

Іван БЕШЛЕУ

Мірела БЕШЛЕУ

Яна ДІМНИЧ

Віра СІКОРА

**ЗАСТОСУВАННЯ
ПРОГРАМНО-ПЕДАГОГІЧНИХ ЗАСОБІВ
НА УРОКАХ ГЕОМЕТРІЇ
В СТАРШІЙ ШКОЛІ**

Навчально-методичний посібник



Чернівці, 2026

Іван БЕШЛЕУ

Мірела БЕШЛЕУ

Яна ДІМНИЧ

Віра СІКОРА

***ЗАСТОСУВАННЯ
ПРОГРАМНО-ПЕДАГОГІЧНИХ ЗАСОБІВ
НА УРОКАХ ГЕОМЕТРІЇ
В СТАРШІЙ ШКОЛІ***

Навчально-методичний посібник

Чернівці, 2026

УДК 373.5.091.322.016

З 514

Друкується за ухвалою:

Кафедри алгебри та інформатики
(протокол № 9 від 18 лютого 2026 року)

Методичної ради факультету математики та інформатики
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича
(протокол №7 від 25 лютого 2026)

Укладачі: **БЕШЛЕУ Іван Леонович**, вчитель інформатики Новоселицького ліцею №2 Новоселицької міської ради Чернівецького району Чернівецької області, спеціаліст вищої категорії, старший вчитель;

БЕШЛЕУ Мірела Георгіївна, вчитель математики Новоселицького ліцею №2 Новоселицької міської ради Чернівецького району Чернівецької області, спеціаліст вищої категорії, старший вчитель;

ДІМНИЧ Яна Юріївна, вчитель математики Чернівецького ліцею №16 ім. Ю. Федьковича Чернівецької міської ради, спеціаліст;

СІКОРА Віра Степанівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, вчитель вищої категорії.

З 514

Застосування програмно-педагогічних засобів на уроках геометрії в старшій школі: Навчально-методичний посібник / І.Л. Бешлеу, М.Г. Бешлеу, Я.Ю. Дімнич, В.С.Сікора.– Чернівці: Технодрук, 2026. — 66 с.

У навчально-методичному посібнику розглянуто ключові аспекти, пов'язані з впровадженням сучасних програмно-педагогічних засобів у викладання геометрії старшої школи: проаналізовано ефективність застосування новітніх технологій для підвищення зацікавленості учнів та спрощення процесу навчання; зацентровано увагу на значенні задач на побудову в розвитку просторового мислення та критичного аналізу; розглянуто можливості адаптації сучасних методик до потреб учнів, враховуючи їхній рівень підготовки та індивідуальні особливості.

Розробка спрямована допомогти поглибити знання про програмно-педагогічні засоби та їх можливості застосування в стереометрії.

Для вчителів математики та інформатики, учнів старших класів ЗЗСО, студентів 1-2 курсів коледжів, здобувачів вищої освіти спеціальностей «Середня освіта (Математика)», «Середня освіта (Інформатика)», «Математика» та всіх, хто цікавиться цією тематикою.

© Бешлеу І.Л., 2026
© Бешлеу М.Г., 2026
© Дімнич Я.Ю., 2026
© Сікора В.С., 2026

ПЕРЕДМОВА

У сучасному світі технології відіграють вирішальну роль в освіті, змінюючи традиційні підходи до навчання. Використання програмно-педагогічних засобів (ППЗ) стає незамінним інструментом у викладанні математики, особливо геометрії, яка потребує візуалізації та інтерактивних методів. ППЗ забезпечують не лише покращену наочність, а й можливість індивідуалізованого підходу до кожного учня, що значно підвищує ефективність навчання.

Зростаюча потреба у високоякісній математичній освіті вимагає від держави, суспільства, вчителів та викладачів математики рішучих кроків, що враховують реалії сучасного світу, здатність швидко підлаштовуватися і знаходити раціональні способи вирішення проблем. Оскільки більша частина молоді належить до так званого «цифрового» покоління [1], зростає потреба у хороших спеціалістах, котрі зможуть зацікавити та спростити процес навчання.

Впровадження інформаційних технологій в освіту України є ключовим етапом у модернізації навчального процесу, який вимагає впровадження інноваційних методичних підходів для викладання, особливо предметів старшої школи. Це передбачає не лише інтеграцію сучасних технологій, таких як електронні підручники, онлайн-ресурси та інтерактивні платформи, але й активне використання проектного навчання, яке сприяє розвитку критичного мислення та практичних навичок учнів.

У даному посібнику автори розглянули окремі ключові аспекти, пов'язані з впровадженням програмно-педагогічних засобів у викладанні геометрії: проаналізували ефективність застосування новітніх технологій для підвищення зацікавленості учнів та спрощення процесу навчання; звернули увагу на значенні задач на побудову для розвитку просторового мислення школярів та критичного аналізу; розглянули як саме сучасні методики викладання можуть адаптуватися до потреб учнів, враховуючи їхній рівень підготовки та індивідуальні особливості; описали яким чином інтеграція інформаційних технологій може покращити навчальний процес в Україні та які інноваційні підходи є найбільш ефективними в навчанні математики.

Методичний посібник спрямований допомогти поглибити знання про програмно-педагогічні засоби та їх можливості застосування в стереометрії.

Розділ 1. Програмно-педагогічні засоби у викладанні геометрії: концепції та еволюція

1.1. Поняття програмно-педагогічних засобів та їх роль у навчанні геометрії

Одним із ключових завдань для підвищення якості та ефективності уроків є активізація навчальної діяльності. Українська освіта переживає активну цифрову трансформацію, де інформаційні технології стають невід'ємною частиною навчального процесу. Важливим чинником її реалізації є не лише забезпечення закладів комп'ютерною технікою, але й впровадження інтерактивних платформ, електронних підручників та якісних програмно педагогічних засобів. Вони в свою чергу активізують в учнів зацікавленість до навчального процесу та розвивають пам'ять, увагу, мислення, логіку та інше.

Педагогічні програмні засоби (ППЗ) — це сучасні навчальні інструменти, що поєднують комп'ютерні технології та мультимедійні елементи для полегшення сприйняття навчального матеріалу учнями [6]. Вони включають інтерактивні компоненти, такі як ігри, відео, аудіо та анімації, а також навчальні та контролюючі програми, що допомагають учням самостійно знаходити інформацію, опрацьовувати зразки розв'язання задач та перевіряти свої знання. ППЗ створені для підтримки навчального процесу під керівництвом вчителя відповідно до навчальних програм.

Розглянемо кілька переваг ППЗ у порівнянні з традиційними підручниками:

- ППЗ легше сприймаються учнями і сприяють активізації їхнього самостійного мислення.
- На відміну від підручників, ППЗ об'єднують теоретичні й практичні компоненти навчання. Вони надають можливості для інтерактивного навчання, включаючи віртуальні екскурсії, системи зворотного зв'язку, можливості для групової роботи, а також аналіз результатів навчання для покращення методик викладання.
- Використовуючи різноманітні тести, тренажери, завдання, опитування,

можна об'єктивно визначати рівень навчальних досягнень учнів.

- Ілюстрації, графіки, 3-D моделювання, фото та відео, стають невід'ємною частиною навчального процесу, адже вони сприяють кращому розумінню складних концепцій і роблять уроки більш інтерактивними та захоплюючими.

Застосування програмно-педагогічних засобів (ППЗ) у навчанні геометрії в 10-11 класах відіграє важливу роль, адже ці технології дозволяють не лише легше сприймати матеріал, але й значно полегшують засвоєння складних тем, які часто є абстрактними і потребують візуалізації. Серед розділів, з якими працюють учні старшої школи на уроках математики, особливо важливими є многогранники, де необхідно зрозуміти просторові форми, їхні властивості, а також їхні перетини та взаємодії.

ППЗ надають учням можливість **створювати тривимірні моделі геометричних об'єктів**, таких як куби, піраміди та циліндри, які можна обертати, змінювати масштаби та спостерігати за ними з різних ракурсів. Це значно полегшує розуміння тем, пов'язаних з перетинами многогранників, площинами симетрії та обчисленням площ поверхонь. Вивчення тіл обертання, таких як циліндри та конуси, також виграє від використання ППЗ, оскільки учні можуть бачити в реальному часі як площини та об'єми змінюються під час обертання.

Окремо варто виділити складний розділ — **перетини площин і фігур**. ППЗ допомагають візуалізувати як саме площини перетинають многогранники або тіла обертання, що полегшує побудову перерізів і розуміння того, як змінюються проекції в залежності від кута перетину. Це особливо корисно під час вирішення задач на побудову перетинів і обчислення площ цих перетинів.

Крім того, ППЗ дозволяють **інтерактивно працювати з формулами для обчислення площ і об'ємів геометричних фігур**. Програми можуть автоматично генерувати типові задачі та покроково пояснювати, як застосовуються ті чи інші формули, що забезпечує краще засвоєння алгоритмів розв'язання. Учні можуть миттєво перевіряти свої відповіді, що дає можливість гнучкіше підхо-

дити до засвоєння матеріалу.

Геометричні трансформації у просторі також стають простішими для розуміння завдяки ППЗ. Учні можуть спостерігати, як фігури змінюються під час різних трансформацій — обертання, паралельного переносу, симетрії, що сприяє глибшому розумінню їх властивостей і взаємозв'язків.

Практичне застосування ППЗ у навчанні геометрії надає учням можливість працювати з **віртуальними лабораторіями**, де вони можуть спостерігати за змінами фігур у реальному часі під впливом різних факторів. Це особливо корисно при вивченні тем, пов'язаних з перетвореннями фігур у просторі, дослідженням симетрії, обертанням або перетином фігур площинами. Такі інтерактивні дії активізують пізнавальну діяльність учнів і роблять уроки більш динамічними та захоплюючими.

1.2. Етапи розвитку ППЗ для навчання геометрії

В епоху розвитку інформаційних технологій засоби для викладання геометрії пройшли кілька значних етапів, від простих інструментів, таких як дошки й геометричні фігурки, до сучасних технологій, які включають комп'ютерні програми та віртуальні лабораторії. Кожен етап приносив нові можливості для вчителів і учнів, вдосконалюючи способи вивчення геометричних об'єктів й концепції. Розглянемо ці етапи детальніше.

1. Початковий етап: дошки та ручні засоби.

До появи цифрових технологій викладання геометрії базувалося на класичних методах і простих інструментах. Для демонстрації та вивчення фігур використовувалися такі засоби, як:

- шкільні дошки: на яких креслили трикутники, квадрати, круги, а також складніші фігури для вивчення властивостей геометричних об'єктів;
- набори геометричних фігур: фігурки, зроблені з картону, дерева або пластику, що наочно демонстрували властивості плоских та об'ємних фігур (наприклад, трикутники, паралелограми, куби, кулі);
- крейда та лінійки: використовувані для побудови фігур на дошці або папері з подальшими розрахунками.

Характеризуючи даний етап зазначимо, що основна увага приділяється візуальному представленню об'єктів. Навчання вимагало від учнів великої уяви для візуалізації складніших тривимірних об'єктів. Методи зображення фігур були обмежені, бо демонструвалися в одному конкретному положенні.

2. Використання друкованих матеріалів.

З часом у процес навчання були включені друковані матеріали, які надали можливість учням працювати з геометричними задачами поза межами класу. До них можна віднести підручники, зошити з графічними побудовами, альбоми, які включали розділи з геометрії.

Завдяки цьому етапу з'явилась можливість самостійного опрацювання завдань учнями та покращилась наочність через схеми та креслення в підручниках. Однак ще відсутня динамічність — фігури були статичними, що обмежувало розуміння складніших просторових взаємозв'язків.

3. Механічні інструменти (креслярські інструменти).

Механічні інструменти, такі як циркулі, транспортири та лінійки, значно покращили точність побудови фігур. Вони дозволили учням виконувати більш складні креслення, зокрема розв'язувати задачі на побудову, працювати з колами та перетинами. Не варто забувати, що саме на цьому етапі здійснюється міжпредметний зв'язок між трудовим навчанням та геометрією.

Діти мали змогу самостійно опрацьовувати деякі завдання, будуючи при цьому чіткі фігури. Проте застосовування інструментів, не давало можливості для створення тривимірних об'єктів і динамічного моделювання.

4. Етап комп'ютерних технологій (кінець 20-го століття).

З появою перших комп'ютерів і програм для навчання геометрії почався новий етап її розвитку. Основними інструментами на цьому етапі стали:

- програми для геометричних побудов: такі як The Geometer's Sketchpad або GeoGebra, які дозволяли створювати динамічні моделі фігур, вивчати їхні властивості, змінювати параметри фігур у реальному часі [7];
- програми для тривимірного моделювання: ці інструменти надавали можливість створювати тривимірні об'єкти, обертати їх, спостерігати за

взаємодією різних площин та форм.

Динамічне представлення геометричних фігур, можливість вивчення тривимірної геометрії (стереометрії), використання інтерактивних інструментів стали основними характеристиками даного етапу.

5. Етап інтерактивних та мультимедійних ППЗ (початок 21-го століття).

З розвитком мультимедійних технологій з'явилися програми, які поєднували візуальні, аудіо та інтерактивні елементи для навчання геометрії. Такі програми дозволяли учням не тільки спостерігати за фігурами, але й активно взаємодіяти з ними через різноманітні задачі, ігри та симуляції [8].

Мультимедійність поєднувала тексти, відео, аудіо та анімації. З'явилась можливість навчатися в інтерактивному середовищі, виконуючи завдання в режимі реального часу та підтримка дистанційного навчання через Інтернет.

6. Сучасний етап: інтерактивні 3D та VR технології

Сьогодні в навчальному процесі активно використовуються такі інноваційні технології, як тривимірне моделювання та віртуальна реальність (VR). Ці інструменти дозволяють учням буквально "входити" в тривимірний простір, маніпулювати геометричними об'єктами та експериментувати з ними.

Діти мають можливість активного самостійного навчання та дослідження складних геометричних понять, користуючись при цьому доповненою реальністю (AR) для проектування геометричних фігур у реальному просторі.

Кожен етап розвитку збільшував доступність матеріалу, покращував його візуалізацію та підвищував ефективність навчання.

1.3. Інтерактивні та мультимедійні засоби в сучасному освітньому процесі

Впровадження мультимедійних та інтерактивних засобів в навчальний процес стали невід'ємною частиною еволюції ППЗ. Вони не лише спрощують роботу в освітньому середовищі, а й забезпечують більш ефективне засвоєння матеріалу завдяки інтерактивній взаємодії з інформацією. Зараз, як ніколи, зросла необхідність у їхньому використанні [9].

Система освіти в Україні доволі швидко адаптувалась до нових викликів часу. Школи були змушені перейти на дистанційну форму навчання, в основі

якої є безпосередня взаємодія із цими засобами. Діти отримали можливість навчатись у будь-якій точці світу, отримуючи доступ до матеріалів через Інтернет, користуючись сучасними платформами, електронними підручниками.

Відсутність фізичних обмежень дозволила їм самостійно керувати своїм часом. Окрім того, онлайн навчання надало можливість для роботи з такими інструментами як відеоуроки, онлайн-тести, інтерактивні вправи та віртуальні симуляції. Учні отримали змогу миттєво перевіряти свої знання, проходячи автоматизоване тестування, що допомагає закріплювати вивчений матеріал у реальному часі. Використання цих інструментів також сприяє розвитку навичок самостійного навчання, відповідальності за власний прогрес, а також підвищенню мотивації та зворотному зв'язку від вчителів через сучасні платформи [10].

Одним із найефективніших інструментів при цьому стали онлайн-дошки. Працюючи в реальному часі, учні та вчителі можуть розв'язувати різноманітні завдання, обговорювати ідеї, ділитись коментарями та вносити корективи. При вивченні геометрії в старшій школі дошки є невід'ємною складовою при побудові геометричних об'єктів. Більшість таких полотен окрім звичайної робочої області містять багато цікавих інструментів, котрі дають можливість для побудови необхідних рисунків. Завдяки ним уроки стають продуктивнішими. Миттєвий зворотній зв'язок дозволяє учням негайно коригувати свої помилки та уточнювати нерозуміння, що значно підвищує якість навчання.

Онлайн-дошки також пропонують можливість інтеграції з іншими навчальними ресурсами, такими як відеоуроки, презентації та тести, що дозволяє вчителям створювати комплексні уроки, які поєднують теорію з практикою. Завдяки цьому учні мають можливість глибше зануритися у матеріал, краще його засвоюючи та розуміючи.

Розглянемо найпопулярніші ресурси для роботи [11].

- **BitPaper** — найпопулярніша віртуальна дошка. Інтуїтивно зрозумілий інтерфейс та широкий функціонал роблять її ефективним інструментом для навчання.
- **IDroo** — підтримує інтерактивні інструменти, такі як спільні дошки, чати та

відеозв'язок, що робить її популярною серед викладачів і учнів для дистанційного навчання.

- AWW board — безкоштовна платформа, яка дає змогу викликати учнів до дошки.
- Draw Chat — надає можливість відтворювати медіафайли та листуватись з користувачами, котрі знаходяться на спільному робочому полі.
- Miro — вміщує велику кількість користувачів, надаючи багато інструментів для інтеграції з іншими платформами.
- WhiteboardFox — не потребує реєстрації та зайвих налаштувань.

Підсумовуючи сказане вище, можна дійти до висновку, що інтерактивні та мультимедійні засоби навчання спрощують уроки, демонструючи при цьому широкий спектр можливостей для поглибленого розуміння матеріалу. Їх залучення може допомагати дітям, краще зорієнтуватись в геометричному просторі та візуалізації геометричних фігур через призму інформаційних технологій.

1.4. Перспективи та проблеми використання ППЗ у ЗЗСО із геометрії.

Використання програмно-педагогічних засобів при вивченні геометрії є ключовим кроком для впровадження сучасних методів навчання. Заклади освіти повинні сформувати у дітей навички для адаптації у цифровому просторі. Як правило, більшість учнів не мають достатніх умінь правильного відбору інформації, знаходження шляхів вирішення та пошуку джерел для відтворення потрібних завдань. Відсутність самостійної роботи призводить до використання лише обмежених ресурсів, таких як конспекти уроків чи готових розв'язків, що негативно впливають на процес навчання [12].

Інтегрування ППЗ на уроці спрощує роботу вчителя, тим самим демонструючи дітям плюси використання нових програм. Незважаючи на численні переваги, існують проблеми, котрі перешкоджають їхньому повноцінному користуванню. Слід пам'ятати, що для ефективного користування ППЗ потрібні відповідні пристрої (телефон, комп'ютер...), стабільне Інтернет-з'єднання, також підготовка вчителів чи адаптація навчальних матеріалів. Тому перед

роботою з програмами варто забезпечити відповідні умови, щоб уникнути можливих технічних труднощів [13].

Розглянемо детальніше проблеми та запропонуємо відповідні способи вирішення.

Технічні проблеми: часті відключення електроенергії, нестабільне Інтернет-з'єднання та відсутність потрібних ресурсів.

Вирішення. Найперше — різноманітні інвестиції (в тому числі міжнародні), хороше фінансове забезпечення стане запорукою тривалих партнерських відносин, можливо обмінів учнями. Розробити та надрукувати підручники із використанням сучасних програм. Ну й інтерактивні ігри на свіжому повітрі, котрі розвиватимуть у дітей навички візуалізації об'єктів та соціалізації.

Недостатній рівень підготовки вчителів, відсутність досвіду роботи з ППЗ та необхідних навичок у інформаційному просторі.

Вирішення. Для покращення підготовки вчителів необхідно запровадити регулярні курси для підвищення кваліфікації, які можна відвідувати онлайн чи офлайн. Проведення семінарів, вебінарів, тренінгів з акцентом на сучасні технології, де працівники зможуть не тільки навчитись користуванню програмами, а й об'єднуватись у відповідні групи з іншими досвідченими педагогами для обміну інформацією.

Методичні виклики: планування уроків, складність інтегрування деяких тем (наприклад в стереометрії, де учні повинні вміти малювати вручну), адаптація навчальних матеріалів.

Вирішення. Змінити структуру уроків, щоб виокремити час для роботи з програмними засобами. Таким чином заняття будуть поєднувати в собі як традиційні, так і сучасні методи, що дозволить їм практично використовувати набутті знання через інформаційні технології. Не забувши при цьому малювати деякі завдання вручну.

Мотивація та самоконтроль учнів: втома учнів, проблеми із зором, зниження інтересу, уникнення традиційних завдань.

Вирішення. Варто зауважити, що перебувати за монітором можна не

більше 20 хвилин поспіль [14]. Щоб уникнути втоми та проблем із зором, варто чергувати заняття з програмними засобами та фізичні вправи. Робота в групах, зокрема створення проєктів чи цікаві опитування, можуть стимулювати активність дітей, також запобігти вигоранню.

Платні ресурси.

Вирішення. Багато розробників пропонують безкоштовні версії для шкіл, де кожна школа може скористатись ними безоплатно. Для цього навчальний заклад повинен підтвердити свій статус та отримати відповідний логін та пароль в системі, для подальшого користування.

Розвиток комп'ютерної графіки відкриває нові можливості для вивчення геометрії, створюючи тим самим середовище для роботи з динамічними моделями [15]. Окрім згаданих вище переваг, можна окреслити наступні:

- підвищена продуктивність та економія часу;
- використання навичок на практиці;
- розв'язування більшої кількості завдань;
- міжпредметні зв'язки;
- естетична привабливість уроку;
- покращене розуміння;
- спрощене оцінювання;
- розвиток просторового та логічного мислення;
- диференціація завдань до кожного учня.

Отже, при правильній взаємодії з програмно-педагогічними засобами, учні отримуватимуть максимально корисний досвід на уроках [16]. Це сприятиме не лише поглибленню знань, а й розвитку практичних навичок, критичного мислення та впевненості в собі, що в цілому формуватиме позитивне ставлення до навчання та навчального процесу.

Розділ 2. Огляд програмних засобів для вивчення геометрії

2.1. Популярні цифрові інструменти для вивчення геометрії в старшій школі та їх можливості

Важко уявити сучасний світ без цифрових технологій. Геометрія нашого часу потребує новітніх інструментів для її вивчення. Робота з геометричними об'єктами у динамічній та інтерактивній формі сприяє розвитку просторового мислення.

Використання цих інструментів дає змогу адаптувати завдання під потреби учнів, стимулює бажання до навчального процесу та виховує навички самостійності. Організація чатів, спільна робота та сервіси відеоконференцій розвивають навички комунікації та співпраці, сприяючи обміну ідеями та спільному вирішенню різноманітних проблем та задач.

Кожен програмний засіб ставить за мету візуалізацію складних тем через призму динамічності, проте в кожному є свої особливості використання. Важливо знати, які інструменти краще підходять для конкретних завдань. Для цього познайомимось із ними детальніше.

- **Geogebra** (рис. 2.1.1).

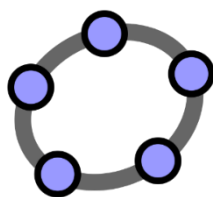


Рис. 2.1.1.

Посилання на програму: <https://www.geogebra.org/calculator>

Безкоштовне програмне забезпечення, котре дає можливість створювати «живі креслення», дозволяє в реальному часі змінювати властивості об'єктів, спостерігаючи за змінами. Програма перекладена більше ніж 50-ма мовами та нагороджена великою кількістю нагород по всьому світу. Призначена для використання у школах чи вищих навчальних закладах по всьому світу для полегшення візуалізації фігур, функцій, графіків, алгебраїчних виразів тощо.

Інтегрувати Geogebra можна на

- уроках: алгебри, геометрії, фізики, інформатики, хімії;
- парах: лінійної алгебри, статистики й теорії ймовірностей, математичного аналізу, аналітичної геометрії;
- галузях: інженерії, STEM-освіти, логістики, психології, архітектури тощо.

Програмне забезпечення, в якому можна здійснити поділ на алгебру чи геометрію. В межах теми сфокусуємось саме на розділі геометрії (див. рис 2.1.2):

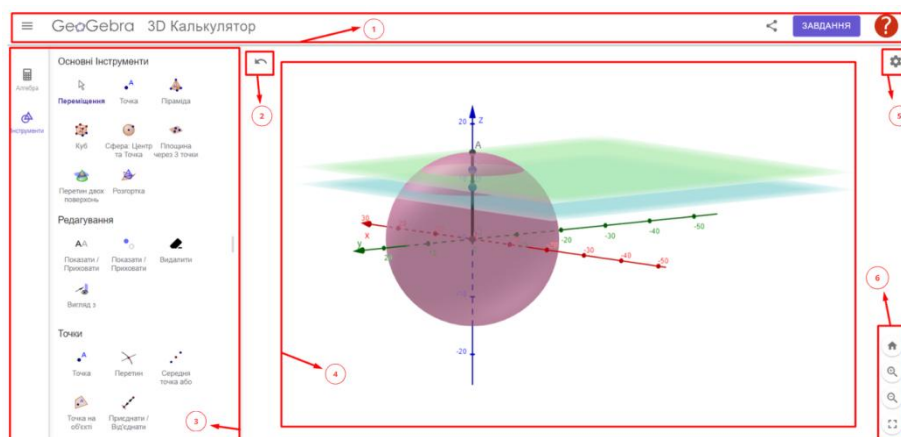


Рис 2.1.2.

1. Верхня панель інструментів – логотип, завдання (з переліку можна обрати готові) та профіль користувача.
2. Кнопка «скасувати дію».
3. Ліва панель інструментів — містить всі інструменти(завдяки ним виконується побудова та редагування об'єктів). Тут можна обчислювати площі фігур, відкладати вектори, знаходити перетини, розгортати фігури, налаштовувати вигляди тощо. Використовуючи ці засоби, можна легко створювати та досліджувати геометричні конструкції у тривимірному середовищі.
4. Робоче поле.
5. Кнопка «шестерня» — відкриває налаштування, де дозволяє змінювати мову, вигляд тощо.
6. Права панель інструментів – змінює розміри робочої області.

Використовувати дану програму можна на багатьох пристроях, це дозволяє не прив'язуватись до місця. На уроках геометрії в старшій школі вона

відіграє важливу роль. Завдяки можливостям 3D-моделювання учні можуть краще ознайомитись із властивостями фігур, досліджувати їхні перетворення, такі як повороти, паралельне перенесення, гомотетія, масштабування та відображення [19].

Geogebra дозволяє виконувати складні перерізи багатогранників, змінюючи відповідні значення. Динамічність одна з переваг програми, адже рухаючи певні об'єкти, фігура автоматично адаптуватиметься до змін (див. рис. 2.1.3).

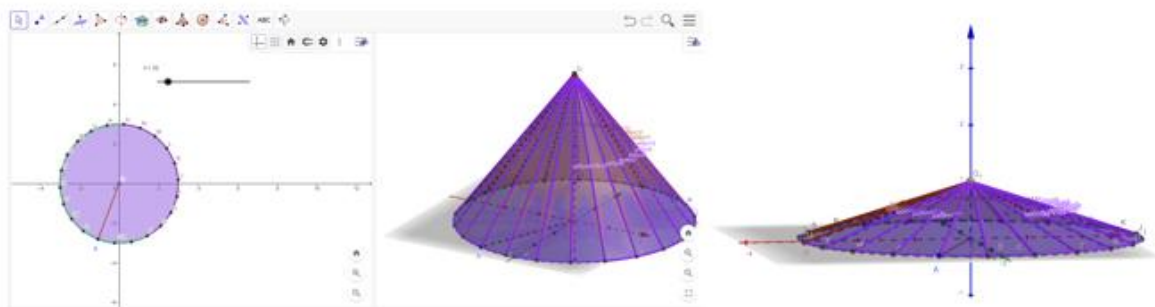


Рис.

2.1.3.

Завдяки підтримці автоматичних та ручних інструментів, в програмі можна доводити істинність геометричних теорем. Учні встановлюватимуть взаємозв'язки між елементами тим самим розвиваючи логічне мислення та глибші знання із тем.

Демонстрація складних завдань через призму інтерактивних вправ, робить навчання більш ефективним. Просторові побудови сприймаються легше, а діти можуть краще зрозуміти абстрактні геометричні поняття.

Постійне оновлення функціоналу дозволяє зараз не тільки виконувати побудови чи розв'язувати завдання. Однією із нових функцій Geogebra є проведення тестування, для цього користувачу потрібно ввімкнути відповідний режим іспиту (*Exam mode*). Використовувати його можна не маючи доступу до Інтернету [24] (див рис. 2.1.4).

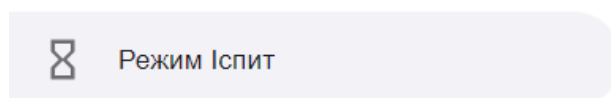


Рис. 2.1.4.

- **Desmos** (див. рис. 2.1.5)



Рис. 2.1.5.

Посилання на програму: <https://www.desmos.com/calculator?lang=uk>

Безкоштовний графічний калькулятор, який використовується для створення графіків різних типів функцій (лінійних, квадратичних, тригонометричних та інших), для візуалізації та дослідження різних геометричних форм та властивостей фігур. Його головною перевагою є здатність динамічно будувати графіки рівнянь та функцій, що дозволяє відтворювати математичні концепції в режимі реального часу. Користувачі можуть змінювати параметри функцій за допомогою інтерактивних повзунків і відразу бачити, як ці зміни впливають на графік.

Desmos також підтримує імпорт зображень, створення нотаток, а також функцію аудіо-відстеження для користувачів із вадами зору. Цей калькулятор широко використовується у навчальних цілях завдяки своїй доступності, легкості у використанні та багатофункціональності. Педагоги можуть адаптувати інструменти платформи відповідно до своїх конкретних планів уроків і цілей, проте дана програма працює лише з Інтернетом. Незалежно від того, чи це алгебра, обчислення чи статистика, Desmos пропонує гнучкість для створення індивідуальних уроків, які відповідають потребам кожного класу. [2]

Інтерфейс програми:

Програма доволі проста та зрозуміла у використанні, як для новачків так і для досвідчених користувачів. До основних елементів можна віднести (див. рис. 2.1.6):

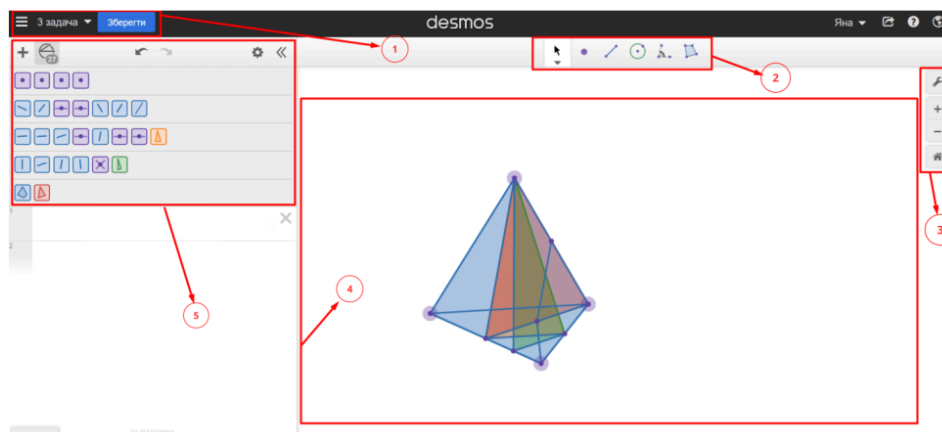


Рис. 2.1.6.

1. Головне меню – кнопки меню (дозволяє відкривати додаткові налаштування та параметри) й збереження.
2. Інструменти для побудови – точка (для побудови окремих точок на площині), лінія (для створення відрізків та прямих ліній), коло (для побудови кіл з заданим радіусом або центром), багатокутник (для створення геометричних багатокутників).
3. Робоча область – простір, де будуються та редагуються всі геометричні фігури. Тут можна перетягувати та змінювати параметри фігур в інтерактивному режимі.
4. Панель налаштувань – кнопки "гайковий ключ" (осьові налаштування, сітка тощо) та збільшення / зменшення масштабу.
5. Панель рівнянь або фігур – можна ввести рівняння фігур або відстежувати вже побудовані геометричні елементи (див. рис. 2.1.7).



Рис. 2.1.7.

У Desmos-Geometry можна переміщувати, відображати, обертати та масштабувати геометричні фігури. Після того, як визначили тип перетворення, його можна повторно застосувати з історії останніх операцій або створювати складені перетворення за допомогою списку виразів (див. рис. 2.1.8).



2.1.8.

Вибравши всі об'єкти, які потрібно перекласти, клацніть, щоб відкрити меню «Трансформувати та побудувати», яке з'являється на панелі інструментів геометрії, і виберіть «Перекласти» (див. рис. 2.1.8). [5]

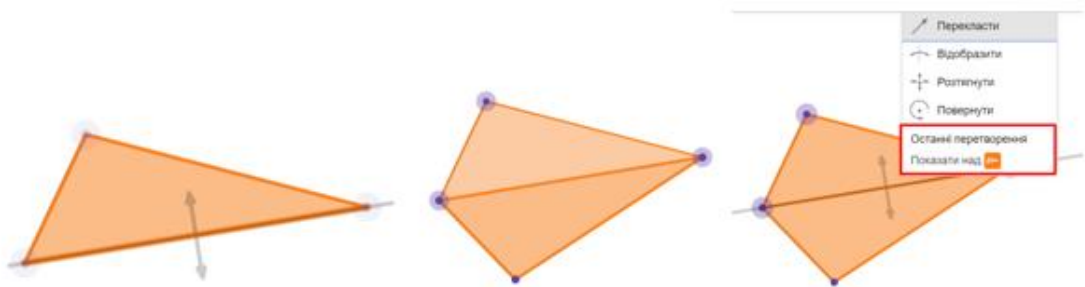


Рис. 2.1.8.

Вкажіть центр розширення (це може бути існуюча або нова точка) і введіть масштабний коефіцієнт (в даному випадку $\frac{1}{2}$). Об'єкти будуть масштабовані відносно цього центра (див. рис. 2.1.9).

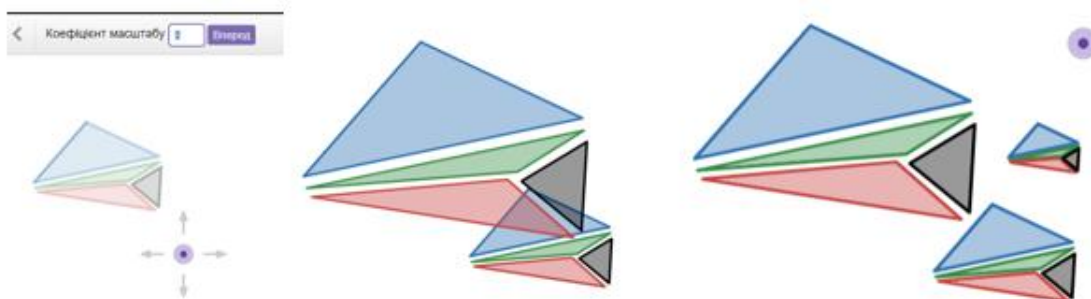


Рис. 2.1.9.

Останнім типом перетворення є обертання. Щоб здійснити обертання об'єктів, спочатку потрібно виділити їх за допомогою інструмента вибору. Далі відкрийте меню "Трансформувати та побудувати" на панелі інструментів і оберіть опцію "Обертати" (див. рис. 2.1.10) [5].

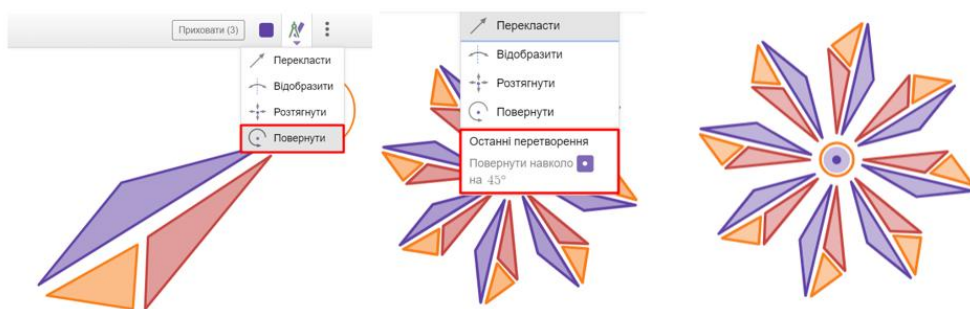


Рис. 2.1.10.

Такі завдання можуть бути призначені учням для додаткової роботи. Використовуючи різні трансформації, учні можуть створювати цікаві малюнки або складні геометричні композиції, розвиваючи свої навички роботи з геометричними перетвореннями (див. рис. 2.1.11).

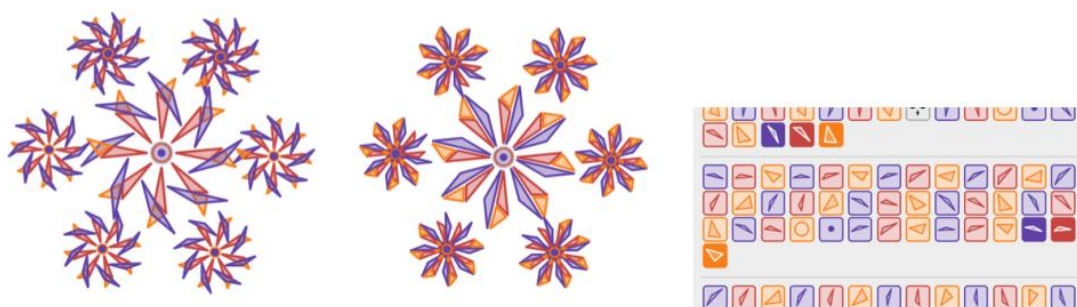


Рис. 2.1.11.

- **GRAN**

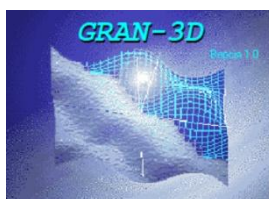


Рис. 2.1.12.

Програмно-методичний комплекс GRAN, створений для допомоги у викладанні математичних дисциплін, зокрема геометрії. Він складається із GRAN1, GRAN-2D та GRAN-3D (див. рис. 2.1.12). Кожен із них корисний у середовищі спрямування.

Так, GRAN1 спрямований більше на розв'язування базових геометричних задач для 7-9 класів. Підтримує інструменти геометричних перетворень. Побудови в ньому виконуються з допомогою циркуля та лінійки.

GRAN-2D в свою чергу сфокусований на двовимірній геометрії та планіметрії. Корисний для вивчення фігур на площині, можна з легкістю виконувати побудови малюнків, знаючи при цьому найпростіші поняття [20]. Особливістю

даної програми є можливість редагувати об'єкти на екрані.

Якщо говорити про вивчення тривимірної геометрії старшої школи, найкориснішим є саме GRAN-3D. Він ідеально підходить для вивчення стереометрії учнів 10-11 класів.

Завдяки програмі можна створювати та досліджувати об'ємні геометричні фігури, такі як призми, піраміди, циліндри, конуси та сфери. Розуміння їхньої побудови сприяє вивченню властивостей фігур, зокрема таких, як об'єм, площа поверхні, точки перетину, перерізи та симетрію.

Ознайомимось із будовою вікна (див. рис. 2.1.13).

1. Головне меню – основні команди та опції програми. Деякі функції можуть перешкоджати роботі інших, тоді програма зафарбує їх іншим кольором.
2. Панель інструментів – містить позначення до частих інструментів, що дозволяє швидко виконувати дії.
3. Поле підказки – дозволяє користувачу зорієнтуватись у дії, яку він виконує у певний момент часу. Програма також може відображати підказки та інструкції щодо роботи.
4. Перелік об'єктів – містить список усіх об'єктів, які були завантажені чи створені під час роботи [21].

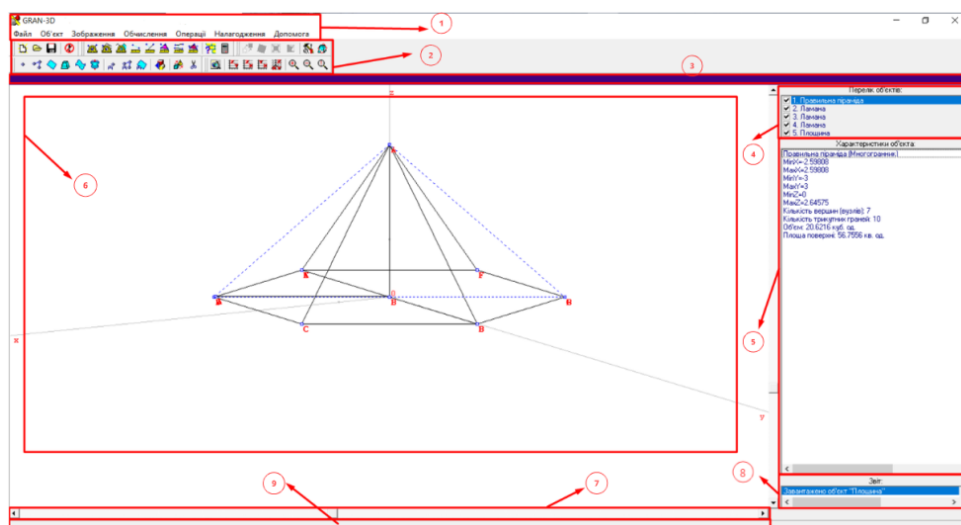


Рис. 2.1.13.

5. Поле характеристики об'єкта – відображає параметри та властивості обраного об'єкта.

6. Робоче поле – область, на якій відображаються всі побудови.
7. Смуга повороту – дозволяє змінювати ракурс фігури та краще роздивитись її з усіх сторін.
8. Звіт – результати обчислень.
9. Поле інформації – відображається загальна інформація про проект.

Саме в GRAN-3D можна задавати фігури через координати. Такий метод дозволяє легко будувати фігури, отримуючи точну візуалізацію. Користуючись таким способом можна наводити аналогії із теми «Вектори» (див. рис. 2.1.14).

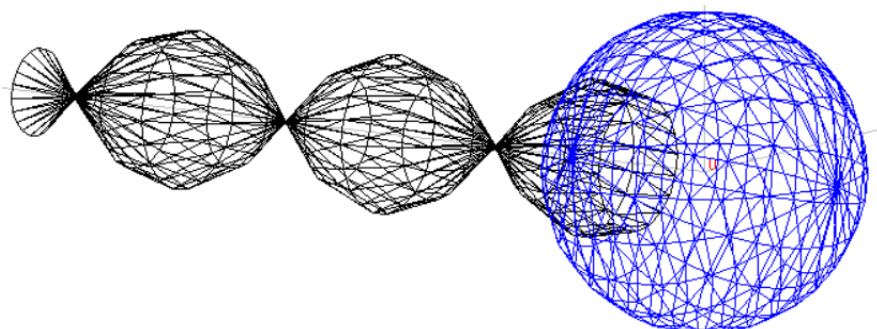


Рис. 2.1.14.

Програма адаптована під потреби учнів та відповідає освітнім стандартам навчання. З її допомогою можна виконувати цікаві геометричні побудови, котрі змінюватимуться в залежності від параметрів (див. рис. 2.1.15).

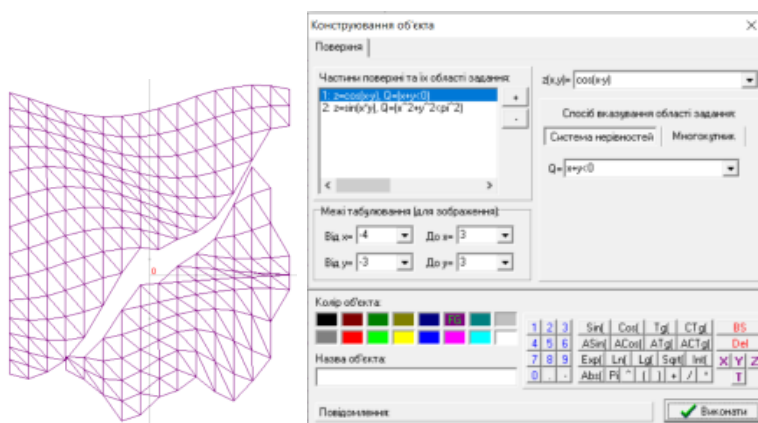


Рис. 2.1.15.

Варто зауважити, що використання даного програмного засобу формує міжпредметні зв'язки із іншими шкільними предметами.

- **Cinderella** (див. рис. 2.1.16).



Рис. 2.1.16.

Додаток, який надає можливість створювати геометричні побудови та фізичні моделі. Користуватись програмою можна за умови завантаження її на ПК. Об'єкти у Cinderella можуть виконуватись у двовимірному та тривимірному просторі.

Окрім звичної динамічності, в Cinderella можна створювати моделі фізичних процесів, це робить її потрібною на уроках фізики. З її допомогою можна виконувати різноманітні симуляції, а також спостерігати за зміною фізичних сил (див. рис. 2.1.17) [22].

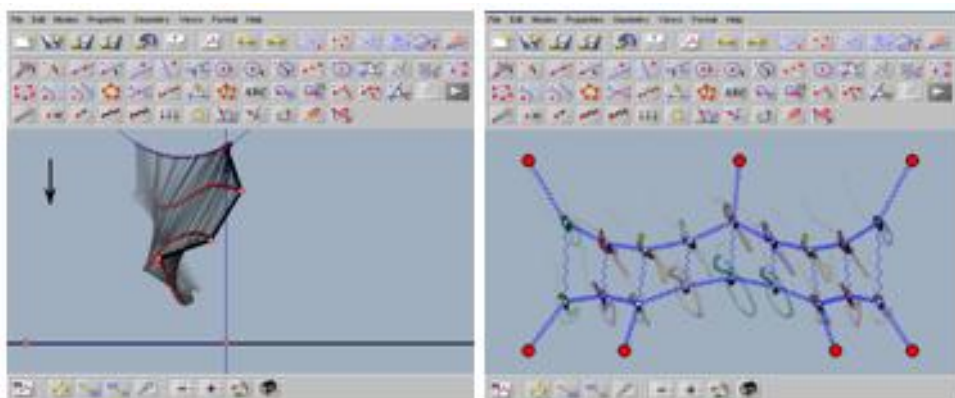


Рис. 2.1.17

Однією із її особливостей є шифрування файлів. В програмі інтегрована мова CindyScript, завдяки чому тут можна виконувати складні симуляції. Експорт побудов може здійснюватись у вигляді Java-апплетів або HTML, надаючи тим самим можливість розміщення на веб-сайтах.

Розглянемо інтерфейс вікна програма (див. рис. 2.1.18):

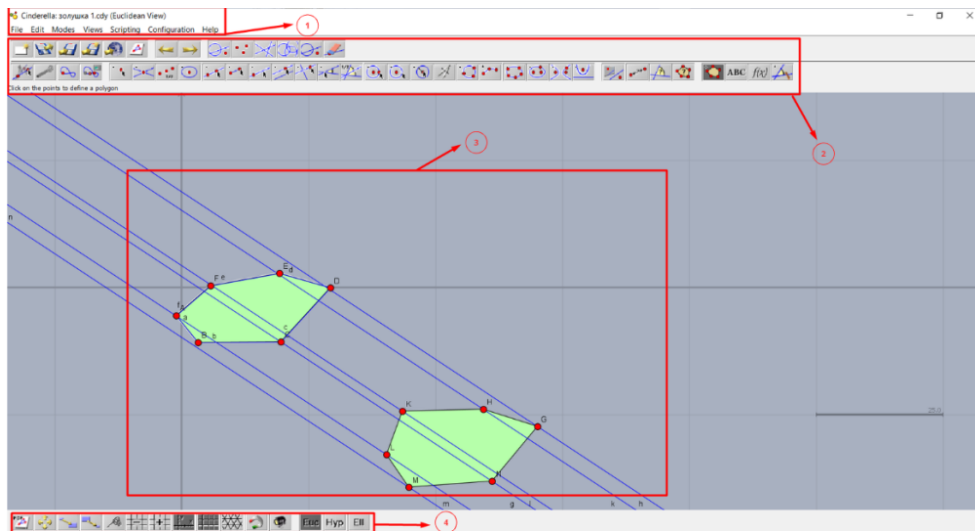


Рис. 2.1.18

1. Головне меню – містяться основні команди для управління (файл / редагування / режими / скрипти / налаштування).
2. Панель інструментів – кожен із знаків відповідає за певний інструмент. Кожен ряд можна поділити на певну групу, тут базові налаштування, інструменти для створення та трансформації.
3. Робоче поле – виконується робота з об'єктами, також можна редагувати існуючі елементи, змінюючи їхній розмір.
4. Нижня панель – додаткові функції навігації, типу геометричного простору (евклідового / гіперболічного / еліптичного) та вигляду сітки.

Робота з фракталами – унікальна можливість даної програми, яка дозволяє моделювати складні геометричні об'єкти, а «режим перетягування», в свою чергу змінює розташування об'єктів на робочому полі, експериментуючи із ними.

- **Cabri Geometry** (див. рис. 2.1.19).

Одна із перших програм для роботи з динамічною геометрією в цифровому середовищі. Інтуїтивно зрозумілий інтерфейс програми, дозволяє швидко зорієнтуватись.

Cabri Geometry не тільки дозволяє виконувати геометричні побудови, вона перевіряє їх на правильність виконання, вказуючи помилки. Так можна перевірити властивості: перпендикулярності, паралельності, рівності фігур, симетрії, перетворення фігур тощо.

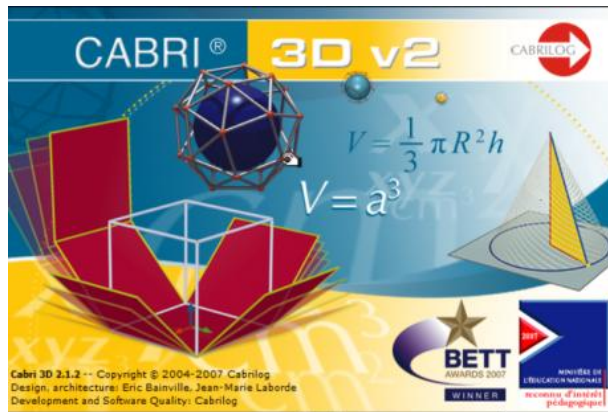


Рис. 2.1.19.

Програма підтримує анімації, тому можна спостерігати, як фігура змінюється під час перетворення. Також в Cabri присутня функція розкриття. Процес доволі захопливий, тому учням буде цікаво не тільки спостерігати, але й самостійно змінювати відповідні параметри (див. рис. 2.1.20) [23].

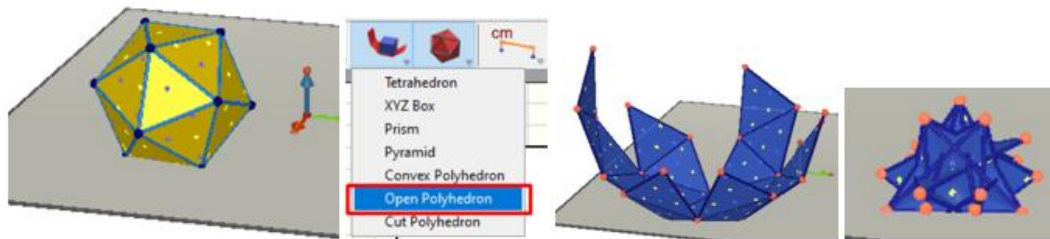


Рис. 2.1.20.

Детально ознайомимось із вікном програми (див. рис. 2.1.21).

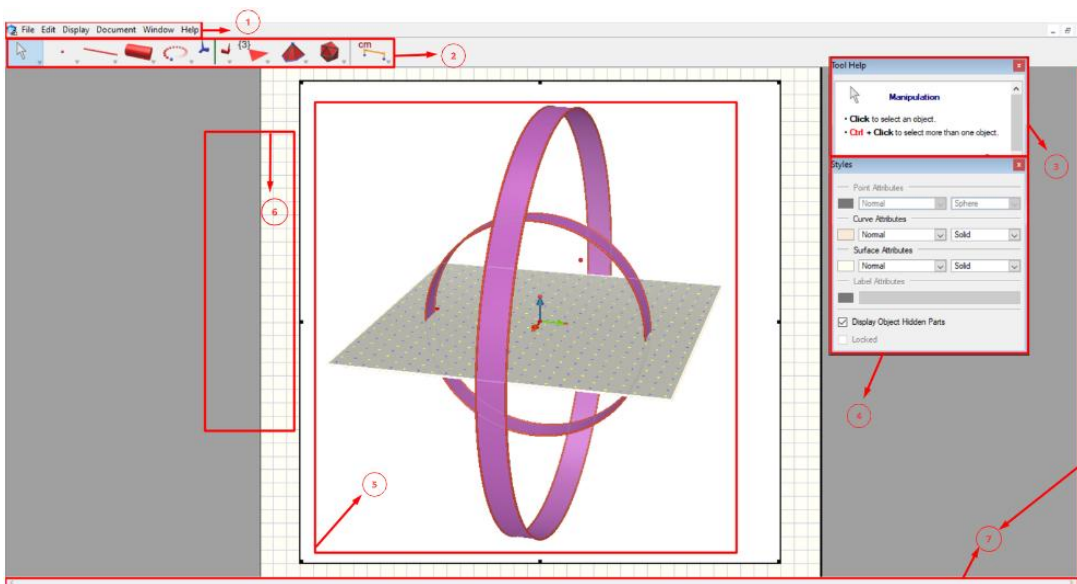


Рис.

2.1.21.

1. Головне меню – містить стандартні вкладки, які використовуються для налаштування вікна чи роботи з файлами.
2. Панель інструментів – основні інструменти програми для побудови

геометричних об'єктів. Кожен із них відкриває список властивостей чи видів задання.

3. Панель допомоги (Tool Help) – налаштовується додатково. За необхідності її можна згорнути. Корисна при побудові, адже можна знайти відповідний теоретичний матеріал до кожного об'єкта, отримуючи при цьому підказки.
4. Панель стилів (Styles) – вмикається за необхідністю, в ній можна змінювати колір, стиль елементів. Важлива опція – Display Object Hidden Parts, яка дозволяє приховувати чи показувати об'єкти, які перекриті іншими фігурами.
5. Робоча область – місце, де відображаються побудови. На ній можна змінювати розмір елементів.
6. Координатна сітка – допомагає краще зорієнтуватись при відкладанні точок.
7. Роллер.

Cabri Geometry не безкоштовна, тому для ознайомлення надається пробний період тривалістю 30 днів.

- **TikerCAD** (див. рис. 2.1.22)



Рис. 2.1.22.

TikerCAD – додаток для 3-D моделювання та дизайну. Чудово підходить для використання на уроках геометрії. Програма безкоштовна, але для її користування потрібне постійне підключення до мережі.

Відома своїм простим інтерфейсом, що робить її корисною саме для новачків. Тут вивчаються основні властивості фігур та їхні взаємозв'язки. Експериментуючи з розмірами, формами та положенням у просторі, діти можуть краще зрозуміти поняття площ, об'ємів та симетрій.

Розглянемо вид вікна (див. рис. 2.1.23):

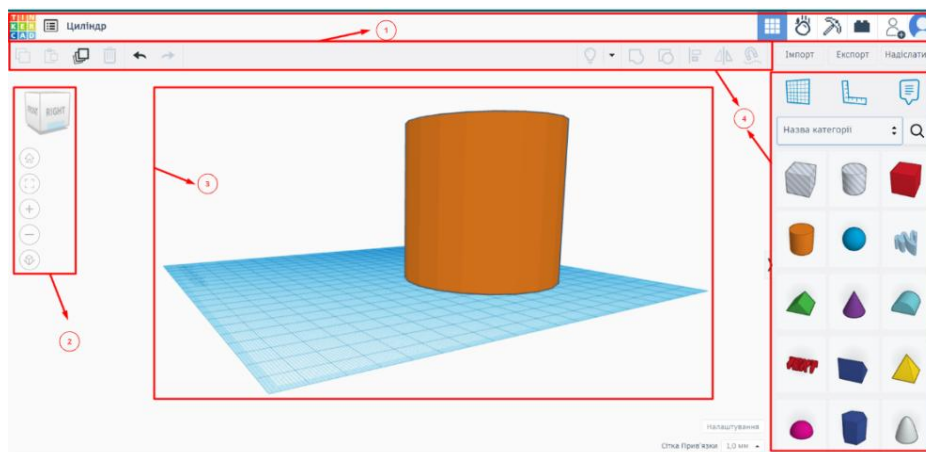


Рис. 2.1.23.

1. Інформаційна панель – знаходяться елементи керування.
2. Панель руху – інструменти для роботи з полем. На ній міститься кубик, який відповідає за орієнтацію в середовищі. Користувач, натискаючи на нього, змінює кут огляду.
3. Робота область.
4. Панель інструментів – знаходяться основні інструменти для створення, збереження та редагування об'єктів. Містить бібліотеку базових фігур (куб, піраміда, куля, циліндр тощо), в яких можна знаходити перерізи та об'єднання. Створення отворів у елементах, дає можливість створювати порожнисті форми.

Окрім 3D моделювання, містить середовище для симуляції, де можна створювати прості електронні схеми. Таким чином, програма надає унікальні можливості основ програмування, що робить її корисним інструментом для вивчення базових концепцій STEM.

Отже, цифрові додатки зараз стали невід'ємною частиною навчального процесу. Взаємодія із ними забезпечує ефективне та цікаве вивчення нового матеріалу. Відтворювати малюнки тепер можна, не тільки на дошці чи в зошиті, для цього чудовою альтернативою стали програмні засоби, які дозволяють розглядати їх із різних сторін у просторі.

Динамічні візуалізації забезпечили якісну перевірку та корекцію помилок у реальному часі. Діти змогли аналізувати свої дії, бачачи їхні наслідки.

Вчителі в свою чергу, отримали змогу інтерактивно пояснювати матеріал. Інтегрування програмних засобів забезпечує неперервність навчального процесу.

2.2. Інтерактивність мобільних додатків

Важливою складовою сучасних уроків є інтеграція мобільних додатків. Цифрові технології все частіше застосовуються в навчальному процесі тим самим, демонструючи перехід від традиційних методів до інтерактивних. Використання додатків сприяє розвитку практичних навичок, зацікавленості та мотивації учнів, орієнтації в інформаційному просторі та формуванню самостійності в навчанні. Учні можуть працювати у зручному для них темпі, обираючи конкретних час та місце.

Незважаючи на ряд переваг, впровадження технологій повинно відбуватися адаптивно, враховуючи середовище їхнього використання. Навчальні заклади повинні вкладати ресурси у надійний інтернет-зв'язок, достатню кількість цифрових пристроїв і технічну підтримку, щоб усі учні могли повною мірою користуватися перевагами мобільного навчання [17].

Важливими аспектами успішного використання додатків є якість та освітня значимість, щоб знизити вплив відволікаючих факторів та зосередити увагу учнів на навчальному процесі. Вони повинні створюватися з урахуванням основ педагогіки, а їхній зміст має бути водночас пізнавальним і захопливим для учнів.

Розглянемо додатки, які можуть бути корисними при вивченні геометрії:

- **Euclidea**



Рис. 2.2.1.

Призначена для вивчення геометрії в інтерактивній формі. Легкий інтерфейс, підтримує кілька мов, в тому числі й українська та може працювати без інтернет-з'єднання (див. рис. 2.2.1). Завдання представлені у формі рівнів,

пройшовши кожен із яких, ви можете пригадати відповідні геометричні властивості, теореми, наслідки. Додаток наголошує на них, даючи підказки, які можуть використовуватись надалі (див. рис. 2.2.2).

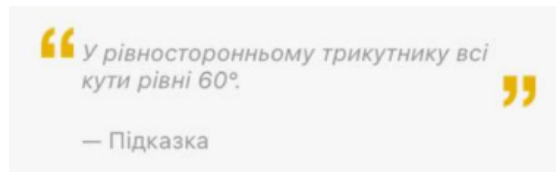


Рис. 2.2.2.



Рис. 2.2.3.

Набір інструментів невеликий, тому важливо ретельно продумувати алгоритм побудови (див. рис. 2.2.3). Кроки та спроби фіксуються, а ефективність оцінюється за мінімальною кількістю ходів. Таким чином, користувачі шукають найраціональніші рішення, які стають запорукою розвитку оптимізації та логічного мислення.

- **Pythagorea** (див. рис. 2.2.4)



Рис. 2.2.4.

Спрямований на засвоєння класичної евклідової геометрії, як і в попередньому додатку, завдання поділені на рівні. Задачі подані у вигляді головоломок без необхідних обчислень.

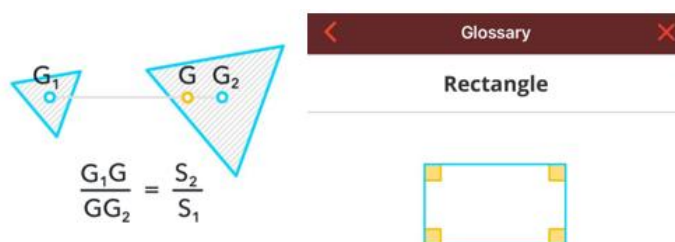


Рис. 2.2.5.

У застосунку немає української мови, проте завдяки легкому набору команд, користувач може швидко зорієнтуватись в необхідному завданні. Завжди

є можливість звернутись до вбудованого довідника, в якому є пояснення основних принципів (див. рис. 2.2.5). Таким чином, робота в додатку розвивати навички критичного та логічного мислення.

- **GeoGebra 3D Calculator/Geometry** (див. рис. 2.2.6).



Рис. 2.2.6.

Найкращий додаток для вивчення геометрії, мобільна версія нічим не гірша від версії ПК. Об'єкти можна пересувати, перетворювати, перетинати, змінювати їхні розміри та параметри. Крім того, доступна можливість зміни полотна: користувач може спочатку побудувати фігуру, а потім використовуючи камеру, навести її на реальний простір за допомогою функції доповненої реальності (AR).

- **Desmos Graphing Calculator** (див. рис. 2.2.7)



Рис. 2.2.7.

Доволі відомий для учнів графічний калькулятор, який можна використовувати без Інтернет з'єднання. Легке користування та налаштування, роблять його універсальним інструментом на уроках. Інтерактивний перетин об'єктів визначається дотиком на місце їхнього перетину, такий метод дозволяє легко знаходити необхідні точки.

- **Sketchometry** (див. рис. 2.2.8)



Рис. 2.2.8.

Додаток для побудови геометричних фігур. Користувач малює пальцем по екрані відповідні задання, програма в свою чергу їх розпізнає та перетворює

у точні геометричні об'єкти. Їх можна змінювати, додаючи довжини сторін чи градусні міри кутів. Підтримує мову жестів, тому можна використовувати для учнів з інклюзією.

Отже, використання мобільних додатків вносить в освітній процес позитивні зміни. Проведення уроків у ігровій формі стимулює учнів до активності та зацікавленості. Експериментуючи з геометричними об'єктами, вони краще ознайомляться із властивостями фігур, роблячи це у зручний для них час, не прив'язуючись до місця.

Таким чином, цифрові технології у навчальному процесі, орієнтувавши, будуть не лише на роботі в інформаційному середовищі. Показ нових можливостей геометрії дасть зрозуміти учням її необхідність у житті. Заохочення до процесу, правильний виклад матеріалу та комунікація з учнями – ключ до розуміння геометричних концепцій навчання.

2.3. Освітні онлайн-платформи для геометрії

Після переходу української освіти на змішану систему навчання зростає необхідність у відеоуроках. У зв'язку з карантинном, нестабільною мережею та відключеннями світла, освітні платформи стали невід'ємною складовою навчального процесу.

У березні 2020 року школи перейшли на дистанційну форму навчання, тоді платформа Google надала безкоштовний доступ до багатьох платних функцій для освітян. Використання Google Meet та Google Classroom забезпечило безперервність навчання, навіть у складних умовах. Учні отримали змогу перегляду уроків у зручний для них час. Однак після закінчення пандемії функція запису уроків, стала можлива лише для користувачів з платною версією Google Workspace for Education [18].

Для забезпечення кращого розуміння матеріалу використання відео платформ стало недостатнім. На допомогу їм прийшли спеціалізовані освітні платформи, де створювались курси з конкретних предметів, зокрема геометрії. Таким чином учні отримали доступ до лекцій, відео, тестів, конференцій та

інтерактивних завдань.

Розглянемо найпопулярніші освітні-платформи, які дають найкращі ресурси для вивчення геометрії в старшій школі.

- **Wolfram Alpha** – інструмент для розв’язування геометричних задач. Миттєво будує фігури та виконує складні розрахунки. Можна використовувати для обчислення площ, об’ємів, периметрів, значення кутів тощо.
- **Prometheus** – сфокусована саме на вивченні українських програм. Курси розраховані на дітей різних вікових категорій. Велика кількість тестувань, які підкріплені практичними завданнями. На платформі можна знайти матеріали для інклюзивних дітей.
- **Всеукраїнська школа онлайн (ВШО)** – всі матеріали безкоштовні та доступні назагал. Користувачі можуть слідкувати за власним процесом, переглядати історію досягнень та визначати слабкі сторони.
- **Coursera** – відома освітня-платформа, яка пропонує курси від провідних університетів та компаній. Курси допомагають поглибити свої знання з дисципліни. Для отримання сертифікату потрібно скласти фінальний тест.
- **На урок** – платформа для перевірки рівня знань учнів. Корисна для використання саме вчителями, адже на ній міститься велика кількість методичних матеріалів. Платформа також організовує різноманітні онлайн-конкурси та олімпіади.
- **EdEra** – українська платформа, яка містить структуровані курси шкільної програми для учнів 10-11 класів, матеріали, тестування та інтерактивні завдання. Всі курси розроблені згідно з державними стандартами.
- **Learning.ua** – нахил на інтерактивне навчання. Платформа заохочує користувачів до отримання відзнак та балів за успішність. Уроки проводяться в ігровій формі.
- **Khan Academy** – частина курсів перекладена українською мовою. Містить детальний розбір завдань, завдяки чому учні зможуть самостійно засвоїти матеріал. На платформі можна знайти курси про: подібність та

конгруентність фігур, паралельність площин у просторі, мимобіжність прямих, властивості тетраедрів тощо.

- **YouTube-канали** – велика кількість уроків, починаючи від пояснення теми уроків до підготовки до незалежного оцінювання. Вчителі мають можливість проводити прямі трансляції, спілкуючись з учнями через чат. Саме завдяки таким відеоурокам демонструється необхідність вивчення математики в сучасному світі.

Основою нової освіти стало впровадження новітніх ресурсів. Онлайн-платформи, програми, електронні матеріали, опитування, мобільні додатки – забезпечили якісний перехід до змішаного навчання, адаптованого до викликів.

Цифрові інструменти дозволили персоналізувати матеріали під потреби учнів. Їхнє використання навчило самостійної роботи, розвинуло навички критичного мислення та виховало відповідальність за свої дії. Таким чином, процес навчання став доступним та гнучким, сприяючи формуванню ключових компетентностей освіти XXI століття.

Розділ 3. Інтеграція цифрових технологій у навчальний процес

3.1. Розбори задач із використанням програмних засобів

Вище ми розглянули основні функції програмних засобів. Загалом їхнє впровадження, позитивно вплинуло на процес навчання, учні стали більш зацікавленими та активними при роботі з ними.

Розглянемо конкретні приклади впровадження даних програмних засобів у навчальний процес. При цьому сфокусуємося саме на темах для 10–11 класів з геометрії.

Протягом навчального курсу геометрії (рівень стандарт) старшої школи, учні мають ознайомитись із наступними темами [25]:

- Паралельність прямих і площин у просторі.
- Перпендикулярність прямих і площин у просторі.
- Координати і вектори.
- Многогранники.
- Тіла обертання.
- Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл.

Розглянемо кожну з них детальніше та наведемо приклади задач, які можна розв'язати для закріплення матеріалу, використовуючи рекомендовані програмні засоби:

Вступ до стереометрії розпочинається із вивчення тем **«Паралельність прямих і площин у просторі»** та **«Перпендикулярність прямих і площин у просторі»**. Саме тут учні вивчають основні поняття, аксіоми, наслідки та теореми у просторі. Для точного зображення фігур, розглядаються різні варіанти взаємного розміщення прямих та площин, а також методи вимірювання відстаней (між прямими, точками, площинами тощо).

Задача №1. (Істер, 10 клас, №7.31).

«З точки A до площини α проведено дві похилі, кут між якими 60° , а кут між їх проекціями – 90° . Довжина кожної проекції 2 см. Знайдіть довжину

похилих і відстань від точки A до площини α .»

Розв’язування. Проведемо $AC \perp \alpha$. Якщо $BC=CD$, то $AB=AD$. Розглянемо рівнобедрений $\triangle ABD$, за умовою $\angle BAD = 60^\circ$, тому інші кути відповідно 60° (за властивістю кутів при основі), таким чином $\triangle ABD$ рівносторонній. Звідси випливає, що $AB = AD = BD$.

$\triangle BCD$ ($\angle C = 90^\circ$) – прямокутний рівнобедрений, тому

$$BD = BC \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

Відповідно, $BA = AD = 2\sqrt{2}$ (см). Отже, із прямокутного трикутника $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) знайдемо сторону AC за теоремою Піфагора:

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{8 - 4} = \sqrt{4} = 2 \text{ (см)}.$$

Відповідь. 2 (см).

Для побудови малюнка скористаємось програмою Cinderella:

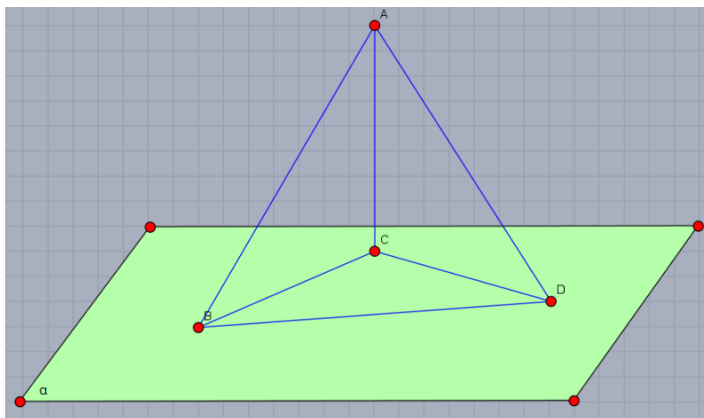


Рис. 3.1.1.

- Побудову розпочнемо із створення площини α для цього скористаємось відповідною функцією «*Polygon*» відкрити її можна із меню списку «*Modes*» (див. рис. 3.1.2а) чи скориставшись інструментом з екрану (див. рис. 3.1.2б);

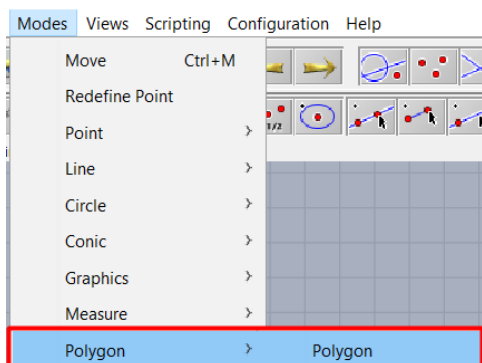


Рис. 3.1.2а.

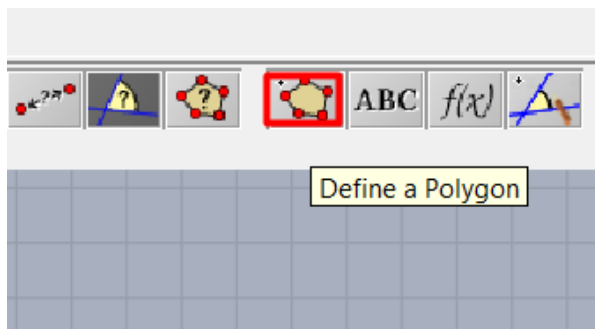


Рис. 3.1.2б.

- На площині позначимо відповідні точки B, D . Поза межами площини α відкладемо точку A . Із точки A опускаємо перпендикуляр до площини α . Знаходимо відповідну команду «*Perpendicular Line*» (див. рис. 3.1.3). Позначимо його AC .

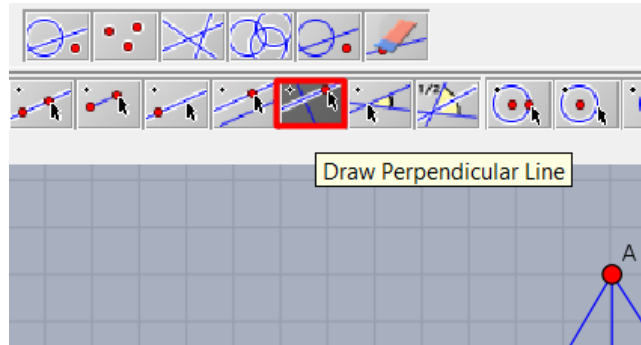


Рис. 3.1.3.

- Проходимо похилі із точки A для цього скористаємось інструментом «*Line*» (див. рис. 3.1.4), утворяться відповідно похилі AB, AD . Проведемо проекції. Перевіримо відповідність кутів за допомогою команди «*Measure Angle*» (див. рис. 3.1.5).



Рис.3.1.4.

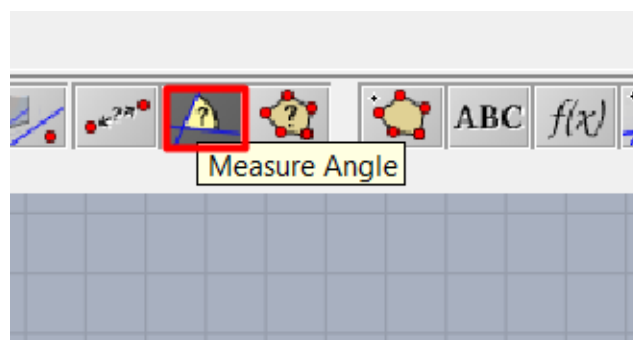


Рис. 3.1.5.

Задача №2 (Мерзляк, Геометрія, 10 клас, профільний, № 14.30).

«Прямокутник $ABCD$ перегнули по діагоналі AC так, що площини ABC і ADC виявилися перпендикулярними. Знайдіть відстань у новому положенні між точками B і D , якщо $AB = 30$ см, $BC = 40$ см.»

Розв'язування. Із умови, що $\triangle ABC$ прямокутний, знайдемо діагональ AC :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2; AC = \sqrt{900 + 1600} = 50(\text{см}).$$

Оскільки площини $(ABC) \perp (ADC) \Rightarrow \triangle ABK (\angle BKA = 90^\circ)$. Позначимо $AK = x$,

тоді $KC = 50 - x$. Отже,

$$\begin{aligned}BK^2 &= AB^2 - AK^2 = BC^2 - KC^2, \\900 - x^2 &= 1600 - 2500 + 100x - x^2, \\100x &= 1800, \quad x = 18.\end{aligned}$$

$$BK = \sqrt{900 - 324} = 24(\text{см}).$$

Розглянемо далі $\triangle BKD$ ($\angle BKD = 90^\circ$):

$$BD^2 = BK^2 + KD^2; \quad BD = \sqrt{576 + 576} = 24\sqrt{2}(\text{см}).$$

Відповідь. $24\sqrt{2}$ (см).

Для побудови малюнку до цієї задачі в програмі *Desmos-Geometry*, скористаємось наступними кроками (див. рис. 3.1.6):

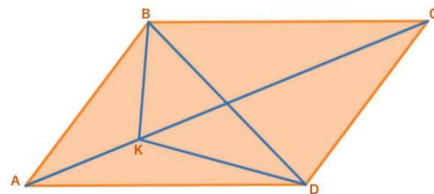


Рис. 3.1.6.

- Побудуємо 2 паралельні прямі з допомогою інструмента «Паралель», відкладемо відповідні прямі.
- Щоб на малюнку не було зайвих побудов можна, деякі елементи приховати (див. рис. 3.1.7а).

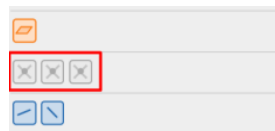


Рис. 3.1.7а.

Для цього в програмі скористаємось командою показати (див. рис. 3.1.7б);



Рис. 3.1.7б.

З поняттям векторів на площині учні знайомі з 9-го класу. У старшій школі в 10 класі вони поглиблюють свої знання з теми «**Координати і вектори**», застосовуючи ті ж формули тепер вже для тривимірного простору. Особливу увагу приділяється саме симетриям. Завдяки чому формуються фундаментальні поняття для розуміння просторових властивостей об'єктів.

Найкращими програмними засобом для демонстрації даної теми можна вважати Geogebra та Desmos. Для підтвердження даної теми розглянемо наступну задачу.

Задача №3. «Кожне ребро тетраедра $DABC$ дорівнює a , точка M – середина ребра AB . Знайдіть скалярний добуток векторів:

$$1) \overrightarrow{CM} \text{ і } \overrightarrow{DC}; \quad 2) \overrightarrow{AB} \text{ і } \overrightarrow{CD}.$$

Розв’язування.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{DC} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DC} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a^2}{2}; \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} - a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Алгоритм побудови малюнку в програмі *Geogebra* (див. рис. 3.1.8):

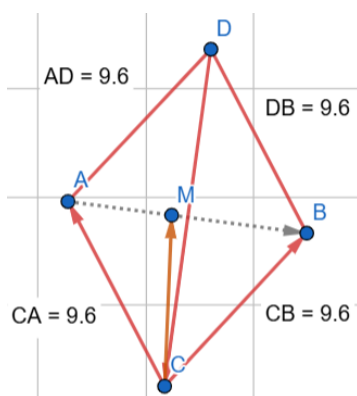


Рис. 3.1.8.

- Побудуємо тетраедр $DABC$. Скористаємось інструментом «Точка» та «Відрізок». Побудуємо вектори $\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$. Для цього у вкладці Лінії, знайдемо відповідну команду «Вектор» (див. рис. 3.1.9):



Рис. 3.1.9.

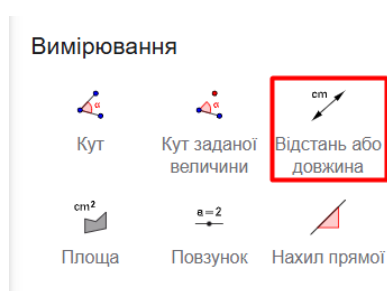


Рис. 3.1.10.

- Щоб перевірити рівність ребр використаємо інструмент «Відстань або довжина» (див. рис. 3.1.10):

довжина» (див. рис. 3.1.10). Також для кращої візуалізації змінимо стилі елементів.

Вивчення стереометрії продовжується в курсі 11 класу геометрії. Тема «**Многогранники**» націлена на вивчення тривимірних фігур, дослідження їхніх властивостей. Саме тут велике значення відіграє демонстрація наочних прикладів. Важливо наводити приклади використання цих фігур в реальному житті.

Корисними програмними засобами для побудови зображень тут є **Cabri Geometry, Gran-3D, Geogebra, Desmos**. Наведемо відповідні приклади.

Задача №4. (сторінка 171 істер 10) « Два рівнобедрених трикутники мають спільну основу $AB = 16$ см. Площини трикутників перпендикулярні. Знайти відстань між точками C і C_1 , якщо $AC = 10$ см, $AC_1 = 17$ см.»

Розв’язування. Виберемо точку M як середину AB . Тоді CM – медіана і висота рівнобедреного $\triangle ABC$, а C_1M – медіана і висота рівнобедреного $\triangle ABC_1$.

Оскільки $CM \perp AB$, і $C_1M \perp AB$, то $\angle CMC_1$ – лінійний кут двогранного кута з ребром AB , тому

$$\angle CMC_1 = 90^\circ. AM = \frac{AB}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ (см)}.$$

$$\text{У } \triangle ACM (\angle M = 90^\circ): MC = \sqrt{AC^2 - AM^2} = 6 \text{ (см)}.$$

$$\text{У } \triangle AC_1M (\angle M = 90^\circ): MC = \sqrt{AC_1^2 - AM^2} = 15 \text{ (см)}.$$

$$\text{У } \triangle CMC_1 (\angle M = 90^\circ): CC_1 = \sqrt{CM^2 + C_1M^2} = \sqrt{261} = 3\sqrt{29} \text{ (см)}.$$

Відповідь. $3\sqrt{29}$ (см).

Для побудови зображення скористаємось додатком *Cabri Geometry* та опишемо детальні кроки для побудови (див. рис. 3.1.11).

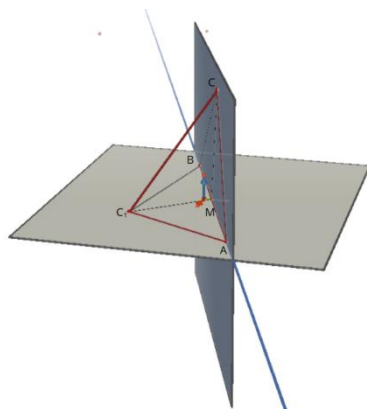


Рис. 3.1.11.

- Спочатку побудуємо додаткову площину, котра буде перпендикулярна до заданої, для цього скористаємось відповідним інструментом (див. рис. 3.1.12):

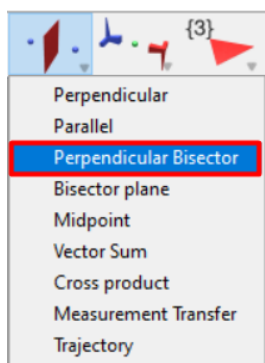


Рис. 3.1.12.

- Знайдемо перетин даних площин, після чого відкладемо точки C та C_1 на площинах відповідно. З них опустимо перпендикуляри на пряму перетину.
- Скористаємось інструментом «Трикутник» та з'єднаємо об'єкти (див. рис. 3.1.13):



Рис. 3.1.13.

- Налаштуємо відповідні елементи: скористаємось інструментом «Label»

для підписування елементів, також змінимо стиль ліній. Для цього скористаємось вікном «*Styles*».

Задача №5. (14.13 з геометрії 10 клас мерзляк)

«Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ADCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через середини ребр AB і BC та перпендикулярна до площини ABC .»

Розв’язання. Будуємо прямокутний паралелепіпед $ADCDA_1B_1C_1D_1$. На ребрах AB і BC відкладаємо відповідні середини M та K . Отже, отримуємо відповідних переріз MB_1K .

Для опису кроків для побудови зображення скористаємось *Desmos-Geometry* (див. рис. 3.1.14):

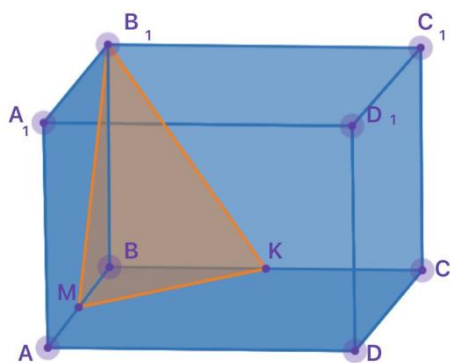
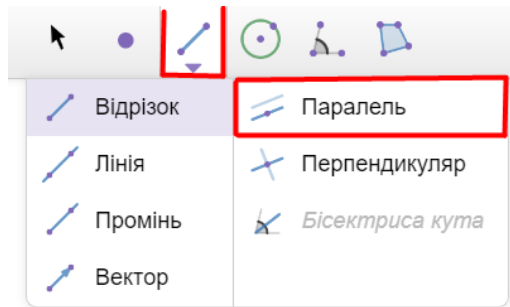


Рис. 3.1.14.

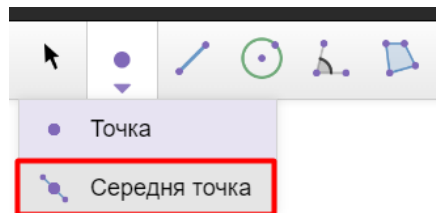
- Для початку визначимо координати всіх вершин прямокутного паралелепіпеда в тривимірному просторі. Розмістимо одну з його площин у площині XY , а вершини побудуємо за осями X , Y , і Z .
- В *Desmos* немає прямої підтримки тривимірної графіки, але побудову можна виконати через параметричні рівняння або систему ліній. В даному випадку скористаємось ознаками прямокутного паралелепіпеда. Проведемо пряму та від неї від неї її паралельні, для цього можна скористатись командою «*Паралель*».



- Далі об'єднаємо відповідні площини, створивши грані прямокутного паралелепіпеда. Для цього достатньо скористатись відповідним інструментом на панелі.



- Середину АВ і ВС шукаємо за допомогою відповідної команди. Після цього з'єднуємо відповідні точки, яка й буде перерізом.



Задача №5. [3, ст. 126, №449*].

«Знайдіть косинус кута між медіанами двох граней правильного тетраедра.

Розгляньте всі можливі випадки.»

Розв'язування. Нехай сторона тетраедра a . Тоді, враховуючи що $AK=KB$,

$BM=MC$, $DN=NC$, маємо, що із $\triangle KDM$: $DK = \frac{a\sqrt{3}}{2} = DM$, KM – середня лінія,

$KM = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$. Згідно з теоремою косинусів:

$$\cos \angle KDM = \frac{DK^2 + DM^2 - KM^2}{2DK \cdot DM} = \frac{\frac{a^2 \cdot 3}{4} + \frac{a^2 \cdot 3}{4} - \frac{a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{6}.$$

Із $\triangle DKC$: $DK = KC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $DC = a$. Тоді

$$\cos \angle KDC = \frac{DK^2 + KC^2 - DC^2}{2DK \cdot KC} = \frac{\frac{a^2 \cdot 3}{4} + \frac{a^2 \cdot 3}{4} - a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Оскільки прямі DM і KC – мимобіжні, то побудуємо $PM \parallel KC$. За означенням, кут між OM і KC дорівнює $\angle DMP$. Тоді з $\triangle DMP$: $DM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $MP = \frac{1}{2}KC = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Далі, за теоремою Фалеса, $KP = PB$, DP – медіана. Тоді

$$DP^2 = \frac{2DK^2 + 2DB^2 - KB^2}{4} = \frac{2 \cdot \frac{3a^2}{4} + 2a^2 - \frac{a^2}{4}}{4} = \frac{13a^2}{16},$$

звідси

$$\cos \angle DMP = \frac{DM^2 + PM^2 - PD^2}{2PM \cdot DM} = \frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{16} - \frac{13a^2}{16}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{4}} = \frac{2a^2}{16} \cdot \frac{8}{6a^2} = \frac{1}{6}.$$

Оскільки DK і BN – мимобіжні, то у $\triangle KDC$ побудуємо пряму $KG \parallel DK$, а тому, за означенням, кут між DK і BN дорівнює $\angle BNG$. NG – середня лінія $\triangle KDC$. Тому

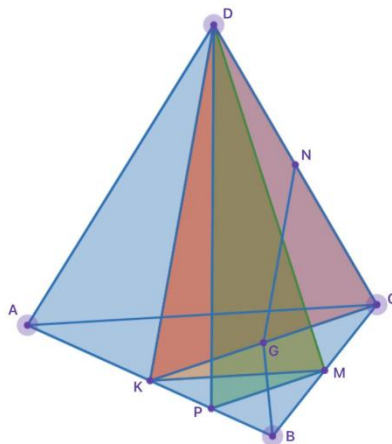
$$NG = \frac{1}{2}DK = \frac{\sqrt{3}a}{4}, \quad BN = \frac{\sqrt{3}a}{2},$$

$$BG^2 = GC^2 + BC^2 - 2BC \cdot GC \cdot \cos \angle GCB = \frac{3a^2}{16} + a^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}a}{4} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{7a^2}{16};$$

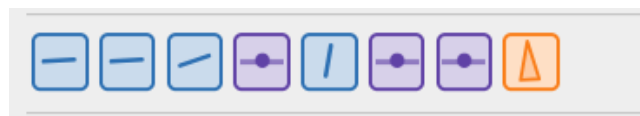
$$\cos \angle BNG = \frac{BN^2 + NG^2 - BG^2}{2BN \cdot NG} = \frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{16} - \frac{7a^2}{16}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{4}} = \frac{8a^2}{16} \cdot \frac{8}{6a^2} = \frac{2}{3}.$$

Відповідь. $\frac{2}{3}$.

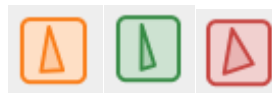
Опишемо кроки для виконання побудови зображення за допомогою програми *Desmos-Geometry*.



- Для побудови тетраедра використовуємо вкладку "Точка" (Point) для того, щоб розмістити три точки на площині для основи тетраедра. Позначимо їх як А, В, С. Зауважимо, що вершина D знаходиться над площиною (ABC);
- З'єднуємо кожну вершину з серединою протилежної сторони. Використаємо інструмент "Відрізок" для побудови кожної медіани;
- У *Desmos Geometry* немає прямого інструменту для векторного аналізу.
- Зауважимо, що програма автоматично вирівнює об'єкти за певною логікою у ряди для спрощення їх візуального сприйняття;



- Для кращої візуалізації всіх можливих варіантів відокремимо дані площини.

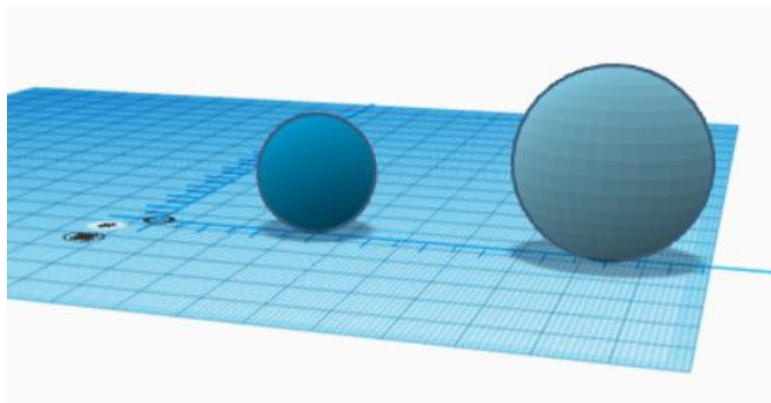


Під час вивчення теми «**Тіла обертання**» учні мають ознайомитись із циліндром, конусом, сферою та кулею, які утворюються шляхом обертання плоских фігур навколо своєї осі. Важливим аспектом також є дослідження симетрій в цих фігурах (площинна, центральна тощо).

Задача (авторська). На площині α позначили дві сфери, відстань між їх центрами – 15 см. Чи перетнуться вони, якщо діаметр першої сфери 8 см, іншої – 14 см.

Розв'язання. Нехай r_1 — радіус першої сфери, тоді $r_1 = \frac{d_1}{2} = 4$ (см). Відповідно, r_2 — радіус другої сфери, тоді $r_2 = \frac{d_2}{2} = 7$ (см). Позначимо через d відстань між центрами цих кіл та складемо відповідну рівність: $d = r_1 + r_2 \Rightarrow 15 \neq 4 + 7 \Rightarrow 15 \neq 11$. Отже, сфери не перетинаються.

Малюнок побудуємо в програмі *TikerCAD*:



- Для зручності побудови сфер скористаємось «Лінійкою»:



- Побудуємо відповідно сфери, скориставшись інструментом «Куля». Розміри об'єктів редагуються з екрану, адже одразу задати їх тут неможливо.

Задача №6. ([26, ст. 56, №5.15]). «У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра цієї основи під кутом 120° , а із центра верхньої основи — під кутом 60° . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо довжина даної хорди дорівнює 6 см.»

Розв'язання. Розглянемо $\triangle AOB$ – рівнобедрений та знайдемо радіус r вписаного кола. Для цього скористаємось теоремою косинусів:

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 = 2AO \cdot OB \cos 120^\circ;$$

$$36 = 2r^2 + 2 \cdot r^2 \cdot \frac{1}{2} = 3r^2;$$

$$r^2 = 12 \Rightarrow r = 2\sqrt{3}(\text{см}).$$

Скористаємось співвідношеннями для прямокутного $\triangle AHB$:

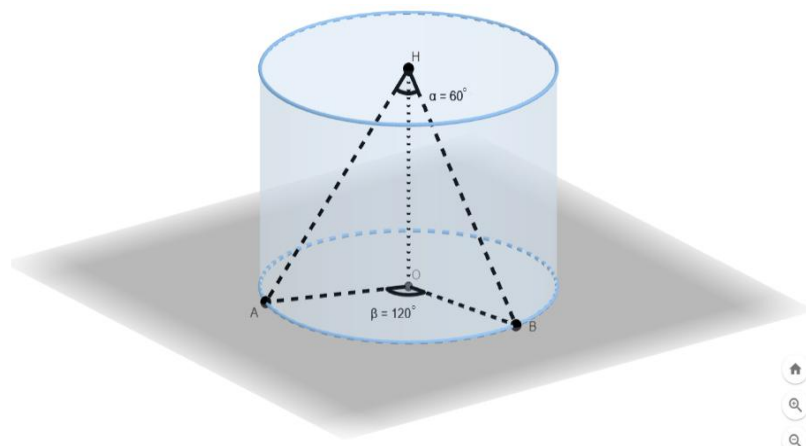
$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{HO} \Rightarrow HO = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 \cdot 3 = 6 (\text{см}).$$

Звідси

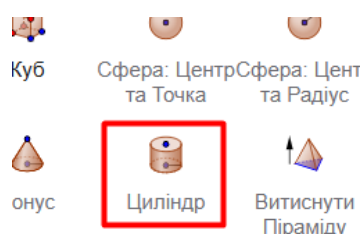
$$S_{\text{б}} = 2\pi r h = 2\pi \cdot 2\sqrt{3} \cdot 6 = 24\sqrt{3} (\text{см}^2).$$

Відповідь. $24\sqrt{3}(\text{см}^2)$.

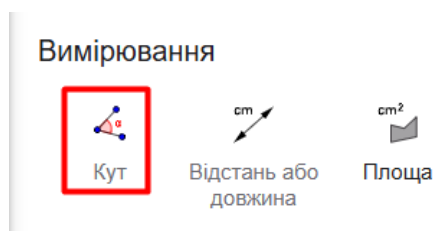
Наведемо кроки для побудови зображень у *Geogebra*.



- Відкриємо графічний 3D калькулятор, в якому скористаємося відповідним інструментом «Циліндр» із вкладки Тіла.



- Задавши значення, проведемо висоту піраміди OH . Для перевірки правильності виконання, виміряємо значення кутів за допомогою функції «Вимірювання кутів».



Шкільний курс геометрії закінчується на темі «**Об’єми та площі поверхонь геометричних тіл**». Саме тут учні вчаться обчислювати площі та об’єми фігур, розглядаючи їхні перерізи. Завдяки цим вмінням учні розвивають навички орієнтації в просторі. Матеріал, вивчений протягом даної теми, узагальнює набуті знання з геометрії, демонструючи їхню користь в реальному житті чи при підготовці до вступних іспитів.

Задача №7. «Ребра похилої трикутної призми дорівнюють 5 см, 5 см і 6 см. Знайти об'єм призми, якщо бічне ребро 5 см.»

Розв'язання. Оскільки, згідно з умовою, $ABCFED$ – трикутна призма з відомими сторонами трикутника в основі, то знайдемо площу основи $\triangle ABC$ за допомогою формули Герона:

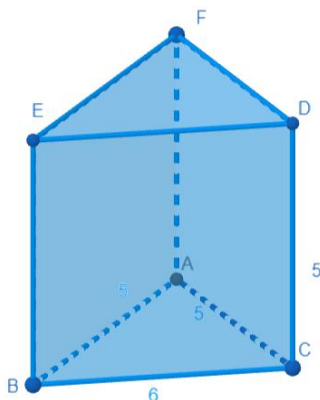
$$p = \frac{AB+BC+AC}{2} = \frac{5+5+6}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ (см)};$$

$$S_{\text{осн.}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{8(8-6)(8-5)(8-5)} = \\ = \sqrt{8 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = 12(\text{см}^2).$$

Отже, $V = S_{\text{осн.}} \cdot h = 12 \cdot 5 = 60(\text{см}^3)$.

Відповідь. $60(\text{см}^3)$.

Для побудови малюнку скористаємось *Geogebra*:



- Задамо відповідні координати для A, B, C . Скористаємось інструментом «Призма». Програма автоматично обчислює об'єм фігури, значення при обчисленні вийшли такі ж.



3.2. Розробка уроку з використанням елементів *Geogebra*

Впровадження програмно-педагогічних навичок в навчальний процес дозволяє відтворювати складні геометричні концепції. Скористаємось програмним забезпеченням *Geogebra* для побудови зображень.

План конспект уроку наведено «Додаток 1».

Задача №8. [26, ст. 88, № 10.13].

«Через кінець діаметра кулі радіуса R проведено площину, яка утворює із цим діаметром кут α , $\alpha \neq 90^\circ$. Знайдіть площу утвореного перерізу кулі.»

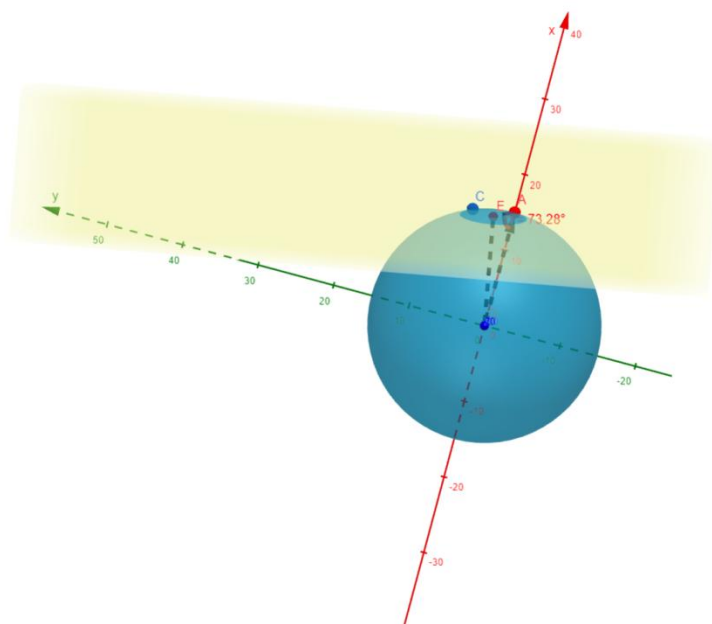
Розв’язання. Згідно з умовою, кут $\alpha \neq 90^\circ$ (пропонуємо учням з допомогою програми **Geogebra** перевірити дану умову). Розглянемо $\triangle EAO$, у якому

$$\cos \alpha = \frac{EA}{R} \Rightarrow EA = R \cos \alpha.$$

Звідси $S_{\text{пер}} = \pi EA^2 = \pi R^2 \cos^2 \alpha$.

Відповідь. $\pi R^2 \cos^2 \alpha$.

Кроки для побудови зображення:



- Скористаємось інструментом для малювання сфери. У вкладці «Тіла» обираємо – «Сфера»: Центр та радіус. Встановлюємо центр сфери в точці O з координатами $(0,0,0)$, радіус сфери вибираємо як змінну R .

- Проводимо відрізок OA від центру O до точки $A(0; 0; R)$.

- Обираємо інструмент "Площина через три точки". Обираємо точку A , як одну з точок площини. Точки B та C вибираємо, задавши їх координати: $B = (R \cos(\alpha), R \sin(\alpha), 0)$; $C = (R \cos(\alpha), 0, R \sin(\alpha))$.

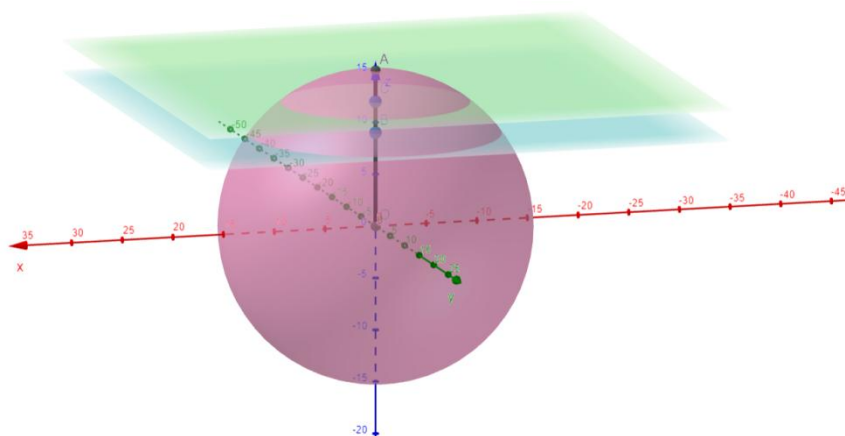
- Скориставшись інструментом «Перетин», визначаємо точку перетину перпендикуляра й площини.

Задача №9. [26, ст. 89, №10.24]

«На радіусі OA сфери із центром у точці O позначено точки B і C , причому точка B лежить між точками O і C . Через кожну з точок B і C проведено площину, перпендикулярну до прямої OA . Кола, що утворились внаслідок перетину сфери площинами, мають довжини 24π см і 18π см, а відстань між цими площинами дорівнює 3 см. Знайдіть радіус сфери.»

Розв'язання. Для побудови рисунка до задачі в програмі *Geogebra*, виконаємо наступні кроки.

- Скористаємось інструментом для малювання сфери. У вкладці «Тіла» обираємо – Сфера: Центр та радіус. Встановлюємо центр сфери в точці O (0,0,0), а радіус сфери — як змінну R .
- Проводимо відрізок OA від центру O до точки $A(0; 0; R)$.
- Визначаємо координати точок B і C на відрізку OA . Нехай координати точок будуть $(0,0,R_1)$ і $(0,0,R_2)$, де $R_1 < R_2$ і обидві точки лежать на вісі Oz .
- Для створення площин через точки B і C скористаємось інструментом «Площина через точку, перпендикулярна до прямої». Обираємо точку і відповідно радіус, на якому вона лежить.



Нехай C_1 довжина кола, утвореного перетином сфери й площини. Тоді $C_1 = 24\pi = 2\pi R_1 \Rightarrow R_1 = 12(\text{см})$. Звідси, $C_2 = 18\pi = 2\pi R_2 \Rightarrow R_2 = 9(\text{см})$.

Згідно з умовою, $R_2 - R_1 = 3$ (см). Складемо рівняння, з якого знайдемо довжину радіуса:

$$\sqrt{R^2 - 9^2} - \sqrt{R^2 - 12^2} = 3; \sqrt{R^2 - 81} = 3 + \sqrt{R^2 - 144};$$

$$R^2 - 81 = 9 + 6\sqrt{R^2 - 144} + R^2 - 144; 6\sqrt{R^2 - 144} = 144 - 81 - 9;$$

$$6\sqrt{R^2 - 144} = 54; \sqrt{R^2 - 144} = 9;$$

$$R^2 - 144 = 81; R^2 = 225; R = 15 \Rightarrow OA = 15 \text{ (см)}.$$

Відповідь. 15 см.

Задача № 10. [26, ст.89, №10.21]

«На поверхні кулі позначено точки A, B і C такі, що $AB = BC = 15$ см, $\angle ABC = 120^\circ$. Знайдіть відстань від центра кулі до площини ABC , якщо радіус кулі дорівнює 17 см.»

Розв'язання. У $\triangle ABC$ знайдемо невідому сторону, скориставшись теоремою косинусів:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B; AC^2 = 225 + 225 - 2 \cdot 15 \cdot 15 \cdot \cos 120^\circ;$$

$$AC^2 = 450 - 2 \cdot 15 \cdot 15 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$AC^2 = 450 + 225;$$

$$AC^2 = 675; AC = 15\sqrt{3}.$$

Площина трикутника утворює в перетині з кулею круг радіуса DB :

$$DB = \frac{AC}{2 \cdot \sin \angle 120^\circ} = \frac{15\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 15 \text{ (см)}.$$

Розглянемо прямокутний $\triangle OBD$, за теоремою Піфагора:

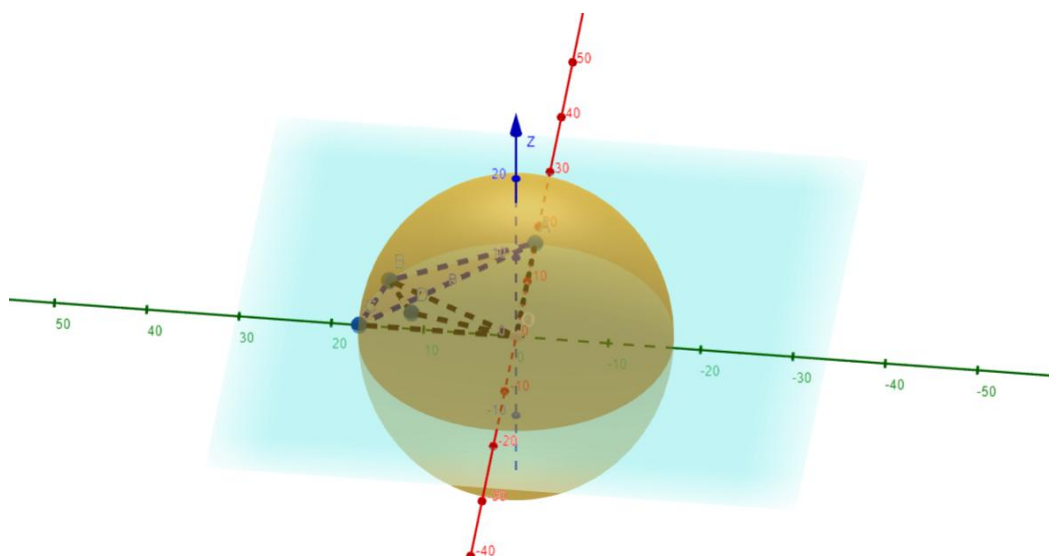
$$OD = \sqrt{OB^2 - DB^2}; OD = \sqrt{17^2 - 15^2}; OD = \sqrt{289 - 225};$$

$$OD = \sqrt{64}; OD = 8 \text{ (см)}.$$

Відповідь. 8 см.

Опишемо кроки для побудови зображення:

- Скористаємось інструментом для малювання сфери. Із вкладки «Тіла» обираємо інструмент "Сфера з центром та радіусом". Вводимо координати центра кулі (0,0,0) і радіус 17.



- Щоб точка B відповідала умовам $AB = BC = 15\text{см}$ і $\angle ABC = 120^\circ$, введемо точку B за допомогою формули для кола. Відповідно будемо інші точки.
- Обираємо інструмент "Трикутник" і натисніть на точки A , B та C . Виберіть інструмент "Площина через три точки".
- Із вкладки «Лінії та многокутники» обираємо інструмент «Перпендикулярна пряма», із вершини O опускаємо на площину (ABC) перпендикуляр OD .

Задача №11. [26, ст. 90, №10.36].

«Сторони трикутника дорівнюють 17 см, 28 см і 39 см та дотикаються до даної сфери. Відстань від центра сфери до площини цього трикутника дорівнює 12 см. Знайдіть радіус сфери.»

Розв’язання. Знайдемо площу $\triangle ABC$ для цього скористаємось формулою Герона:

$$p = \frac{AB + DC + CA}{2} = \frac{17 + 28 + 39}{2} = 42(\text{см}).$$

$$S = \sqrt{42(42 - 17)(42 - 28)(42 - 39)} = \sqrt{42 \cdot 25 \cdot 3 \cdot 14} = 210\text{см}^2.$$

Скористаємось іншими формулами площі:

$$S = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{210}{42} = 5.$$

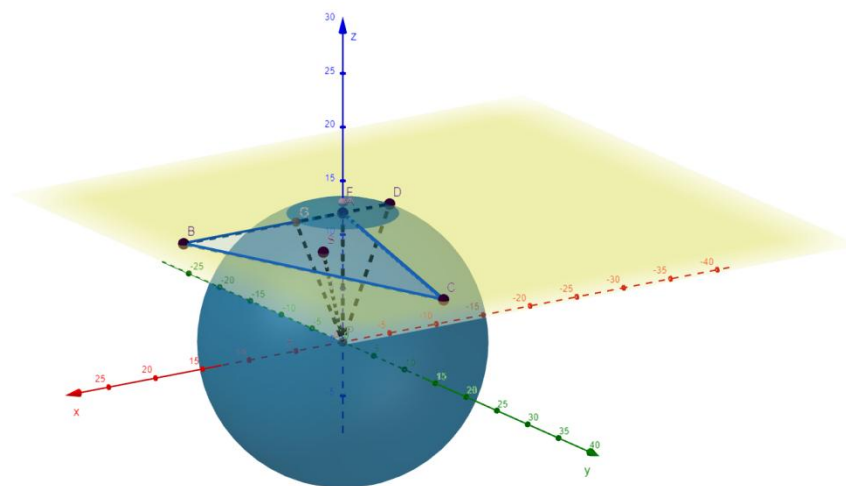
Відстань від центра сфери до площини $\triangle ABC$ дорівнює $d = OS = 12$ (см).

Радіус сфери R можна знайти за формулою:

$$R = \sqrt{OS^2 + r^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13(\text{см}).$$

Відповідь. 13 см.

Для побудови малюнка в програмі *Geogebra*, скористаємось наступними кроками:



- Відкрийте *Geogebra* і перейдіть у тривимірний режим (3D Graphics). У рядку введення введіть координати центра сфери, наприклад, точку $O(0,0,0)$, і натисніть Enter.
- Виберіть інструмент "Сфера" в меню *Geogebra*. Вкажіть центр сфери (точка O) та введіть радіус сфери, у. Сфера з центром у точці $O(0, y, 0)$ та заданим радіусом з'явиться на екрані.
- Обираємо три точки для трикутника, який буде дотикатися до сфери. Вводимо ці точки на площині $z = 12$, уникаючи конкретних координат, переконавшись, що сторони трикутника дорівнюють 17 см, 28 см і 39 см.
- Із вкладки лінії та багатокутники скористаємось інструментом "Трикутник" і натискаємо на точки A, B та C. Після цього використовуємо інструмент "Площина через три точки".
- Використаємо інструмент "Відрізок" для побудови відрізка, який з'єднає центр сфери з будь-якою точкою трикутника. Це буде і радіус сфери.

3.3. Розробка уроку з використанням елементів GRAN-3D

Скористаємось програмним забезпеченням GRAN-3D для побудови зображень. План-конспект такого уроку ми навели у Додатку 2.

Задача №12. «Основою піраміди $DABC$ є трикутник ABC такий, що $\angle ABC = 120^\circ, AB = BC$. Кожне бічне ребро піраміди утворює з площиною основи кут 45° і дорівнює 8 см. Знайдіть площу основи піраміди.»

Розв'язання. Проведемо перпендикуляр DH . Звідси отримуємо, що $\triangle ADH$ прямокутний рівнобедрений. Тому $DH = AH = 8\sqrt{2}(\text{см}) \Rightarrow AC = 8\sqrt{2}(\text{см})$.

Розглянемо $\triangle ABC$, у якому сторони невідомі. Нехай $AB = BC = a$. Тоді скористаємось теоремою косинусів для знаходження невідомої значень:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle B;$$

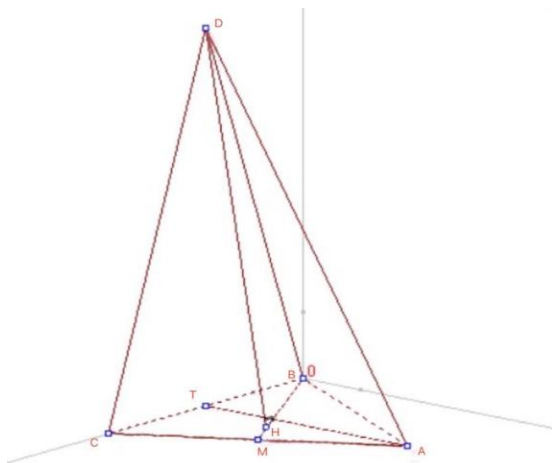
$$128 = 2a^2 + 2a^2 \cdot \frac{1}{2};$$

$$3a^2 = 128 \Rightarrow a^2 = \frac{128}{3} \Rightarrow a = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{6}}{2}.$$

Знайдемо площу цього трикутника:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle B = \frac{1}{2} \cdot \frac{8\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{8\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{64 \cdot 6 \cdot \sqrt{3}}{3 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{64\sqrt{3}}{2} \text{ см}^2.$$

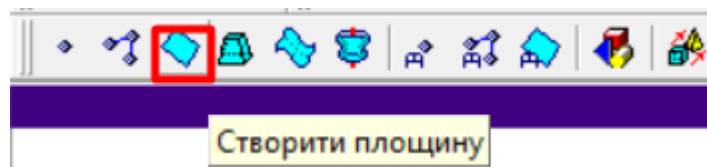
Відповідь. $\frac{64\sqrt{3}}{2} \text{ см}^2$.



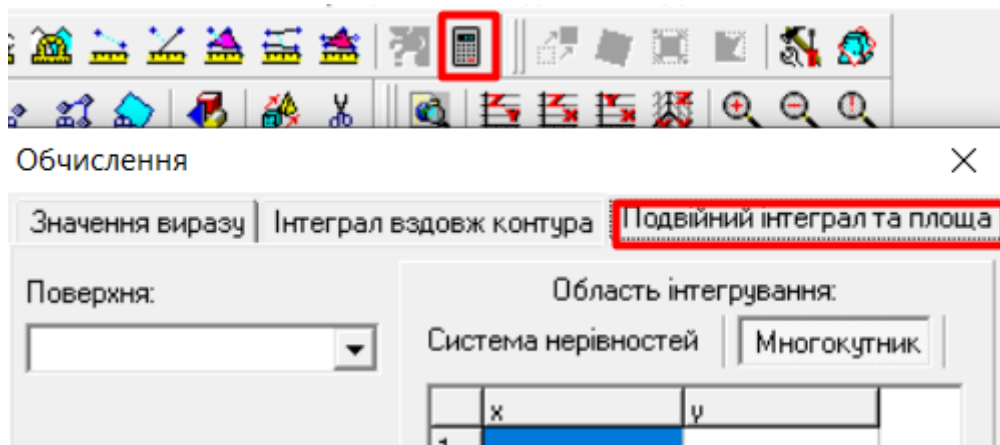
Опишемо алгоритм побудови малюнку в програмі GRAN-3D.

- Створити піраміду можна автоматично, якщо вона правильна. В

нашому випадку це не так, тому будемо вводити кожен крок самостійно. Для цього скористаємось інструментом «Площина через 3 точки» та введемо координати точок A, B, C .



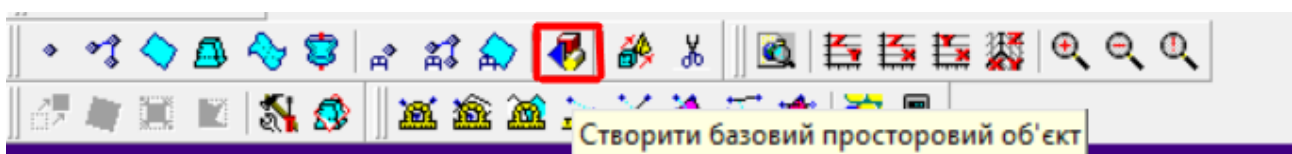
- Скористаємось інструментом «Створити точку» та побудуємо D . Від неї відкладемо відповідні відрізки. Утвориться піраміда.
- За тим же алгоритмом відкладемо інші точки. Із вершини D опустимо перпендикуляр на площину основи піраміди. Скористаємось інструментом для обчислення площі для перевірки правильності розв'язування.



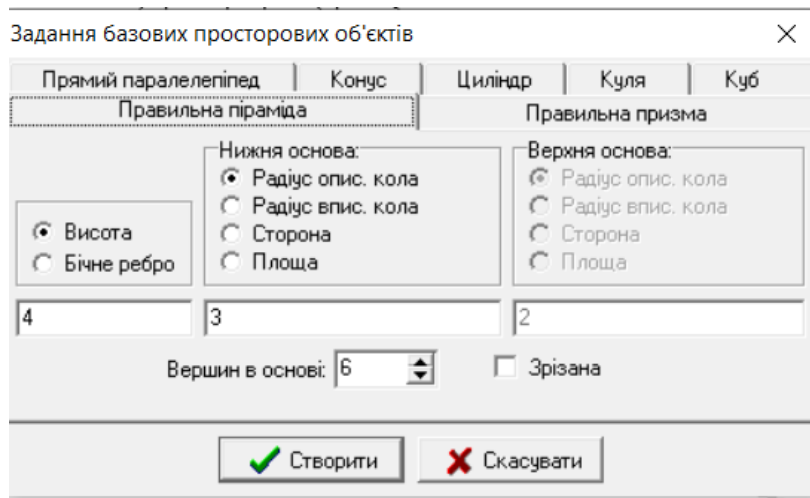
Задача №13. «Бічне ребро правильної шестикутної піраміди, що дорівнює b , утворює з площиною основи кут β . Знайдіть площу діагонального перерізу піраміди, який проходить через більшу діагональ основи.»

Розв'язання. Для побудови малюнку до задачі в програмі GRAN-3D скористаємось наступними кроками:

- Для створення правильної шестикутної піраміди можемо скористатись двома способами: вводити з клавіатури кожену точку чи скористатись інструментом під назвою «Створити базовий просторовий об'єкт».

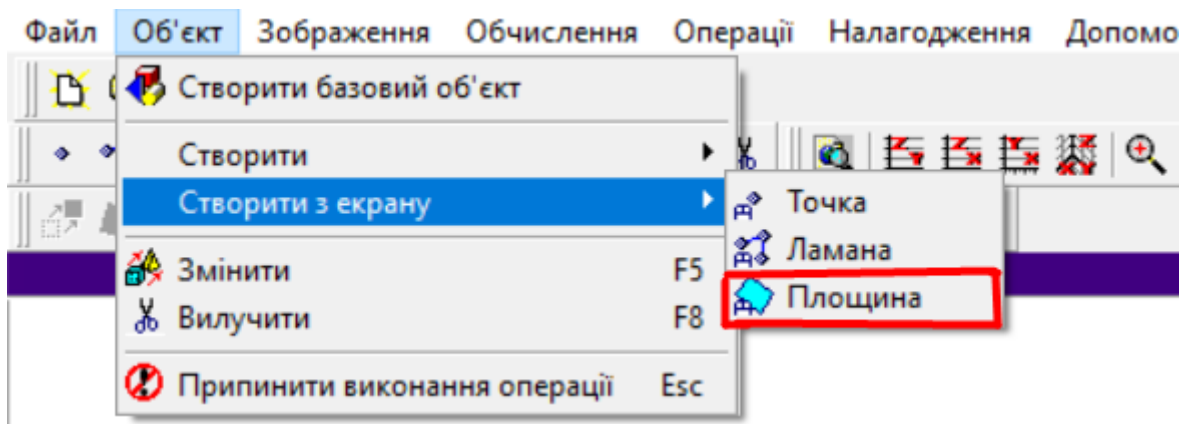


Відкривши діалогове вікно, одразу можна налаштувати потрібні виміри для фігури:

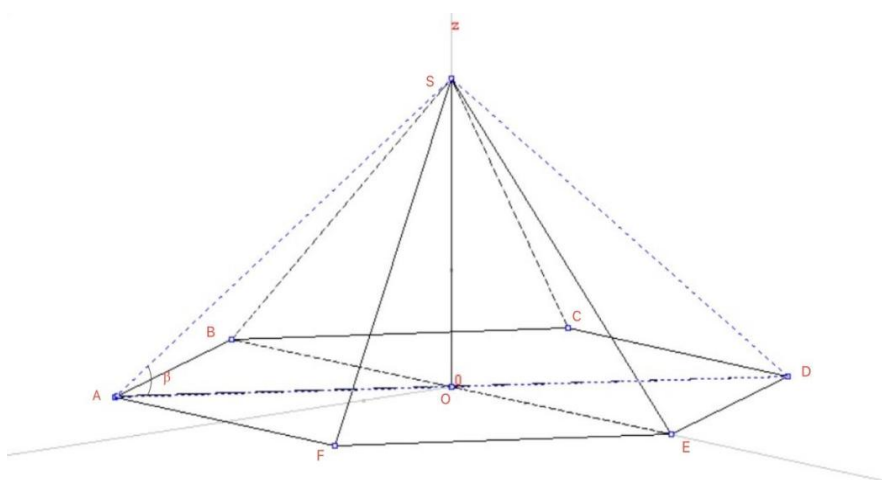


- Проведемо діагоналі AD та BE . Для цього скористаємось командою «Створити ламану». Точка O , центр перетину діагоналей. Також за допомогою цієї програми проведемо перпендикуляр із вершини S до точки O .

- Скористаємось інструментом, щоб визначити діагональний переріз «Створити площину» додатково, обираючи команду «Створити з екрану»:



Отримаємо такий рисунок:



Із умови одразу можемо, зрозуміти, що $AD = 2AB$. Розглянемо прямокутний трикутник $\triangle ASO$ та скористаємось тригонометричними співвідношеннями:

$$\sin\beta = \frac{SO}{SA} = \frac{SO}{b} \Rightarrow SO = b \cdot \sin\beta.$$

Також

$$\cos\beta = \frac{AO}{SA} \Rightarrow AC = b \cdot \cos\beta \Rightarrow AD = 2b \cdot \cos\beta.$$

Знайдемо площу діагонального перерізу:

$$S_{SAD} = \frac{1}{2} AD \cdot SO = \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot \cos\beta \cdot \sin\beta = b^2 \cdot \cos\beta \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} b^2 \cdot \sin 2\beta.$$

Відповідь. $\frac{1}{2} b^2 \cdot \sin 2\beta$.

Задача №6. «Основою піраміди є квадрат $ABCD$. Грань SAD — правильний трикутник, площина якого перпендикулярна площині основи. Знайдіть кут нахилу грані SBC до основи.»

Розв'язання. Розглянемо задану піраміду $SABCD$. В її основі $ABCD$ — квадрат. Грань SAD є правильним трикутником, причому $(SAD) \perp (ABCD)$. Звідси випливає, що $SH \perp (ABCD)$, де SH — висота трикутника SAD .

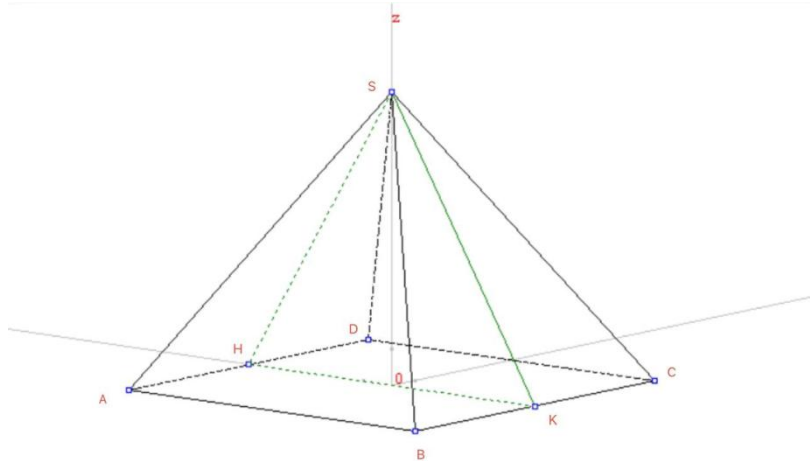
Проведемо $HK \parallel AB$, оскільки $AB \perp BC$, то $HK \perp BC$. SK — похила, HK — її проекція. Тоді, згідно з теоремою про три перпендикуляри, $SK \perp BC$.

$\angle SKH = \beta$ — шуканий лінійний кут двогранного кута. Нехай $AB = AS = HK = x$. Тоді з $\triangle SAD$: $SH = \frac{\sqrt{3}}{2} x$. Нарешті, з прямокутного $\triangle SHK$:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{SH}{HK} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

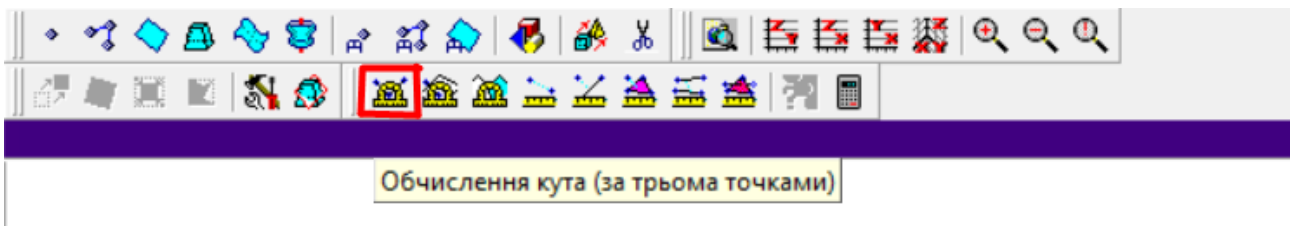
Відповідь: $\operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

Опишемо кроки для побудови рисунка до цієї задачі у програмі GRAN-3D.



- Створюємо за допомогою інструменту «Створити многогранник» чотирикутник (паралелограм $ABCD$). З'єднуємо із точкою S всі його вершини. Утворюється піраміда.

- Перевіримо чи дійсно SH та SK перпендикулярні до площини основи ($ABCD$). Для цього скористаємось інструментом «Обчислення кута». Іншим способом – можемо побудувати нормальні вектори до площини основи і грані, щоб візуально перевірити перпендикулярність.



- Будуємо шуканий двогранний кут.

Література

1. <https://naurok.com.ua/doslidzhenn-formuvannya-tehnologichno-kompetentnosti-uchniv-starsho-shkoli-zasobom-navchannya-rozv-yazuvannya-geometrichnih-zadach-v-komp-yuternih-programnih-seredovischah-103254.html>
2. <https://naurok.com.ua/rozv-yazki-zavdannya-zno-z-matematiki-iii-chastina-92130.html>
3. Геометрія: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл.:профіль. рівень / Г.П. Бевз, В. Г. Владіміров. – К.: Генеза, 2010. – 232 с.:іл. – Бібліогр.:с. 221;
4. <https://teaching.cambriancollege.ca/technologies/desmos-for-the-classroom/>
5. <https://help.desmos.com/hc/en-us/articles/15364983456909-Transformations-Desmos-Geometry>
6. <http://dspace.nbuv.gov.ua/bitstream/handle/123456789/58663/75-Kurilov.pdf?sequence=1>
7. Інформаційно-комунікаційні технології в сучасній освіті: досвід, проблеми, І. Збірник наукових праць. Випуск 5. / За ред. М.М. Козяра, Н.Г. Ничкало. – Львів: ЛДУ БЖД, 2017. – 400 с.
8. Сучасні завдання цифрової трансформації освіти (2020) Вісник Кафедри ЮНЕСКО «Неперервна професійна освіта ХХІ століття» №1, 2020: наук. журнал / Биков В., Спірін О., Пінчук О. голов. ред. Г.І.Сотська. – Київ : ТОВ «Талком», 2020. – 83 с.
9. https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/618/4/Multymed_syst_posibn.pdf
10. <https://naurok.com.ua/vikoristannya-multimediynih-tehnologiy-v-osvitnomu-procesi-195133.html>
11. <https://buki.com.ua/news/6-resursiv-yaki-zaminyat-doshku-vchytelya-pid-chas-onlayn-zanyattya/>
12. https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/724863/1/ZB_III_--_28-04-2021_compressed%20%281%29.pdf
13. Сучасні завдання цифрової трансформації освіти (2020) Вісник Кафедри ЮНЕСКО «Неперервна професійна освіта ХХІ століття» №1, 2020: наук. журнал / Биков В., Спірін О., Пінчук О. голов. ред. Г.І.Сотська. – Київ : ТОВ «Талком», 2020. – 83 с.
14. <https://childdevelop.com.ua/articles/develop/9988/>
15. Ачкан В. Педагогічні інновації як необхідна складова модернізації математичної освіти / Віталій Ачкан // Математика в рідній школі. – 2015. – № 7-8. – С. 47-52.
16. http://vyshneve-school3.edukit.kiev.ua/Files/downloads/%D0%BF%D0%BE%D1%81%D1%96%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D0%BA_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B

[5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0%20_%D0%91%D0%BE%D0%B3%D0%B0%D1%87.pdf](#)

17. Мороз Л., Ковалюк В., Масло І. Використання мобільних додатків у процесі вивчення англійської мови. Інноватика у вихованні. 2023. № 17. – С. 224-230. DOI: 10.35619/iiu.v1i17.514
18. <https://hostiq.ua/wiki/ukr/g-suite-for-education/>
19. Система динамічної математики GeoGebra як іноваційний засіб для вивчення математики / В. М. Ракута // Інформаційні технології і засоби навчання. — 2012. — № 4 (30).
20. <https://osvita.ua/school/method/91206/>
21. Комп'ютер на уроках геометрії: Посібник для вчителів / М. І. Жалдак, О. В. Вітюк. – К: РНЦ „ДІНІТ”, 2004 – 168 с.:іл.
22. D. Materlik and U. Kortenkamp A Parser For Natural Language Descriptions of Geometric Constructions, Technical Report, Freie Universit at Berlin, to appear (2002).
23. <https://amazoniainvestiga.info/index.php/amazonia/article/view/1928/2565>
24. Гриб'юк О.О. Використання теорії розв'язування дослідницьких задач у контексті проектнодослідницької діяльності в процесі навчання математики / О.О. Гриб'юк, В.Л. Юнчик // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми // Зб. наук. пр. – Випуск 44 / – Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2016. – С. 153-163. ISSN 2412-1142. ISBN 978-966-2337-01-3.
25. <https://mon.gov.ua/osvita-2/zagalna-serednya-osvita/osvitni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>
26. Геометрія : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. — Х. : Гімназія, 2019. — 204 с. : іл.
27. Дімнич Я.Ю. Програмно-педагогічні засоби та їх застосування на уроках геометрії в старшій школі ЗЗСО». – Рукопис. Кваліфікаційна робота на здобуття другого (магістерського) рівня вищої освіти за спеціальністю 014 «Середня освіта (Математика)». – Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, 2024.
28. <https://vseosvita.ua/library/kula-i-sfera-vzaemne-rozmisenna-plosini-i-kuli-sferi-u-prostori-50722.html>
29. <https://vseosvita.ua/library/urok-piramida-pravilna-piramida-456171.html>

Тема: Куля. Взаємне розміщення сфери та площини

Клас: 11

Мета:

- **навчальна:** ознайомити учнів із поняттями кулі та сфери, навчити визначати типи взаємного розміщення сфери та площини (перетин, дотик, віддаленість) та розв'язувати відповідні завдання;
- **розвивальна:** розвивати пам'ять, логічне мислення, увагу та спостережливість; сприяти формуванню просторової уяви та вдосконаленню комунікативних навичок через обговорення розв'язків задач;
- **виховна:** виховувати здатність орієнтуватися в математичному просторі; формувати відповідальність та вміння працювати в групі чи парі.

Тип уроку: комбінований;

Компетенції:

- **логічне мислення та аналіз** (*розвивають уміння доводити властивості кулі та сфери, наприклад, рівність всіх точок сфери відносно її центра*);
- **математичні** (*уміють використовувати формули для обчислення площі поверхні та об'єму в задачах*);
- **моделювання** (*відтворюють задачі на взаємне розташування сфери з геометричними об'єктами: площиною, прямою, іншою кулею*).

Обладнання та наочність: зошити, циркуль, підручники, дошка, проектор, ноутбук.

Методика та прийоми проведення уроку: бесіда, лекція.

Використана література:

- Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К./Математика в 10-му класі: Книга для вчителя. — Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2013. — 304 с.
- Михайленко В. Є., Ковальов С. М. та ін. Корисна геометрія : підручник для вузів. — К. : Вища школа, 2013. — 134 с.
- А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. Геометрія : проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти /— Х. : Гімназія, 2019. — 204 с. : іл.

Хід уроку

I. Організаційний етап (2 хв.)

1. Привітання з класом.
2. Перевірка присутніх.
3. Перевірка готовності учнів до уроку.

II. Мотивація навчальної діяльності. Повідомлення теми, мети і завдання уроку (2 хв.)

Бесіда

III. Повторення та активізація опорних знань (7 хв.)

Ви — архітектори, які проектують ідеальний планетарій. Щоб створити його купол, вам потрібно обрати правильну форму. Як ви думаєте, чому багато куполів, обсерваторій та навіть стадіонів роблять у вигляді сфери чи частини кулі?

IV. Первинне осмислення матеріалу (14 хв.)

Кулею називається тіло, утворене обертанням круга навколо його діаметра.

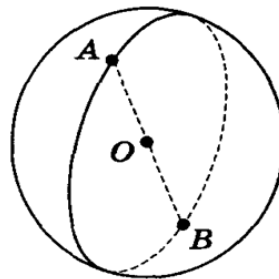


Рис. 135

Сферою називається фігура, утворена обертанням кола навколо його діаметра.

Демонструємо моделі куль та сфер. Можна дати інші означення сфери і кулі:

Сферою називається поверхня, яка складається із всіх точок простору, що знаходяться на даній відстані (яка називається *радіусом*) від даної точки (яка називається *центром*).

Відрізок, який з'єднує центр сфери з точкою сфери, називається *радіусом сфери*. Відрізок, який з'єднує дві точки сфери і проходить через центр сфери, називається *діаметром сфери*.

На *рис. 135* точка O — центр сфери, OA, OB — радіуси сфери, AB — діаметр сфери.

Кулею називається тіло, яке складається із всіх точок простору, які знаходяться на відстані не більшій даної (яка називається *радіусом кулі*) від даної точки (яка називається *центром кулі*).

Площина, яка проходить через центр кулі (*сфери*), називається *діаметральною площиною*. Переріз кулі (*сфери*) діаметральною площиною називається *великим кругом* (*великим колом*).

Взаємне розміщення площини і кулі (сфери) в просторі.

Запитання до учнів (робота з класом).

Як можуть розміщуватися в просторі куля (сфера) і площина? Нехай відстань від центра кулі (сфери) до площини дорівнює d , а радіус кулі (сфери) дорівнює r . Можливі три випадки (рис. 136).

1. Якщо $d > r$, то площина і куля (сфера) не мають спільних точок (рис. 136, а).
2. Якщо $d < r$, то площина і куля (сфера) перетинаються по колу (колу) радіуса $O_1A =$ (рис. 136, б).
3. Якщо $d = r$, то площина і куля (сфера) мають тільки одну спільну точку (рис. 136, в).

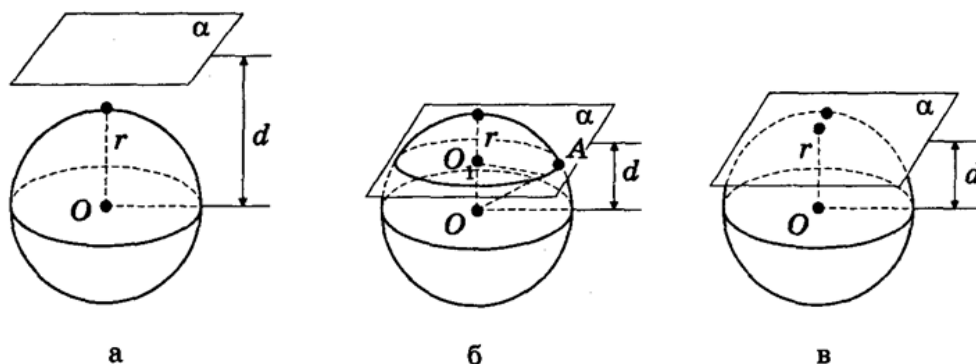


Рис. 136

V. Первинне закріплення матеріалу (17 хв.)

Для пояснення задач скористаємось програмний засобом *Geogebra 3D*

Підведення підсумків уроку (2 хв.)

1. Що таке куля? Що така сфера?
2. Найбільше вам сподобалось ...

VI. Домашнє завдання (1 хв.)

Опрацювати § 10. Виконати №10.22, №10.12.

Для створення даного уроку запозичили матеріал із уроку [28].

Тема: Піраміда

Клас: 11

Мета:

- **навчальна:** ознайомити учнів із поняттям піраміди, її елементами (основа, вершина, висота, бічні грані), класифікацією (правильна, неправильна), навчити визначати площу поверхні та об'єм піраміди, а також розв'язувати задачі на побудову та дослідження пірамід;
- **розвивальна:** розвивати пам'ять, логічне мислення, увагу та спостережливість; сприяти формуванню просторової уяви та вдосконаленню комунікативних навичок через обговорення розв'язків задач.
- **виховна:** виховувати здатність орієнтуватися в математичному просторі; формувати відповідальність та вміння працювати в групі чи парі.

Тип уроку: подання нових знань;

Компетенції:

- **логічне мислення та аналіз** (*розвивають уміння доводити властивості піраміди, наприклад, рівність бічних граней у правильній піраміді чи співвідношення між елементами піраміди (основа, висота, апофема)*);
- **математичні** (*орієнтуються у властивостях правильної піраміди та застосовують їх під час розв'язування задач*);
- **моделювання** (*відтворюють задачі на побудову піраміди та її елементів, наприклад, висоти, апофеми чи осьового перерізу*);

Обладнання та наочність: зошити, циркуль, підручники, дошка, проектор, ноутбук.

Методика та прийоми проведення уроку: бесіда, лекція

Використана література:

- Геометрія. 10-11 класи : пробний підручник / О. М. Афанасьєва [та ін.]. — Тернопіль : Навчальна книга — Богдан, 2018. — 264 с.

- А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. Геометрія : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / Х. : Гімназія, 2019. — 204 с.

Хід уроку

I. Організаційний етап (2 хв.)

1. Привітання з класом.
2. Перевірка присутніх.
3. Перевірка готовності учнів до уроку.

II. Мотивація навчальної діяльності. Повідомлення теми, мети і завдання уроку (2 хв.)

Бесіда

III. Повторення та активізація опорних знань (7 хв.)

- Що таке багатокутник? Як ми визначаємо його периметр і площу?
- Що ви знаєте про об'єм та площу поверхні геометричних фігур? Як ми їх обчислюємо?
- Що таке призма? Чим вона може бути схожа на піраміду?

IV. Первинне осмислення матеріалу (17 хв.)

Пірамідою називається многогранник, одна грань якого — довільний n -кутник, всі інші n граней — трикутники, що мають спільну вершину.

Демонструються моделі пірамід.

Спільну вершину трикутних граней називають *вершиною піраміди*, протилежну їй грань — *основою*, а всі інші грані — *бічними гранями піраміди*.

Відрізки, що сполучають вершину піраміди з вершинами основи, називають *бічними ребрами*.

Перпендикуляр, опущений з вершини піраміди на площину її основи, називають *висотою піраміди*. Висотою також називають і довжину цього перпендикуляра.

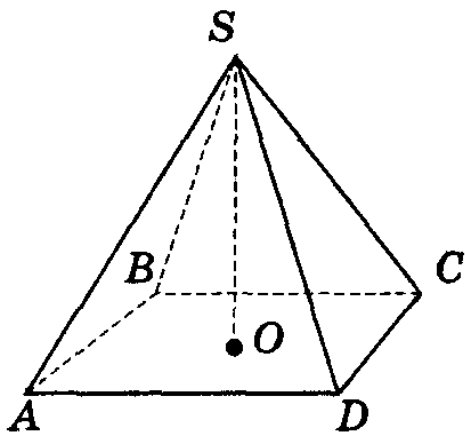


Рис. 64

На рис. 64 зображено чотирикутну піраміду $SABCD$; точка S — її вершина, $ABCD$ — основа; SA, SB, SC, SD — бічні ребра; AB, BC, CD, AD — ребра основи, SO — висота.

Трикутну піраміду називають також *тетраедром*.

Суму площ усіх бічних граней піраміди називають *площею бічної поверхні піраміди*.

$$S_{\text{бічної поверхні}} = \frac{1}{2} P_{\text{основи}} \cdot H.$$

Щоб знайти площу всієї поверхні піраміди, треба до площі $S_{\text{бічної поверхні}}$ додати $S_{\text{основи}}$ площу основи:

$$S_{\text{повної поверхні}} = S_{\text{бічної поверхні}} + S_{\text{основи}}$$

Властивість. Всі бічні ребра правильної піраміди рівні, а бічні грані — рівнобедрені трикутники.

Апофема — висота бічної грані правильної піраміди, проведена з її вершини. Цей термін вживається тільки для правильної піраміди, хоча у неправильної піраміди також можуть бути рівні висоти бічних граней.

V. Первинне закріплення матеріалу (14 хв.)

Для пояснення задач скористаємось програмний засобом *GRAN-3D*.

VI. Підведення підсумків уроку (2 хв.)

1. Як можна визначити, чи є піраміда правильною?
2. Найбільше вам сподобалось ...

VII. Домашнє завдання (1 хв.)

Опрацювати §3. Виконати № 3.14, № 3.18.

ЗМІСТ

Передмова	3
Розділ 1. Програмно-педагогічні засоби у викладанні геометрії: концепції та еволюція	4
1.1. Поняття програмно-педагогічних засобів та їх роль у навчанні геометрії	4
1.2. Етапи розвитку ППЗ для навчання геометрії	6
1.3. Інтерактивні та мультимедійні засоби в сучасному освітньому процесі	8
1.4. Перспективи та проблеми використання ППЗ у ЗЗСО із геометрії.....	10
Розділ 2. Огляд програмних засобів для вивчення геометрії	13
2.1. Популярні цифрові інструменти для вивчення геометрії в старшій школі та їх можливості	13
2.2. Інтерактивність мобільних додатків	27
2.3. Освітні онлайн-платформи для геометрії.....	30
Розділ 3. Інтеграція цифрових технологій у навчальний процес	33
3.1. Розбори задач із використанням програмних засобів	33
3.2. Розробка уроку з використанням елементів Geogebra	46
3.3. Розробка уроку з використанням елементів GRAN-3D	52
Література	57
Додаток 1.....	59
Додаток 2	62

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Бешлеу Іван Леонович

Бешлеу Мірела Георгіївна

Дімнич Яна Юріївна

Сікора Віра Степанівна

***Застосування
програмно-педагогічних засобів
на уроках геометрії
в старшій школі***

Навчально-методичний посібник