2 = 2024$.
- ④ а) Кожна фігурка має складатися з 4-х клітин, далі залишається просто вибрати ту, що задовольняє умови.
- б) Тут допомагає розв’язання пункту а), якщо одну з фігур перекласти відповідним чином.



Приклади показані на рисунках.

- ⑤ Петрик робить одне склеювання за хвилину, а Даринка – два. Отже вона впорається вдвічі швидше і складе пазл за одну годину.

5 клас

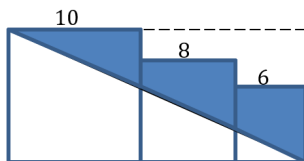
- ① $20 - 2 \cdot 4 = 12$ або $(2 + 0) \cdot (2 + 4) = 12$.

- ② Якщо „ХЛК” – це „ШОН”, то літера Ш замінена на Х, літера О замінена на Л, а літера Н замінена на К. Оскільки між Х та Ш, Л та О, К та Н рівно по дві літери в алфавіті, то можна зробити висновок, що кожна літера при шифруванні зсунута на три ліворуч в алфавіті. Тоді зашифрований текст – це

Шпигун біля ШоШо. Баранчик Шон

- ③ Для першої цифри 2 найменшим набором послідовних цифр будуть цифри 0,1,2 та 3. Далі залишається утворити з них найменше число: 2013 – найменший, наступний за ним: 2031. Для першої цифри 1 найбільшим набором цифр є 1,2,3 та 4, тому найбільшими з цих чисел є 1432, перед ним йде 1423. Отже, шукані роки – це 1423, 1432, 2013 та 2031.
- ④ Див. задачу 4-3.
- ⑤ Добудуємо фігурку до прямокутника (див. рисунок нижче). Він має площу $(10+8+6) \cdot 10 = 240$. Синя фігурка за площею складає половину площі цього прямокутника, від якої ще треба відняти площу двох прямокутників 8×2 та 6×4 . Таким чином остаточно маємо, що шукана площа дорівнює:

$$240 : 2 - 8 \cdot 2 - 6 \cdot 4 = 80.$$



6 клас

- ① $-20 + 2 \cdot 4 = -12$ або $(2 + 0) \cdot (-2 - 4) = -12$.
- ② Якщо „МЙЬ” – це „ОЛЯ”, то при шифруванні літера О замінена на М, літера Л замінена на Й, а літера Я замінена на Ъ. Оскільки між М та О, Й та Л, Ъ та Я рівно одна літера в алфавіті, то можна зробити висновок, що кожна літера при шифруванні зсунута на дві позиції ліворуч в алфавіті. Тоді зашифрований текст – це

Кролики повтікали, ловить зайців. Оля

③ Див. задачу 5-3.

④ Нехай у Петрика a монет, у Василя $-b$ монет. Тоді $a - 2 = b + 2$, а також $a + 1 = 3(b - 1)$. Звідси можемо записати, що

$$a = b + 4 = 3b - 4,$$

тому $2b = 8$, звідки $b = 4$, $a = 8$ і $a + b = 12$. Отже, у Петрика і Василя разом 12 монет.

⑤ Див. задачу 5-5.



ВІДБОРИ НА IV ЕТАП ВСЕУКРАЇНСЬКИХ ОЛІМПІАД З МАТЕМАТИКИ

2015 – 2016

8 клас

- ① Серед трьох цілих чисел два обов'язково мають однакову парність. Нехай x та y – числа одної парності. Тоді вираз

$$x + 7y = (x + y) + 6y$$

є парним числом. Отже, і весь добуток $(x + 7y)(y + 7z)(z + 7x)$ – парне число. Таким чином, рівняння розв'язків у цілих числах немає.

- ② Нехай l – пряма, яка містить найбільшу кількість точок перетину $p_1, \dots, p_n$. Розглянемо випадки:

а) Пряма l не містить жодної діагоналі. Тоді кожна діагональ проходить лише через одну з точок p_i , причому через кожную з них проходить дві діагоналі. Тому загальна кількість діагоналей ($N = 9$) не менша, ніж $2n$. Тоді $n \leq 4$.

б) Пряма l містить деяку діагональ d . Нехай $A_1, \dots, A_m$ і $B_1, \dots, B_k$ – це вершини шестикутника, які знаходяться по різні боки від діагоналі d . Тоді $m + k = 4$ і $n \leq mk$. Звідси випливає, що $n \leq 4$.

Залишилось навести приклад для $n = 4$.

- ③ Розглянемо лише випадок, коли точки D і E лежать зовні трикутника ABC . Тоді вони лежать на серединних перпендикулярах до AC та BC , відповідно, які перетинаються в точці F – середині AB . Трикутник DEF – прямокутний і CF – спільна медіана прямокутних трикутників DEF і ABC . Отже, $DE = AB = 2CF$.
- ④ Виграє Чіп. Нехай обоє гравців роблять такі ходи (якщо це можливо), що після їхнього ходу немає замкнених ламаних. Тоді перед останнім завершальним ходом утвориться сітка відрізків, яка з'єднує кожную точку з кожною єдиним способом. Незавжди з'ясувати, що дана сітка складається з 24-х відрізків. Отже, останнім ходом буде 25-й.

- ⑤ Після рівносільних перетворень отримується рівність

$$\frac{3p}{q+2016} = q - 8,$$

звідки випливає, що число $\frac{3p}{q+2016}$ ціле. Оскільки число $3p$ серед дільників має тільки $1, 3, p$ і $3p$, а число $q + 2016$ додатне, то можливі варіанти тільки $q + 2016 = p$ або $q + 2016 = 3p$. Другий варіант не підходить, оскільки тоді $q - 8 = 1$, що неможливо. Підставляючи в рівняння $q + 2016 = p$, ми одержимо, що $q = 11$, $p = 2027$. Залишається перевірити, що 2027 – просте число.

9 клас

- ① Позначимо ліву частину рівності через $g(x)$. Тоді $g(1) = g(-1)$. З іншого боку, права частина при $x = 1$ дорівнює 5 , а при $x = -1$ дорівнює 1 . Таким чином, дане рівняння розв'язків не має.
- ② Див. задачу 8-2.
- ③ Покажемо, що точка H лежить на висоті AD тоді і тільки тоді, коли $\angle B = \angle C$.

Достатність. Якщо $\angle B = \angle C$, то висновок задачі очевидний.

Необхідність. Нехай $\angle B > \angle C$. Виберемо точку M , яка лежить на AC так, що $\angle ACB = \angle ABM$. Проведемо висоту AD трикутника ABC і позначимо через K точку перетину AD і BM . Тепер F – точка перетину AB і CK . Виберемо точку E , що належить до AC так, що $\angle ABE = \angle ACF$. Тоді точка H , яка є перетином BE і CF , лежить на FK , причому $H \neq K$. Отже, H не належить до AD .

- ④ Виграє Дейл (див. вказівки до задачі 8-4).
- ⑤ Див. задачу 8-5.

10-11 класи

- ① Див. задачу 9-1.
- ② Виграє Чук. Можна вважати, що точки лежать у вершинах правильного 2016-ти кутника. Першим ходом Чук з'єднає діаметрально протилежні точки. Далі, на кожний хід Гека, Чук відповідає симетричним відносно проведеного діаметра.
- ③ Див. задачу 9-3.
- ④ Див. задачу 8-5.

- ⑤ Індукцією по n легко можна довести, що $\sqrt[n]{n+24} < 3$ для всіх $n \geq 4$. Тоді

$$\begin{aligned} & {}^{2016}\sqrt{2037} < {}^{2016}\sqrt{2040} < 3, \\ & {}^{2015}\sqrt{2036 + {}^{2016}\sqrt{2037}} < {}^{2015}\sqrt{2036 + 3} < 3, \\ & \dots \\ & \sqrt[3]{24 + \sqrt[4]{25 + \sqrt[5]{26 + \dots + {}^{2015}\sqrt{2036 + {}^{2016}\sqrt{2037}}}} < \sqrt[3]{24 + 3} = 3. \end{aligned}$$

2016 – 2017

8 клас

- ① Оскільки $25!$ ділиться націло на 11, то застосуємо ознаку подільності на 11 до числа з правої частини рівності. Для цього обчислимо суми цифр, які стоять на парних та непарних місцях, і розглянемо їх різницю d :

$$d = (1+5+1+1+3+3+9+5+8) - (5+1+2+4+3+x+9+4) = 8 - x.$$

Число d повинно ділитися на 11, тому $x = 8$.

- ② Зауважимо, що при $n = 49$ серед вписаних чисел будемо мати число

$$49^2 + 99 = 49^2 + 2 \cdot 49 + 1 = 50^2.$$

Покажемо, що для $n \geq 50$ серед вписаних чисел немає повного квадрата. Запишемо кожне число у вигляді $n^2 + k$, де $1 \leq k \leq 99$. Тоді $1 \leq k < 2n$ і тому

$$n^2 < n^2 + k < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Отже, число $n^2 + k$ міститься між двома послідовними повними квадратами, а значить саме не може бути повним квадратом. Таким чином, найбільше можливе значення $n = 49$.

- ③ Спочатку, зауважимо, що з довільних трьох натуральних чисел можна вибрати два числа, сума яких націло ділиться на 2. Справді, за принципом Діріхле з трьох натуральних чисел

можна вибрати два числа, які мають однакову парність. Тоді сума вибраних чисел націло ділиться на 2.

Тепер будемо послідовно використовувати описану вище властивість. Візьмемо довільні 3 числа з даних 7-ми чисел і виберемо 2 числа, сума яких націло ділиться на 2. Позначимо ці числа a_1 і a_2 . З решти 5-ти чисел візьмемо довільні 3 числа, виберемо з них 2 числа, сума яких націло ділиться на 2 і позначимо їх a_3 і a_4 . Нарешті, з 3-х чисел, що залишились непозначеними, виберемо 2 числа, сума яких націло ділиться на 2 і позначимо їх a_5 і a_6 .

З 3-х натуральних чисел $b_1 = \frac{a_1+a_2}{2}$, $b_2 = \frac{a_3+a_4}{2}$ і $b_3 = \frac{a_5+a_6}{2}$ виберемо 2 числа, сума яких націло ділиться на 2. Без обмеження загальності ми можемо вважати, що це b_1 і b_2 . Тоді сума чисел a_1, a_2, a_3 і a_4 націло ділиться на 4.

- ④ За теоремою про січні маємо, що

$$BE \cdot AE = DE \cdot CE.$$

Тоді

$$BE \cdot (2BE) = DE \cdot (2DE),$$

звідки $BE = DE$, тому $AB = CD$.

- ⑤ Ні, не може. Розфарбуємо клітинки нескінченної дошки в шаховому порядку в чорний та білий колір. Легко бачити, що Кентавр починає і закінчує кожний хід на клітинці того самого кольору. Тому Кентавр не зможе пройти, наприклад, з клітинки чорного кольору на клітинку білого кольору.

9 клас

- ① Див. задачу 8-1.
 ② Запишемо кожне число у вигляді $n^2 + 2k + 1$, де $0 \leq k \leq 1008$. Тоді при $n = k = 1008$ будемо мати число

$$1008^2 + 2017 = 1008^2 + 2 \cdot 1008 + 1 = 1009^2.$$

Покажемо, що для $n > 1008$ серед виписаних чисел немає повного квадрата. Оскільки $0 \leq k \leq 1008 < n$, то

$$n^2 < n^2 + 2k + 1 < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Отже, число $n^2 + 2k + 1$ міститься між двома послідовними повними квадратами, а значить саме не може бути повним квадратом. Таким чином, найбільше можливе значення $n = 1008$.

- ③ Міркуватимемо аналогічно, як при розв'язанні задачі 8.3. При цьому будемо використовувати, що з довільних трьох натуральних чисел можна вибрати два числа, сума яких націло ділиться на 2. Послідовно 7 разів застосовуючи цю властивість, занумеруємо 14 чисел з даних 15-ти у послідовність

$$a_1, a_2, \dots, a_{14}$$

так, що числа

$$b_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}, b_2 = \frac{a_3 + a_4}{2}, \dots, b_7 = \frac{a_{13} + a_{14}}{2}$$

є цілими. Далі, згідно із задачею 8.3, виберемо 4 числа b_i , сума яких націло ділиться на 4. Без обмеження загальності ми можемо вважати, що ці 4 числа – це b_1, b_2, b_3 і b_4 . Тоді сума чисел $a_1, \dots, a_8$ націло ділиться на 8.

- ④ Див. задачу 8-4.
 ⑤ Див. задачу 8-5.

10-11 класи

- ① Оскільки $26!$ ділиться націло на 11, то згідно з ознакою подільності на 11 різниця сум цифр, які стоять на парних та непарних місцях, повинна ділитися на 11. Розглянемо цю різницю:

$$(4+3+x+4+1+2+6+5+3+5+4) - (2+1+6+1+6+6+5+8) = x+2.$$

Отже, $x = 9$.

- ② Зробимо перетворення:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 - 2017ab &= a^3 + b^3 - (a+b)ab = a^3 - a^2 + b^3 - ab^2 = \\ &= a^2(a-b) - b^2(a-b) = (a-b)^2(a+b) = 2017(a-b)^2. \end{aligned}$$

Тоді

$$a^3 + b^3 - 2017ab = 2017(a-b)^2 \geq 0.$$

Рівність досягається при $a = b = \frac{2017}{2}$. Отже, мінімальне значення виразу дорівнює нулю.

- ③ Покажемо, що $n = 2^{k+1} - 1$. Спочатку наведемо приклад, який доводить, що $n \geq 2^{k+1} - 1$.

Зафіксуємо $k \in \mathbb{N}$ і розглянемо наступний набір $2^{k+1} - 2$ натуральних чисел

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{2^k-1} = 1 \quad \text{і} \quad b_1 = b_2 = \dots = a_{2^k-1} = 2^k.$$

Оскільки всі числа b_i націло діляться на 2^k , то для довільного набору з даних чисел остача від ділення суми вибраних чисел на 2^k дорівнює кількості N чисел a_i серед вибраних. Якщо ми вибираємо 2^k чисел, то, з одного боку, $N > 0$ (адже, кількість чисел виду b_i не перевищує $2^k - 1$), а з іншого боку, $N < 2^k$ (адже, кількість чисел виду a_i також не перевищує $2^k - 1$). Отже, сума вибраних чисел не ділиться націло на 2^k .

Тепер для фіксованого $k \in \mathbb{N}$ доведемо, що $n \leq 2^{k+1} - 1$, тобто з довільного набору $2^{k+1} - 1$ натуральних чисел можна вибрати 2^k чисел так, що їх сума націло ділиться на 2^k .

Міркуватимемо, використовуючи індукцію відносно $k \in \mathbb{N}$. Для $k = 1$ дане твердження має наступний вигляд: з довільних 3-х натуральних чисел можна вибрати 2 числа, сума яких націло ділиться на 2. Це легко перевірити, вибираючи 2 числа однакової парності.

Припустимо, що твердження справджується для $2^{k+1} - 1$ натуральних чисел, і доведемо, що з довільних $2^{k+2} - 1$ натуральних чисел можна вибрати 2^{k+1} чисел так, що їх сума націло ділиться на 2^{k+1} . Послідовно $2^{k+1} - 1$ разів застосовуючи наше твердження для 3-х чисел, занумеруємо $2^{k+2} - 2$ числа з даних $2^{k+2} - 1$ чисел у послідовність

$$a_1, a_2, \dots, a_{2^{k+2}-2}$$

так, що числа

$$b_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}, b_2 = \frac{a_3 + a_4}{2}, \dots, b_{2^{k+1}-1} = \frac{a_{2^{k+2}-3} + a_{2^{k+2}-2}}{2}$$

є цілими. Далі, згідно із індуктивним припущенням, виберемо 2^k чисел b_i , сума яких націло ділиться на 2^k . Без обмеження загальності ми можемо вважати, що ці 2^k чисел – це b_1, b_2, b_3 і b_{2^k} . Тоді сума чисел $a_1, \dots, a_{2^{k+1}}$ націло ділиться на 2^{k+1} .

- ④ З рівності площ трикутників ABE та CDE випливає, що хорди AC і BD перетинаються всередині кола. Оскільки $\angle ABE = \angle DCE$ і

$$S_{\triangle ABE} = S_{\triangle DCE} = \frac{1}{2} AB \cdot BE \sin \angle ABE = \frac{1}{2} CD \cdot CE \sin \angle DCE,$$

то

$$AB \cdot BE = CD \cdot CE.$$

Аналогічно з рівності $\angle BAE = \angle CDE$ та рівності площ трикутників випливає, що

$$AB \cdot AE = CD \cdot DE.$$

Нарешті застосуємо рівність кутів $\angle DEC$ і $\angle AEB$, тоді

$$DE \cdot CE = AE \cdot BE.$$

З перших двох рівностей маємо

$$\frac{CE}{BE} = \frac{DE}{AE},$$

а з третьої

$$\frac{BE}{CE} = \frac{DE}{AE},$$

тому $BE = CE$. Звідси випливає, що $\triangle ABE = \triangle DCE$. Тому $\angle CDE = \angle ABE$. Отже, $AD \parallel BC$.

- ⑤ Позначимо $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$. Тоді $x = \sqrt[3]{2}(1 + \sqrt[3]{2})$.

(а) Піднесемо до кубу обидві сторони рівності:

$$x^3 = 2(1 + 3(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) + 2) \Rightarrow x^3 = 2(3 + 3x),$$

звідки

$$x^3 - 6x - 6 = 0.$$

Отже, $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ є коренем многочлена $P(x) = x^3 - 6x - 6$ з цілими коефіцієнтами.

- (б) Міркуючи від супротивного, припустимо, що існують такі цілі числа $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, що

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Тоді $ax^3 + bx^2 + cx = 0$. З пункту (а) задачі випливає рівність $x^3 = 6x + 6$. Тоді

$$a(6x + 6) + b(-\frac{c - bx}{a}) + c = 0.$$

Після перетворень маємо

$$x = \frac{bc - 6a^2}{6a^2 + ac - b^2}.$$

Звідси випливає, що x – раціональне число, як частка двох цілих чисел. Тоді $(x + 1)$ – теж раціональне. Легко бачити, що

$$x + 1 = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}.$$

З останньої рівності одержуємо, що $\sqrt[3]{2}$ – раціональне, суперечність.

2017 – 2018

8 клас

- ① Якщо сума цифр числа n дорівнює 30, то n ділиться націло на 3 і не ділиться на 9. Тоді розклад числа n на прості множники має вигляд

$$n = 3 \cdot p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k},$$

де всі прості числа p_i відмінні від 3. А таке число не може бути повним квадратом, оскільки містить 3 тільки в першому степені.

- ② Зведемо суму $\frac{1}{2n_1-1} + \frac{1}{2n_2-1} + \dots + \frac{1}{2n_{2018}-1}$ до спільного знаменника. Тоді в знаменнику буде непарне число, а в чисельнику парне число (парна кількість непарних чисел). А відношення парного числа до непарного не може дорівнювати одиниці.
- ③ Ми будемо використовувати наступну формулу для обчислення радіуса кола r , вписаного в прямокутний трикутник,

$$r = \frac{a + b - c}{2},$$

де a і b – катети прямокутного трикутника, а c – його гіпотенуза.

Позначимо $AC = b$, $AB = c$, $AH = h$, $BH = u$ і $CH = v$. Оскільки радіуси кіл, вписаних в трикутники ABH і ACH рівні, то

$$\frac{b + v - h}{2} = \frac{c + u - h}{2},$$

тобто $b + v = c + u$. Крім того, за теоремою Піфагора маємо

$$c^2 - u^2 = h^2 = b^2 - v^2.$$

Отже,

$$c = \frac{1}{2} \left(c + u + \frac{c^2 - u^2}{c + u} \right) = \frac{1}{2} \left(b + v + \frac{b^2 - v^2}{b + v} \right) = b.$$

④ Розглянемо перетворення

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + 4c^4 - 2ab - 4c + \frac{3}{2} &= \\ &= (a - b)^2 + (2c - 1)^2 + a^4 - a^2 + b^4 - b^2 + \frac{1}{2} = \\ &= (a - b)^2 + (2c - 1)^2 + \left(a^2 - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(b^2 - \frac{1}{2} \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Отже,

$$a^4 + b^4 + 4c^4 + \frac{3}{2} \geq 2ab + 4c.$$

⑤ Не можна. Згідно з нерівністю про середні

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab,$$

а також

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 + b^2 - ab \geq 2ab - ab = ab.$$

Отже, за один крок добуток усіх чисел, записаних на дошці, не зменшується. Тому за 99 кроків на дошці залишиться число, яке не перевищує 1.

9 клас

① Запишемо рівняння у вигляді

$$x - \{x\} + x^2 - \{x^2\} + x^3 - \{x^3\} = 0,$$

де символ $\{a\}$ означає дробову частину числа $a \in \mathbb{R}$. Тоді

$$x + x^2 + x^3 = \{x\} + \{x^2\} + \{x^3\}.$$

Оскільки $\{a\} \in [0, 1)$ для довільного $a \in \mathbb{R}$, то

$$0 \leq x + x^2 + x^3 < 3.$$

Звідси

$$0 \leq x(1+x+x^2) < 3.$$

Оскільки $1+x+x^2 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$, то $x \geq 0$. Тоді ліва частина вихідного рівняння містить суму трьох невід'ємних цілих чисел, яка дорівнює нулеві. А це можливо тільки у випадку, коли $[x] = [x^2] = [x^3] = 0$. Отже, розв'язком рівняння є довільне число $x \in [0, 1)$.

- ② Зведемо суму $\frac{1}{3n_1-1} + \frac{1}{3n_2-1} + \dots + \frac{1}{3n_{2017}-1}$ до спільного знаменника. Тоді в знаменнику буде число виду $3k-1$ (добуток непарної кількості чисел виду $3k-1$), а в чисельнику буде 2017 чисел виду $3k+1$, тобто, число виду $3k+1$. А відношення таких чисел не може дорівнювати одиниці.
- ③ Ми будемо використовувати наступну формулу для обчислення радіуса кола r , вписаного в трикутник з площею S і напівпериметром p ,

$$r = \frac{S}{p}.$$

Нехай $AC = b$, $AB = c$, $k = \frac{b}{c}$, $AL = l$, $BL = u$, $CL = v$, S_1 – площа трикутника ACL і S_2 – площа трикутника ABL . За властивістю бісектриси трикутника маємо $\frac{v}{u} = k$. Крім того, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{v}{u}$, адже трикутники ACL і ABL мають спільну висоту, проведену з вершини A . Отже, $b = kc$, $v = ku$ і $S_1 = kS_2$. Оскільки радіуси кіл, вписаних в трикутники ABL і ACL рівні, то

$$\frac{S_2}{c+u+l} = \frac{S_1}{b+v+l} = \frac{kS_2}{kc+ku+l} = \frac{S_2}{c+u+\frac{1}{k}l}.$$

Тому $l = \frac{1}{k}l$, тобто $k = 1$.

- ④ Згідно з нерівністю Коші між середнім арифметичним та середнім геометричним

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{bc(a^2+b^2)} + \frac{b^2}{ca(b^2+c^2)} + \frac{c^2}{ab(c^2+a^2)} &\geq \\ &\geq 3 \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc(a^2+b^2)} \cdot \frac{b^2}{ca(b^2+c^2)} \cdot \frac{c^2}{ab(c^2+a^2)}} = \\ &= \frac{9}{3 \sqrt[3]{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}} \geq \\ &\geq \frac{9}{(a^2+b^2) + (b^2+c^2) + (c^2+a^2)} = \frac{9}{2(a^2+b^2+c^2)}. \end{aligned}$$

- ⑤ Див. задачу 8-5.

10 клас

- ① Підставивши у початкову рівність $y = 0$, одержимо, що $f(f(x)) = f(x)$ для кожного $x \in \mathbb{R}$. Таким чином, початкова рівність набуде такого вигляду

$$f(x + y) = f(x) + y.$$

Тепер підставимо в отриману рівність $x = 0$ і одержимо, що

$$f(y) = f(0) + y$$

для кожного $y \in \mathbb{R}$. Зокрема, для $y = f(0)$ маємо

$$f(0) = f(f(0)) = f(0) + f(0).$$

Отже, $f(0) = 0$ і $f(x) = x$ для кожного $x \in \mathbb{R}$. Зрозуміло, що ця функція задовольняє початкову рівність.

- ② Знайдеться ряд, в якому на ранішньому сеансі сиділо не менше 8 дітей (інакше всього дітей було би не більше 49). Оскільки рядів всього 7, то хоча б двоє з цих восьми дітей опиняться в одному ряду на вечірньому сеансі.
- ③ Див. задачу 9-3.
- ④ Див. задачу 9-4.
- ⑤ Не можна. Для цього покажемо, що з кожним кроком сума квадратів чисел, записаних на дошці, зменшується, якщо хоча б одне з чисел є ненульвим. Отже, доведемо, що

$$x^2 + y^2 > \left(\sqrt{\frac{2}{3}}x + \frac{1}{2}y \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}y - \frac{1}{\sqrt{6}}x \right)^2,$$

якщо $x^2 + y^2 > 0$.

Спочатку покажемо, що

$$\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{7}{18}} < \frac{1}{3}.$$

Оскільки $\sqrt{2} > \frac{4}{3}$, то $3 - 2\sqrt{2} < \frac{1}{3}$. Тому

$$\left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{7}{18}} \right)^2 < \left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}} \right)^2 = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3} < \left(\frac{1}{3} \right)^2.$$

Тепер для довільних дійсних чисел x і y таких, що $x^2 + y^2 > 0$, маємо

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{\frac{2}{3}}x + \frac{1}{2}y \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}y - \frac{1}{\sqrt{6}}x \right)^2 = \\ & = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6} \right) x^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{7}{12} \right) y^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{7}{18}} \right) xy \leq \\ & \leq \frac{5}{6}(x^2 + y^2) + \left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{7}{18}} \right) \frac{1}{2}(x^2 + y^2) < \\ & < \frac{5}{6}(x^2 + y^2) + \frac{1}{6}(x^2 + y^2) = x^2 + y^2. \end{aligned}$$

11 клас

- ① Див. задачу 10-1.
 ② Ми будемо використовувати наступну формулу для обчислення радіуса кола r , вписаного в трикутник з площею S і напівпериметром p ,

$$r = \frac{S}{p}.$$

Нехай $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, S – площа трикутника ABC , r_1 – радіус кола, вписаного в трикутник ACM і r_2 – радіус кола, вписаного в трикутник BCH . Оскільки $AM = CM = \frac{c}{2}$ і площа трикутника ACM дорівнює $\frac{1}{2}S$, то

$$r_1 = \frac{S}{b+c}.$$

Трикутник CBH є подібним до трикутника ABC з коефіцієнтом $\frac{a}{c}$. Тому

$$r_2 = \frac{a}{c} \cdot \frac{2S}{a+b+c}.$$

Отже,

$$\frac{S}{b+c} = \frac{a}{c} \cdot \frac{2S}{a+b+c},$$

тобто,

$$c(a+b+c) = 2a(b+c).$$

Тепер маємо

$$\begin{aligned} 0 &= c(a + b + c) - 2a(b + c) = c^2 - 2ab + c(b - a) = \\ &= a^2 + b^2 - 2ab + c(b - a) = (b - a)(b - a + c), \end{aligned}$$

звідки негайно випливає, що $a = b$.

- ③ Розділимо коло точками $A_1, A_2, \dots, A_{150}$ на 150 рівних дуг. Тепер зафарбуємо 101 точку з цих 150 точок у червоний колір так, щоб довжина k -ої дуги з червоними кінцями складала $\frac{n_k}{150}$ частину кола. Розглянемо правильні трикутники з вершинами в точках $A_1, A_2, \dots, A_{150}$. Таких трикутників є рівно 50, тому хоча б в одному з них всі три вершини червоного кольору. Ці три червоні точки й дадуть нам потрібне розбиття.
- ④ Зауважимо, що

$$\begin{aligned} \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} &= (a + b) \cdot \frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + b^2} = (a + b) \left(1 - \frac{ab}{a^2 + b^2} \right) \geq \\ &\geq (a + b) \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{a + b}{2}. \end{aligned}$$

Тоді

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + a^2} \geq \frac{a + b}{2} + \frac{b + c}{2} + \frac{c + a}{2} = a + b + c.$$

- ⑤ Див. задачу 10-5.

2020 – 2021

5 клас

- ① Оскільки число повинно бути найбільшим, то його перша цифра – 9. Тоді сума трьох інших – 11. Всі цифри різні, тому друга цифра – 8. Тоді сума двох останніх цифр – 3. Для того, щоб число було найбільшим, треба взяти третю цифру – 3 і останню – 0. Отже, шукане число – це 9830.
- ② У кружечку записані числа вигляду $(2 + 4)(6 + 8)$, $(2 + 6)(4 + 8)$ або $(2 + 8)(4 + 6)$, тобто, 84, 96 або 100.

- ③ Периметр усієї плитки 40 см. Тоді периметр маленького квадрата 8 см, а його сторона 2 см. Тоді сума двох менших сторін прямокутників – це $10 - 2 = 8$ см. Отже, менша сторона прямокутника дорівнює 4 см. Тоді більша сторона прямокутника дорівнює $10 - 4 = 6$ см.
- ④ Нехай за столом x чесних людей і $10 - x$ брехунів. Тоді праворуч від кожної чесною людини сидить брехун, звідси загальна кількість брехунів не менша, ніж x . Тому загальна кількість чесних людей хоча б 5. Покажемо, що їх рівно 5. Якщо чесних людей менше п'яти, то хоча б два брехуни сидять поруч, а тоді один з них сказав правду, що суперечить умові. Отже, чесних людей рівно 5.

2022 – 2023

9 клас

- ① Якщо всі учасники олімпіади знайомі між собою, то твердження очевидне. Нехай тепер учасники олімпіади A та B – незнайомі між собою. Кожен з них має серед решти 97 учасників олімпіади не менше 49 знайомих. Тому знайдеться 2 спільних знайомих: C та D . За столом розсаджуємо їх наступним чином: $A-C-B-D$.
- ② Зауважимо, що

$$AD \cdot AQ = AC^2 = BD^2 = DA \cdot DP.$$

Тоді $AQ = DP$, звідки випливає, що $AP = QD$.

- ③ З нерівності між середніми маємо

$$\begin{aligned} 2(a^3 + b^3) + a + b + 1 &= a^3 + a^3 + b^3 + b^3 + a + b + 1 \geq \\ &\geq 7\sqrt[7]{a^3 \cdot a^3 \cdot b^3 \cdot b^3 \cdot a \cdot b \cdot 1} = 7ab. \end{aligned}$$

Рівність досягається при $a = b = 1$.

- ④ Рівно 6 дільників мають числа q^5 , де q – просте, та числа $q^2 r$, де q, r – різні прості. Оскільки $p \neq 2$, то p непарне й $(p^2 + 11) : 4$. Тому рівність $p^2 + 11 = q^5$ неможлива. Отже, $q = 2$, тобто $p^2 + 11 = 4r$, де r – просте. Зрозуміло, що $p = 3$ підходить. Нехай $p > 3$, тоді p не ділиться на 3, й $(p^2 + 11) : 3$, але тоді $r = 3$ і $p^2 + 11 = 12$, протиріччя.

Отже, $p = 3$.

10 клас

- ① Див. розв'язання задачі 9-1.
 ② Див. розв'язання задачі 9-2.
 ③ З нерівності між середніми маємо

$$(a + b + c)^3 \geq (3\sqrt[3]{abc})^3 = 27abc.$$

Крім того,

$$\begin{aligned} & 3(a^4 + b^4 + c^4) + a + b + c + 1 = \\ & = a^4 + a^4 + a^4 + b^4 + b^4 + b^4 + c^4 + c^4 + c^4 + a + b + c + 1 \geq \\ & \geq 13 \sqrt[13]{(a^4)^3 \cdot (b^4)^3 \cdot (c^4)^3 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot 1} = 13abc. \end{aligned}$$

Тоді

$$(a + b + c)^3 + 3(a^4 + b^4 + c^4) + a + b + c + 1 \geq 27abc + 13abc = 40abc.$$

Рівність досягається при $a = b = c = 1$.

- ④ Див. розв'язання задачі 9-4.



ОЛІМПІАДА ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ

6 клас

- А) Наприклад, $N = 550$.
- Б) Зрозуміло, що остання цифра числа N повинна бути нулем, тому N не може бути двоцифровим. Для того, щоб бути найменшим, трицифрове число N повинно починатися з одиниці. Отже, $N = 190$.
- В) Наприклад, $N = 55 \dots 5500$, де кількість п'ятірок в записі числа N дорівнює 20.
- Г) Найбільша сума цифр двоцифрового числа – це 18, тому число N повинно бути щонайменше трицифровим. Якщо число N трицифрове, то з попередніх міркувань випливає, що остання цифра не може бути нулем. Отже, остання цифра числа N – це 5. Але тоді сума перших двох цифр повинна бути рівною 20, що неможливо. Перейдемо до розгляду випадку, коли число N має чотири цифри. Знову, з попередніх міркувань випливає, що остання цифра числа N повинна дорівнювати 5. Залишається знайти найменше трицифрове число, сума цифр якого буде 20. Це число не може починатися з одиниці, бо тоді сума двох інших цифр – це 19, що неможливо. Отже, число починається з двійки, а дві інші цифри – 99.

Відповідь: $N = 2995$.

7 клас

- А) Запишемо рівняння у вигляді $11x = 7y$. Оскільки 11 і 7 не мають спільних дільників, то 7 повинно бути дільником числа x , а 11 – дільником числа y . Отже, підходять, наприклад, пари (7, 11), (14, 22) і (21, 33).
- Б) Запишемо рівняння у вигляді $5x = 8y$. Оскільки 5 і 8 не мають спільних дільників, то 5 повинно бути дільником числа y . Тобто, y можна записати у вигляді $y = 5n$, де $n = 1, 2, \dots$. Тоді $5x = 40n$, звідки $x = 8n$. **Відповідь:** $(8n, 5n)$, $n = 1, 2, \dots$
- В) Зробимо перетворення

$$4x - 3y = 4 - 3$$

$$4x - 4 = 3y - 3$$

$$4(x - 1) = 3(y - 1).$$

Оскільки 4 і 3 не мають спільних дільників, то $x - 1$ має бути числом, кратним 3. Тобто, $x - 1 = 3n$, звідки $x = 3n + 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Тоді $y = 4n + 1$. **Відповідь:** $(3n + 1, 4n + 1)$, де $n = 0, 1, 2, \dots$.

Г) Зробимо перетворення

$$15x^2 + 8y^2 = 22xy + 1$$

$$15x^2 - 22xy + 8y^2 = 1$$

$$15x^2 - 10xy - 12xy + 8y^2 = 1$$

$$5x(3x - 2y) - 4y(3x - 2y) = 1$$

$$(5x - 4y)(3x - 2y) = 1.$$

Добуток двох цілих чисел рівний 1, якщо ці числа рівні по 1 або по -1 . Отже,

$$5x - 4y = 1 \quad \text{і} \quad 3x - 2y = 1$$

або

$$5x - 4y = -1 \quad \text{і} \quad 3x - 2y = -1$$

І в першому, і в другому випадку маємо, що

$$5x - 4y = 3x - 2y$$

$$2x = 2y$$

$$x = y$$

Підставляючи останню рівність в перше рівняння першого випадку, ми отримаємо, що $x = 1$, $y = 1$, а підставляючи $x = y$ в перше рівняння другого випадку, отримуємо, що $x = y = -1$. За умовою задачі числа натуральні, отже, **відповідь:** $(x, y) = (1, 1)$.

8 клас

А) **Так.** $200 = 196 + 4 = 14^2 + 2^2$.

Б) **Ні.** Припустимо, що $2002 = x^2 + y^2 = (2a)^2 + (2b)^2$. Тоді $2002 = 4(a^2 + b^2)$, що неможливо, оскільки права частина рівності кратна 4, а ліва — ні.

В) **Так.** Розглянемо перетворення

$$2^{2001} = 2 \cdot 2^{2000} = 2^{2000} + 2^{2000} = (2^{1000})^2 + (2^{1000})^2.$$

Г) **Ні.** Припустимо, що $200012 = x^2 + y^2 = 4(a^2 + b^2)$. Поділимо рівність на 4, тоді

$$50003 = a^2 + b^2.$$

Звідси випливає, що числа a та b повинні бути різної парності. Нехай a — парне, а b — непарне. Тоді $a = 2n$ і $b = 2m + 1$ для деяких натуральних чисел n і m . Звідси a^2 кратне 4, а $b^2 = 4m^2 + 4m + 1$ дає при діленні на 4 остачу 1. Отже, $a^2 + b^2$ дає остачу 1 при діленні на 4, а 50003 дає остачу 3 при діленні на 4. Таким чином, рівність неможлива.

9 клас

А) **Так.** Наприклад, $y = x^2 + x - 12$.

Б) **Так.** Наприклад $y = x^2 - 3$.

В) **Так.** За формулою коренів квадратного тричлена,

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Нехай $a = 1$, а $b = 2k$. Тоді

$$2 + \sqrt{3} = -k + \sqrt{k^2 - c}.$$

Легко бачити, що остання рівність вірна при $k = -2$ і $c = 1$. Отже, шуканий квадратний тричлен має вигляд $y = x^2 - 4x + 1$.

Г) **Ні.** Припустимо, що такий тричлен існує. Тоді

$$a(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + b(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + c = 0.$$

Домножимо останню рівність на $(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ і врахуємо, що $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 1$. Отримаємо:

$$\begin{aligned} a(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + b + c(\sqrt{3} - \sqrt{2}) &= 0, \\ \sqrt{3}(a + c) + \sqrt{2}(a - c) &= -b. \end{aligned}$$

Якщо $a + c = 0$, то $\sqrt{2} = -\frac{b}{2a}$ – раціональне число, що неможливо.

Поділимо останню рівність на $a + c \neq 0$. Тоді

$$\sqrt{2} \frac{a - c}{a + c} = -\frac{b}{a + c} - \sqrt{3}.$$

Піднесемо обидві частини до квадрату. Тоді зліва буде раціональне число, позначимо його r , а в правій частині буде число вигляду $x - y \cdot \sqrt{3}$, де числа x та y раціональні. Отже,

$$\begin{aligned} r &= x - y\sqrt{3}, \\ \sqrt{3} &= \frac{x - r}{y}. \end{aligned}$$

Оскільки число $\frac{x-r}{y}$ раціональне, а $\sqrt{3}$ – ні, то ми отримуємо суперечність.

10 клас

А) **Так.**

$N = 3$. Нехай група складається з людей A, B, C . За умовою задачі серед них максимум двоє знайомих. Нехай це A і B . Тоді група 1 = $\{A, C\}$, група 2 = $\{B\}$.

$N = 4$. Нехай група складається з людей A, B, C, D . Нехай найбільше знайомих має A . Помістимо A в першу групу, а всіх його знайомих в другу. Тоді за умовою задачі в другій групі немає знайомих між собою, бо всі вони вже знайомі з A .

Б) **Ні.** Нехай група складається з людей A, B, C, D, E , причому вони знайомі наступним чином: $E \leftrightarrow A \leftrightarrow B \leftrightarrow C \leftrightarrow D \leftrightarrow E \leftrightarrow A$. Тоді з міркувань парності, цих людей не можна поділити на дві групи, які задовольняють умову задачі.

В) **Так.** В цьому і наступному пункті вважатимемо, що кожна людина має хоча б одного знайомого, інакше цих людей можна помістити в будь-яку групу довільним чином.

Нехай A – деяка людина з групи серед тих, хто має найбільшу кількість знайомих k . Якщо $k = 1$, то розіб'ємо людей на дві групи, помістивши кожну пару знайомих в різні групи.

Нехай $k \geq 2$. Помістимо людину A в групу 1, а всіх її знайомих – в групу 2 (серед них немає знайомих між собою, адже всі вони

знайомі з A). З групи нерозподілених людей виберемо довільним чином людину B і помістимо її в групу 1 (бо вона незнайома з A), а всіх її знайомих – в групу 2. Доведемо, що тоді в групі 2 знову немає знайомих між собою людей. Ясно, що за умовою задачі знайомі людини B не знайомі між собою. Припустимо, що у деякого знайомого людини B (назвемо його B') є знайомий серед знайомих людини A (назвемо його A'). Розглянемо п'ятірку людей: A, A', A'', B, B' , де A'' – ще один знайомий A , відмінний від A' . Тоді A', A'', B повинні мати спільного знайомого серед цієї п'ятірки, що неможливо.

Отже, міркуючи за цим алгоритмом, зрештою всі люди будуть поділені на 2 групи, в яких немає попарно знайомих.

- Г) **Так.** Вважатимемо, що $k \geq 2$ і, як в попередньому пункті, помістимо людину A в групу 1, а всіх її знайомих – в групу 2. З групи нерозподілених людей виберемо людину B так, що вона знайома з деяким знайомим A'' людини A (якщо таких немає, то виберемо B довільним чином) і помістимо її в групу 1 (бо вона незнайома з A), а всіх її знайомих – в групу 2. Припустимо, що у деякого знайомого людини B (назвемо його B') є знайомий серед знайомих людини A (назвемо його A'). Розглянемо п'ятірку людей: A, A', A'', B, B' (зауважимо, що $A' \neq A''$, адже інакше трійка знайомих B, B', A'' суперечила б умові задачі). Знайомства в цій 5-ці виглядають так:

$$A'' \leftrightarrow A \leftrightarrow A' \leftrightarrow B' \leftrightarrow B \leftrightarrow A''$$

Нескладним перебором можна показати, що жодна трійка серед цих 5-ти людей не має спільного знайомого за межами 5-ки, адже це суперечить умові вихідної задачі.



ЛІТЕРАТУРА

1. Апостолова Г.В., Бакал О.П. Логічними стежинками математики: 5-9 кл. – К.: Генеза, 2017. – 304 с.
2. Баран О.І., Васильєва Л.Я. Задачі для олімпіад, конкурсів, змагань. 6-11 класи. – Х.: Основа, 2020. – 239 с.
3. Барвінок Р.Л., Козлова О.М. Готуємося до математичних олімпіад та конкурсів разом. – Черкаси: ЧОШОПП, 2013. – 27 с.
4. Басанько А.М., Романенко А.О. За лаштунками підручника з математики. – К.: Генеза, 2018. – 160 с.
5. Белова Л.П., Корнієнко М.М., Полякова Л.Ю. 101 логічна задача. – Х.: Ранок, 2014. – 64 с.
6. Вороний О.М. Готуємось до олімпіад з математики. – Х.: Основа, 2008. – 255 с.
7. В.А.Вишенський, О.Г.Ганюшкін та ін. Українські математичні олімпіади. Довідник. – К.: Вища школа, 1993. – 415с.
8. В.А.Вишенський, М.В.Карташов та ін. Київські математичні олімпіади 1984–1993 рр. Збірник задач. – К.: Либідь, 1993. – 144с.
9. Гальперіна А.Р., Чистякова Н.Б. Математика. Елементи комбінаторики, початки теорії ймовіронстей, елементи статистики. – Х.: Ранок, 2009. – 112 с.
10. Кадубовський О.А., Беседін Б.Б. Олімпіадні задачі: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, Слов'янськ : вид. центр «Маторін», 2020, 88 с.
11. Київські міські математичні олімпіади 2003–2011 рр. (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2011. – 192 с.
12. Ключко І.Я. Нестандартна математика. Тестові завдання. 4-6 класи: посібник для підготовки до математичних турнірів. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2010. – 104 с.
13. Кравчук Р.В. Задачі математичних олімпіад. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2019. – 112 с.
14. Математичні олімпіадні змагання школярів. 2006–2007. Анікушин А.В., Арман А.Р. та ін. – К.: Літера, 2008 – 224с.
15. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2006–2007. Анікушин А.В., Арман А.Р. та ін – К.: Літера, 2008 – 135с.
16. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2007–2008 та 2008–2009 рр. (за ред. Б. В. Рубльова). – Львів: Каменяр, 2010. –549 с.

17. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2013–2014 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2015. – 465 с.
18. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2014–2015 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2016. – 464 с.
19. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2015–2016 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2017. – 464 с.
20. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2016–2017 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2018. – 464 с.
21. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2017–2018 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2019. – 464 с.
22. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2018–2019 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2020. – 464 с.
23. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2019–2020 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2021. – 496 с.
24. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2020–2021 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2022. – 432 с.
25. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2021–2022 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2023. – 384 с.
26. Математичні олімпіадні змагання школярів України: 2022–2023 (за ред. Б. В. Рубльова). – Харків: Гімназія, 2024. – 384 с.
27. Мерзляк А., Якір М., Басанько А. Математичні гуртки для тих, кому 10+. – Харків: Гімназія, 2021. – 264 с.
28. Мітельман І.М. Розфарбуємо клітчасту дошку. – Л.: Каменяр, 2001. – 48 с.
29. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. – 398 с.
30. Федак І.В. Методи розв'язування олімпіадних завдань з математики і не тільки їх. – Чернівці: Зелена Буковина, 2002. – 340 с.
31. Федак І.В. Готуємося до олімпіади з математики. – Кам'янець-Подільський: Абетка, 2006. – 420 с.
32. Федак І.В. Розв'язування задач підвищеної складності з математики. Спеціальний курс. – Івано-Франківськ, 2010. – 100 с.
33. Федак І.В. Цілі числа. Комбінації. Принцип Діріхле. Ігри. – Тернопіль, 1997. – 60 с.
34. Ясінський В. А. [та ін.] Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад. Теорія чисел. – Вінниця: ТОВ «Нілан-ЛТД», 2018. – 336 с.

Навчальне видання

Т.І. Звоздецький, О.О. Карлова, В.В. Михайлюк, Е.Й. Туркевич

**МАТЕМАТИЧНІ ОЛІМПІАДИ БУКОВИНИ
2015-2025**

Відповідальний за випуск **Михайлюк В.В.**

Літературний редактор **Лукул О.В.**

Дизайн обкладинки **Карлова О.О.**

Електронне видання

Підписано до друку 30.06.2025

Умов.-друк. арк. 9,9. Обл.-вид. арк. 10,6.

Зам. Н-053.

Видавництво Чернівецького національного університету.

58002, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2.

e-mail: ruta@chnu.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 891 від 08.04.2002.

