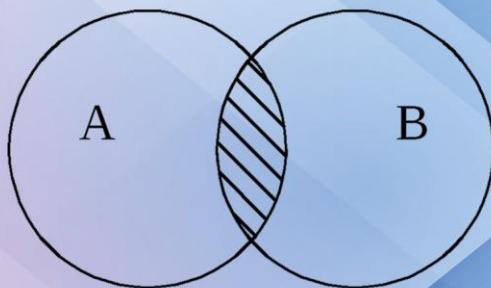

Дискретна математика

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



$$P_m = m!$$

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Укладач: Г. М. Унгурян



Чернівці

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

2026

УДК 519.1(075.8)

У 583

Рекомендовано вченою радою
факультету математики та інформатики
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича (протокол №9 від 25 лютого 2026 року)

Рецензенти:

Сидоров М.В., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки;

Стецько Ю.П., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичних проблем управління і кібернетики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

У 583

Дискретна математика : навч. пос. / уклад.
Г. М. Унгурян. Чернівці : Чернівець. нац. ун-т ім.
Ю. Федьковича, 2026. 128 с.

У виданні розглянуто такі розділи дискретної математики: теорія множин, булеві функції, комбінаторика та теорія графів. Описано фундаментальні поняття дискретної математики та наведено деякі приклади до кожного розділу.

Для студентів спеціальностей А4.09. «Середня освіта (інформатика)», А4.04. «Середня освіта (математика)», Е7. «Математика» та усіх форм навчання у закладах вищої освіти.

УДК 519.1(075.8)

© Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, 2026

© Укладачка: Г. М. Унгурян, 2026

Зміст

Вступ	5
РОЗДІЛ 1. ТЕОРІЯ МНОЖИН	8
1.1. Канторівське поняття множини	10
1.2. Множини. Операції над множинами.....	12
1.3. Основні поняття теорії множин	17
1.4. Включення множин. Поняття підмножини.....	18
1.5.Геометрична інтерпретація множин.....	22
1.6. Операції над множинами.....	25
1.7. Потужнісна класифікація множин	34
1.8. Формула включень та виключень.....	36
1.9. Декартовий добуток множин. Бінарне відношення та їх властивості	40
1.10. Відношення порядку, еквівалентності та толерантності.....	50
1.11. Функціональні відношення.....	54
РОЗДІЛ 2. БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ.....	59
2.1. Способи задання булевих функцій.....	62
2.2. Булеві формули і пріоритет операцій.....	64
2.3.Поняття двоїстості та закони булевої алгебри.....	66
2.4. Досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДФ).....	68
2.5. Досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ).....	71
2.6. Нормальні форми зображення булевих функцій	73
2.7. Алгебра Жегалкіна. Лінійні функції. Поліном Жегалкіна	75
2.8. Поліном Жегалкіна.....	78

РОЗДІЛ 3. КОМБІНАТОРИКА.....	81
3.1. Історія виникнення комбінаторики.....	83
3.2. Правило суми та правило добутку.....	85
3.3. Складний вибір предметів	97
3.4.Поняття вибірки	98
3.5. Розміщення та перестановки без повторень.....	100
3.6. Розміщення та перестановки з повтореннями.....	101
3.7. Сполучення.....	102
3.8. Властивості сполучень	104
РОЗДІЛ 4. ТЕОРІЯ ГРАФІВ.	110
4.1. Основні поняття графів	110
4.2. Деякі властивості графів.....	117
4.3. Шляхи та цикли. Зв'язність.....	121
4.4. Ізоморфізм графів.....	123
4.5. Ейлерові та Гамільтонові графи.....	124
4.6. Деревя.....	125
Список літератури.....	127

Вступ

Дискретна математика – це розділ математики, що досліджує структури, які складаються з окремих, чітко відокремлених елементів. Іншими словами, вона працює з об'єктами, які можна чітко розрізнити один від одного.

Слово «дискретність» походить від латинського *discretus*, що означає «розділений», «відокремлений».

Дискретність – це властивість системи або об'єкта складатися з окремих, відокремлених елементів, а не бути неперервним.

Дискретні об'єкти – це ті, які можна перелічити або порахувати, навіть якщо нескінченні (наприклад, множина всіх натуральних чисел).

Протилежне поняття – неперервність (наприклад, відрізок $[0;1]$ на числовій прямій містить нескінченно багато точок, але вони «щільно» розташовані).

Приклад 1. Множина літер українського алфавіту є дискретна, бо кожна літера окрема.

Отже, дискретність – це подільність і поелементність. Дискретна величина має чітко визначені окремі значення та змінюється стрибками, переходить від одного окремого значення до іншого без значень між ними, тобто можна перелічити можливі стани.

Приклад 2. Кількість людей у кімнаті, оцінка у школі (7, 8, 9...), кількість бітів у файлі. Світ цифрових технологій, комп'ютерів і програмування – дискретний, бо все в ньому подається у вигляді бітів, символів, структур.

Дискретна математика – це велика складова науки, яка має кілька розгалужень, зображених у таблиці.

Дискретна математика – це розділ математики, який вивчає об'єкти, що не є безперервними, а складаються з окремих елементів. Вона працює з множинами, графами, логікою, відношеннями, алгоритмами, комбінаторикою, теорією чисел, тощо.

На відміну від математичного аналізу, який вивчає неперервні функції, дискретна математика зосереджена на скінченних або зліченних структурах.



Елементи дискретної математики з'явилися ще в античності:

- Евклід (III ст. до н.е.) – почав розвивати теорію чисел.
- Піфагорійці – досліджували парність, прості числа, подільність.
- Комбінаторика виникала в задачах на розміщення предметів.

Середньовіччя – логіка:

- Аристотель заклав основи формальної логіки, що стала частиною дискретної математики.
- Лейбніц (XVII ст.) прагнув створити «універсальну логічну мову» для мислення – передвісник булевої алгебри.

Новітній період (XIX–XX ст.): Джордж Буль створив алгебру логіки (булеву алгебру), а Георг Кантор започаткував теорію множин.

У XX столітті, з розвитком комп'ютерів і програмування, дискретну математику використовують при вивченні алгоритмів, теорії графів, кодуванні та криптографії.

Дискретна математика є **фундаментом комп'ютерних наук** і цифрових технологій, оскільки її завданнями є:

- Формалізувати логіку мислення;
- Розробляти алгоритми та структури даних;
- Аналізувати мережі та графи;
- Описувати скінченні автомати і мови програмування;
- Створювати криптографічні системи для безпеки;
- Будувати комп'ютерні системи штучного інтелекту.

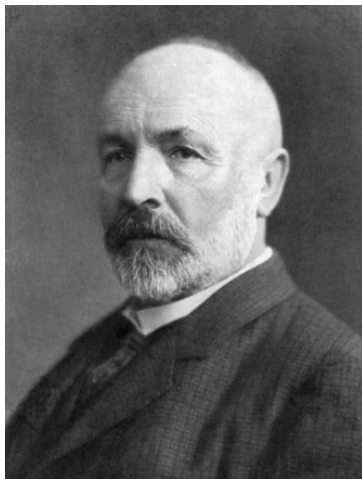
Отже, дискретна математика – це мова сучасних технологій, що дозволяє описувати та аналізувати структури, процеси й алгоритми, які лежать в основі усіх цифрових систем. Без неї неможливо уявити сучасну програмістську, технічну, математичну або економічну діяльність.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРІЯ МНОЖИН

Теорія множин як математична дисципліна створена німецьким математиком Г. Кантором (1845-1918), дане поняття трактується як первинне.

Георг Кантор (1845–1918) німецький математик, який заснував *теорію множин*, що стала основою сучасної математики.

Він першим розробив поняття нескінченності як об'єкта, який можна досліджувати математично, і ввів поняття *потужності множини*. Кантор довів, що не всі нескінченності однакові: наприклад, множина дійсних чисел має



Георг Кантор (1845–1918)

більшу потужність, ніж множина натуральних. Його ідеї спершу були спірними, але з часом стали фундаментом для математичної логіки і теорії чисел.

Проведені Кантором дослідження, які відносяться до тригонометричних рядів та числових послідовностей, призвели його до задачі про з'ясування тих засобів, які необхідні для порівняння нескінченних множин чисел по розміру. Для розв'язання цієї проблеми Кантор ввів поняття потужності множини, вважаючи за означенням, що множини мають однакову потужність, якщо члени будь-якого із них можна співставити членам іншого, утворивши пари відповідних членів. Оскільки, між членами двох скінченних множин є можливість встановити таку попарну відповідність тільки в тому випадку, коли вони мають однакову кількість членів, потужність скінченної множини можна ототожнити зі скінченним числом. Отже, ми отримуємо висновок, що поняття потужності нескінченної множини є узагальненням звичайного поняття скінченного числа. У побудові теорії таких узагальнених (або трансфінітних чисел), включаючи в себе їх арифметику, відбулося створення Кантором теорії множин.

Кантор наполягав розглядати нескінченність як дещо актуально дане (він розглядав нескінченні множини та транс-фінітні числа нарівні зі скінченними множинами та натуральними числами), що на той момент було новизною. Були отримані також додатки теорії множин до аналізу та геометрії, тому до 1890 року канторівська теорія множин отримала визнання в якості самостійного розділу математики. Нова теорія множин призвела до створення самостійної дисципліни – загальної теорії абстрактних множин.

1.1. Канторівське поняття множини

Розглянемо як Кантор розумів термін «множина» і вияснимо коротко із чого складається дане поняття. Згідно з канторівським означенням, множиною A є будь-яка сукупність певних і різних між собою об'єктів нашої інтуїції або інтелекту в розумінні як єдине ціле. Ці об'єкти називаються елементами або членами множини A . Він розумів під множиною всяку сукупність визначених елементів, що можна об'єднати в одне ціле за допомогою деякого закону.

Важливим пунктом канторівського розуміння є те, що сукупність предметів розглядається як один предмет (розуміємо як певне єдине ціле). Не має потреби ще раз підкреслювати те, що тут увагу переносимо з окремих предметів на їх сукупність, у свою чергу прикладом розуміння предметів є компанія, зграя, табун, отара та інше.

Щодо предметів, які можуть входити у множину, то формулювання «об'єкти нашої інтуїції або інтелекту» надає нам у цьому відношенні вагому свободу щодо відсутності жодних обмежень відносно предметів, що входять у множину. Множина може складатись, наприклад, із зелених яблук, фіолетових квітів чи простих чисел, однак, варто розглядати множину в сенсі математики як математичні об'єкти, наприклад точки, криві, числа, множина точок відрізка, множина вершин трикутника, множини натуральних, цілих, раціональних чисел і так далі.

Зауважимо, що канторівське формулювання допускає дослідження множин, елементи яких по тій чи іншій причині не можна точно вказати. У зв'язку з цим, варто нагадати, що навіть теоретично елементи будь-якої нескінченної множини не можна зібрати у скінченну сукупність. Прикладами можуть бути множини точок евклідової площини, координати яких (в деякій фіксованій системі координат) раціональні. Існують і скінченні множини, які володіють у цьому відношенні тим же ступенем невизначеності, що і будь-яка нескінченна довільна множина.

З'ясуємо зміст висловлювань «певні предмети» та «які можна відрізнити один від одного». У першому випадку, якщо задано деяку множину і який-небудь предмет, то можна визначити, є чи ні, цей предмет елементом даної множини, у другому ж

випадку, для довільних предметів, які розглядаємо як елементи даної множини, має існувати певна можливість з'ясувати, чи однакові ці предмети чи різні. Звідси випливає висновок, що довільна множина повністю визначається за допомогою своїх елементів. Дана канторівська вимога має таке формулювання:

Аксіома екстенсiональностi (iнтуїтивний принцип об'ємностi): двi множини є рiвнi мiж собою тодi i тiльки тодi, коли цi множини складаються з одних i тих самих елементiв.

Рiвнiсть двох множин A i B має позначення

$$A = B.$$

Отже, двi множини є рiвними, якщо кожний елемент однєї з них є елементом другої та навпаки.

1.2. Множини. Операції над множинами

Означення 1. Основні способи подання інформації є дискретними, це конструкції мов, граматик, природніх і формалізованих, а також слова.

Для обчислювальних перетворень та кількісного аналізу неперервних процесів їх доводиться дискретизувати.

Означення 2. Множина – це сукупність об'єктів яким властиве дещо спільне, що дозволяє їх об'єднувати.

Під множиною розуміють довільне, чітко окреслене зібрання певних предметів, істот, символів чи інших об'єктів.

Означення 3. Об'єкти, що утворюють множину називаються її елементами.

Для того, щоб із впевненістю говорити про ту чи іншу множину потрібно знати властивість якою володіють елементи даної множини.

Множини можна задати такими способами:

1. Перерахунком елементів.
2. Задання властивостей елементів.
3. Описом елементів.

Приклад 1.

$$M = \{1, 2, 3, 4\};$$

$$B = \{x \in Z \mid -2 \leq x \leq 2\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\};$$

$$D = \{\text{яблуко, груша, слива}\} - \text{множина фруктів.}$$

Означення 4. Множина називається скінченною, якщо вона має скінченну кількість елементів, а нескінченною, якщо множина містить необмежену кількість таких елементів.

Прикладами скінченної множини є: множина сигналів світлофора (червоний, жовтий, зелений), множина планет Сонячної системи, множина можливих кидків кубика (6 варіантів).

Прикладами нескінченної множини є: множина всіх частототи ля (А) у різних октавах:

$$A = \{55\text{Гц}, 110\text{Гц}, 220\text{Гц}, 440\text{Гц}, 880\text{Гц}\}$$

Це геометрична прогресія: кожна наступна частота вдвічі більша, але всі це «ля». Множина нескінченна, бо нот можна брати як у нескінченно високих, так і низьких октавах.

Ще одним прикладом нескінченної множини є:

$A = \{\text{усі можливі фрази, які може ввести людина у чат із ШІ}\}$

Це нескінченна множина, тому що:

- фрази можуть бути будь-якої довжини (від «Привіт» до довгого тексту),
- вони можуть містити будь-яке поєднання слів, символів, мов,
- людина завжди може придумати щось нове або трохи змінити старе.

Приклади елементів множини:

- «напиши вірш про козаків у стилі Шевченка»,
- «що таке квантова механіка?»
- «Розшифруй, наприклад, будь-яке математичне чи інше поняття».

Цю множину неможливо повністю описати, бо мовні запити – це варіації, комбінації, помилки, коди, навіть емоції. Вона нескінченна й постійно зростає.

Приклад 2. Множина всіх можливих вхідних зображень для нейронної мережі комп'ютерного зору. Позначимо цю множину як:

$A = \{\text{усі можливі зображення розміром } 224 \times 224 \text{ пікселі} \\ \text{з 3 кольорами (RGB)}\}$

Чому ця множина є нескінченна? Теоретично кількість пікселів є скінченною, але значення кожного пікселя – дійсне число, якщо ми працюємо з нормалізованими значеннями (від 0.0 до 1.0), а кількість дійсних чисел у проміжку $[0;1]$ – нескінченна.

У результаті ми маємо нескінченну множину всіх можливих зображень, які можуть потрапити у вхідні дані моделі. Це можуть бути:

- справжні фотографії людей, тварин, об'єктів,
- штучно згенеровані картини,

- випадкові шуми,
- зображення, які ніколи ще не існували, але які можуть вплинути на поведінку ШІ.

Приклад елементів множини:

- фото яблука;
- рентгенівський знімок;
- карта Марсу;
- зображення, створене нейромережею;
- малюнок, зроблений дитиною і так далі.

Позначення. Запис $a \in A$ ($a \notin A$) означає, що елемент a є (не є) елементом даної множини A .

Означення 5. Універсальною множиною називається множина, що містить всі можливі елементи, які зустрічаються у кожній конкретній задачі. Позначається U – універсальна множина.

Зауваження. Універсальна множина у кожній задачі є різною, в залежності від заданих умов.

Означення 6. Порожньою множиною називається множина, яка не містить жодних елементів.

Позначення. $\emptyset$ – порожня множина.

Роль порожньої множини є аналогічною числу нуль. Дане поняття слід використовувати для визначення певної сукупності елементів якої не існує, наприклад – множина червоних крокодилів, множина паралельних прямих, які перетинаються (як відомо, паралельні прямі не перетинаються).

Зауважимо, що введення порожньої множини є істотним, оскільки не завжди є елементи, які задовольняють характеристичну властивість кожної множини.

Елементами множин можуть бути інші довільні множини, але ці елементи позначаються великими літерами.

Приклад 3. $X = \{C, D\}$, $C = \{a, b\}$, $D = \{l, k\}$.

Приклад 4. Зі скількох елементів складається наступна множина $E = \{\{1, 2\}, 3\}$.

Відповідь. Множина E складається із двох елементів.

Означення. Упорядкованою вважається така множина, в якій кожен елемент має свій впорядкований номер.

Інше означення. Упорядкована множина – це множина, в якій важливі не тільки її елементи, а й порядок їхнього розташування.

Позначається упорядкована множина у даному посібнику трикутними дужками $\langle \rangle$.

Приклад 5. Розглянемо деяку упорядковану множину $A = \{x, y\}$, де x та y – це географічні координати довготи та широти, якщо ж довготу та широту поміняти місцями, то як результат ми можемо потрапити в іншу частину земної кулі.

Вказати порядковий номер для довільного дійсного числа на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ неможливо і порядок у множині дійсних чисел $\mathbb{R}$ задається за допомогою порівнянь $< i \leq$. Тому загальне означення упорядкованої множини X допускає, що для всіх пар елементів із X відношення порядку визначено.

Множини можуть бути задані природною мовою.

Приклад 6. Множина студентів факультету математики та інформатики в ЧНУ імені Юрія Федьковича.

Приклад 7. У геометрії ми часто стикаємось із множинами, які задані своїми характеристичними властивостями. Коло – це геометричне місце точок площини, які є рівновіддаленими від центру самої площини.

Ми розгляді та заданні множин можуть виникати протиріччя, помилки. Множина вважається заданою коректно, якщо можна визначити для довільного елемента чи даний елемент належить цій множині чи не належить.

Приклад 8. Розглянемо множину усіх динозаврів, які жили на нашій землі, яка задана правильно, хоча, насправді, майже неможливо визначити елементи цієї множини, але теоретично ясно, що будь-яка тварина, що жила на землі, і була динозавром, то належить до цієї множини, у протилежному випадку, якщо тварина не динозавр, то буде належати до цієї множини. Некоректність задання множини часто пов'язують із

протиріччям, при перевірці належності якогось елемента до цієї множини. Розглянемо цікавий приклад такого випадку.

Приклад 9. Визначимо множину D як множину всіх множин, що не є елементами самих себе. Але вже не можемо з'ясувати, чи є ця сама множина D елементом із множини D . Якщо так, то ми отримуємо протиріччя, оскільки D містить елементи тільки множини, які не є елементами самих себе. Якщо множина D не є елементом самої себе, то тоді за означенням, вона має бути елементом множини D , що і є протиріччям.

Дані протиріччя мають назву **логічні парадокси** і вивчаються у математичній логіці.

Запитання

1. Використовуючи, раніше описані, позначення, запишіть наступні твердження: елемент m належить деякій множині M , а елемент k не належить множині T .
2. Озвучте приклади нескінченних та скінченних множин.
3. Дайте означення упорядкованої множини.
4. Наведіть приклади множин за допомогою різних способів задання. Назвіть ці способи.
5. Який спосіб задання множини є некоректним?
6. Що таке логічний парадокс? У яких випадках вони виникають? Наведіть приклади.
7. Вкажіть приклади множин, елементами яких є самі множини.
8. Чому вважається, що теорія множин – фундамент усієї математики?
9. Чому ми використовуємо множини в математиці? Чим вони зручні?
10. Чи можна назвати будь-яку групу об'єктів множиною?
11. Чому важливо точно визначати, що входить до множини?
12. Чи може множина містити сама себе? Як ви це розумієте?
13. Чому порожня множина вважається підмножиною будь-якої множини?
14. Як ви вважаєте, чи може існувати «множина всього на світі»?

1.3. Основні поняття теорії множин

Нагадаємо тлумачення рівності множин.

Означення. Дві множини називаються рівними, якщо вони мають однаковий набір елементів $A=B$. Кількість елементів скінченної множини A і позначаються за допомогою двох вертикальних рисок, тобто $|A|$. Якщо множини не рівні, то існує таке позначення $A \neq B$.

Для двох множин A і B із великою кількістю елементів перевірка збігу всіх наборів елементів може бути складним та трудомістким процесом. Більш ефективним є процес логічної перевірки двостороннього включення.

Приклад 1. Нехай задані множини

$$K=\{1,2,\dots,8\};$$

L – множина натуральних чисел від 1 до 8;

$$M=\{m|1 \leq 8, m \in N\};$$

$$P=\{8,1,2,6,7,3,4,5\}.$$

Ці множини містять один набір елементів, тому вони є рівними:

$$K=L=M=P.$$

Приклад 2. Розглянемо множину M залишків, які отримуються шляхом послідовного ділення натуральних чисел $\{4,5,6,7,\dots\}$ на цифру 4: $M=\{0,1,2,3,0,1,2,3,0,\dots\}$.

Дана множина має тільки чотири елементи: 0,1,2,3, тому її записуємо у наступному вигляді $M=\{0,1,2,3\}$.

Приклад 3. Нехай задана множина найвищих вершин українських Карпат.

$$M=\{\text{Говерла, Піп Іван, Петрос, Бребенескул, Ребра}\}.$$

Це скінченна множина, бо в ній 5 конкретних елементів, потужність цієї множини: $|M| = 5$.

1.4. Включення множин. Поняття підмножини

Означення 1. Якщо кожний елемент множини A є елементом і множини B . У такому випадку кажуть, що множина A є підмножиною множини B .

Таким чином, якщо $A \subseteq B$ та $B \subseteq A$, то $x \in A, x \in B$ і кажуть, що ці множини рівні, тобто $A = B$.

Зауважимо, що порожня множина $\emptyset$ входить до множини B , оскільки порожня множина не містить елементів. Отже, $\emptyset \subset B$, також $B \subset B$. Цього разу означення перетворюється на тавтологію. Решта підмножин множини B , (якщо вони існують) не порожні, але і не збігаються з усією множиною B . Про них можна сказати, що вони є правдивими підмножинами множини B . Їх називають власними підмножинами B .

Приклад 1. Виписати підмножини заданої множини $A = \{a, b, c\}$.

Розв'язання.

$\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$.

Поміж них, власними є всі 6 підмножин, крім першої та останньої.

Приклад 2. Множина парних чисел строго включена в множину цілих чисел, а множина раціональних чисел строго включає множину цілих чисел.

Приклад 3. Задана множина M , що складається зі студентів певної академічної групи, множина K – кількість дівчат із заданої групи, тому K є підмножиною множини M і позначається $K \subseteq M$.

Основні властивості

1. $X \subseteq X$.
2. $X \subseteq Y, Y \subseteq Z$ впливає, що $X \subseteq Z$.
3. $X \subseteq Y, Y \subseteq X$ впливає, що $X = Y$.

Потрібно вміти розрізняти належність елемента та його включення.

Приклад 4. Нагадаємо, що порожня множина є множиною, тому, якщо деяка множина A не містить жодного елемента, то $A = \emptyset$; потужність даної множини рівна нулю.

Якщо $A = \{\emptyset\}$, $\emptyset \subseteq A$, A – довільна множина, $|A| = 1$, бо вона містить один елемент, який є порожньою множиною.

Таким чином будь-яка непорожня множина обов'язково буде містити дві підмножини: порожню множину і саму себе.

Означення 2. Множина всіх підмножин із X називається множиною-степенем або **булеаном** множини X і позначається $2^{|X|}$.

Порожня множина має лише одну підмножину, а саме порожню множину, тому булеан виглядає так $2^{\emptyset} = \{\}$.

Для довільної множини, яка складається з n елементів, то кількість всіх її підмножин буде рівна 2^n .

Приклад 5.

$M = \{\text{Тарас Шевченко, Леся Українка, Іван Франко, Василь Симоненко, Ліна Костенко}\}$.

Це множина видатних українських поетів, які стали голосом епох, народу й національної гідності. Вона скінченна, бо включає 5 конкретних осіб і має потужність множини: $|M| = 5$

Побудувати множину всіх підмножин цієї множини – їх буде:

$$2^5 = 32.$$

Деякі підмножини можуть виглядати таким чином:

- $\{\text{Тарас Шевченко, Леся Українка}\}$ – класики національного відродження.
- $\{\text{Ліна Костенко, Василь Симоненко}\}$ – поети-шістдесятники.
- $\{\text{Іван Франко}\}$ – сам по собі «геній-універсал».

Або можна розглядати підмножини як поетичні голоси для різних тем:

- $\{\text{Тарас Шевченко, Василь Симоненко}\}$ – про боротьбу і гідність.
- $\{\text{Леся Українка, Ліна Костенко}\}$ – про жіночу силу, інтелект і незалежність.

Наведемо ще кілька прикладів підмножин.

Приклад 6. Нехай $\mathbb{R}$ – множина всіх дійсних чисел. Вона має безліч підмножин. Зокрема, серед них: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $[-1;1]$, $(0;\infty)$, множина всіх квадратних коренів із натуральних чисел, множина коренів усіх натуральних ступенів із числа 2 тощо.

Приклад 7. Позначимо через множину S – множину всіх тих слів української мови, які написані у словнику Бориса Грінченка. Підмножинами S є, зокрема, слова, що складаються із слів, що розпочинаються приголосною буквою; двоскладові слова; іменники; дієслова; слова на літеру «м»; слова, котрі мають подвоєну приголосну; прислівники, що закінчуються буквою «о» і ще багато інших.

Нескінченні множини мають безліч різних підмножин. Цей висновок може впливати, зокрема, із того, що вони мають самих лише одноеlementних підмножин величезну кількість, тобто підмножин, що складаються з одного елемента. Щодо скінченних множин, кожна із них має скінченну кількість підмножин, котрі можна поділити на групи за допомогою певною кількістю елементів. Скільки саме таких підмножин містить кожна така група – це є важлива комбінаторна задача.

Поняття множини містить у собі певну двоєдиність. З однієї сторони множина – це сукупність певних об'єктів (елементів), а з іншої сторони – вона сама є індивідуальним об'єктом, котрий, може входити до складу інших множин. Розглянемо приклад, колектив (множину) складають студенти певного факультету, якщо ж розглянути детально цю множину, зокрема студенти можуть об'єднуватись разом за різними характеристиками: участю у спортивних чи інтелектуальних змаганнях, обмінюватись інформацією про організацію навчання чи дозвілля. Фраза «студентські колективи міста Чернівці» звучить цілком коректно, але формально, у цій фразі йдеться про множину, елементами якої є інші множини.

Якщо A – довільна множина. Її підмножини можна брати за елементи інших множин. Справді, ми можемо скласти множину, елементами якої є всі без винятку підмножини множини A (і тільки вони). Про таку множину так і кажуть: множина всіх підмножин множини A . Її часто позначають $S(A)$.

Запитання

1. Які множини вважаються рівними. Дайте означення.
2. Чи можуть в одній множині два елементи бути однаковими?
3. Поясніть, що таке включення множин та дайте означення поняття підмножини.
4. Наведіть приклади двох множин для таких випадків $M \subset N$ та $M \subseteq N$.
5. Наведіть приклад строгого та нестрогого включення множин.
6. Дайте означення універсальної множини.
7. Що таке порожня множина? Наведіть приклади.
8. Яким відношенням можна описати включення між універсальною множиною U , її довільною підмножиною M та порожньою множиною $\emptyset$.
10. Як називається множина всіх підмножин деякої заданої множини та скільки вона має елементів?
11. Що таке потужність множини? Як порівнюють потужності скінченних і нескінченних множин?
12. Поясніть, чим відрізняються злічені та незлічені множини. Наведіть приклади.
13. Що таке множина всіх підмножин даної множини? Яку потужність вона має?

1.5. Геометрична інтерпретація множин

Для наглядного зображення співвідношень між множинами та універсальною множиною використовують діаграми Венна та круги Ейлера.

Побудова діаграми Вена полягає в розбитті на 2^n областей за допомогою n фігур, кожна фігура на діаграмі зображує певну окрему множину, n число множин, які зображуються.

Зауважимо, що кожна наступна фігура повинна мати одну і тільки одну загальну область – перетин із кожною раніше побудованих фігур. Площина, в якій зображується фігура становить універсальну множину U .

Точки, які не належать жодній із фігур, то належать тільки універсальній множині U .

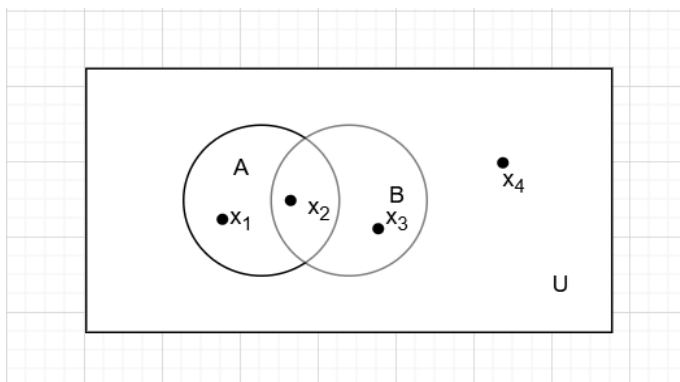
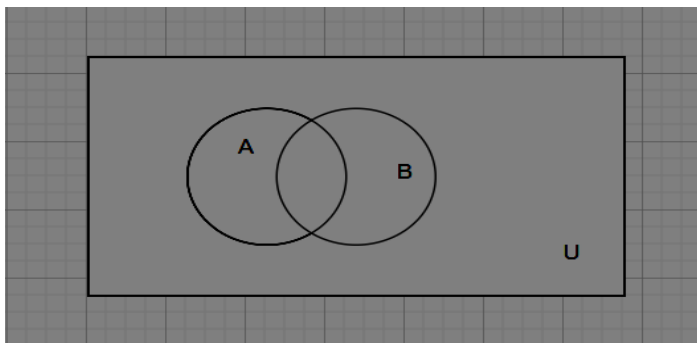
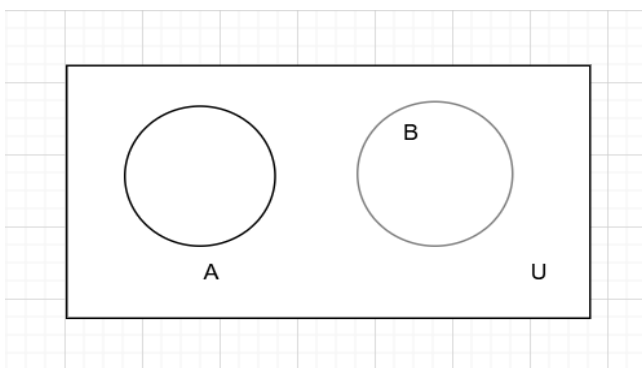


Рис.1.1. Множини та елементи на універсальній множині

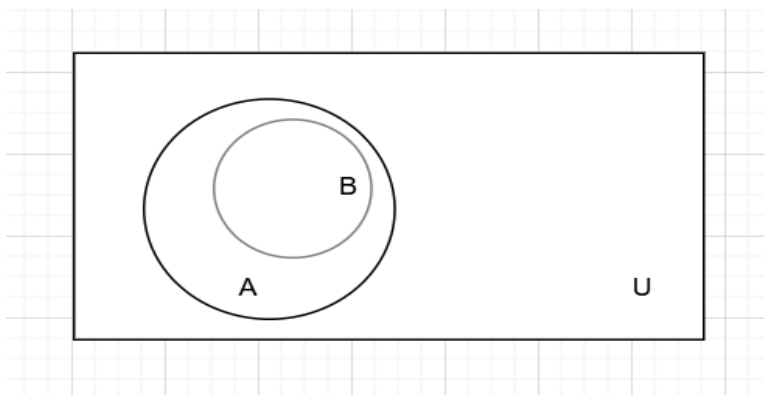
Діаграми Венна не відображають реальні відношення включення, які встановлені між цими множинами, а їх розглядають у загальному випадку. Операції між заданими множинами зображують, використовуючи круги Ейлера. У випадку, коли множини не мають спільних елементів, то їх зображують не перетинними фігурами. На множинах відношення включення зображують фігурами, які не перетинаються. Його зображують, розташувавши одну фігуру покладеною в іншу. Аналізуючи дане пояснення, ми розглянемо побудову цих кругів Ейлера за допомогою наступного прикладу.



Приклад. $A=\{1,4,6\}$, $B=\{7,8,9\}$.



$A=\{1,4,5,6\}$, $B=\{4,5\}$. Отже, $B \subset A$.



Запитання

1. Які відмінності є між кругами Ейлера та діаграмами Венна?
2. Чи можливо зобразити діаграму Венна для чотирьох кругів, використовуючи кола?
3. Яке розташування кругів Ейлера для множин, що мають загальні елементи?
4. Як розташовані круги Ейлера для множин, які не мають загальні елементи?
5. Як зображають підмножини даної множини за допомогою кругів Ейлера?

1.6. Операції над множинами

Для того, щоб зобразити операції над множинами будемо використовувати діаграми Венна, в яких множини, які беруть участь в операції зображуються за допомогою кругів, а заштрихована область – це результат операції.

Об'єднанням двох множин (сумою) є множина, яка складається тільки із тих елементів, які входять у множину A або не входять в множину B ; які входять у множину B , але не входять в множину A ; або входять в дві множини одночасно.

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

Тут можуть бути три випадки:

1. $x \in A$ і $x \in B$.

2. $x \notin A$ і $x \in B$.

3. $x \in A$ і $x \notin B$.

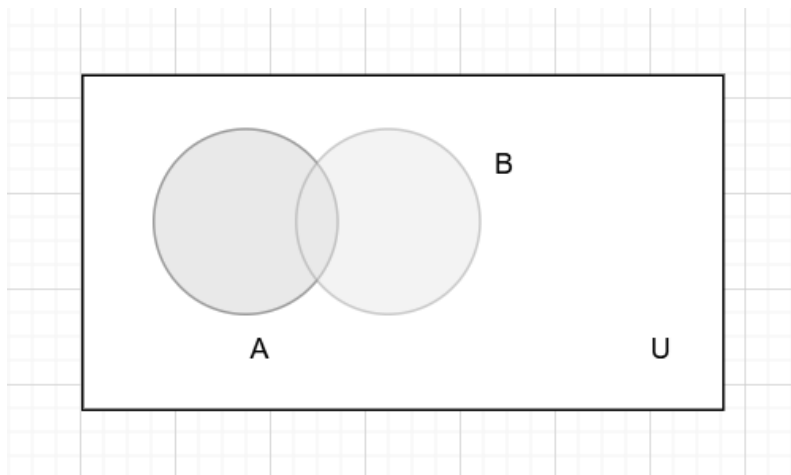


Рис. 1.2. Об'єднання двох множин

Приклад 1. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Для кращого розуміння поняття об'єднання двох множин, звернемо увагу на 2 важливі застереження.

1) Згідно із означенням множини, кожний об'єкт, котрий є її елементом, входить до неї один раз. У множині не може бути дублікатів, не може бути двох однакових елементів, які зовсім не відрізняються один від одного. Якщо у двох множин A і B є спільні елементи, то кожний із них потрапляє до об'єднання заданих множин єдиний раз, в одному екземплярі.

2) Часто знак об'єднання асоціюють із сполучником «або». Сполучник «або» в українській мові вживається у двох у відмінних один від одного значеннях: розділовому та нерозділовому. У даному випадку ми вживаємо сполучник у нерозділовому значенні, що відіграє роль об'єднання вказаних фраз стосовно множин.

Зауважимо, що об'єднання можна застосовувати не тільки до двох, але і трьох, чотирьох та будь-якої більшої кількості множин.

Перетином двох множин (іноді дана операція називається добутком) є множина до якої належить елементи множини A та множини B одночасно.

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}.$$

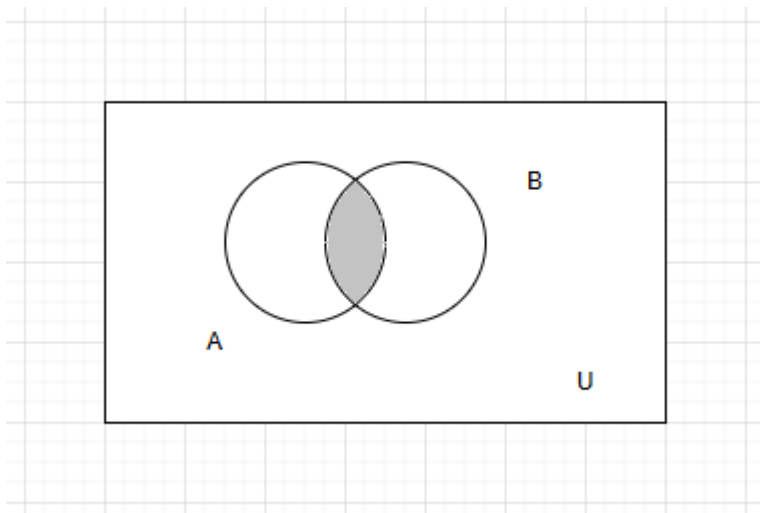


Рис. 1.3. Перетин двох множин

Приклад 2. $A=\{1,2,4,5\}, B=\{4,5,6\}, A \cap B=\{4,5\}$.

Зауваження. Якщо $A \cap B = \emptyset$, то дані множини не перетинаються.

Приклад 3. Перетином множини тих натуральних чисел, що діляться на 3, із множиною натуральних чисел, які діляться на 5, є множина всіх тих натуральних чисел, що діляться на 15.

Приклад 4. Нехай A – множина тих студентів, які вивчають англійську мову, а множина B – це ті студенти, що вивчають французьку. Тоді множину $A \cap B$ складають ті студенти, які одночасно вивчають обидві ці мови; якщо таких студентів не має, то $A \cap B$ є порожньою.

Різницею двох множин називається множина, що складається з усіх елементів множини B , але які не належать множині A .

$$B \setminus A = \{x | x \in B \wedge x \notin A\}.$$

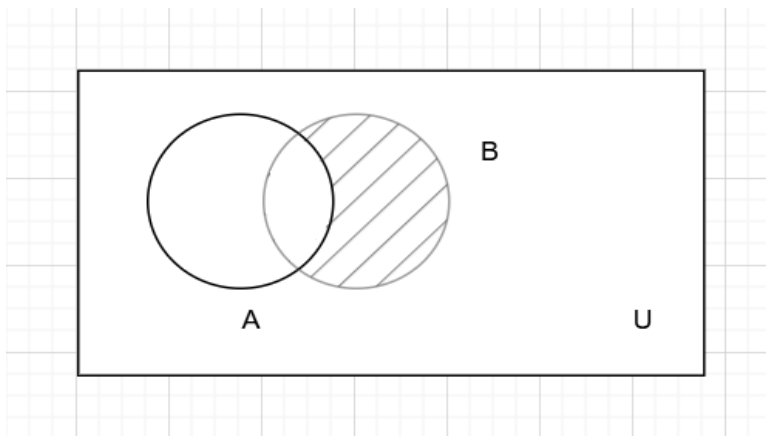


Рис. 1.4. Різниця двох множин

Зауваження. Якщо $A \cap B = \emptyset$, то $A \setminus B = A$.

Приклад 5. Дано $A=\{1,2,4,5\}, B=\{4,5\}, A \setminus B=\{1,2\}$.

Приклад 6. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ – множина всіх ірраціональних чисел.

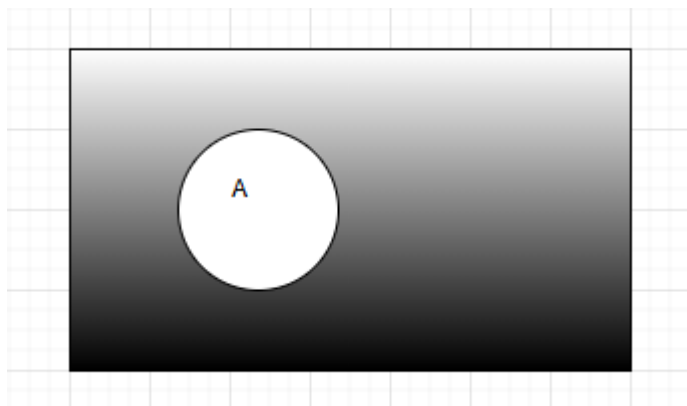
Приклад 7. Нехай множина M – це сукупність всіх тих натуральних чисел, що діляться на 3, D – множина парних натуральних чисел, то $M \setminus D$ – множина всіх тих непарних натуральних чисел, котрі діляться на 3, $D \setminus M$ – множина всіх тих парних натуральних чисел, що не діляться на 3.

Доповненням (запереченням) множини називається множина $\bar{A} = U \setminus A$. Читається «не A ».

$$\bar{A} = \{x | x \notin A\}.$$

Різницю множин можна виразити за допомогою заперечення:

$$A \setminus B = A \cap \bar{B}.$$



Замальована область на рисунку, є доповненням до множини A , тобто $\bar{A}$.

Зауваження. Заперечення до універсальної множини – це порожня множина $\bar{U} = \emptyset$, і навпаки $\bar{\emptyset} = U$.

У вивченні тієї чи іншої науки або проблеми, ми часто маємо справу не тільки з довільними множинами, а із підмножинами якоїсь фіксованої “надмножини”. Наприклад, для арифметики або аналізу функцій одного аргументу такою надмножиною є

множина всіх дійсних чисел $\mathbb{R}$, а для планіметрії – множина всіх точок площини (або ж множина всіх пар дійсних чисел).

Нехай U – надмножина, її ще називають універсальною множиною. Наголосимо на тому, що така гучна назва зовсім не означає, що U якась особлива множина. Оголосивши її надмножиною, ми далі забов'язуємось далі мати справу тільки з тими множинами, які є підмножинами U . Підмножини U – це елементи $S(U)$ – множини всіх підмножин множини U . Вони мають ту властивість, що перетин, об'єднання, різниця будь-яких двох із них знову будуть підмножинами U .

Іншими словами, якщо $A \in S(U)$ і $B \in S(U)$, то $A \cap B \in S(U)$, $A \cup B \in S(U)$, $A \setminus B \in S(U)$. Виконуючи дії перетину, об'єднання та різниці із елементами множини $S(U)$, тобто підмножинами множини U , ми щоразу обов'язково отримуватимемо елементи цієї множини, тобто підмножини множини U .

Поміж великої кількості різниць множин із $S(U)$, важливе місце мають ті, де зменшуваним виступає підмножина U . Різницю $U \setminus A$ називають доповненням множини A до всієї множини U . Її позначають символом $\bar{A}$. Згідно із означенням, A і $\bar{A}$ не перетинаються, тобто $A \cap \bar{A} = \emptyset$, вони вдвох вичерпують всю універсальну множину $A \cup \bar{A} = U$.

Приклади. Нехай $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел, і у даному прикладі вона відіграє роль універсальної множини.

А) $\bar{\mathbb{Q}}$ – множина всіх ірраціональних чисел.

Б) Якщо $A = \{x \mid x < 1\}$, то $\bar{A} = \{x \mid x \geq 1\}$.

В) $\bar{\mathbb{Z}}$ – множина всіх не цілих чисел.

Означення. Множина 2^U – всіх підмножин універсальної множини U із заданими на цій універсальній множині чотирима операціями утворює алгебру множин.

У загальному випадку алгебру може складати довільний клас ω , який міститься в 2^U , тобто є підмножиною універсальної множини U , який є замкнутим відносно всіх чотирьох операцій. Означення алгебри, яка не містить залежних (надмірних) обмежень має такий вигляд.

Означення.

Клас множин ω називається алгеброю (множин), якщо виконуються наступні умови:

1. $U \in \omega$.
2. Із належності $A, B \in \omega$ випливає, що $A \cup B \in \omega$.
3. Із належності $A, B \in \omega$ випливає, що $A \setminus B \in \omega$.

Алгебру множин часто використовується у програмуванні, зокрема при роботі із різноманітними базами даними.

Алгебра множин є основою для побудови великої кількості математичних структур.

Зауважимо, що використання алгебри множин є дуже близьким до реального життя, ми щодня застосовуємо закони та операції алгебри множин, навіть не замислюючись над цим. Наприклад, нам потрібно розв'язати якусь певну кількість задач, то це і є множина задач, із неї ми віднімаємо ту кількість задач, які ми вже розв'язали (ймовірно, сюди належить множина більш легких задач) і у нас залишається множина нерозв'язаних множин.

Ще одним життєвим прикладом є приготування сніданку, ми шукаємо перетин множини наявних продуктів із множиною продуктів, які нам подобаються. Все наше життя проходить із використанням множин, які тим чи іншим способом взаємопов'язані.

При роботі із множинами ми маємо багато операцій, щоб створювати алгебраїчні вирази, які є із різною складністю, тому важливим є пріоритет операцій, тобто той спосіб, в який ми виконуємо ту чи іншу дію одна відносно одної:

1. Заперечення $\bar{A}$.
2. Перетин $A \cap B$.
3. Об'єднання $A \cup B$.
4. Різниця $A \setminus B$.

Приклад 8. Визначити пріоритетність у заданому виразі, тобто розставити дужки у відповідності виконання операцій $E = A \cup \bar{A} \cap D \setminus B$.

Означення. Абсолютним доповненням множини $\bar{A} \in \bar{\bar{A}} = \overline{(\bar{A})}$.

$$\bar{\bar{A}} = \{x | x \notin \bar{A}\} = \{x | x \in A\}, \text{ тобто } \bar{\bar{A}} = A.$$

Операції об'єднання, перетину, різниці множин називаються бінарними операціями, оскільки в даних діях беруть участь дві множини.

Операція заперечення називається унарною, оскільки тут використовується одна множина.

Для роботи із множинами, крім пріоритету операцій, потрібно використовувати різноманітні закони теорії множин.

1. Комутативні закони.

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A.$$

2. Асоціативні закони

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C.$$

3. Дистрибутивні закони.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

4. Властивості порожньої та універсальної множини.

$$A \cup U = U, A \cup \emptyset = A,$$

$$A \cap U = A, A \cap \emptyset = \emptyset.$$

5. Закони ідемпотентності.

$$A \cup A = A, A \cap A = A.$$

6. Закони інволюції (закон подвійного доповнення).

$$\bar{\bar{A}} = A, \quad \overline{(\bar{A})} = A.$$

7. Закон протиріччя.

$$A \cap \bar{\bar{A}} = \emptyset.$$

8. Закон виключення третього.

$$A \cup \bar{\bar{A}} = U.$$

9. Закон елімінації.

$$A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A.$$

10. Закони де Моргана.

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B},$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Означення. Диз'юнктивною сумою (симетричною різницею) множин A та B будемо називати множину, що складається з усіх елементів, які входять в множину A , але не входять в множину B , і зі всіх елементів множини B , які не входять в множину A .

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B);$$

$$A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}).$$

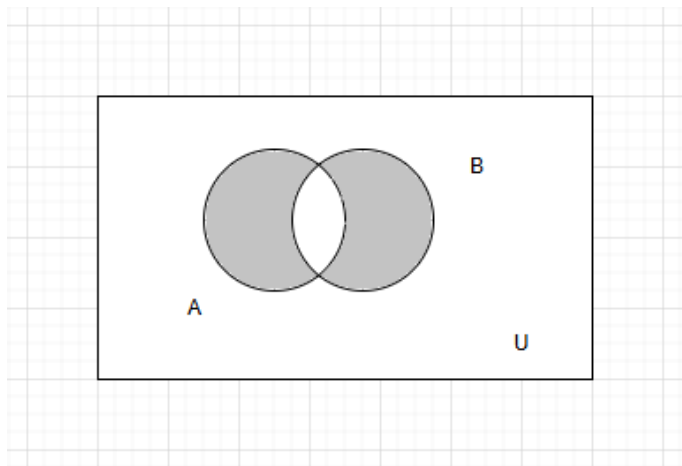


Рис.1.5. Симетрична різниця двох множин

Теорема. Нехай A, B, C – довільні підмножини універсальної множини U , то правильні такі рівності:

1. $A \Delta B = B \Delta A$;

2. $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$;

3. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$;

4. $A \Delta \emptyset = A$;

5. $A \Delta A = \emptyset$.

Запитання

1. Назвіть відомі вам операції на множинах. Наведіть приклади множин та виконайте кожну із операцій.
2. Чи можуть якісь із цих операцій бути вираженими одна за допомогою іншої?
3. При виконанні із операцій над множинами використовується універсальна множина? Яким чином?
4. Назвіть пріоритетність відомих операцій над множинами.
5. Яким чином можна зобразити та довести тотожності та закони алгебри множин?
6. Яким чином еквівалентні перетворення формул алгебри множин виконуються?
7. Поясніть закони де Моргана. Чому вони важливі у логіці та множинах?
8. Як пов'язані операції над множинами з логічними операціями «і», «або», «не»?
9. Що означає замкненість множини відносно певної операції?

1.7. Потужнісна класифікація множин

Поняття взаємно однозначних відповідностей є первинним у свідомості людини при диференціальному уявленні зовнішнього світу.

Приклад. Якщо зал глядачів театру заповнений і не має вільних місць. Нам необов'язково потрібно рахувати кількість присутніх глядачів у залі, адже вона дорівнює числу крісел у театрі.

Щоб зробити цей висновок ми за допомогою інтуїції використовуємо взаємно однозначну відповідність між глядачами і кріслами в залі. Вкажемо одну особливість. У цьому випадку була реалізована взаємно однозначна відповідність, а саме: глядачі – крісла (тобто кожному глядачеві відповідає одне і те ж призначене крісло і навпаки). Навіть, якщо після перерви деякі глядачі захочуть помінятися місцями та конкретна відповідність буде іншою, але висновок залишиться попереднім. Число глядачів буде дорівнювати числу місць у залі.

Означення 1. Взаємно однозначною відповідністю називається відповідність між множинами A та B , де кожному елементу $a \in A$ відповідає один і тільки один елемент $b \in B$, і навпаки, кожному елементу $b \in B$ відповідає $a \in A$.

Означення 2. Функція, яка визначається взаємно однозначною відповідністю називається бієктивною функцією (бієкцією).

Означення 3. Дві множини A та B є еквівалентними або рівнопотужними $A \sim B$, якщо між цими множинами можна встановити взаємно однозначну відповідність.

Строге поняття потужності для нескінченної множини не вводиться. Але сам термін потужності виконується для позначення властивості загальних для всіх еквівалентних множин. Якщо множини A та B є еквівалентними і вони є незліченними, то формально рівність їх потужностей записується так:

$$|A|=|B|.$$

Означення 4. Множина A є зчисленною, якщо вона еквівалентна натуральному ряду $A \sim \mathbb{N}$.

Термін «зчисленність» є точною заміною інтуїтивного поняття «дискретність».

Використовуючи бієкцію $\varphi: N \rightarrow A$ можна «перелічити» всі елементи з множини A , ($a \in A$), якщо привласнити їм індекси за таким правилом $\varphi(n) = a_n$.

$$A = \{a_n, n=1, 2, \dots\}.$$

Множина парних натуральних чисел, всіх натуральних, цілих, раціональних чисел є послідовно вкладеною.

$$N_n \subset N \subset Z \subset Q.$$

І хоч для будь-яких із цих двох множин немає рівності, вони будуть еквівалентні одна одній. Тобто є зчисленими і мають однакову потужність.

$$|N_n| = |N| = |Z| = |Q|.$$

Дані множини вважаються дискретними.

Звичайно, існують нескінченні, незліченні множини та їх потужність прийняти вважати більшою за $|N|$.

Теорема Кантора. Розглянемо множину

$$[0, 1] = \{x \in R; 0 \leq x \leq 1\}.$$

Дана множина не буде зчисленною. Її потужність називається континуумом і позначається $c: |[0, 1]| = c$.

Означення. Ця множина від 0 до 1 і будь-яка її еквівалентна множина називається континуальною.

1.8. Формула включень та виключень.

Нехай потрібно обчислити потужність наступної множини $C(A \cup B)$, отже:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B). \quad (*)$$

Зауваження. У багатьох джерелах потужність множини позначається не тільки вертикальними рисками, але й великою літерою N (не потовщеною).

Тепер обчислимо об'єднання між трьома множинами:

$$\begin{aligned} N(A \cup B \cup C) &= N(A \cup B) + N(C) - N((A \cup B) \cap C) = N(A \cup B) + N(C) - N((A \cap C) \cup (B \cap C)) = \\ &= N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + \\ &\quad + N(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

За допомогою методу математичної індукції можна довести формулу потужності об'єднання n множин (формулу включень та виключень):

Розглянемо дану формулу в альтернативній формі

$$\begin{aligned} N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^n N(A_i) - \\ &- \sum_{1 \leq i < j \leq n} N(A_i \cap A_j) + (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} N(A_{i_1} \cap \dots \\ &\quad \cap A_{i_k}) + (-1)^{n-1} N(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n). \end{aligned}$$

Розглянемо альтернативну форму вище згаданої формули.

Нехай U – універсальна множина, $A \subset U, B \subset U$, тобто A, B власні підмножини універсальної множини. Для множини $U \setminus (A \cup B)$, використовуючи рівності

$$C/D = (C \cap \bar{D}), \quad \overline{C \cup D} = \bar{C} \cap \bar{D}, \quad U \cap A,$$

Одержимо

$$U \setminus (A \cup B) = U \cap (\bar{A} \cap \bar{B}) = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Зробимо заміну: $N(U)=N$, то з останньої рівності маємо

$$N-N(A \cup B)=N(\bar{A} \cap \bar{B}). \quad (1.1)$$

Оскільки $N(A \cup B)=N(A)+N(B)-N(A \cap B)$, то з рівності (1) одержуємо

$$N(\bar{A} \cap \bar{B})=N-N(A)-N(B)+N(A \cap B). \quad (1.2)$$

Для трьох множин A, B, C аналогічно як доводиться рівність (1.2), отримуємо

$$\begin{aligned} N(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})= & N-N(A)-N(B)-N(C)+N(A \cap B)+N(A \cap C)+ \\ & +N(B \cap C)-N(A \cap B \cap C). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Для множин використовуючи метод математичної індукції, можна довести формулу включень та виключень в альтернативній формі

$$\begin{aligned} N(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n)= & N - \sum_{i=1}^n N(A_i) + \\ & + \sum_{1 \leq i < j \leq n} N(A_i \cap A_j) - \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} N(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + \\ & + (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \\ & + (-1)^n N(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Одержимо формулу для обчислення кількості елементів, які належать тільки множині A (одній із двох множин). Використаємо рівності

$$A=A \cap U=A \cap (B \cup \bar{B})=(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}). \quad (1.5)$$

Тоді за формулою (*) із рівності (5) отримуємо

$$N(A)=N(A \cap B)+N(A \cap \bar{B})-N(A \cap B \cap A \cap \bar{B}). \quad (1.6)$$

Оскільки $B \cap \bar{B} = \emptyset$ та $N(\emptyset) = 0$, то з (6) отримуємо

$$N(A \cap \bar{B}) = N(A) - N(A \cap B). \quad (1.7)$$

Аналогічно, як одержано рівність (1.7), виводиться формула для обчислення кількості елементів, яка належить тільки одній із трьох множин. Використаємо тотожність

$$\begin{aligned} A = A \cap U = A \cap (A \cap (B \cup C) \cup (\overline{B \cup C})) &= (A \cap (B \cup C)) \cup \\ &\cup (A \cap \overline{B \cup C}). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Із (8) за формулою (*) матимемо

$$\begin{aligned} N(A) &= N(A \cap (B \cup C)) + N(A \cap \overline{B \cup C}) - \\ &- N(A \cap (B \cup C) \cap A \cap \overline{B \cup C}). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Оскільки $(B \cup C) \cap \overline{B \cup C} = \emptyset$, то з (9) отримаємо

$$N(A) = N((A \cap B) \cup (A \cap C)) + N(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}).$$

Звідси, враховуючи (8), маємо

$$\begin{aligned} N(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) &= N(A) - N(A \cap B) - N(A \cap C) + \\ &+ N(A \cap B \cap C) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Розглянемо наступні приклади.

Приклад 1. Скільки чисел у першій сотні не будуть ділитися на жодне з чисел 2, 3, 5?

Розв'язання. Позначимо через A, B, C — множини чисел, що діляться відповідно, на 2, 3, 5. Тоді кількість чисел, що не діляться на жодне з цих чисел обчислюється за, описаною вище, формулою (3).

Для того, щоб знайти, скільки чисел від 1 до N ділиться на n , потрібно розділити N на n ($n=2,3,5$) і взяти цілу частину:

$$N(A) = \left[\frac{100}{2}\right] = 50;$$

$$N(B) = \left[\frac{100}{3}\right] = 33;$$

$$N(C) = \left[\frac{100}{5}\right] = 20;$$

$$N(A \cap B) = \left[\frac{100}{6}\right] = 16;$$

$$N(A \cap C) = \left[\frac{100}{10}\right] = 10;$$

$$N(B \cap C) = \left[\frac{100}{15}\right] = 6;$$

$$N(A \cap B \cap C) = \left[\frac{100}{30}\right] = 3.$$

Остаточно маємо:

$$N(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = 100 - (50 + 33 + 20) + 16 + 10 + 6 - 3 = 26 \text{ чисел.}$$

Приклад 2. Протягом одного тижня в кінотеатрі демонстрували деякі три фільми K, L, M . Розглянемо групу із 40 студентів, будь-який із них подивився або всі три фільми, або один із трьох; фільм K побачили 13 студентів, L – 16 студентів, M – 19 студентів. Скільки студентів подивились всі три фільми?

Розв’язання. Позначимо через A, B, C — множини студентів, які подивились фільми відповідно K, L, M . Тоді у формулу (1.3) підставимо $N=40, N(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})=0$, позначимо

$$N(A \cap B) = N(A \cap C) = N(B \cap C) = N(A \cap B \cap C) = x$$

і отримаємо

$$0 = 40 - 13 - 16 - 19 + 3x - x.$$

Розв’язавши рівняння, ми отримуємо $x=4$. Отже, 4 студенти подивились всі три фільми.

Запитання

1. Дайте означення взаємно однозначної відповідності.
2. Які множини називаються еквівалентними?
3. Яка множина називається зчисленною?
4. Озвучте теорему Кантору.
5. Які множини називаються дискретними?

1.9. Декартовий добуток множин. Бінарне відношення та їх властивості

Відносини застосовують у математиці під час роботи з абстрактними множинами, а також під час створення комп'ютерних баз даних, структуру яких подають у вигляді таблиць. У таких таблицях зв'язки між різними наборами даних задаються саме відношеннями, а самі дані опрацьовуються та змінюються за допомогою операцій, що мають чітке математичне визначення. Такі бази даних називають реляційними, і вони служать для зберігання та обробки різних видів інформації.

У програмуванні відношення також мають важливе значення: наприклад, такі структури даних, як списки чи дерева, використовуються для подання певної множини елементів разом із зв'язками, що встановлені між цими елементами.

Для формального опису різноманітних комбінацій елементів множин, що входять до відношення, застосовується декартовий добуток множин. Дамо означення цього поняття, після чого, визначимо поняття відношення.

Означення 1. Декартовим добутком множин

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$$

називається множина всіх впорядкованих наборів $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ з n елементів (які називаються кортежами довжини n), в яких перший елемент належить множині X_1 , другий – множині $X_2, \dots, n$ – й належить множині X_n , тобто

$$x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n.$$

Декартів добуток, в якому одна і та ж множина n разів помножується сама на себе, позначається X^n , а даний степінь n називають декартовим степенем множини. При чому, $X^1 = X$. Множину X^2 називають декартовим квадратом множини X , а множину X^3 – декартовим кубом.

Зауваження. Декартовий добуток не є комутативним.

$$A \times B \neq B \times A, \text{ якщо } A \neq B.$$

Пояснення. Порядок проходження пар може бути довільним, але розміщення у кожній парі (кортежі) визначається порядком проходження множин, що перемножуються.

Означення 2. n – арне відношення R на множинах $X_1, X_2, \dots, X_n$ – це підмножина декартового добутку

$$R \subseteq X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$$

цих n множин.

Якщо набір елементів $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ належить відношенню R , то стверджується, що елементи $x_1, x_2, \dots, x_n \in U$ у відношенні R .

Під n – арним відношенням R на множині X ми розуміємо, що підмножина n -го степеня цієї множини: $R \subset X^n$.

Означення 3. При $n = 1$, то таке відношення називається унарним, якщо $n = 2$, то бінарним.

Зауважимо, що унарне відношення R на множині X – це підмножина в самому X , тобто $R \subset X$.

Довільне n – арне відношення можна зобразити за допомогою ланцюжка певних бінарних відношень, що послідовно конструюється. Цей очевидний факт є наслідком асоціативності декартового добутку множин.

Способи задання бінарних відношень

Нехай R є бінарним відношенням на множинах.

Довільне бінарне відношення R , може задаватись у вигляді **списку**, елементами якого є пари, з них і буде складатися це відношення.

Приклад 1. На заданих множинах чисел $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ та $B = \{34, 35, 36\}$ побудуємо відношення «дільник». Це відношення складається з упорядкованих пар виду (x, y) , де x – дільник y , $x \in A$, $y \in B$. Позначимо дане відношення через R , то отримаємо:

$$R = \{(1, 34), (1, 35), (1, 36), (2, 34), (2, 36), (3, 36), (4, 36), \\ (5, 35), (6, 36), (7, 35), (9, 36)\}.$$

За допомогою **матриці**, рядки якої є елементами першої множини, а стовпці відповідають елементам другої множини.

Бінарне відношення R може бути задано *графічно* на множинах X та Y . Якщо пара (x_i, y_j) буде належити відношенню R , то з'єднаємо точки x_i, y_j за допомогою лінії, яка спрямована від першого елемента пари до другого елемента. Позначивши таким чином всі пари, що належать відношенню R , які утворюються, одержимо фігуру, яка називається *графом відношення*. Ці спрямовані лінії, з'єднують пари точок називаються дугами, а точки, що зображують елементи множин – це вершини графа. Дані поняття ми вивчимо більш детально у 4 розділі.

Якщо довільне бінарне відношення R задане на одній множині $X (R \subseteq X^2)$, робимо висновок, що вершинами цього графа будуть елементи множини X .

Приклад 2. Прикладом графічного відношення може бути генеологічне дерево родини.

Розглянемо детальніше деякі часткові випадки відношень. Нехай задане бінарне відношення R на множині $B: R \subseteq A^2$.. Відношення називається повним у тому випадку, коли $R=A^2$.

Відношення називається порожнім, коли $R=\emptyset$ і зображене на рисунку.

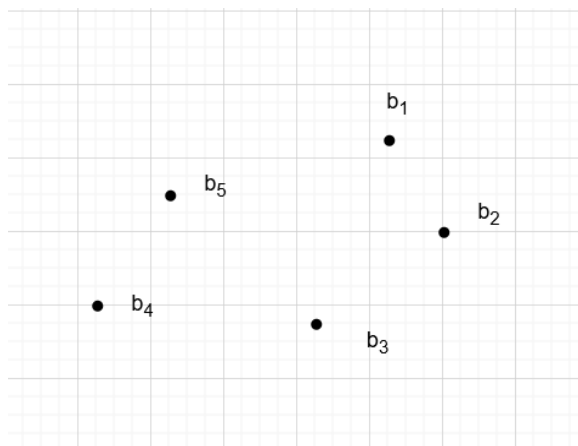


Рис. 1.6. Порожнє відношення

Якщо ж відношення складається із всіх можливих пар вигляду (a, a) і не містить жодних інших пар елементів, то воно називається тотожним і його граф зображено на рисунку нижче, а $|B|=5$.

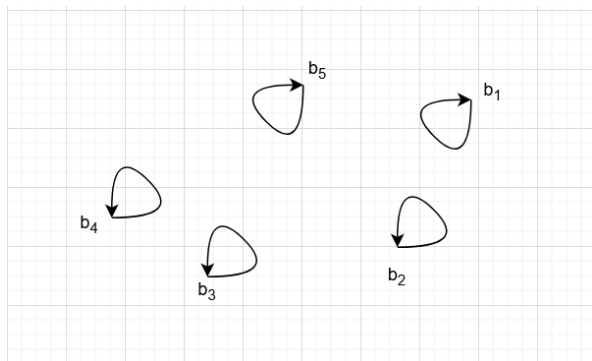


Рис. 1.7. Тотожне відношення

Повне відношення, яке задане за допомогою матриці, то всі елементи цієї матриці дорівнюють одиниці. Якщо відношення є порожнім, то його матриця складається з нульових елементів.

Зауваження. За допомогою графа та матриці зручно задавати тільки бінарні відношення.

Запитання

1. Який зв'язок між теорією множин та теорією відношень?
2. Дайте означення поняття декартового добутку множин.
3. Нехай задано деяку множину B . Що означає запис A^2, A^3, A^n ?
4. Дайте пояснення $A \times B \neq B \times A, A \neq B$.
5. Дайте означення поняття відношення. Що таке унарне, бінарне, n – арне відношення?
6. Що називається дугою, графом, вершиною?
7. Поясніть, що таке порожнє відношення, повне відношення та тотожне відношення. Зобразіть графи тотожного та порожнього відношення.

Бінарні відношення

Означення 1. Нехай R – бінарне відношення, обернене відношення до R позначається R^{-1} . Упорядкована пара (y, x) належить R^{-1} тоді і тільки тоді, коли (x, y) належить R . Якщо $R \subseteq X^2$, то $R^{-1} \subseteq X^2$, де X – деяка множина, якщо $R \subseteq X \times Y$, то $R^{-1} \subseteq Y \times X$.

Розглянемо бінарне відношення, яке задане на двох множинах, то граф відношення можна побудувати наступним чином. Вершини графа, які відповідають елементам першої множини розмістимо зліва, вершини графа другої множини розміщуємо справа. Отже, згідно цього алгоритму, дуги графа спрямовані зліва направо.

Розглянемо **приклад**.

Нехай задані множини $X=\{a, b, c, d, e, f\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4\}$ та задане відношення $R=\{(a, 1), (a, 2), (b, 4), (d, 1), (f, 4)\}$.

Граф даного відношення зображено на рисунку

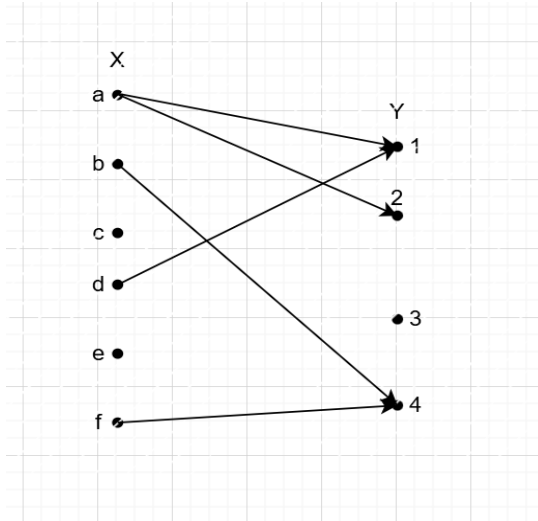


Рисунок 1.8. Граф відношення R

Для того, щоб побудувати граф для оберненого відношення R^{-1} , змінимо напрямки дуг, що зображено на рисунку вище.

Використавши операцію композиції, дослідимо спосіб одержання відношення із двох інших відношень.

Нехай існує якась інша множина $M=\{k, l, m, p\}$, $Y=\{1,2,3,4\}$ і відношення $S=\{(1, l), (2, m), (3, l), (3, p)\}$, $S \subseteq Y \times M$.

Доповнимо рисунок із відношенням R , зобразивши на ньому ще задане відношення S , таким чином, ми отримаємо граф.

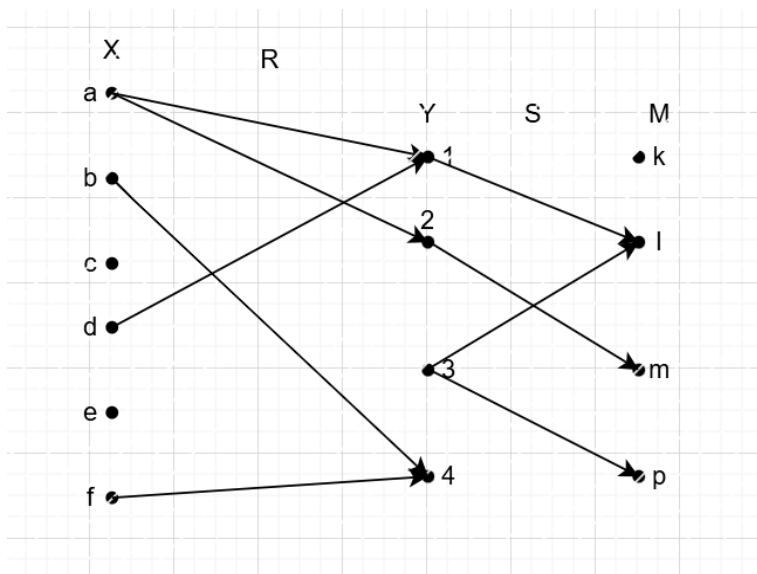


Рис. 1.9. Граф відношення R та відношення S

Означення 2. Нехай R, S – відношення, такі, що $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times M$, де X, Y, M – деякі множини. Композицією відношень R і S називається таке відношення, яке складається з упорядкованих пар (x, m) , $x \in X, m \in M$, для яких існує елемент $y \in Y$, такий, що виконуються умови

$$(x, y) \in R, (y, m) \in S.$$

Композиція відношень між R і S має позначення:

$$S \circ R.$$

Зокрема, для відношень, що зображені на рисунку 1.9.,

$R \subseteq X \times Y$ і $S \subseteq Y \times M$, композиція $S \circ R$ є відношення, що зображено на рисунку 1.10. і є підмножиною декартового добутку $X \times M$.

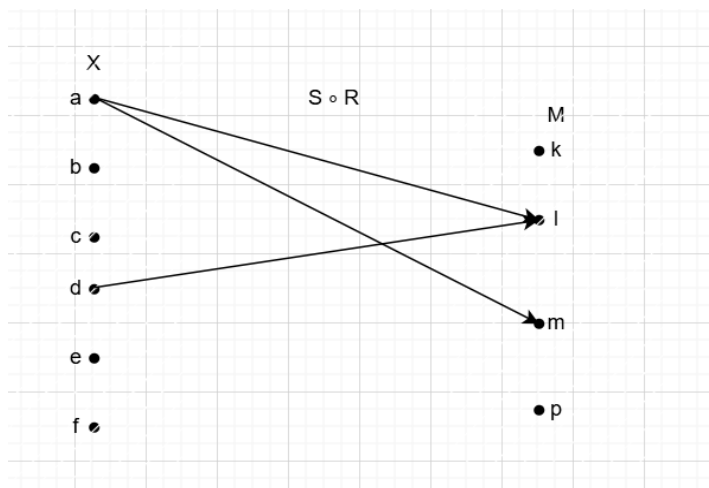


Рис.1.10. Граф відношення $S \circ R$

Зауважимо, що для пари $(x, m) \in S \circ R$ «проміжних» елементів Y може бути декілька, але їх кількість (якщо ця кількість не нульова), не впливає на вигляд композиції $S \circ R$.

Завдяки введенню операції композиції відношень можна ввести поняття бінарного відношення, яке є заданим на одній множині.

Означення 3. Нехай задане деяке відношення R , що визначене на множині таким чином $X: R \subseteq X \times X$. Тоді n – й степінь відношення R позначається R^n і визначається рекурсивно так:

R^0 – тотожне відношення на множині X ;

$R^n = R^{n-1} \circ R$, для $n=1, 2, \dots$

Із означення маємо, що $R^1 = R$, $R^2 = R \circ R$, $R^3 = R^2 \circ R$ і так далі.

Означення 4. Нехай $R \subset X \times Y$ — відношення на множинах X та Y . Якщо $x \in X$, то перерізом відношення R за x , що має позначення $R(x)$, є множина $R(x) \subseteq Y$, що складається з елементів $y \in Y$, таких що $(x, y) \in R$.

Об'єднанням перерізів за елементами деякої підмножини $M \subset X$ називається переріз $R(M)$ відносно підмножини M . Множина, що складається з перерізів відношення $R \subseteq X \times Y$ за кожним елементом з X , називається **фактор-множиною** множини Y за відношенням R і має позначення Y/R . По-іншому можна записати, що $Y/R = \{R(x), \forall x \in X\}$.

Приклад. Розглянемо перерізи відношення R на множинах $X = \{a, b, c, d, e, f\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$, $R \subseteq X \times Y$, дане відношення задане графом (рис.1.8.): $R = \{(a, 1), (a, 2), (b, 4), (d, 1), (f, 4)\}$.

Можна отримати такі перерізи:

$$R(a) = \{1, 2\}, R(b) = \{4\}, R(d) = \{1\}, R(e) = \emptyset, R(f) = \{4\}.$$

Фактор-множина має вигляд $B/R = \{\{1, 2\}, \{4\}, \{1\}, \emptyset\}$. Розглянемо множину $D = \{d, e, f\}$, $D \subset X$.

Переріз відношення R за множиною D виглядає таким чином: $R(D) = R(d) \cup R(e) \cup R(f) = \{\{1\}, \{4\}, \emptyset\}$.

Крім наведених операцій, до відношень застосовуються і звичайні теоретико-множинні операції — перетин, об'єднання, різниця та доповнення.

Розглянемо два відношення R та S , що визначені на множинах X і Y , $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq X \times Y$. У результаті виконання операцій $R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$ одержуємо множини впорядкованих пар, що є відповідно об'єднанням, перетином, різницею множин R і S . Результати виконання цих операцій є також відношеннями на множинах X і Y . Зауважимо, що доповнення відношення R має позначення $\bar{R}$ і містить всі упорядковані пари множини $X \times Y$, за винятком тих пар, що належать до відношення R .

Запитання

1. Дайте означення оберненого відношення та як воно позначається.
2. Як отримати граф відношення, яке є обернене до даного?
3. Дайте означення композиції відношень.
4. Нехай задано деяке відношення R . Що означає запис R^1, R^2, R^3 ?
5. Дайте означення перерізу відношення.
6. Що таке фактор-множини у відношенні R ?
7. Назвіть теоретико-множинні операції, які можна застосовувати до відношень.

Зауважимо, що кожне бінарне відношення на певній множині, наприклад X , може мати одну або декілька властивостей, описаних нижче.

Властивості бінарних відношень

1. *Рефлексивність.* Відношення R на множині X називається рефлексивним, якщо $\forall x \in X$ є правильним xRx . Тобто кожен елемент x множини X знаходиться у відношенні до самого себе.

Властивість рефлексивності при заданні відношень матрицею характеризується тим, що всі діагональні елементи дорівнюють одиниці. При заданні відношення за допомогою графа кожний елемент має петлю – дугу (x, x) .

2. *Антирефлексивність.* Відношення R на множині X є антирефлексивним, якщо

$$\forall x_1 R x_2: x_1 \neq x_2.$$

Властивість антирефлексивності при заданні відношень матрицею задається тим, що всі діагональні елементи матриці дорівнюють нулю.

При заданні відношення за допомогою графа, жодна вершина не має петлі, тобто не має дуг вигляду (x, x) .

3. *Симетричність.* Відношення R на множині X називається симетричним, якщо для пари

$$(x_1, x_2) \in X^2 \text{ з } x_1 R x_2 \Rightarrow x_2 R x_1,$$

тобто для будь-якої пари це відношення виконується або в обидва боки, або не виконується взагалі.

Матриця симетричного відношення є симетричною відносно головної діагоналі, а в графі, що задає дане відношення, для кожної дуги з x_i в x_k існує дуга, яка є протилежно спрямованою, тобто з x_k в x_i .

4. *Асиметричність*. Відношення R називається асиметричним, якщо для будь-якої пари $(x_1, x_2) \in X^2$ із $x_1 R x_2$ випливає, що не виконується $x_2 R x_1$, тобто для довільної пари відношення R або виконується в один бік, або не виконується взагалі.

5. *Антисиметричність*. Відношення R називається антисиметричним, якщо

$$\text{з } x_1 R x_2 \text{ та } x_2 R x_1 \Rightarrow \text{випливає, що } x_1 = x_2.$$

Приклад. Відношення, яке звучить так: «бути симетричним відносно вісі Ox на множині точок координатної площини» є симетричним, якщо перша точка симетрична другій, то і друга симетрична першій.

6. *Транзитивність*. Відношення R називається транзитивним, якщо з $x_1 R x_2$ та $x_2 R x_3$ випливає $x_1 R x_3$.

У графі, що задає транзитивне відношення R для довільної пари дуг таких, що кінець першої співпадає з початком другої. Існує третя дуга, що має спільний початок із першою дугою та спільний кінець із другою дугою.

Прикладом транзитивності є задане відношення $i \leq$ на множині дійсних чисел, якщо $a \leq b$ і $b \leq c$, то $a \leq c$.

7. *Антитранзитивність*. Якщо $x_1 R x_2$ та $x_2 R x_3$, то випливає, що не виконується $x_1 R x_3$.

1.10. Відношення порядку, еквівалентності та толерантності

Розглянемо бінарні відношення, які найбільш використовуються.

Означення 1. Відношенням еквівалентності називається таке бінарне відношення, що має властивості рефлексивності, транзитивності та симетричності.

Нехай задана множина A і відношення еквівалентності, яке визначене на цій множині: $R \subseteq A \times A$. Елементи $a, b \in A$, для яких виконується відношення aRb , називаються еквівалентними. Особливо важливою властивістю будь-якого відношення еквівалентності R , яке визначене на множині A , полягає в тому, що відношення розбиває множину A на деякі неперетинні підмножини, що називаються класами еквівалентності.

Приклад. Відношення рівності, тобто « $=$ » на будь-якій множині чисел є відношенням еквівалентності. Відношення «вчитися в одній академічній групі» на множині студентів факультету є відношенням еквівалентності і розбиває всю множину студентів факультету на окремі групи. Відношення «мати однакове ім'я» на визначеній множині людей є відношенням еквівалентності і розбиває всю множину людей на класи еквівалентності, тобто групи людей з однаковими іменами.

Означення 2. Відношення називається відношенням часткового порядку, якщо виконуються наступні умови:

- 1) відношення рефлексивне ($a \leq a$);
- 2) антисиметричне (якщо $a \leq b$ і $b \leq a$, то $a=b$);
- 3) транзитивне (якщо $a \leq b$ і $b \leq c$, то $a \leq c$).

Якщо на множині задане відношення буде часткового порядку, то і ця множина називається частково упорядкованою.

Із властивістю транзитивності пов'язане важливе поняття шляху в графі.

Означення 3. Шлях у певному графі відношення з вершини a до вершини b – це послідовність дуг $(a, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, b), n \geq 1$.

Кількість дуг n називається **довжиною** шляху.

Використавши поняття шляху у графі, можна показати, що властивість транзитивності виконується у відношенні, що задане графом, якщо будь-які дві вершини, між якими існує шлях, з'єднані дугою.

Часто при зображенні графа відношення порядку виключають дуги, використавши властивість транзитивності, які можна добудувати, тобто, якщо на графі існує шлях з a до b , то дугу (a, b) не зображують. Вершини потрібно розташувати так, щоб спрямованість всіх дуг була знизу-нагору. Тоді спрямованість дуг можна не вказувати. Одержавши таким чином діаграму, цього достатньо, щоб визначити відношення порядку. Відношення включення множин можна зобразити за допомогою діаграми Хасе, що зображена на рисунку 1.11.

Означення 4. Елементи a та b є порівнянними у відношенні часткового порядку R , якщо буде виконуватися хоча б одне із співвідношень aRb та bRa . Множина A , на якій задане відношення часткового порядку R і для якої довільні два елементи цієї множини є порівнянні, називається повністю упорядкованою або лінійно упорядкованою.

Відмінність між повністю упорядкованою та частково упорядкованою множиною полягає в тому, що в частково упорядкованій множині A можуть бути елементи, які можна складати в непорівнянні пари.

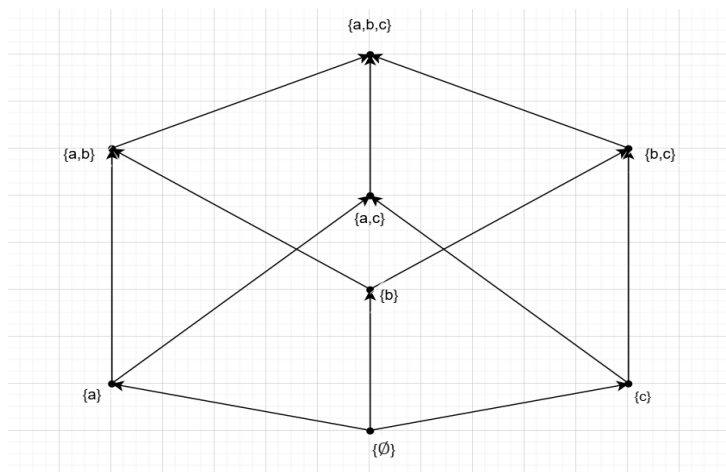


Рис. 1.11. Діаграма Хассе

Із даного рисунку видно, що не всі вершини графа відношення з'єднані між собою шляхами, наприклад між $\{a, b\}$ і $\{a, c\}$.

Відношення часткового порядку, яке є рефлексивним, транзитивним, антисиметричним називається відношенням нестрогого порядку

У порівнянні з ним, відношення строгого порядку має такі властивості:

- 1) асиметричність (якщо $a < b$, то є неправильним $b < a$);
- 2) антирефлексивність (якщо $a < b$, то $a \neq b$);
- 3) транзитивність (якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$).

Отже, при зміні у відношенні нестрогого порядку властивість антисиметричності на асиметричність, то отримаємо строгий порядок.

Означення 5. Відношенням толерантності називається таке відношення, яке є:

- 1) рефлексивним;
- 2) симетричним;
- 3) антитранзитивним.

Формальним чином, толерантність зображує собою інтуїтивне поняття схожості. Схожість певних двох об'єктів не залежить від того, в якому порядку вони порівнюються в цьому і полягає властивість симетричності. У той самий час, якщо один об'єкт схожий з другим, а другий з третім, то з цього не випливає той факт, що перший та третій об'єкт схожі, тобто властивість транзитивності може не виконуватися.

Толерантне відношення у дискретній математиці часто використовується для моделювання «допустимої подібності» між об'єктами (наприклад, якщо два кольори можна вважати схожими, але схожість не обов'язково переходить далі).

Толерантне відношення у дискретній математиці можна розуміти як «схожість» між об'єктами, яка: завжди правильна для самого об'єкта (рефлексивність); якщо один об'єкт схожий на другий, то і другий на перший (симетричність); але може не передаватись третім об'єктам (не обов'язкова транзитивність).

Запитання

1. Дайте означення відношення еквівалентності.
2. Як саме множини розбивають на класи еквівалентності?
3. Які елементи є еквівалентними?
4. Дайте означення відношення часткового порядку.
5. Що таке шлях у графі? Яким чином поняття шляху використовується для дослідження графів відношення порядку?
6. Яка множина є лінійно впорядкованою множиною?
7. Що таке порівнянні та непорівнянні елементи?
8. Дайте означення відношення строгого порядку.
9. Чим відрізняється відношення часткового порядку від відношення повного порядку?
10. Дайте означення відношення толерантності. З чим воно асоціюється фактичним чином?

1.11. Функціональні відношення

Функція або функціональна залежність між змінними є частковим випадком відношення.

Означення 1. Відношення R між множинами X та Y ($R \subseteq X \times Y$) називається функціональним, якщо всі його елементи (упорядковані пари) різні за першим елементом, тобто кожному елементу $x \in X$ відповідає єдиний елемент $y \in Y$, такий що xRy , або такого елемента y взагалі не існує.

Матриця функціонального відношення, яка є заданою на множинах X та Y , містить не більше однієї одиниці в кожному рядку. Якщо ж функціональне відношення задане за допомогою графа, то із кожної вершини, що зображує першу координату, виходить не більше однієї дуги. Зобразимо приклади функціонального та нефункціонального відношень на рисунках.

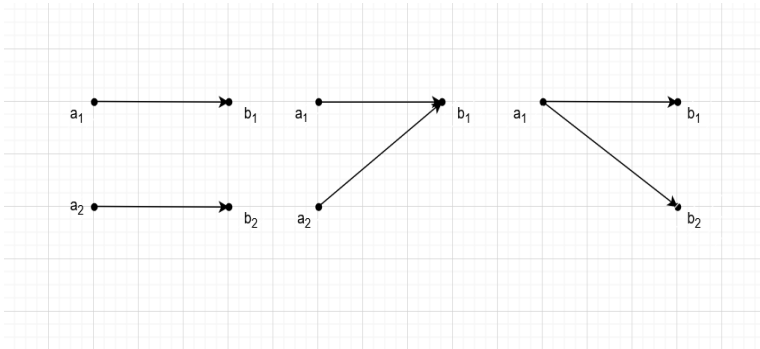


Рис. 1.12. Приклади функціонального та нефункціонального відношень

Означення 2. Нехай задано R – деяке відношення,

$R \subseteq X \times Y$. Областю визначення відношення R називається множина D_R , яка складається з усіх елементів множини X і які зв'язані відношенням R із елементами множини

$$Y: D_R \subseteq X, D_R = \{x: \exists y \in Y, (x, y) \in R\}.$$

Областю значень відношення R називається така множина R_R , що складається з усіх елементів множини Y , які зв'язані відношенням R із елементами множини X :

$$R_R \subseteq Y, R_R = \{y: \exists x \in X, (x, y) \in R\}.$$

Означення 3. Нехай F – деяке функціональне відношення, $F \subseteq X \times Y$. Відповідність $x \rightarrow y$ від першого до другого елементу кожної такої пари $(x, y) \in F$, відношення F називається функцією f або відображенням f множини D_f в Y і має таке позначення $f: D_f \rightarrow Y$.

Множина D_f називається **областю задання** функції (відображення) f або областю визначення і позначається як D_f . Стверджують також, що функція f діє з X в Y та є визначеною на підмножині D_f з X .

Якщо $D_f = X$, то записують ще таким чином $f: X \rightarrow Y$ і кажуть, що задане відображення $X \rightarrow Y$.

Якщо множина A є підмножиною X , тобто $A \subseteq X$, то образ множини A позначається таким чином

$$f(A) = \{y \in Y: y = f(x), \forall x \in A\}.$$

Множина $f(X) \subseteq Y$ називається **образом** або **областю значень** відображення f і позначається $R_f = f(X)$.

Якщо $B \subseteq Y$, то множина $f^{\{-1\}}(B) = \{x \in X: f(x) \in B\}$ називається **прообразом** множини B відносно відображення f .

Запис функціональної залежності повинен доповнюватися інформацією про область визначення – підмножину припустимих значень аргументу x , тобто запис $f: D_f \rightarrow Y$ є більш інформативним із точки зору функціональних відображень.

Графіком відображення $f: X \rightarrow Y$ називається сукупність точок (x, y) виду $(x, f(x))$ у декартовому добутку $X \times Y$.

Отже, якщо $F \subset X \times Y$ – вихідне функціональне відношення, яке породжує функцію (відображення) f , то F в точності є графік функції f .

Не слід плутати поняття «графік функції f » та «граф відношення F »: граф за допомогою дуг зі стрілками описує дію відображення f на кожному значенні аргументу x (рис.1.13).

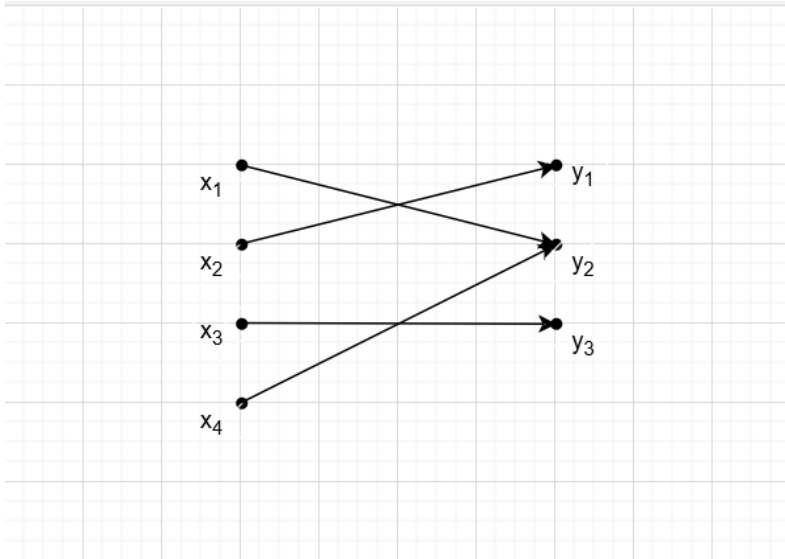


Рис.1.13. Види відображень

1. Функція $f: X \rightarrow Y$ називається сюр'єктивним відображенням, якщо виконується рівність $R_f = Y$.

На графі, на якому зображене сюр'єктивне відображення $X \rightarrow Y$, з будь-якої вершини $x \in X$ виходить точно одна дуга, а до будь-якої вершини, що зображує елемент множини Y , заходить не менше однієї дуги (рис. 1.13.).

2. Функція $f: X \rightarrow Y$ називається ін'єктивним відображенням, якщо з $x_1 \neq x_2$ випливає, що $f(x_1) \neq f(x_2)$.

На графі, що зображує ін'єктивне відображення $X \rightarrow Y$, з будь-якої вершини $x \in X$ виходить точно одна дуга, а до будь-якої вершини, що зображує елемент множини Y , заходить не більше однієї дуги (рис.1.14).

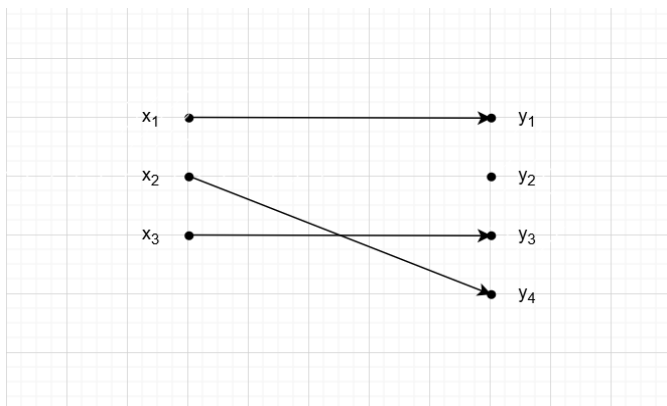


Рис.1.14. Приклад ін'єктивного відображення

Якщо $f: X \rightarrow Y$ – ін'єктивне відображення і відповідне функціональне відношення $F = \{(x, f(x)), \forall x \in X\}$, $(F \subset X \times Y)$, то обернене відношення $F^{-1} = \{(y, x), \forall y \in R_f\}$ також є функціональним.

Функція $x = f^{-1}(y), f^{-1}: R_f \rightarrow X$, що задається відношенням F^{-1} , має такі властивості

$$f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in X; f(f^{-1}(y)) = y, \forall y \in R_f$$

і називається оберненою до функції f .

3. Функція $f: X \rightarrow Y$ називається бієктивним відображенням, якщо вона ін'єктивна та сюр'єктивна.

На графі, що зображує бієктивне відображення $f: X \rightarrow Y$ скінчених множин, з будь-якої вершини $x \in X$ виходить точно одна дуга, а до будь-якої вершини $y \in Y$ заходить одна і тільки одна дуга (рис.1.15).

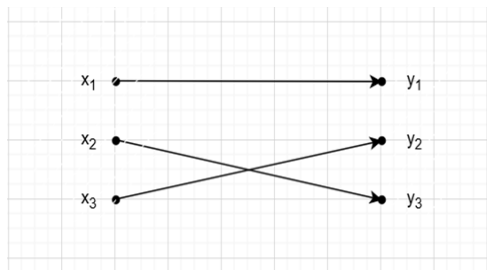


Рис. 1.15. Приклад бієктивного відображення

Отже, бієктивне відображення $f: X \rightarrow Y$ здійснює взаємно однозначне відображення між множинами X та Y , тому

$$X \sim Y, |X|=|Y|.$$

Властивість бієктивності забезпечує існування оберненого відображення. Це означає, якщо відображення

$$f: X \rightarrow Y$$

бієктивне, то буде існувати і обернене відображення

$$f^{-1}: Y \rightarrow X,$$

причому $D_{f^{-1}}=Y$.

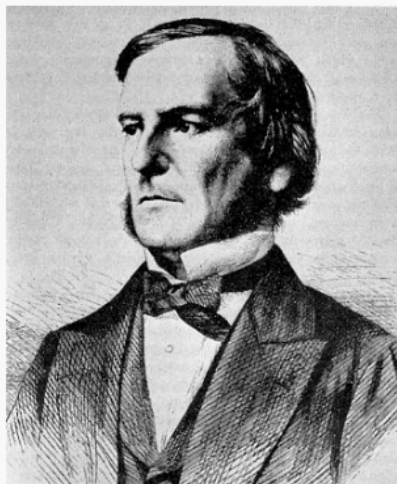
Запитання

1. Яке відношення називається функціональним?
2. Дайте означення області визначення та області значень відношення.
3. Що таке образ та прообраз функціонального відношення.
4. Дайте означення ін'єктивного, сюр'єктивного та бієктивного відображень.
5. Охарактеризуйте граф кожного із відображень.
6. Наведіть приклади кожного із відомих вам відображень. Чим вони відрізняються?
7. Що називається графіком функціонального відображення?
8. Який вид відображень можна охарактеризувати «один до одного» та «багато до одного»?
9. Який саме вид відображення множини A на множину B ставить у відповідність кожному елементу множини A один і тільки один елемент множини B так, що кожний елемент множини B поставлено у відповідність одному і тільки одному елементу множини A ?

РОЗДІЛ 2. БУЛЕВІ ФУНКЦІЇ

Для зображення інформації на комп'ютерах використовується відома двійкова система числення. Отже, всі операції, які виконуються на комп'ютерах, проводяться на множині $\{0,1\}$. Ці перетворення зручно зображати за допомогою апарата двійкової логіки, який був розроблений відомим вченим Джорджем Булем у середині XIX століття.

Джордж Буль (1815-1864) – британський мате-матик і філософ, який засну-вав одну з найважливіших галузей сучасної логіки – **булеву алгебру**. Він був самоучкою: вивчав мови, математику та науку самостійно, оскільки його сім'я не мала коштів для його повної освіти.



Джордж Буль (1815-1864)

У 1854 році опублікував свою головну працю «An Investigation of the Laws of Thought» («Дослідження законів мислення»), в якій виклав основи **булевої алгебри** – системи логічних обчислень, яка стала фундаментом для цифрової електроніки і комп'ютерної науки. Буль довів, що логіка може бути виражена через алгебраїчні рівняння – це стало проривом у розвитку **формальної логіки**. Ім'я Буля живе в терміні «**булева алгебра**», а його ідеї лежать в основі комп'ютерної логіки, штучного інтелекту, електроніки та цифрових технологій, без даної науки не було б сучасних комп'ютерів.

Така алгебраїчна структура є алгеброю та називається **булевою**. Булева алгебра має різноманітне застосування, а саме у розв'язанні різних задач обробки інформації, при роботі із базами даних, при проектуванні інтелектуальних систем, для конструювання та аналізу різноманітних електронних пристроїв, у логічному програмуванні.

У даному розділі розглянуто основні властивості булевих функцій з аргументами, які взяті з множини $B=\{0,1\}$, а також способи зображення булевих функцій у вигляді виразів булевої алгебри. Булева функція може мати велику кількість знаків операцій та змінних, у той же самий час, як може існувати інше еквівалентне зображення даної функції, що має меншу кількість операцій та змінних.

Розглянемо B – двоелементну множину, елементи якої ми позначаємо через 0 і 1: $B=\{0,1\}$.

Означення 1. Змінні, що можуть приймати значення тільки з множини B , називаються логічними або булевими змінними. Самі значення 0 і 1 булевих змінних називаються булевими константами.

У мовах програмування для роботи із такими змінними вводиться спеціальний логічний (булевий) тип. Змінна такого типу приймає тільки два значення: true та false.

Означення 2. Функція виду $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, аргументи x_i і значення y якої належить множині B , називається n -місною булевою функцією. Такі функції також називають логічними або перемикальними функціями.

Означення 3. Кортеж $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ конкретних значень булевих змінних називається двійковим словом (n - словом) або булевим набором довжини n .

Для булевої функції $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ конкретне (індивідуальне) значення булевого набору $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається також інтерпретацією булевої функції f . Множина всіх двійкових слів, що позначається через B^n , називається n - вимірним булевим кубом і містить 2^n елементів-слів: $|B^n|=2^n$.

Дійсно, для $n=1$ є всього $2^1=2$ слова (0) і (1), а за рахунок збільшення довжини слова на один символ кількість слів збільшується у 2 рази, оскільки додатковий символ може приймати два значення – 0 або 1.

Означення 4. Змінна x_i у функції $f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ називається неістотною (або фіктивною), якщо $f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)=f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$

при будь-яких значеннях решти змінних, тобто, якщо зміна значення x_i у будь-якому наборі значень $x_1, x_2, \dots, x_n$ не змінює значення функції.

У цьому випадку функція $f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ фактично залежить від $n-1$ змінної, тобто зображує функцію $g(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$. Стверджують, що функція g одержана з функції f видаленням фіктивної змінної, а функція f одержана з g введенням фіктивної змінної, причому ці функції за означеннями рівні.

Запитання

1. Які змінні називаються логічними або булевими змінними?
2. Дайте означення булевої функції.
3. Поясніть з чого складається область визначень та область значень булевої функції.
4. Які змінні називаються фіктивними або неістотними.

2.1. Способи задання булевих функцій

Булеві функції задають за допомогою таких способів:

1. За допомогою таблиці істинності (значеннями на кожній інтерпретації).
2. Порядковим номером, що має ця функція.
3. Аналітично, за допомогою формули.

Таблиці істинності

Таблиці, в яких кожній інтерпретації, тобто набору аргументів функції поставлено у відповідність її значення, називаються таблицями істинності булевої функції.

У таблиці істинності кожній змінній та значенню самої функції відповідає по одному стовпчику, а кожній інтерпретації – по одному рядку.

Наведемо важливі значення булевої функції:

Кон'юнкція (логічне «і») $x \cdot y, x \wedge y$;

Диз'юнкція (логічне «або») $x \vee y$;

Імплікація $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$.

Еквіваленція $x \sim y = \bar{x} \bar{y} \vee xy$.

Сума за модулем два, тобто остача від ділення на два $x \oplus y = (x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee y)$.

Стрілка Пірса $x \nabla y = \overline{x \vee y}$.

Штрих Шеффера $x|y = \overline{x \wedge y}$.

Зауважимо, що $\bar{0} = 1, \bar{1} = 0$.

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	p	r	s	d	e	k	m
0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0

Зауважимо позначення, задані в таблиці $p = x \wedge y$;
 $r = x \vee y$; $s = x \rightarrow y$; $d = x \sim y$; $e = x \oplus y$; $k = x \nabla y$;
 $m = x|y$.

Виділимо набір таких незалежних властивостей, що можна вважати аксіомами або незалежними законами булевої алгебри:

1. Комутативність: $a \vee b = b \vee a$; $a \wedge b = b \wedge a$.

2. Асоціативність:

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c,$$

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c.$$

3. Дистрибутивність: $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$,

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

4. Закони для нуля, одиниці та заперечення

$$a \vee 0 = a, \quad a \vee \bar{a} = 1, \quad a \wedge 1 = a, \quad a \wedge \bar{a} = 0.$$

Наступні властивості, зокрема, є наслідками попередніх чотирьох властивостей

5. Закони ідемпотентності: $a \vee a = a$ та $a \wedge a = a$.

6. Інші властивості одиниці та нуля: $a \vee 1 = 1$, $a \wedge 0 = 0$.

7. Закони поглинання: $a \wedge (a \vee b) = a$ та $a \vee (a \wedge b) = a$.

8. Закон інволюції (подвійного заперечення):

$$\bar{\bar{a}} = a.$$

9. Закони де Моргана.

$$\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}; \quad \overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}.$$

Означення 1. Булева алгебра – це алгебраїчна структура $(A, \wedge, \vee, \bar{}, 0, 1)$ з бінарними операціями $\vee, \wedge$: $A^2 \rightarrow A$, унарною операцією $\bar{}$: $A \rightarrow A$ і виділеними елементами 0 та 1 в носії A , задовольняють властивості 1-4, описаних вище.

Означення 2. Алгебраїчна структура $(B, \wedge, \vee, \bar{})$, $B = \{0, 1\}$ з операціями диз'юнкції, кон'юнкції, заперечення або інверсії називається двоелементною булевою алгеброю.

Означення 3. Алгеброю логіки називається двоелементна булева алгебра $(B, \wedge, \vee, \bar{}, \rightarrow, \sim)$, $B = \{0, 1\}$, в якій множині операцій доповнено двома бінарними операціями: імплікацією та еквіваленцією.

2.2. Булеві формули і пріоритет операцій

Булеві функції можуть бути задані за допомогою формул, тобто аналітично.

Означення 1. Формула – це вираз, яка містить булеві функції та їхні суперпозиції.

Означення 2. Суперпозицією називається спосіб одержання нових функцій за допомогою підстановки значень одних функцій замість значень аргументів інших функцій. Отже, суперпозицією булевої функції f_0 і функцій $f_1, \dots, f_n$ називається функція $f(x_1, \dots, x_m) = f_0(g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_k(x_1, \dots, x_m))$, де кожна функцій $g_i(x_1, \dots, x_m)$ співпадає з однією з функцій $f_1, \dots, f_n$, $i \in \{1, \dots, k\}$.

При цьому деякі з функцій f_i , а значить і g_i можуть тотожно співпадати із однією із змінних x_t , $t \in \{1, \dots, m\}$.

У роботі із булевими функціями важливим є пріоритет операцій, якщо у формулі відсутні дужки, то операції виконуються в такій послідовності:

1. Заперечення.
2. Кон'юнкція.
3. Диз'юнкція.
4. Імплікація.
5. Еквіваленція.

Зауваження 1. Необхідно відзначити, що знак операції заперечення може розміщуватись над формулами або їх частинами, а не тільки над окремими змінними. У такому випадку операції виконуються так, ніби вираз, який знаходиться під знаком заперечення, розташований в дужках.

Зауваження 2. При роботі із виразами, доречним є зобразити штрих Шеффера можна за допомогою основних операцій булевої алгебри, використовуючи наступні формули:

$$x/y = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \text{ або } x/y = \overline{x_1 \wedge x_2},$$

а функцію стрілка Пірса за допомогою наступних виразів:

$$x \swarrow y = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \text{ або } x \swarrow y = \overline{x_1 \vee x_2}.$$

Означення 3. Формули, що зображають одну і ту ж функцію називаються еквівалентними або рівносильними.

Еквівалентність формул позначають за допомогою знака рівності. Одним із способів встановити еквівалентність є використання такого алгоритму: для кожної формули потрібно побудувати таблицю істинності, потім, отримані таблиці порівнюються, тобто для кожного набору змінних відбувається перевірка чи значення функцій є однаковими на кінцевому кроці порівняння.

Запитання

1. Назвіть основні булеві функції від двох змінних.
2. Дайте означення суперпозиції булевих функцій.
3. В якому порядку визначається пріоритет для операцій алгебри логіки?
4. Для якої мети використовується пріоритет операцій?
5. Назвіть, що таке еквівалентність формул?
6. Які основні операції булевої алгебри ви знаєте?

2.3. Поняття двоїстості та закони булевої алгебри

В основі булевої алгебри, як і в деяких інших алгебраїчних структурах, є принцип двоїстості.

Означення 1. Функція $f^*(x_1, \dots, x_n)$ називається двоїстою до функції $f(x_1, \dots, x_n)$, якщо $f^*(x_1, \dots, x_n) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$.

Зауваження. Із означення двоїстості робимо висновок, що для будь-якої функції двоїста їй однозначно визначається.

Означення 2. Функція, двоїста сама собі, тобто $f = f^*$, називається самодвоїстою.

Закони булевої алгебри

1. Комутативність кон'юнкції та диз'юнкції

$$x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x;$$

2. Асоціативність кон'юнкції та диз'юнкції

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z); \quad (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z);$$

3. Дистрибутивність кон'юнкції та диз'юнкції

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z); \\ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z);$$

4. Ідемпотентність диз'юнкції та кон'юнкції.

$$x \vee x = x, \quad x \wedge x = x;$$

5. Закон виключеного третього

$$x \vee \bar{x} = 1;$$

6. Закон протиріччя

$$x \wedge \bar{x} = 0;$$

7. Тотожності з константами

$$x \vee 0 = x, \quad x \vee 1 = 1, \quad x \wedge 1 = x, \quad x \wedge 0 = 0.$$

8. Закони елімінації

$$x \vee (x \wedge y) = x, x \wedge (x \vee y) = x.$$

9. Закон подвійного заперечення

$$\bar{\bar{x}} = x.$$

10. Закони де Моргана

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y},$$

$$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}.$$

Запитання

1. Дайте означення двоїстої функції.
2. Які функції називаються самодвоїстими?
3. Сформулюйте тотожності і запишіть для кожного із десяти законів булевої алгебри. Охарактеризуйте кожну дію із булевої алгебри.

2.4. Досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДФ).

Серед множин еквівалентних формул, що зображують певну обрану булеву функцію f , виділяється важлива формула, що має назву досконалої нормальної форми цієї функції f . Досконала нормальна форма, яка має регламентовану логічну структуру і визначається однозначно за функцією f , а її побудова ґрунтується на рекурентному застосуванні теорем про спеціальні розкладання булевої функції за її змінними.

Для спрощення математичних пояснень введемо певний двійковий параметр σ і позначимо x^σ наступним чином:

$$x, \sigma \in B = \{0, 1\},$$

$$x^\sigma = \begin{cases} \bar{x}, & \text{якщо } \sigma = 0, \\ x, & \text{якщо } \sigma = 1. \end{cases}$$

Можемо зробити висновок, що

$$x^\sigma = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x = \sigma, \\ 0, & \text{якщо } x \neq \sigma. \end{cases}$$

Безпосередньо можна перевірити, що бінарна функція $f(x, \sigma) = x^\sigma$ зображається за допомогою формули:

$$x^\sigma = x\sigma \vee \bar{x}\bar{\sigma}.$$

Теорема 1. Довільну булеву функцію $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можна зобразити, використовуючи таку формулу:

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \\ & = \vee_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)} x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n} \wedge f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n), \end{aligned}$$

Запис $\vee_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)}$ означає багатократну диз'юнкцію, що береться за всіма можливими наборами значень $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$ при будь-якому k ($1 \leq k \leq n$).

Наслідок. Будь-яку булеву функцію $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$ можна зобразити у такій формі :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k), f(x_1, x_2, \dots, x_n)=1} x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}, \quad (2.1)$$

У правій частині диз'юнкція береться за всіма наборами значень $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, на яких $f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)=1$.

Означення 1. Елементарною кон'юнкцією називається кон'юнкція будь-якої кількості булевих змінних, які взяті із запереченням або без нього, в якій кожна змінна буде зустрічатися не більше одного разу. Елементарною кон'юнкцією, яка містить нуль змінних, будемо вважати константу 1.

Означення 2. Диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ) називається формула, що зображена у вигляді диз'юнкції елементарних кон'юнкцій.

Означення 3. Елементарна кон'юнкція $x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}$ називається конституентною одиницею (мінтермом) функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо $f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)=1$, тобто інтерпретація, яка обертає в одиницю дану елементарну кон'юнкцію, обертає в одиницю і функцію f .

Конституентна одиниця має такі властивості:

1. Конституентна одиниця дорівнює одиниці тільки на відповідній їй інтерпретації.
2. Значення конституентни одиниці однозначно визначається певним номером відповідної інтерпретації.
3. Кон'юнкція будь-якого числа різних конституент одиниці функції буде дорівнювати нулю.

Означення 4. Досконалою диз'юнктивною нормальною формою булевої функції (ДДНФ) називається формула, що зображена у вигляді диз'юнкції конституент одиниці даної функції.

ДДНФ функції є результатом диз'юнктивного розкладу даної функції за всіма змінними цієї функції.

Отже, ДДНФ функції містить тільки диз'юнкцію, кон'юнкцію та заперечення, отже, при застосуванні до ДДНФ принципу двоїстості, то ми можемо отримати двоїсте зображення, яке має назву кон'юнктивний розклад.

Теорема 2. Будь-яку булеву функцію $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можна зобразити у такому вигляді

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \\ & = \bigwedge_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)} x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \dots \vee x_k^{\bar{\sigma}_k} \vee \\ & \quad \vee f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Запис $\bigwedge_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)}$ означає, що кон'юнкція береться за всіма можливими наборами значень $f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$.

Наслідок. Будь-яку булеву функцію $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 1$ можна зобразити у такій формі :

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ & = \bigwedge_{(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n), f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)=0} x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee \dots \vee x_n^{\bar{\sigma}_n} \end{aligned} \quad (2.2)$$

У правій частині кон'юнкція береться за всіма наборами значень $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$, на яких $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.

Означення 5. Елементарною диз'юнкцією називається диз'юнкція будь-якого числа булевих змінних, що взяті із запереченням або без нього, в якій кожна змінна зустрічається не більше одного разу. Елементарною диз'юнкцією, що містить нуль змінних, будемо вважати константу нуля.

2.5. Досконала кон'юктивна нормальна форма (ДКНФ)

Означення 1. Кон'юктивною нормальною формою (КНФ) булевої функції називається формула, що зображена у вигляді кон'юнкції елементарних диз'юнкцій.

Означення 2. Елементарна диз'юнкція $x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee \dots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}}$ називається конституентною нуля (макстермом) функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, тобто інтерпретація, яка обертає в нуль дану елементарну диз'юнкцію, обертає в нуль і функцію f .

Конституентна нуля має такі властивості:

1. Конституентна нуля дорівнює нулю тільки на певній їй відповідній інтерпретації.
2. Конституентна нуля однозначно визначається номером відповідної їй інтерпретації.
3. Диз'юнкція будь-якого числа різних конститuent нуля функції буде дорівнювати одиниці.

Означення 3. Досконалою кон'юктивною нормальною формою (ДКНФ) функції називається формула, що зображена у вигляді кон'юнкції конститuent нуля даної функції.

ДКНФ функції є результатом розкладу кон'юнкцій функції за всіма змінними. З аналізу формул (2.1) та (2.2), відповідних формул ДДНФ та ДКНФ функції, то можемо зробити наступні висновки:

1. Існує зображення у вигляді ДДНФ для кожної булевої функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що не є константою нуля.
2. Існує зображення у вигляді ДКНФ для кожної булевої функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, що не є константою одиниця.
3. Якщо задані дві різні булеві функції, то вони не можуть мати однакові ДКНФ та ДДНФ.
4. Для кожної булевої функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ існує зображення у вигляді формули булевої алгебри, що містить лише операції кон'юнкції, диз'юнкції та заперечення.

Запитання

1. Дайте означення елементарна кон'юнкція, елементарна диз'юнкція, конституентна нулю та одиниці. Яким чином ці поняття пов'язані з кон'юктивним та диз'юктивним розкладом булевих функцій?
2. Назвіть властивості конституенти нуля та одиниці?
3. Сформулюйте означення нормальних та досконалих нормальних форм булевих функцій.
4. Дайте пояснення зв'язку з кон'юктивним та диз'юктивним розкладом булевих функцій.

2.6. Нормальні форми зображення булевих функцій

Алгоритм переходу від таблиці істинності булевої функції до ДДНФ

1. Потрібно виділити всі інтерпретації $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, на яких значення розглядуваної функції дорівнює одиниці.
2. Виписати конституенти одиниці у вигляді $x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\sigma_n}$, які відповідають відзначеним інтерпретаціям.
3. За допомогою з'єднання операцією диз'юнкції конститuent одиниці, можна одержати ДДНФ функції.

Алгоритм переходу від таблиці істинності булевої функції до ДКНФ

1. Потрібно виділити всі інтерпретації $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, на яких значення розглядуваної функції дорівнює нулю.
2. Виписати конституенти нуля у вигляді $x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee \dots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}}$, які відповідають відзначеним інтерпретаціям.
3. За допомогою з'єднання операцією кон'юнкції конститuent нуля, можна одержати ДКНФ функції.

Алгоритм переходу від довільної формули алгебри логіки до ДДНФ

1. Використовуючи закони дій з константами, виключити константи.
2. Використовуючи закони де Моргана, потрібно опустити знаки заперечення безпосередньо на змінні.
3. Розкрити дужки, використовуючи дистрибутивний закон. Застосувати закони ідемпотентності та протиріччя до одержаних елементарних кон'юнкцій, спростити їх та звести подібні. Після даних дій, одержимо ДНФ булевої функції.

4. Введенням у кожен елементарний кон'юнкційний вираз відсутніх змінних, використавши при цьому, закон виключення третього, побудувати конституенти одиниці.

5. Використавши закон ідемпотентності, за допомогою дистрибутивного закону, розкрити дужки і звести подібні. Формула, яку одержали, відповідає ДДНФ функції.

Алгоритм переходу від довільної формули алгебри логіки до ДКНФ

1. Використовуючи закони дій з константами, виключити константи.

2. Використовуючи закони де Моргана, потрібно опустити знаки заперечення безпосередньо на змінні.

3. Розкрити дужки, використовуючи дистрибутивний закон, звести функцію до виду кон'юнкції елементарних диз'юнкцій. Застосувати закони ідемпотентності та виключення до них, спростити їх та звести подібні. Після даних дій, одержимо КНФ булевої функції.

4. Введенням у кожен елементарний диз'юнкційний вираз відсутніх змінних, використавши при цьому, закон протиріччя, побудувати конституенти нуля функції.

5. Використавши закон ідемпотентності, за допомогою дистрибутивного закону, звести функцію до виду кон'юнкції конституент нуля, таким чином спростивши формулу. Отримана формула відповідає ДКНФ функції.

Запитання

1. Назвіть алгоритми переходу до ДДНФ та ДКНФ.
2. Озвучте покроково відомі для вас алгоритми переходу до ДДНФ та ДКНФ.

2.7. Алгебра Жегалкіна. Лінійні функції. Поліном Жегалкіна

Означення. Алгебра, що утворена множиною $B=\{0,1\}$ разом з операціями кон'юнкції, суми за модулем два (XOR, тобто від exclusive OR), константами нуля та одиниці називається алгеброю Жегалкіна.

Приклад.

Формула

$$(x \oplus y \oplus z) \wedge (x \oplus y \oplus 1) \oplus x \wedge z \oplus 1,$$

де x, y, z – булеві змінні.

Дана формула є прикладом формули алгебри Жегалкіна, тому що вона містить необхідні операції за означенням алгебри Жегалкіна, а саме XOR та кон'юнкції.

У алгебрі Жегалкіна операція XOR зображує додавання за модулем для скінченних множин, операція кон'юнкції ідентична операції множення.

Тотожності алгебри Жегалкіна

1. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ – асоціативність.
2. $x \wedge y = y \wedge x$ – комутативність.
3. $x \wedge x = x$ – ідемпотентність.
4. $x \wedge 0 = 0, x \wedge 1 = x$ – дії з константами.

Властивості операції XOR:

5. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ – асоціативність операції XOR.
6. $x \oplus y = y \oplus x$ – комутативність операції.
7. $x \oplus x = 0$ – закон зведення подібних доданків.
8. $x \oplus 0 = x$ – операція з константою нуль.
9. $x \wedge (y \oplus z) = x \wedge y \oplus x \wedge z$ – дистрибутивність кон'юнкції відносно XOR.

Операція XOR (сума за модулем 2) відіграє важливу роль у програмуванні, обробці та кодуванні різноманітної інформації. Дана операція має важливу властивість, а саме наявність оберненого елемента x' для кожного $x \in \{0,1\}$, операції

кон'юнкції та диз'юнкції не мають такої властивості. У цій алгебрі кожний елемент є оберненим до самого себе, тобто цей факт дає можливість розв'язувати рівняння шляхом додавання до обох його частин однакові елементи.

Наприклад, наступне рівняння розв'язується таким чином

$$x \oplus a = b;$$

$$x \oplus a \oplus a = b \oplus a;$$

$$x \oplus 0 = b \oplus a;$$

$$x = b \oplus a.$$

Можливість знаходити розв'язки у подібних рівняннях, що відсутнє у булевій алгебрі, дозволяє широке використання операції XOR у програмуванні, зокрема, у кодуванні інформації.

Алгебра Жегалкіна є кільцем з одиницею 1, дана алгебра не є граткою, оскільки в ній не виконуються всі необхідні для поняття гратки властивості, зокрема ідемпотентність обох операцій.

Як нам відомо, що будь-яка булева функція може бути зображена через операції диз'юнкції, кон'юнкції, заперечення. Для того, щоб довести зображення будь-якої булевої функції формулою алгебри Жегалкіна потрібно виразити заперечення та диз'юнкцію через кон'юнкцію та XOR, які є операціями в алгебрі Жегалкіна.

Представлення заперечення в алгебрі Жегалкіна формулою $\bar{x} = x \oplus 1$ отримуємо з таблиці істинності, наведеної нижче

x	$\bar{x}$	$x \oplus 1$
0	1	1
1	0	0

Таблиця 2.2. Операція заперечення.

Зауважимо, що у алгебрі Жегалкіна існує важлива формула зображення диз'юнкції

$$x \vee y = xy \oplus x \oplus y.$$

Доведемо дану формулу аналітичним способом

$$\begin{aligned} x \vee y &= \overline{\overline{x \vee y}} = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}} = \overline{(x \oplus y)(y \oplus 1)} = \\ &= (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1 = xy \oplus y \oplus x \oplus 1 \oplus 1 = \\ &= xy \oplus y \oplus x. \end{aligned}$$

Отже, будь-яка логічна функція зображується за допомогою формули в алгебрі Жегалкіна.

2.8. Поліном Жегалкіна

Серед всіх еквівалентних зображень функції у алгебрі Жегалкіна є особливий вид формул, який має назву поліном Жегалкіна.

Означення. Поліномом Жегалкіна називається скінченна сума за модулем двох попарно різних елементарних кон'юнкцій над множиною змінних.

Кількість змінних, що входять до елементарної кон'юнкції – це **ранг** елементарної кон'юнкції.

Кількість попарно різних елементарних кон'юнкцій у поліномі називається **довжиною** полінома.

Зображення у вигляді поліному існує та є єдиним для кожної булевої функції.

Для того, щоб побудувати поліном Жегалкіна для функції, що задана певною формулою алгебри Жегалкіна, потрібно розкрити всі дужки в даній формулі, використовуючи закон дистрибутивності, а також виконати всі можливі спрощення використовуючи закони дій з константами, ідемпотентності та зведення подібних доданків.

Означення. Булева функція називається лінійною, якщо її поліном Жегалкіна не містить кон'юнкції змінних.

Зауваження. Чи є лінійними операціями булевої алгебри, а саме: заперечення та диз'юнкція?

Заперечення – це лінійна функція, оскільки її поліном Жегалкіна $\bar{x} = x \oplus 1$, не містить кон'юнкції змінних.

Диз'юнкція – це нелінійна функція, оскільки її поліном Жегалкіна містить кон'юнкцію змінних x та y , тобто

$$x \vee y = xy \oplus x \oplus y.$$

Теорема. Для довільної булевої функції існує єдиний поліном Жегалкіна.

Поліном Жегалкіна можна побудувати двома методами: невизначених коефіцієнтів та еквівалентних перетворень.

Алгоритм методу невизначених коефіцієнтів

1. Будуємо таблицю істинності функції.
2. Випишуємо поліном Жегалкіна з невизначеними коефіцієнтами у загальному вигляді. Зокрема, якщо:

$$n=1 \quad P(x) = a_0 \oplus a_1 x_1.$$

$$n=2 \quad P(\widetilde{x^2}) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_{12} x_1 x_2.$$

$$n=3 \quad P(\widetilde{x^3}) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_{12} x_1 x_2 \oplus a_3 x_3 \oplus \\ \oplus a_{13} x_1 x_3 \oplus a_{23} x_2 x_3 \oplus a_{123} x_1 x_2 x_3.$$

3. Складаємо систему рівнянь, в яких прирівнюємо відомі значення функції до значень полінома Жегалкіна на відповідних наборах змінних.

Зауважимо, що кількість невідомих дорівнює кількості рівнянь.

4. Розв'язуємо систему рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів.
5. Підставивши знайдені значення коефіцієнтів у загальну формулу, отримаємо шуканий поліном Жегалкіна.

Алгоритм методу еквівалентних перетворень

1. За допомогою еквівалентних перетворень формулу, якою виражається дана функція, зводимо до формули над множиною зв'язок (заперечення, кон'юнкція).
2. Виконуємо заміну

$$\bar{x} = x \oplus 1.$$

3. Розкриваємо дужки відповідно до дистрибутивного закону для кон'юнкції відносно додавання за модулем два.

$$x \cdot (y \oplus z) = x \cdot y \oplus x \cdot z$$

4. Зводимо подібні члени, використовуючи властивості операції додавання за модулем два, зокрема

$$x \oplus x = 0;$$

$$x \oplus 0 = x.$$

Зауваження 1. Якщо булева функція містить операцію додавання за модулем два, то пункт 1 над нею виконувати недоцільно.

Зауваження 2. Операцію еквіваленцію доцільно звести до операції суми за модулем два за допомогою формули:

$$x \cdot y = x \oplus y.$$

Запитання

1. Сформулюйте алгоритми переходу від таблиці істинності булевої функції до ДДНФ та ДКНФ.
2. Сформулюйте алгоритми переходу від таблиці істинності булевої функції до ДДНФ та ДКНФ.
3. Що таке алгебра Жегалкіна та які тотожності даної алгебри ви знаєте?
4. Дайте означення поліному Жегалкіна та його довжини.
5. Сформулюйте алгоритм методу невизначених коефіцієнтів для побудови полінома Жегалкіна.
6. Сформулюйте алгоритм методу еквівалентних перетворень для побудови полінома Жегалкіна.

РОЗДІЛ 3. КОМБІНАТОРИКА

Комбінаторика – це розділ дискретної математики, що вивчає методи підрахунку кількості способів об'єднання, впорядкування та вибору об'єктів за певних умов.

У комбінаториці розглядаються різні способи розташування елементів зі скінченної множини та вивчаються методи підрахунку кількості способів.

Комбінаторика використовується у сучасній інформатиці, в основі алгоритмів, що використовуються для сортування, пошуку, побудови оптимальних маршрутів, планування ресурсів та розкладів.

Наприклад, при побудові графів для моделювання мереж та баз даних комбінаторні методи допомагають аналізувати структуру та зв'язки між елементами. У програмуванні комбінаторика потрібна для генерації всіх можливих варіантів вхідних даних під час тестування програм (наприклад, генерування всіх можливих комбінацій паролів для перевірки їх стійкості), також застосовується при реалізації алгоритмів пошуку підрядків, аналізу алгоритмів сортування.

У криптографії комбінаторика використовується для аналізу кількості можливих ключів у шифрувальних системах та для оцінки стійкості криптографічних алгоритмів. Наприклад, при створенні хеш-функцій або симетричних шифрів необхідно враховувати кількість можливих перестановок та комбінацій для забезпечення захисту даних.

Теорія ймовірностей тісно пов'язана з комбінаторикою, адже ймовірності обчислюються як відношення кількості сприятливих варіантів до загальної кількості можливих варіантів, яку обчислюють комбінаторними методами.

Наприклад, у задачах про кидання гральних кубиків чи карткових іграх обчислення ймовірностей неможливе без комбінаторики.

У III комбінаторика використовується у пошуку рішень серед великої кількості варіантів (наприклад, у пошуку ходів у шахах, оптимізації дій агента в середовищі, навчанні моделей). Методи комбінаторного пошуку застосовуються у алгоритмах планування, комбінаторній оптимізації та при роботі з великими дискретними просторами.

Комбінаторика допомагає у розв'язанні задач із біоінформатики, зокрема для збору послідовностей ДНК із фрагментів, аналізу білкових структур та передбачення їхніх властивостей.

Наприклад, при вирівнюванні геномних послідовностей для виявлення подібностей між різними видами або пошуку мутацій використовують комбінаторні алгоритми для оцінки всіх можливих способів поєднання фрагментів.

3.1. Історія виникнення комбінаторики

Перші задачі комбінаторного характеру зустрічаються ще у Стародавньому Китаї та Індії при складанні календарів, астрономічних таблиць та ігор. У Китаї вже у XI столітті було відомо трикутне розташування чисел для підрахунку комбінацій, що зараз ми називаємо трикутником Паскаля, а тоді його називали трикутником Ян Хуей.

У Стародавній Індії вчені працювали з перестановками для визначення кількості ритмічних малюнків у поезії.

У Європі в XIII столітті Леонардо Фібоначчі використовував комбінаторні методи для дослідження задач про розмноження кроликів, що привело до появи знаменитої послідовності Фібоначчі.

Початок теоретичних досліджень із комбінаторики закладено в XVII столітті у працях Блеза Паскаля (1623-1662), Ферма (1601-1665), Бернуллі (1654-1705), Лейбніца (1646-1716), Ейлера (1707-1783). Це пов'язано з тим, що застосовувались методи комбінаторики в дослідженнях, здебільшого у азартних іграх.

У самостійну наукову дисципліну комбінаторний аналіз сформувався на початку XX століття. У наш час, методи комбінаторного аналізу знаходять широке застосування при розв'язуванні задач із теорії ймовірності та статистики, теорії інформації, теорії автоматів та програмування.

У XVII столітті Блез Паскаль та П'єр Ферма почали застосовувати комбінаторику до розв'язання задач із теорії ймовірностей, а у XVIII столітті Якоб Бернуллі у своїй праці *Ars Conjectandi* систематизував методи підрахунку та ввів чіткі правила для комбінаторних обчислень.

У XIX-XX століттях комбінаторика почала розвиватися як окрема дисципліна, отримала зв'язок із теорією графів, алгеброю, топологією та інформатикою.

Сьогодні комбінаторика є фундаментом для побудови ефективних алгоритмів, розв'язання оптимізаційних задач, аналізу структури даних.

Основні напрями комбінаторики:

1. Комбінаторика підрахунку – вивчає способи обчислення кількості перестановок, комбінацій, розміщень.

2. Перестановки та комбінації з обмеженнями – враховує умови, за яких підрахунок відбувається (наприклад, з повтореннями чи без них).
3. Принципи додавання та множення – базові правила, які допомагають будувати комбінаторні підрахунки.
4. Принцип включення та виключення – використовується для підрахунку кількості елементів у об'єднаннях множин із перетинами.
5. Розбиття множин та підрахунок розміщень – пошук кількості варіантів поділу об'єктів на групи.

Зв'язок із теорією ймовірностей – комбінаторика є основою для визначення ймовірностей випадкових подій.

Цікаві факти про комбінаторику

Слово «комбінаторика» походить від латинського «combinare», що означає «з'єднувати, поєднувати».

У Швейцарії на площі міста Базель стоїть пам'ятник Якобу Бернуллі з гравіюванням спіралі, яка символізує нескінченність і нерозривно пов'язана з ідеями комбінаторики та теорії ймовірностей.

Трикутник Паскаля використовується не тільки у математиці, а й у мистецтві, для створення орнаментів та симетричних фракталів.

У програмуванні комбінаторика використовується для генерації тестових даних, перевірки алгоритмів та шифрування даних. У сучасній біоінформатиці для збору послідовностей ДНК та білків використовують комбінаторні методи для знаходження оптимальних поєднань та вирівнювання фрагментів.

Комбінаторика допомагає розвинути логічне мислення через навчання систематичного аналізу варіантів, є основою для побудови ефективних алгоритмів сортування, пошуку, планування розкладів, використовується в кібербезпеці для підрахунку кількості можливих ключів, формує уявлення про структури даних та моделювання дискретних систем.

Комбінаторика дозволяє знайти порядок серед безлічі варіантів, роблячи складне простим, а неможливе – зрозумілим.

3.2. Правило суми та правило добутку

Правило суми. Класичне формулювання.

Означення. Якщо якісь елементи множини A можна вибрати n способами, а інший елемент множини B – m способами, то вибір елемента із множини A із множини B можна вибрати (зробити) $n+m$ способами.

Формулювання в термінах теорії множин.

Означення. Якщо множини A складається з n елементів, а множини B з m елементів, то вибрати елементи із множини A або із множини B , можна $n+m$ способами.

Приклад. У коробці є 5 кольорів олівців та 7 кольорів фломастерів.

Скількома способами ми можемо вибрати або 1 олівець, або 1 фломастер.

Розв'язок. $5+7=12$ способами.

Правило добутку.

Нехай множина A складається з $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, а множина $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$.

Означення. Парою називається елемент (a_i, b_j) , $i=1, \dots, n, j=1, \dots, m$, якщо множина A складається з n елементів, а множина B складається з m елементів, то можна скласти рівно $n*m$ пар елементів.

Приклад. Коробка складається з 5 кольорових олівців та 7 кольорових фломастерів.

Скількома способами можна вибрати пару, що буде складатися з одного олівця та одного фломастера?

Наслідок із правила добутку: якщо множина A_1 складається з n_1 елементів, множина A_2 складається з n_2 елементів, а множина A_k складається з n_k елементів, то множину груп елементів $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$ можна скласти

$$n_1 * n_2 * \dots * n_k \quad (3.1)$$

способами.

Приклад. У коробці є 5 олівців, 7 фломастерів, 10 листівок. Скількома способами можна скласти подарунок для першокласника, який складається з 1 олівця, 1 фломастера та 1 листівки?

Розв'язок. $5 \cdot 7 \cdot 10 = 350$ (способами).

Для кращого розуміння комбінаторного множення, коли загальною назвою сховався прихований зміст, а за простотою – суперечності, які потрібно навчитись долати початківцеві, розглянемо декілька цікавих задач.

Задача 1. Тарас щодня обідає у їдальні, причому завжди дотримуючись певного правила: замовлений ним обід складається з однієї першої страви та однієї другої. Сьогодні у меню подано 6 перших та 8 других страв. Скільки варіантів, щоб пообідати має Тарас?

Дану задачу можна сформулювати по-іншому, зокрема, змінивши питання.

Припустимо, що у їдальні незмінно щодня готують ті самі 6 перших страв та 8 других. Скільки днів Тарас зможе обирати щоразу новий варіант для свого обіду?

Звичайно, що дана задача не є складною, і, скоріш за все, ви вже знаєте відповідь на дане запитання. Але, зважаючи на варіативну повторюваність ситуацій у майбутньому у більш складних задачах, звернемо більшу увагу для детального обґрунтування відповіді.

Розглянемо другий варіант запитання у завданні. Припустимо, що Тарас вирішив діяти так: щодня він обирає одну й ту саму першу страву, наприклад борщ, а власний обід він урізноманітнює внаслідок вибору різної другої страви. Скільки днів він зможе так їсти? Звичайно, що 8. На дев'ятий день він повинен буди змінити першу страву. Дотримуючись початкового алгоритму, він зможе їсти так ще вісім днів. Те саме відбуватиметься з наступними чотирма першими стравами. Тож із 6 перших страв та 8 других, можна скласти $6 \cdot 8 = 48$ різних традиційних меню.

Задача 2. Скільки двоцифрових чисел можна написати, використовуючи при цьому тільки непарні цифри?

Для відповіді на таке питання краще розглянути таблицю, що зображена на рисунку.

	1	3	5	7	9
1					
3					
5					
7					
9					

Введемо у першому рядку та першому стовбці всі непарні цифри від 1 до 9, їх 5 штук. Розглянемо заштриховану область. Кожну клітинку таблиці можна назвати, вказавши 2 цифри, спочатку ту, що стоїть ліворуч навпроти неї, а потім, ту, що – вверху, над нею. Поставивши ці 2 цифри поруч, отримаємо двоцифрове число, яке можна вважати назвою даної клітинки. Наприклад, заштрихована область має номер 35.

Дані клітинки ніби є геометричною відповідністю своїх кодів, тобто двоцифрових чисел, у яких обидві цифри є непарними, що відповідає умові задачі. Зауважимо, що кількість кодів (двоцифрових чисел) та клітинок (їх геометричних зображень) однакова. Оскільки, п'ять рядків по п'ять клітинок у рядку, $5 \cdot 5 = 25$. Отже, отримали кількість двоцифрових чисел, у яких обидві цифри є непарними.

Розглянутий вище квадрат, у більш загальному випадку – прямокутник, що розкреслений на відповідну кількість клітинок, є хорошою моделлю, яка демонструє комбінаторне правило

множення. Для прямокутної моделі, то воно звучить так: якщо прямокутник розділити на n горизонтальних, тобто паралельних одній парі сторін та m вертикальних, паралельних іншій парі сторін, то перетинаючись, вони утворюють $n*m$ прямокутних часточок.

Звернемо увагу на те, що, крім прямокутно-площинної моделі для задачі 2 та схожих задач можна використовувати “павутинну” модель, котра мало чим від неї відрізняється. Проведемо на площині 5 горизонтальних прямих ліній і позначимо цифрами 1, 3, 5, 7, 9. Повторимо такий алгоритм для 5 вертикальних прямих ліній. Отже, 5 вертикальних та 5 горизонтальних ліній перетинаються одна з одною і утворюють 25 точок перетину, які є «природними» зображеннями двоцифрових чисел, які мають обидві непарні цифри. Оскільки, назвати таку точку – це те саме, що назвати дві прями, на перехресті яких вона лежить.

Використовуючи «павутинну» модель, комбінаторне правило множення можна задати так: якщо провести n горизонтальних та m вертикальних прямих, паралельних між собою, то перетинаючись одні з одними, вони утворюють $n*m$ точок перетину. Обидві ці моделі, прямокутно-площинна та павутинна, успішно демонструють і обґрунтовують відповіді $6*8$ у першій задачі та $5*5$ у другій.

Ознайомимося ще із однією моделлю, яка добре надається для узагальнень.

Використаємо друге формулювання першої задачі. Припустимо, що їдальня не планує урізноманітнювати власне меню і щодня готує одні і ті самі 6 перших страв та 8 других страв. Зате Тарас прагне якомога довше не повторювати свого власного меню на обід. Окрім того, він вирішив щодня дивувати себе відносно обіду. Із цією метою він влаштував цікаву лотерею. На певних окремих папірцях, які розділені навпіл ризикою, він виписав всеможливі варіанти меню, що їх можна скласти із стандартних страв у їдальні.

Отримав картки, які, приблизно, мали такий вигляд:

символів) і, при цьому, вибір символу для першої клітинки на те, яким числом способів можна обрати його для другої клітинки (це число щоразу повинно рівним n), то два символи одночасно у дві комірки можна вписати $m \cdot n$ різними способами.

Задача 3. Скільки є двоцифрових чисел, у яких обидві цифри є різними?

Зрозуміло, що відповідь можна отримати, віднявши від загальної кількості всіх двоцифрових чисел (їх 90), кількість тих, що мають однакові дві цифри (їх 9). Тут, доречним є застосування правила множення. Будемо міркувати так. Для того, щоб написати число, про яке йдеться в умові задачі, потрібно спочатку вирішити якою саме буде перша цифра (цифра з розряду десятків). Для цієї цифри ми маємо 9 варіантів, оскільки десятковий запис двоцифрового числа не може починатися з нуля. Тепер залишається відповісти на основне питання: чи правда, що кількість варіантів для вибору другої цифри (цифри одиниць) не залежить від того, яку саме цифру ми обрали для першої позиції (для розряду десятків)? Якщо відповідь на дане питання є позитивним, то правило множення тут діє, і ми одразу отримуємо відповідь на запитання задачі. Якщо ж відповідь на дане питання – негативна, то принцип множення у даному випадку не підходить, тому слід шукати інші способи для розв’язання цього завдання.

Отже, припустимо, що ми обрали першу цифру числа. Скільки маємо варіантів для другої цифри? Згідно умови задачі, друга цифра не повинна бути такою самою, що і перша. Це єдине обмеження, на яке ми повинні звертати увагу, обираючи цифру одиниць. Тому, для другої цифри ми маємо 9 варіантів, при будь-якому виборі на першому кроці. За цифру одиниць, можемо взяти будь-яку з десяти цифр, окрім тієї, що яку вже поставили на перше місце, у розряд десятків.

Отже, у даному випадку, ми можемо застосовувати правило множення.

Чисел, які ми повинні були знайти за умовою задачі, є $9 \cdot 9 = 81$ варіант.

Задача 4. Скільки є двоцифрових чисел, які діляться на 3, можна написати за допомогою цифр 0,1,2,3,4,5,6?

Дане формулювання задачі дуже схоже на попередні, а тому, спробуємо розв'язати за допомогою вже використовуваного методу. Для першої цифри розряду десятків маємо 6 варіантів, оскільки вона може бути будь-якою із заданих за умовою цифр, крім нуля. Уявимо, що ми обираємо одну із цифр 1,2,3,4,5,6. Скількома способами ми зможемо після цього закінчити написання числа? Обираючи другу цифру, ми маємо зважати на те, щоб число ділилося на 3. Потрібно пригадати ознаку подільності на 3: число ділиться на 3 тільки в тому випадку, коли сума цифр заданого числа ділиться на 3.

Отже, розглянемо такі варіанти:

1. Якщо перша цифра числа є 1 або 4, то другою його цифрою повинна бути одна із двох: 2 або 5;
2. Якщо перша цифра числа є 2 або 5, то другою його цифрою повинна бути 1 або 4;
3. Якщо перша цифра числа є 3 або 6, то другої цифри є три можливості: 0, 3 або 6.

Проаналізувавши ці випадки, впливає, що кількість варіантів для другої цифри залежить від того, якою буде перша цифра. Якщо перша цифра 1,2,4 або 5, то для другої цифри маємо щоразу два варіанти; якщо ж перша цифра 3 або 6, то за другу цифру можна взяти 0, 3 або 6 (три варіанти). Ми можемо зробити висновок, що правило множення цього разу не можна застосувати. Цікавим є те, що цю задачу можна розв'язати, використовуючи принцип множення, якщо розпочати «із другого кінця». Будемо подумки писати потрібні числа, але при цьому, починаємо не з розряду десятків, а з розряду одиниць, тобто рухаючись справа наліво. Для правої цифри числа, маємо 7 варіантів, кожен із заданих за умовою задачі цифр можна поставити на це місце. Припустимо, що ми обрали праву цифру. Коли ми хочемо поставити ліву, то потрібно враховувати умову, щоб утворене число ділилось на 3.

Якщо за цифру одиниць ми взяли 1 або 4, то для цифри десятків, маємо у обох випадках 2 варіанти: 2 або 5;

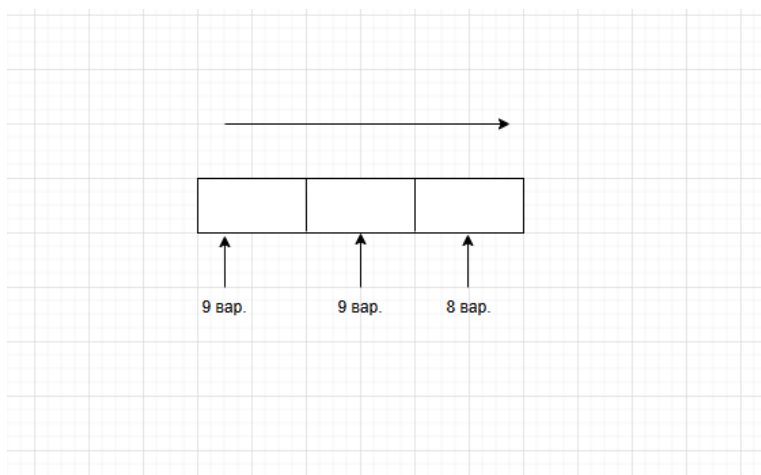
можна об'єднати $m \cdot n$ способами. Даний висновок впливає із правила множення для двох позицій. Ми можемо розглядати трійку символів $(a;b;c)$, як пару, що утворена $(a;b)$ та компонентою c . Для пари $(a;b)$ маємо mn варіантів. При реалізації будь-якого з них для компоненти c маємо k варіантів. Тож для трійки $(a;b;c)$ отримуємо $mn \cdot k$ варіантів. Отже, за виконання умов 1), 2), 3) різних трійок $(a;b;c)$ можна утворити mnk . Таким чином, ми отримали правило множення для трьох позицій, тобто для 3-компонентних об'єктів).

Далі, ми не будемо розписувати правило множення для 4-, 5-, і т.д., загалом на s -компонентні об'єкти, оскільки тут немає новизни в порівнянні із переходом від дво- до трикомпонентних об'єктів.

Продемонструємо на конкретних прикладах, як застосовується дане правило.

Задача 5. Скільки є трицифрових чисел для яких:

- 1) усі цифри різні;
- 2) кожні дві сусідні цифри різні?



Дамо відповідь на пункт 1 у задачі 4. Уявимо, що ми пишемо трицифрове число цифра за цифрою, починаючи зліва направо. Ми можемо розпочати будь-якою цифрою, крім нуля. Отже, для позиції розряду сотень (першої цифри) маємо 9 варіантів. Припустимо, що першу цифру ми обрали. Далі, важливе питання,

чи залежить від того, яку першу цифру ми обрали кількість варіантів для цифри десятків? Ні, не залежить. За другу цифру потрібного числа ми можемо взяти будь-яку з десяти цифр, крім тієї, яку поставили на перше місце. Тож для другої позиції теж маємо 9 варіантів. Припустимо, що тепер ми вже обрали дві цифри із числа. Скільки варіантів для вибору цифри одиниць ми маємо? Чи залежить дана відповідь від того факту, які саме цифри стоять у розрядах сотень та десятків? Ці питання є дуже важливими, оскільки саме від них залежить, чи можна застосувати до наших чисел комбінаторне правило множення. Робимо висновок, що відповідь на останнє запитання є негативним, якими ми б не обрали дві початкові цифри числа, для третьої його цифри маємо 8 варіантів, оскільки на третю позицію ми можемо поставити будь-яку цифру за винятком тих двох, що стоять у розрядах сотень та десятків.

Отже, рухаючись зліва направо від розряду до розряду числа, отримуємо, що кількість варіантів, при цьому дотримуючись умови задачі, за допомогою яких можна обрати ту чи іншу цифру, не залежить від вибору, які саме цифри були обрані раніше. Це є ознакою того, що загальну кількість чисел можна знайти за допомогою комбінаторного правила множення. Отже, на перше запитання задачі маємо $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Зауважимо, що правило множення у цьому завданні перестає працювати, коли змінити рух не зліва направо, а навпаки – справа наліво. Для того, щоб у цьому переконатися, змінимо наш рух – від одиниць до сотень. У розряд одиниць ми можемо написати будь-яку із десяти цифр. Дана теза не викликає сумніву. Припустимо, що у розряді одиниць стоїть конкретна цифра. Кількість варіантів для цифри розряду десятків не залежить від того, яку саме цифру ми обрали на місце одиниць. Тож за будь-якого вибору цифри в розряді одиниць, для розряду десятків ми матимемо 9 варіантів. Нехай ми обрали дві цифри для розглядуваного числа – останню та передостанню, тобто реалізували одну із $9 \cdot 10 = 90$ можливостей. Позначимо їх a – цифра розряду одиниць, b – цифра розряду десятків. То скільки варіантів ми маємо для першої цифри у числі? Нагадаємо, що $a \neq b$. То ж скільки варіантів ми маємо цифри, що знаходиться на першому місці? Ми не можемо дати відповідь на таке питання, ми

не можемо назвати конкретного числа, оскільки відповідь на нього суттєво залежить від того, якими є цифри a і b . Справді, якщо поміж цих цифр немає нуля, то в розряді сотень, тобто на першому місці має стояти одна із семи цифр: не a , не b і не нуль, адже йдеться про трицифрові числа. Якщо $a=0$ або $b=0$, то на першому місці може стояти одна з восьми цифр: не a і не b .

Отже, у цьому випадку через ці обставини ми не можемо скористатися правилом множення.

Ми ще раз зрозуміли, що «прямий» і «зворотній» напрямки руху при переліку багатокomпонентних об'єктів не завжди тотожні один одному. Зокрема, дуже часто від напрямку руху залежить, чи ми зможемо застосувати правило множення до переліку.

Розв'язуємо аналогічно друге завдання. Для цифри розряду сотень є 9 варіантів. Реалізувавши будь-який з цих варіантів, то для цифри розряду десятків маємо знову 9 варіантів (це будь-яка з десяти цифр, крім тієї, що є у старшому розряді). Тоді за будь-яких цифр на першому та другому місцях для третьої цифри ми маємо 9 варіантів (будь-яка цифра, крім другої, оскільки за умовою третя і друга цифри повинні бути різними).

Отже, трицифрових чисел, в яких сусідні значення різні є $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$.

Задача 6. Скільки є п'ятицифрових чисел, котрі мають одночасно три властивості:

- 1) десятковий запис числа не містить нулів;
- 2) наступною після парної цифри завжди є цифра, що зображає просте число (нагадаємо, що просте число – це таке число, яке має рівно 2 натуральні дільники);
- 3) наступною після непарної цифри завжди є парна цифра?

Скільки всього є таких п'ятицифрових чисел?

Завжди цікаво перевірити, чи не можна задачу розв'язати, застосувавши правило множення. Почнімо з лівого краю. Першою цифрою числа може бути будь-яка з десяти наявних цифр, крім нуля. Отже, першу цифру, припустимо, що визначено. То скільки варіантів матимемо для другої? Якщо перша цифра парна, то після неї має стояти цифра, яка зображує просте число. Таких цифр є всього 4 штуки, а саме: 2, 3, 5, 7. Отже у цьому випадку для другої цифри буде 4 варіанти. Якщо ж перша цифра

непарна, то наступною, за умовою задачі, має бути парна, проте не нуль. Тому і для цього разу для другої цифри числа маємо 4 варіанти. Вже стає цікавіше, оскільки, це саме та властивість, яка уможливило застосування правила множення, але важливо, щоб саме ця властивість розповсюджувалась на решту розрядів числа. Але саме і так це і буде. Нехай a – цифра довільного розряду числа, крім розряду одиниць, яким число закінчується. Отже, які ж цифри можуть бути після a ? Якщо a – непарна цифра, то одразу після неї можуть бути 2,3,5,7, і цей перелік є вичерпним. Якщо a – парна цифра, то після неї можуть бути лише такі числа: 2,4,6, або 8.

Представимо, що ми подумки пишемо якесь із тих чисел про яких йдеться в умові задачі. Почнемо з лівого краю. Пишемо спочатку першу цифру, за нею другу, третю, четверту, п'яту. Кожного разу, коли пишемо будь-яку із них, то маємо визначити, яку саме. При тому, на кожному етапі написання числа, наш вибір буде зумовлений певною мірою умовами задачі. Яку ми матимемо на кожному з п'яти кроків свободу вибору? Із скількох саме цифр нам можна буде обрати? Попередні міркування мають відповіді на ці запитання.

Отже, першу цифру ми можемо обрати з 9 можливих, а кожну наступну – з чотирьох. Завдяки саме цим обставинам, ми можемо застосувати правила множення. Тож чисел, що про них йдеться у задачі, $9 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$.

3.3. Складний вибір предметів

Часто у комбінаторних задачах вибір предметів потрібно здійснити у кілька етапів, при тому в деяких із них діють умови за якими використовується правило суми, а для інших предметів потрібно застосовувати правило добутку (складовий), який здійснюється шляхом послідовного вибору предметів (простих) зустрічається досить часто. Зручним засобом аналізу можливостей і перебору випадків вибору є побудова кореневого дерева – кожній послідовності можливих виборів відповідає шлях, який спрямований від кореня до кінцевих вершин дерева. Кінець будь-якої з дуг першого рівня відповідає можливому результату вибору першого рівня і т.д. Таким чином, дерево будується рівень за рівнем, поки не будуть вичерпані всі можливості вибору в послідовності, яка розглядається. Кінець кожної дуги k -рівня дерева відповідає єдиній послідовності результатів перших k виборів.

3.4. Поняття вибірки

Нехай задано множину A , $|A|=n$ з даної множини вибираємо елементи у такий спосіб:

1. На першому кроці вибираємо a_{i_1} і він є довільним.

2. На другому кроці вибираємо довільний елемент з множини A , яка не враховує вибраний елемент на першому кроці, тобто $a_{i_2} \in A$, тобто $\{A \setminus a_{i_1}\}$.

3. На третьому кроці вибираємо $a_{i_3} \in A$, тобто $A \setminus \{a_{i_1}, a_{i_2}\}$.

.....

k . На k кроці вибираємо $a_{i_k} \in A$, тобто

$$A \setminus \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{k-1}}\}.$$

Із вибраних елементів складаємо множину

$$\{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}, \quad (3.2)$$

яка називається k -вибіркою без повторення ($1 \leq k \leq n$) з множини A .

Якщо на кожному кроці елемент $a_{i_p} \in A$, то вибірка (2.2) називається k – вибіркою з повторенням (k – довільне).

Означення. Скінченна множина називається впорядкованою, якщо кожному елементу можна поставити у відповідність деяке натуральне число.

Упорядковані множини відрізняються як елементами так і порядком їх розташування.

Якщо на деякому кроці елемент вибраний із множини A може повторюватись, то отримана k – вибірка, яка містить однакові елементи називається k -вибіркою із повторюванням. Кількість всеможливих k -вбірок з повторюванням буде більшою, ніж кількість всеможливих k -вбірок без повторювань.

Означення. Вибірки, у якій порядок розташування елементів неістотний, то така вибірка називається неупорядкованою.

Означення. Вибірка, у якій вказано порядок розташування елементів називається впорядкованою.

Таким чином існує 4 типи різних вибірок:

1. Невпорядкова вибірка без повторень.
2. Невпорядкована вибірка з повторенням.
3. Впорядкована без повторень.
4. Впорядкована із повторенням.

Нагадаємо, що факторіалом називається добуток всіх n -елементів

$$n! = 1 * 2 * 3 * 4 * \dots * (n-1) * n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad 0! = 1.$$

Нехай множина A – скінченна та містить n елементів. Кажуть, що у множині A впроваджено порядок, якщо її елементи розташовані один за одним, по-іншому можна сказати, що впровадити у множині A порядок, означає привласнити її елементам номери від першого до n -го.

Цілком зрозуміло, що множину A , котра містить більше одного елемента можна впорядкувати, часто великою кількістю способів. До найважливішого питання комбінаторики відноситься: скількома способами можна впорядкувати множину, що складається з n елементів?

3.5. Розміщення та перестановки без повторень

Нехай $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – фіксована множина.

Означення. Упорядковані підмножини з k елементів множини $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ множини A називаються перестановками k елементів. Можна сказати, що k -перестановки $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ – це розміщення у визначеному порядку елементів із множини A .

Означення. k перестановки множини з n елементів називаються розміщеннями з n по k елементів.

Якщо у перестановці беруть участь всі елементи множини (n -перестановка), то використовують термін перестановка, а кількість всіх n -перестановок позначають P_n .

Два розміщення з n по k різні, якщо вони складаються з різних елементів або з однакових елементів, але розміщених у різному порядку.

Позначення. A_n^k – кількість k -розміщень n -множини A (читається як A із n по k). При утворенні розміщень перший елемент може бути обраний n способами, оскільки існує можливість незалежного вибору з n елементів, другий – $(n-1)$ різними способами, оскільки незалежний вибір здійснюється для решти з $(n-1)$ елемента, k -ий елемент – відповідно $(n-k+1)$ способами.

Застосуємо правило добутку:

$$A_n^k = n * (n-1) * \dots * (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (2.3)$$

Якщо $n=k$, тоді A_n^n – кількість всіх способів упорядкування цих елементів:

$$P_n = A_n^n = n! \quad (2.4)$$

Приклад. Дано множину $A=\{1,2,3\}$.

Побудувати різні перестановки даної множини по 2 елементи: $(1,2)$, $(2,1)$, $(1,3)$, $(3,1)$, $(2,3)$, $(3,2)$.

Розміщення і перестановки обов'язково враховують порядок елементів.

3.6. Розміщення та перестановки з повтореннями

Перестановки з n елементів у кількості (2.4) та розміщення з n елементів по k у кількості (2.3) зображують упорядковані вибірки попарно різних елементів початкової множини $A, |A|=n$.

Іноді k -вибірки (із повтореннями або без них) називаються кортежами (довжини k). Два кортежі (тобто дві загальні вибірки) вважаються однаковими, якщо вони мають однакову довжину і на місцях із однаковими номерами стоять однакові елементи.

Означення. Розміщення із повтореннями з n елементів по k (k розміщенням з повторенням з n) називається кортеж (вибірка із повторенням) довжини k з n елементів.

Кількість k -розміщень з повтореннями з n елементів обчислюється за формулою:

$$\overline{A}_n^k = n^k.$$

Справді, після заповнення першого місця кортежу довжиною k одним з n елементів (що можливо зробити n різними варіантами) заповнити друге місце кортежу можна знову-ж-таки будь-яким елементом із усієї заданої множини (при чому, повторюючи в одному з варіантів елемент, який знаходиться на першому місці), і так далі кількістю k разів. За правилом добутку отримаємо, що

$$\overline{A}_n^k = n^k. \quad (2.5)$$

Перестановки елементів одного типу можна робити незалежно від перестановок елементів іншого типу, тому за правилом добутку елементи перестановок можна переставляти між собою $n_1! * n_2! * \dots * n_k!$ способами так, що загальна n -перестановка не зміниться. Отже, множина всіх $n!$ перестановок із n елементів початкової множини розпадається на частини, які складаються з $n_1! * n_2! * \dots * n_k!$ однакових перестановок. Кількість різноманітних перестановок із вказаними повтореннями $n_1, n_2, \dots, n_k$ дорівнюють

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! * n_2! * \dots * n_k!}, \quad (2.6)$$

де $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Список $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ називають специфікацією перестановки.

3.7. Сполучення

У тих випадках, коли не цікавий порядок елементів у комбінації, а цікавий лише склад комбінації, говорять про сполучення (іноді використовується термін «комбінація»).

Сполучення без повторень

Означення. Сполученням із n елементів по k (k -сполученням з n) називається будь-яке k -розміщення (або k -вибірка) з цих елементів, в якому враховується лише склад елементів і не має значення їх порядок.

Кількість k -сполучень з n елементів позначається C_n^k і потрібно прочитати, як «кількість сполучень із n по k ».

Із неупорядкованої множини елементів $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ можна утворити $k!$ упорядкованих k -розміщень позначених елементів.

Тому кількість C_n^k всіх k -сполучень з n елементів у $k!$ разів менше, ніж кількість A_n^k всіх упорядкованих розміщень із n елементів по k :

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \quad (3.7)$$

Ця формула співпадає з формулою (2.6), якщо $n_1=k$, $n_2=n-k$:

$$P(k, n-k) = \frac{n!}{(n-k)!k!}, \quad (3.8)$$

іншими словами,

$$C_n^k = P(k, n-k). \quad (3.9)$$

Приклад. У чемпіонаті беруть участь 15 футбольних команд. За умовою маємо, що 4 останні команди в рейтингу покидають турнір, скільки варіантів завершення такого чемпіонату?

Основною підказкою в розумінні того, що в даній задачі потрібно використовувати поняття сполуки є те, що нас не цікавить взаємний порядок команд, які отримали останні місця у лізі, знайдемо кількість варіантів, використавши формулу сполуки.

$$C_{15}^4 = \frac{15!}{4!(11!)} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1365.$$

Сполучення із повтореннями

Означення. Невпорядкована k -вибірка з повторенням із множини A , що містить n різних елементів називається сполукою з n по k з повторенням.

Маємо предмети n типів у такій кількості, що предметів кожного типу не менше, ніж k екземплярів.

Скільки існує неупорядкованих k -вибірок (комбінацій) предметів із можливими повтореннями?

Ця проблема може бути проілюстрована на певному прикладі.

У магазині продаються тістечка 4 типів: бізе, наполеони, еклери та пісочне. Скільки існує комбінацій придбання 7 тістечок? Тут $n=4, k=7$.

Якщо ідентифікувати типи тістечок номерами 1,2,3,4 у тій послідовності, як вони записані, то приклади придбання тістечок мають вигляд кортежів довжини 4:

$$(1,1,4,1), (0,3,0,4), (2,2,2,1) \quad (3.10)$$

і так далі.

Перший кортеж означає, що купили 1 бізе, 1 наполеон, 4 еклери, 1 пісочне і так далі.

Наведемо еквівалентне формулювання цієї задачі.

Знайти кількість $\overline{C}_n^k$ сполучень по k елементів із повтореннями із n елементів множини $A=\{a_i\}_1^n$.

Кількість k -сполучень із повтореннями з елементів n типів $\overline{C}_n^k$ дорівнює кількості $P(k, n-1)$ перестановок із повтореннями з k одиниць і $(n-1)$ нулів:

$$\overline{C}_n^k = P(k, n-1) = \frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k. \quad (3.11)$$

Додамо умову – до комбінації повинні входити елементи кількох фіксованих типів (наприклад, r -типів) $r \leq n$.

Для того, щоб виконати цю умову, візьмемо одразу ж по одному елементу з даних r типів. Отримуємо, що у k сполученні є зайнятими r місць, інші – $(k-r)$ місць можна заповнити будь-якими елементами, тому кількість комбінацій шуканого виду буде

$$\overline{C}_n^{k-r} = C_{n+k-r-1}^{k-r} = \frac{(k+n-r-1)!}{(k-r)!(n-1)!}. \quad (3.12)$$

3.8. Властивості сполучень

Арифметичний трикутник (трикутник Паскаля)

Послідовні значення C_n^k можна обчислити за допомогою формул (3.13), які перевіряються за допомогою формули (3.7):

$$C_n^k = C_n^{n-k}, C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k. \quad (3.13)$$

Побудуємо так званий трикутник Паскаля.

1. Задамо $C_0^0 = 1$ і запишемо це значення у перший рядок трикутника.

2. У другому рядку запишемо значення $C_1^0 = 1, C_1^1 = 1$ таким чином, щоб значення C_1^0 опинилося над проміжком між числами другого рядка (рис. 3.1).

3. У наступному рядку, перше та останнє (третє) числа є $C_2^0 = C_2^2 = 1$. Між цими числами запишемо значення $C_2^1 = 2$.

За формулою (3.1) $C_2^1 = C_1^0 + C_1^1$, тобто C_2^1 дорівнює сумі чисел попереднього рядка, що розміщені праворуч та ліворуч від нього:

$$C_2^1 = C_1^0 + C_1^1 = 1 + 1 = 2.$$

4. Користуючись даним правилом заповнюємо наступні рядки – по краях пишемо числа $C_n^0 = C_n^n = 1$, а всі проміжні значення одержуємо як суми двох чисел попереднього рядка, що знаходяться праворуч та ліворуч від певного шуканого значення. У результаті отримаємо арифметичний трикутник, перші рядки якого зображено на рис. 3.1.

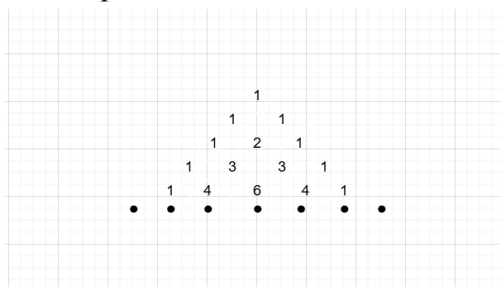


Рис.3.1. Арифметичний трикутник

При побудові трикутника Паскаля кожне число n -го рядка бере участь у формуванні двох чисел наступного $(n+1)$ -го рядка.

Властивості біноміальних коефіцієнтів

1. Для довільних n, k довільного ($k=0,1,2, \dots, n \geq 1$)

$$C_n^k = C_n^{n-k} \quad (3.14)$$

Рівність означає, що в послідовності

$$C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}, C_n^n$$

числа рівновіддалені від її кінців, є однаковими між собою:

$$C_n^0 = C_n^n, C_n^1 = C_n^{n-1}, C_n^2 = C_n^{n-2}, \dots$$

Чому дана рівність є правильною?

Перш за все, це впливає з обчислювальної формули:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Рівність (3.14) засвідчує, що n -елементна множина містить однакову кількість $(n-k)$ -елементних і k -елементних підмножин. Якщо ми зможемо впевнитись у цьому безпосередньо, без прямого обчислення, то отримаємо нове доведення рівності. Нескладно переконатися, що між тими і тими підмножинами можна встановити бієкцію за доповненням: у відповідність одна одній ставимо кожні ті дві підмножини – k -елементну та $(n-k)$ -елементну, котрі разом складають усю n -елементну множину.

Наведемо приклад такої відповідності для випадку $n=5, k=2$.

Нехай задано п'ятиелементну множину $M=\{a, b, c, d, e\}$, отримаємо такі двох- та трьохелементні підмножини з доповненнями:

$$\{a, b\} \Leftrightarrow \{c, d, e\}$$

$$\{a, c\} \Leftrightarrow \{b, d, e\}$$

$$\{a, d\} \Leftrightarrow \{b, c, e\}$$

$$\{a, e\} \Leftrightarrow \{b, c, d\}$$

$$\{b, c\} \Leftrightarrow \{a, d, e\}$$

$$\{b, d\} \Leftrightarrow \{a, c, e\}$$

$$\{b, e\} \Leftrightarrow \{a, c, d\}$$

$$\{c, d\} \Leftrightarrow \{a, b, e\}$$

$$\{c, e\} \Leftrightarrow \{a, b, d\}$$

$$\{d, e\} \Leftrightarrow \{a, b, c\}.$$

Дані стовпці беззаперечно підтверджують рівність

$$C_5^2 = C_5^3.$$

2. Для довільних чисел n та k , $n \geq 2; k=1,2,\dots,n-1$ справджується рівність

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k. \quad (3.15)$$

Наприклад, $C_5^3 = C_4^2 + C_4^3$, $C_2^1 = C_1^0 + C_1^1$.

Доведемо задану рівність

$$\begin{aligned} C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right) = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} * \frac{n}{(n-k)k} = \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k. \end{aligned}$$

Формулу (3.3) називають рекурентною, бо вона виражає біномний коефіцієнт C_n^k із нижнім індексом n через біномні коефіцієнти C_{n-1}^{k-1} та C_{n-1}^k із меншими нижніми індексами. Простішими словами, наступний коефіцієнт C_n^k можна обчислити, обчисливши попередньо C_{n-1}^{k-1} та C_{n-1}^k .

Формула (3.3) виражає найважливішу властивість таблиці біномних коефіцієнтів, яка називається трикутником Паскаля.

3. Для довільного натурального n справджується рівність

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n. \quad (3.16)$$

Якщо рядки трикутника Паскаля пронумерувати числами $0,1,2,\dots$

Тоді, із рівності (3.4) отримаємо, що сума всіх чисел із n -го рядка трикутника Паскаля дорівнює 2^n .

З точки зору комбінаторики, обидві частини рівності (3.16) показують, скільки різних підмножин має n -елементна множина. У правій частині рівності ці підмножини обчислені всі разом, а в лівій частині – окремо порожні, окремо одноелементні, двоелементні і так далі.

4. Якщо $n \geq 1$, то

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0. \quad (3.17)$$

Біном Ньютона

Запишемо формулу піднесення до квадрату

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (3.18)$$

далі – формулу піднесення до куба

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \quad (3.19)$$

При потребі, можна вивести схожу формулу піднесення двочлена до четвертого ступеня.

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4. \quad (3.20)$$

Важливо з'ясувати чи можна розписані формули вище, вивести і об'єднати в одну загальну формулу – правило піднесення двочлена до степеня n .

Спостерігаємо, що:

1. При піднесенні двочлена до ступеня n права частина містить $(n+1)$ доданок у правій частині.

2. Кожен із цих доданків має сукупний ступінь n щодо змінних a та b .

3. Ступені змінної a від доданка до доданка спадають на одиницю, набуваючи загалом усіх значень від n до нуля.

4. Ступені змінної b від доданка до доданка зростають на одиницю, набуваючи загалом значень від нуля до n .

5. Коефіцієнти доданків рівновіддалені від початку і кінця суми є однаковими.

Що ж до правила утворення коефіцієнтів використовується трикутник Паскаля.

Та чи можна з упевненістю стверджувати, що для $n=1,2,3,4,5$ властивості притаманні довільному ступеневі n ?

А найосновніше питання, чи завжди при піднесенні двочлена до певного ступеня, коефіцієнтами будуть елементи із трикутника Паскаля.

Доведемо загальне правило.

Піднести двочлен $a+b$ до ступеня n означає, що потрібно помножити $a+b$ на суму $a+b$, потім результат на $a+b$ і так до того етапу, поки співмножник $a+b$ не буде повторено потрібну кількість n разів.

Припустимо, що в процесі виконання тривалої процедури обчислень, ми не виконували жодних спрощень, зокрема, не міняли місцями співмножники, не зводили подібних доданків, не записували добуток однакових співмножників як ступінь.

У результаті отримуємо

$$\begin{aligned}
 (a+b)^1 &= a+b; \\
 (a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = aa+ba+ab+bb; \\
 (a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) = (aa+ba+ab+bb)(a+b) = \\
 &= aaa+baa+aba+bba+aab+bab+abb+bbb; \\
 (a+b)^4 &= (a+b)^3(a+b) = \\
 &= (aaa+baa+aba+bba+aab+bab+abb+bbb)(a+b) = \\
 &aaaa+baaaa+abaaa+bbaaa+aabaa+babaa+abbba+bbbaa+ \\
 &+aaab+baab+abab+bbab+aabb+ \\
 &+babb+abbb+bbbb;
 \end{aligned}$$

і так далі.

Якщо вже отримали суму S_k для $(a+b)^k$, то суму S_{k+1} для $(a+b)^{k+1}$ можна отримати за певним правилом, яке містить три пункти:

1. до всіх доданків суми S_k приписуємо з правого боку літеру a ;
2. до всіх доданків суми S_k приписуємо з правого боку літеру b ;
3. додаємо (поєднуємо знаком $+$) дві суми, що отримані згідно з пунктами 1 та 2.

Отже, якщо піднесемо двочлен $a+b$ до ступеня n , користуючись алгоритмом, то по правий бік отримаємо суму всіх можливих n - кортежів, складених зі змінних a, b .

Як відомо, усього таких кортежів було 2^n .

Стільки ж доданків буде мати і наша сума?

Тепер відсортуємо наші кортежі в залежності від того, скільки разів вони містять змінні a та b , отримаємо $(n+1)$ різних кортежів:

- тип 0 (ті, що не містять літери b);
- тип 1 (ті, що містять літеру b один раз);
- тип 2 (ті, що містять літеру b два рази);
-
- тип k (ті, що містять літеру b k разів);
-
- тип n (ті, що містять літеру b n разів).

Ми отримаємо компактний запис, де:

усі кортежі типу 0 перетворюються на a^n ;

усі кортежі типу 1 перетворюються на $a^{n-1}b$;

усі кортежі типу 2 перетворюються на $a^{n-2}b^2$;

.....

усі кортежі типу k перетворюються на $a^{n-k}b^k$;

.....

усі кортежі типу n перетворюються на b^n .

Після зведення подібних членів біля одночлена $a^{n-k}b^k$ отримуємо коефіцієнт, котрий показує, скільки раніше було тих кортежів, які перетворилися на цей одночлен. Нам відомо, що n кортежів типу $k \in C_n^k$.

Отже, маємо формулу:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k}b^k + \dots + C_n^n b^n, \quad (3.21)$$

або скорочена форма запису даної формули

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k}b^k.$$

Рівність (3.21) називають біномною формулою Ньютона (хоча ця формула була відома)

Дана формула називається формулою бінома Ньютона.

Запитання

1. Що таке комбінаторика та вкажіть, де вона застосовується. Поясніть правило суми та правило добутку.
2. Дайте означення правилу вибірки та поясніть, які вибірки бувають. Дайте означення розміщень та перестановок без повторення. Вкажіть формули за якими вони обчислюються.
3. Дайте означення розміщень та перестановок без повторень. Вкажіть формули за якими вони обчислюються.
4. Дайте означення сполученню та сполученню з повтореннями. Опишіть алгоритм побудови біному Ньютона.
5. Які властивості біноміальних коефіцієнтів ви знаєте? Назвіть їх.
6. Дайте означення розміщень та перестановок з повтореннями. Вкажіть формули за якими вони обчислюються.
7. Що таке трикутник Паскаля. Який алгоритм його побудови?

РОЗДІЛ 4. ТЕОРІЯ ГРАФІВ.

4.1. Основні поняття графів

Означення 1. Теорія графів – галузь дискретної математики, особливістю якої є геометричний підхід до вивчення об'єктів, перша праця із теорії графів опублікована Ейлером у 1736 році.

Ейлер розглядав свою працю про графи з однієї головоломки, так званої «задачі про Кенігсберські мости».

Місто розташовано на берегах річки Прегель і двох островах, різні частини міста були з'єднані за допомогою семи мостів. Схематично карта міста зображена на рисунку.

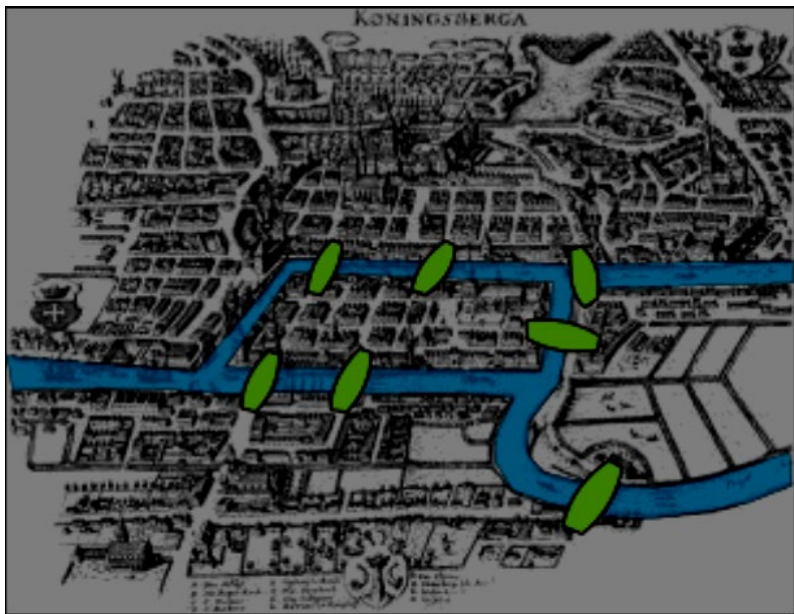


Рис. 4.1. Задача про Кенігсберські мости

Ейлер задавав основне питання: чи можна, вийшовши з дому, повернутись назад, пройшовши в точності лише один раз по кожному мосту?

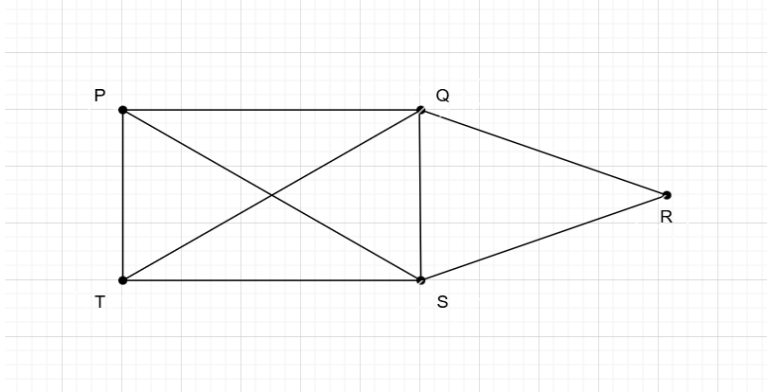
Ейлер показав, що це неможливо, в якій частині міста не знаходився б будинок.

Наступні кроки в розвитку теорії графів належать Кіргофу, який заснував теорію графів у 1847 році до теорії електричних ланцюгів (закони Кіргофа) і Келлі у 1857 році розробив теорію дерев і використав у теорії хімічних ізомерів.

Термін «граф» був введений у 1936 році угорським математиком Кенігом у відомій монографії «Теорія скінченних і нескінченних графів».

У математиці теорія графів розглядається як одна із гілок топології. Теорія графів тісно пов'язана з багатьма розділами математики, зокрема з теорією множин, теорією матриць, теорією ймовірностей, математичною логікою, дослідженням операцій, комбінаторикою.

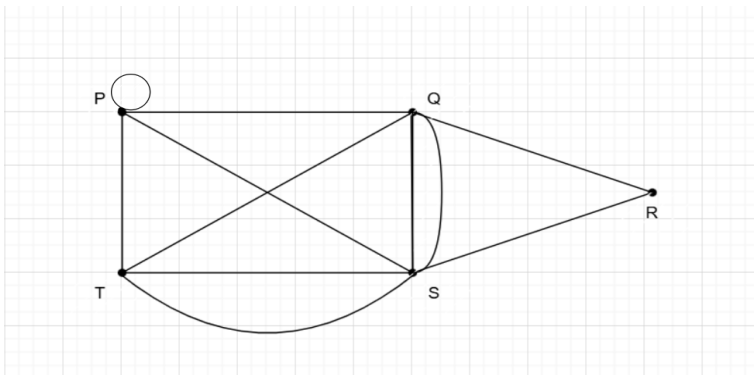
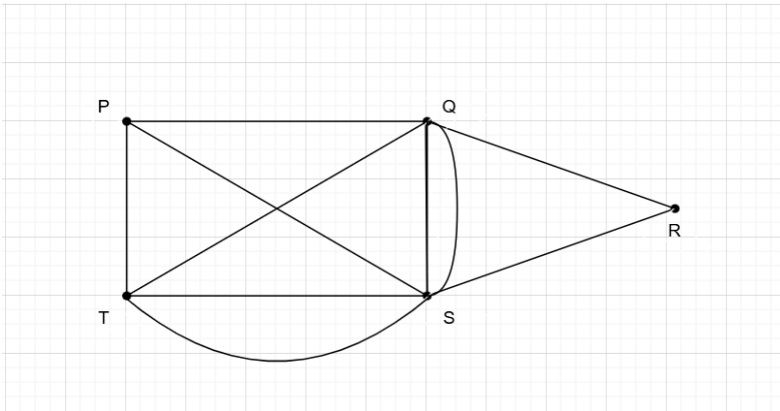
Теорія графів використовується в різних сферах, які тісно пов'язані з фізикою, хімією, проектуванням обчислювальних машин, машинобудуванням, лінгвістикою, соціологією, психологією, генетикою та архітектурою.



Зображено граф, який відображає частину карти доріг. P, Q, R, S, T називаються вершинами графа, лінії, що з'єднують ці точки називаються ребрами, а фігура – графом.

Приклад 1. Рисунок зображений вище можна розглядати так: P, Q, R, S, T – футбольні команди, ребра, що з'єднують їх – це матчі, які зіграли команди, так команда T зіграла гру з командами P, Q, S , але поки що не зіграла гру з R . Граф, що розглядається, є простим, оскільки в ньому будь-яку пару вершин з'єднує не більше, ніж одне ребро.

Припустимо, що існують об'їзні дороги з Q в S , та з S в T , ці об'їзні дороги є дугами.



Припустимо, що в точці P ми можемо побудувати гараж, то на діаграмі це можна зобразити ребром з P в P . Дане ребро називається петлею, що зображено на рисунку вище.

Якщо у задачі про карту доріг, повсюди односторонній рух, тобто, що кожна лінія має напрям, то такий граф називається орієнтованим графом.

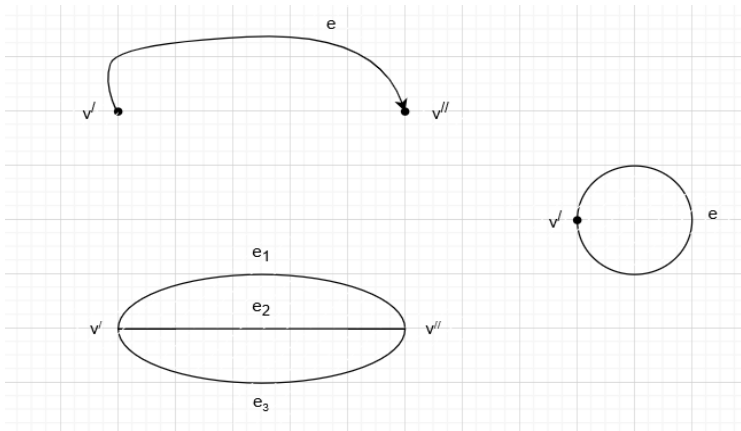
Дамо інші означення графа.

Означення 2. Нехай задано дві скінченні множини V (точок), E (ліній), причому елементи множини E відіграють роль зв'язок, що попарно з'єднують деякі (або всі) елементи множини V .

Приклад 2. V – сукупність міст, E – сукупність залізничних доріг між цими містами.

Означення 3. Елементи множини V (точок) будемо називати вершинами, елементи множини E (ліній) називатимемо ребрами, причому будемо вважати, що кожне ребро $e \in E$ з'єднує тільки дві вершини V' та V'' і, крім пари (V', V'') , ребро e може з'єднувати тільки пару (V'', V') .

Крім того, одна й та ж пара може з'єднуватись будь-якою кількістю ребер, а також вершина може з'єднуватися сама з собою деяким ребром.



Означення 4. Графом $G=(V, E)$ називається множина об'єктів довільної природи V (вершин) і зв'язок E (ребер), що з'єднують деякі пари цих об'єктів.

Більш строге означення графа можна дати, якщо ввести додатково тримісний предикат.

Кажуть, що задано граф $L = (V, E, P)$, якщо задано множину E (ребер) V – вершин та інцидентор $P = (V', e, V'')$ тримісний предикат, де ребро e з'єднує вершину V' з V'' та задовольняє дві умови:

1. p визначається на всіх таких впорядкованих трійках

$$P = (V', e, V'').$$

2. Кожне ребро з'єднує тільки деяку пару (впорядковану пару) вершин V' та V'' , але крім цього можуть з'єднувати обернену пару, тобто (V'', V') .

Означення 5. Якщо ребро e з'єднує вершину V' та V'' , то кажуть, що ребро e – інцидентне вершинам V' та V'' , а кожна із цих вершин інцидентна ребру e .

Означення 6. Направлені ребра іноді називають дугами і, якщо у графі всі ребра направлені, то такий граф називається орієнтованим.

Перша по порядку вершина інцидентна реброві орієнтованого графа називається початком графа.

Означення 7. Якщо у графі дві вершини можуть бути з'єднані більше, ніж одним ребром, то такий граф називається мультиграфом.

Означення 8. Ребра, що з'єднують одну і ту саму вершину називаються кратними, а ребро, що з'єднує вершину саму із собою називають петлею.

Означення 9. Граф називається простим, якщо у ньому відсутні кратні ребра і петлі. Псевдографом називається неорієнтований граф, у якому дозволені кратні ребра і петлі.

Означення 10. Невиродженим називається орієнтований граф, якому дозволені кратні ребра та петлі. Якщо множини ребер та вершин є порожніми, то такий граф називається порожнім. Якщо множина вершин V є непорожньою множиною, а множина ребер E – порожньою, то дані вершини називаються *ізованими* і позначається O_n , n – кількість вершин.

Означення 11. Простий граф $H = (W, F)$ називають підграфом графа $G = (V, E)$, якщо $W \subset V, F \subset E$. Якщо $W = V$, то граф H називають каркасним.

Якщо $W \neq V$, а F – множина всіх ребер із E , які мають кінці в W , то підграф H називається породженим множиною W і позначається $G(W)$.

Означення 12. Об'єднанням двох простих графів $G_1 = (V_1, E_1)$ та $G_2 = (V_2, E_2)$ називається такий граф $G = (V, E)$, де $V = V_1 \cup V_2$, $E = E_1 \cup E_2$.

Означення 13. Граф $G = (V, E)$ є дводольним графом, якщо V можна розбити на 2 підмножини V_1 та V_2 так, що ці множини V_1 та V_2 не перетинаються і кожне ребро з'єднує вершину V_1 та V_2 .

Означення 14. Дводольний граф називається повним, якщо кожному вершину з V_1 з'єднано ребром із кожною вершиною із V_2 . Повний дводольний граф позначається $K_{m,n}$, де $|V_1|=m, |V_2|=n$.

Граф $K_{1,n}$ називають зіркою.

Означення 15. Циклом називається граф із множиною вершин $V = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ і множиною ребер $W = \{(V_1, V_2), (V_2, V_3), (V_{n-1}, V_n), (V_n, V_1)\}$ і позначається $C_n, n \geq 3$.

Означення 16. Колесом називається граф і позначається W_n , який можна одержати з циклу C_n додаванням ще однієї вершини, яка з'єднана з усіма вершинами новими ребрами.

Означення 17. n – вимірним кубом називається простий граф, вершини якого зображують всі 2^n бітові рядки довжиною n і позначають Q_n .

Означення 18. Повний граф із n вершинами – це граф, у якому будь-яку пару вершин з'єднано одним ребром і позначається K_n .

Означення 19. Дві вершини U та V в неорієнтованому графі G називаються суміжними, якщо для ребра $e = (U, V)$ вершини U, V є його кінцями.

Означення 20. Два ребра називаються суміжними, якщо вони мають спільну вершину.

Вершину V і ребро e називають інцидентними, якщо ця вершина є кінцем ребра e .

Зауваження. Суміжність – це зв'язок між однорідними елементами, а інцидентність – між різнорідними елементами.

Степінь вершини в неорієнтованому графі називають кількість інцидентних їй ребер, причому петлю рахують два рази.

Степінь вершини V позначається $\deg(V)$.

Якщо $\deg(V)=0$, то вершина називається ізольованою. Якщо степінь вершин $\deg(V) = 1$, то дана вершина є кінцевою або висячою.

Для орієнтованого графа означення степеня вершини є іншим.

Означення 21. В орієнтованому мультиграфі напівстепенем входу вершини V називається кількість дуг, для яких вершина V є кінцевою і позначається $\deg^-(V)$.

В орієнтованому мультиграфі напівстепенем виходу вершини V називається кількість дуг для яких вершина V є початковою і позначається $\deg^+(V)$.

4.2. Деякі властивості графів

Теорема 1. Неорієнтований граф має парну кількість вершин непарного степеня.

Теорема 2. Нехай задано граф G , який є неорієнтованим із m ребрами.

Тоді

$$\sum_{v \in V} \deg(V) = 2m.$$

Дана теорема стосується довільного орієнтованого графа, зокрема з петлями та кратними ребрами.

Теорема 3. Нехай $G = (V, E)$ – орієнтований мультиграф з m – дугами, тоді справедлива рівність

$$\sum_{v \in V} \deg^- v = \sum_{v \in V} \deg^+ v = m.$$

Теорема 4. Кількість ребер у повному графі K_n дорівнює

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Теорема 5. Існує $n+m$ вершин та $m \cdot n$ ребер у повному дводольному графі $K_{m,n}$.

Зауваження. Зрозумілим способом задання графів є рисунок на площині за допомогою точок та ліній, які з'єднують ці точки. Та цей спосіб не підходить у тому випадку, коли потрібно розв'язувати задачі на комп'ютері із графами.

Графи задаються за допомогою матриць інцидентності та суміжності, а також списками (ребрами суміжності).

Означення 1. Будь-яка скінченна послідовність довільних елементів називається списком, а кількість елементів у цьому списку – його довжиною.

Означення 2. Матриця називається булевою, якщо кожний її елемент дорівнює нулю або одиниці.

Нехай $G = (V, E)$ – простий граф із заданою множиною вершин

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ та множиною ребер $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$.

Матрицею інцидентності графа G , яка відповідає заданій нумерації вершин і ребер, називають булеву $n \times m$ матрицю M з елементами

$$m_{ij}(i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m), \text{ де}$$

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершина } v_i \text{ і ребро } e_j \text{ інцидентні,} \\ 0, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Використовуючи, матриці інцидентності можна задавати й орієнтовані графи. Для таких графів вона не булева.

Нехай $G = (V, E)$ – орієнтований граф із множиною вершин

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ та множиною ребер $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$.

Матрицею інцидентності орієнтованого графа G , яка відповідає заданій нумерації вершин і дуг, називають $(n \times m)$ – матрицю M з елементами $m_{ij}(i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m)$, де

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо дуга } e_j \text{ виходить з вершини } v_i, \\ -1, & \text{якщо дуга } e_j \text{ входить у вершину } v_i. \end{cases}$$

$m_{ij} = 2$, якщо e_j є петлею у вершині v_i та нуль в інших випадках.

Матриця суміжності

Нехай задано граф G , який є простим графом. Припустимо, що вершини множини V є пронумерованими. Тоді матрицею суміжності A із елементами $a_{ij}(i, j = 1, \dots, n)$, графа G називають булеву матрицю розмірності $n \times n$.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \{v_i, v_j\} \in E, \\ 0, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Для неорієнтованого графа матриця суміжності G є симетричною, при чому елементи на головній діагоналі будуть нулями (оскільки у простому графі не має петель).

Для задання псевдографа можна використовувати матрицю суміжності. Така матриця вже не буде булевою, а елемент a_{ij} дорівнює кількості ребер, що з'єднують v_i та v_j .

Петлю у вершині v_i задають значенням діагонального елемента $a_{ii}=1$.

Матрицю суміжності використовують для задання орієнтованих графів. Це булева матриця A розмірності $n \times n$ з елементами $a_{ij}(i, j=1, \dots, n)$, де

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \{v_i, v_j\} \in E, \\ 0, & \text{у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Зауважимо, що в загальному випадку матриця суміжності орієнтованого графа є несиметричною.

Для задання орієнтованого мультиграфа використовують матрицю суміжності. Це буде небулева матриця: елемент a_{ij} дорівнює кількості дуг, які мають початкову вершину v_i , кінцева v_j .

Матриця суміжності є зручною як спосіб задання графа, бо вона надає швидкий доступ до інформації, адже за один крок можна отримати відповідь на питання, чи існує ребро (дуга) з v_i у v_j . Важливим недоліком є те, що незалежно від кількості ребер, обсяг пам'яті дорівнює n^2 комірок.

Задання графа списком пар (списком ребер)

Значно економнішим щодо пам'яті є метод зображення графа за допомогою списку пар, які відповідають його ребрам (дугам), якщо m (кількість ребер) суттєво менша за n^2 (кількість вершин). Пара $[u, v]$ відповідає ребру $\{u, v\}$, якщо граф неорієнтований, і дузі (u, v) , якщо граф орієнтований.

У цьому випадку обсяг пам'яті дорівнює $2m$, де m – кількість ребер або дуг. Даний спосіб є найекономнішим щодо пам'яті. Недоліком є велика (порядку m) кількість кроків для знаходження множини вершин, до яких ідуть дуги чи ребра із заданої вершини.

Задання графа списками суміжності

Орієнтований граф G (без кратних дуг, але, іноді, з петлями) можна задати, зазначивши скінченну непорожню множину вершин V та відповідність Γ , котра показує як зв'язані між собою вершини.

Відповідність Γ є багатозначним відображенням множини z V у V . Граф у такому випадку позначається парою $G(V, \Gamma)$.

Цей спосіб задання можна використовувати й для неорієнтованих простих графів, якщо кожне ребро умовно замінити двома протилежно спрямованими дугами.

Якщо відображення Γ діє не на одну вершину, а на множину вершин $A = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_p}\}$, то під $\Gamma(A)$ розуміють об'єднання наступних множин

$$\Gamma(A) = \Gamma(v_{i_1}) \cup \Gamma(v_{i_2}) \cup \dots \cup \Gamma(v_{i_p}).$$

4.3. Шляхи та цикли. Зв'язність.

Означення 1. Шляхом довжиною s із вершини u до вершини v в неорієнтованому графі називається послідовність ребер

$$e_1=\{x_0, x_1\}, e_2=\{x_1, x_2\}, \dots, e_s=\{x_{s-1}, x_s\},$$

де $x_0 = u, x_s = v, s$ – натуральне число.

Вершини u та v називають крайніми, а решту вершин шляху – внутрішніми.

Означення 2. Циклом в неорієнтованому графі називається шлях, який з'єднує вершину саму із собою, тобто $u=v$. Шлях називається простим, якщо він не містить ребер, які повторюються.

Означення 3. Неорієнтований граф називається зв'язним, якщо будь-які дві його вершини з'єднані шляхом.

Незв'язний граф складається з двох або більше зв'язних підграфів, кожна пара з яких не має спільних вершин. Компонентами зв'язності називаються ці зв'язні підграфи.

Теорема 1. Нехай G – граф (орієнтований або неорієнтований із кратними ребрами та петлями), A – матриця суміжності, де задана відповідна нумерація вершин $v_1, v_2, \dots, v_n$. Тоді кількість шляхів довжиною s з вершини v_i у вершину v_j дорівнює (i, j) -му елементу матриці A^s .

Отже, кількість ребер у зв'язному простому графі з n вершинами не перевищує кількості ребер у графі K_n , тобто дорівнює $\frac{n(n-1)}{2}$.

Для того, щоб дізнатися, скільки може бути ребер у простому графі з n вершинами та k компонентами, необхідно задати наступну теорему.

Теорема 2. Нехай G – простий граф, що має n вершин та k компонент, то для кількості його ребер m виконуються нерівності

$$n-k \leq m \leq \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1).$$

Теорема 3 (Кенінга). Нехай задано граф G , для того, щоб він був дводольним необхідно і досить, щоб він не містив жодних простих циклів із непарною довжиною.

Віддаллю між вершинами u та v називають довжину найкоротшого шляху $d(u, v)$.

Такий шлях називають геодезичним.

У напрямленому графі вводиться поняття орієнтованого шляху – це скінченна послідовність дуг

$$e_1=(x_0, x_1), e_2=(x_1, x_2), \dots, e_s=(x_{s-1}, x_s), x_0=u, x_s=v.$$

Вершини u, v у такому випадку називають кінцевими, а всі інші – внутрішніми. Довжина шляху – це кількість дуг у ньому.

Орієнтованим циклом називають орієнтований шлях, який починається і закінчується в одній і тій самій вершині, тобто $u=v$. Якщо при цьому жодна дуга не повторюється, цикл називається простим.

Сильно зв'язаний граф – це такий орієнтований граф, у якому для будь-якої пари різних u та v вершин існують орієнтовані шляхи в обидва боки між ними.

Слабко зв'язаний граф – це граф, у якому між будь-якими двома вершинами існує шлях, якщо не враховувати напрям дуг (тобто розглядати його як неорієнтований).

Очевидно, що сильно зв'язаний граф автоматично буде й слабко зв'язаним.

4.4. Ізоморфізм графів

Нехай є два простих графи $G_1=(V_1, E_1)$, і $G_2=(V_2, E_2)$ – прості графи, а $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ – бієкція, тобто відображення, при якому різні елементи із V_1 мають різні образи в V_2 .

Якщо для будь-яких вершин u і v графа G_1 їх образи $\varphi(u)$ та $\varphi(v)$ суміжні в G_2 тоді й тільки тоді, коли u та v – суміжні в G_1 , то цю бієкцію називають ізоморфізмом графа G_1 на граф G_2 , а графи G_1 і G_2 – ізоморфними і записують $G_1 \simeq G_2$.

Отже, прості графи G_1 і G_2 ізоморфні, якщо існує така бієкція $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$, що $\forall u, v \in V_1$ ($\{u, v\} \in E_1$ тоді й тільки тоді, $\{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E_2$).

Теорема. Ізоморфними називаються прості графи тоді і тільки тоді, коли їх матриці суміжності можна отримати одну з іншої однаковими перестановками рядків і стовпців.

4.5. Ейлерові та Гамільтонові графи

Ейлеровим циклом у зв'язному мультиграфі називається простий цикл, що містить усі ребра графа.

Ейлеровим шляхом називається простий шлях, що містить усі ребра графа. Граф, який містить ейлеровий цикл називається **ейлеровим графом**.

Теорема 1 (Ейлера). Щоб граф G був ейлеровим необхідно і досить, щоб він був зв'язним і елементи всіх вершин були парні.

Теорема 2. Зв'язний мультиграф має ейлеровий шлях, але не буде мати ейлеровий цикл тоді і тільки тоді, коли він має точно дві вершини непарного степеня.

Теорема 3. Орієнтований зв'язний мультиграф графа має ейлерів цикл тоді і тільки тоді, коли напів степінь входу дорівнює напів степеню виходу вершин.

Гамільтонові графи

Означення 1. Шлях $v_0, v_1, \dots, v_n$ графа $G=(V, E)$ називається **гамільтоновим**, якщо

$$V=\{v_0, v_1, \dots, v_n\}, v_i \neq v_j, 0 \leq i \leq j \leq n.$$

Граф називається **гамільтоновим**, якщо він містить гамільтоновий цикл.

Означення 2. Гамільтоновим циклом називається цикл

$$v_0, v_1, \dots, v_n, v_0,$$

якщо $v_0, v_1, \dots, v_n$ – гамільтоновий шлях.

Зауваження. Гамільтонів цикл необов'язково повинен містити усі ребра графа.

Теорема (Дірака). Якщо для кожної вершини v зв'язного простого графа $2n \geq 3$ вершинами виконується нерівність

$$\deg(v) \geq \frac{n}{2},$$

то цей граф буде мати гамільтонів цикл.

4.6. Дерева

Означення. Деревом називається зв'язний граф без простих циклів.

Вершина у верхній частині дерева називається коренем дерева.

Граф, який складається з k компонент і не містить простих циклів називається лісом із k дерев.

Зробивши висновок з даних означень, ліси та дерева є простими графами.

Часто, певну вершину дерева означають як корінь, тому кожному ребру можна приписати напрямок. Оскільки, існує єдиний простий шлях від кореня до кожної вершини графа, то можна надати напрямок кожному ребру в напрямку від кореня. Отже, дерево разом з виділеним коренем утворюють орієнтований граф, що називається кореневим деревом. За допомогою різних способів вибору кореня можна утворити різні кореневі дерева.

Властивості дерев

Теорема. Нехай граф T містить n вершин, тоді наступні твердження – еквівалентні:

1. Граф T – дерево.
2. Граф T не містить простих циклів і має $(n-1)$ ребро.
3. Граф T – зв'язний, але вилучення будь-якого ребра робить його незв'язним. Граф T – зв'язний, але вилучення будь-якого ребра робить його незв'язним.
4. Довільні вершини графа T будуть з'єднані точно одним простим шляхом.
5. Граф T не містить простих циклів, але додавши до нього нове ребро ми отримаємо точно один простий цикл.

Запитання

1. Дайте означення поняттю графа.
2. Що таке ребро, вершина, петля у графі?
3. Дайте означення наступним термінам: інцидентність, орієнтований граф, зірка, цикл, підграф, колесо.
4. Які графи називаються простими та псевдографами?
5. Що таке інцидентність та суміжність у графах?
6. Опишіть основні властивості графів.
7. Ізоморфізм графів?
8. Дайте означення поняттю шляху та зв'язності. Озвучте теорему Кенінга.
9. Які графи називаються гамільтоновими та ейлеровими?
10. Що таке дерева. Які основні властивості дерев ви знаєте?

Список літератури

1. Кривий С. Л. Дискретна математика: підручник. Чернівці - Київ : Видавничий дім «Букрек», 2020. 568 с.
2. Бондаренко М. Ф., Білоус Н. В., Руткас А. Г. Комп'ютерна дискретна математика: підручник. Харків : «Компанія СМІТ», 2004. 480 с.
3. Нікольський Ю. В., Пасічник В.В., Щербина Ю. М. Дискретна математика: підручник. Львів: ПП «Магнолія 2006», ЛНУ ім. Івана Франка, 2023. 432 с.
4. Вишенський В. А., Перестюк М. О. Комбінаторика, перші кроки: підручник. Кам'янець-Подільський «Аксіома», 2010. 324 с.
5. Дрінь М.М. Дискретна математика: навч. пос. Чернівці : «Рута», 2011. 192 с.
6. Філіпчук М.П. Практикум з дискретної математики: навч. пос. Чернівці : «Рута», 2024. 228 с.
7. Матвієнко М. П. Дискретна математика: підручник. Київ : Видавництво «Ліра – К», 2019. 324 с.
8. Манзій О. С., Тесак І. Є., Кавалець І. І., Чарковська Н. В. Дискретна математика: практикум. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2016. 212 с.
9. Висоцька В. А., Литвин В. В., Лозинська О. В. Дискретна математика: практикум. Львів : Видавництво «Новий світ – 2000», 2020. 575 с.
10. Журавчак Л. М., Мельникова Н. І., Сердюк П. В. Практикум з комп'ютерної дискретної математики: навчальний посібник. Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2020. 316 с.

Навчальне видання

Дискретна математика

Навчальний посібник

Укладач: Галина Михайлівна Унгурян

Літературне редагування: Колодій О. В.
Технічне редагування: Мельник У. М.

Електронне видання

Підписано до друку 12.03.2026. Формат 60x84/16.
Ум.-друк. арк. 7,0. Обл.-вид. арк. 7,5. Зам. Н-024.
Видавництво Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича 58002,
Чернівці, вул. Коцюбинського, 2.
e-mail: ruta@chnu.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 819 від 08.04.2002 р.