

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

**МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА ТА
АКСІОМАТИЧНА ТЕОРІЯ МНОЖИН:
короткий курс**

Навчальний посібник

Чернівці
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича
2025

УДК 510.6+510.32](075.8)
М34

Друкується за ухвалою Вченої ради
факультету математики та інформатики
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича
(протокол № 2 від « 1 » жовтня 2025 року)

Укладачі:

Попов Михайло Михайлович, доктор фізико-математичних наук,
професор кафедри математичного аналізу Чернівецького національного
університету імені Юрія Федьковича;

Фотій Олена Георгіївна, кандидат фізико-математичних наук, асистент
кафедри математичного аналізу Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича.

Рецензенти:

Михайлюк В.В., доктор фізико-математичних наук, професор кафедри
математичного аналізу Чернівецького національного університету імені Юрія
Федьковича;

Маслюченко О.В., доктор фізико-математичних наук, професор
Сілезького університету, м. Катовіце, Польща.

**М34 Математична логіка та аксіоматична теорія множин: короткий
курс/ укл. : М.М. Попов, О.Г. Фотій. Чернівці : Чернівецький
національний університет ім. Ю. Федьковича, 2025. 80 с.**

Навчальний посібник містить стислий виклад основних розділів математичної
логіки та аксіоматичної теорії множин, необхідних для формування фундаментальних
логіко-математичних компетентностей студентів математичних і технічних
спеціальностей. У посібнику розглянуто формальні мови та їх синтаксис, структуру
логічних формул, правила побудови доведень, основи семантики теорії першого порядку,
а також ключові поняття теорії моделей. Окрему увагу приділено аксіоматичній теорії
множин Цермело–Френкеля, її основним аксіомам, методам побудови множин, ролі
аксіоми вибору.

Посібник структуровано таким чином, щоб забезпечити поєднання теоретичного
матеріалу з практичним опрацюванням: кожен розділ супроводжується контрольними
питаннями для самоперевірки та добіркою вправ.

Для студентів, що здобувають освіту в галузі знань „Математика”.

УДК 510.6+510.32](075.8)

Зміст

1	ЧИСЛЕННЯ ВИСЛОВЛЕНЬ	5
1.1	Предмет математичної логіки. Висловлення і предикати	5
1.1.1	Предмет математичної логіки	5
1.1.2	Класи і функції	6
1.1.3	Висловлення та предикати	8
1.2	Пропозиційні форми і тавтології	11
1.2.1	Рекурсивні означення і доведення теорем індукцією за довжиною об'єкта	11
1.2.2	Пропозиційні операції та пропозиційні форми	14
1.3	Контрольні питання та вправи	19
1.3.1	Контрольні питання	19
1.3.2	Вправи	19
2	ТЕОРІЇ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ	23
2.1	Синтаксис	23
2.1.1	Вступ	23
2.1.2	Терми	24
2.1.3	Формули	24
2.1.4	Ранг формули. Підформули	25
2.1.5	Замкнені формули	26
2.2	Інтерпретації	27
2.2.1	Інтерпретації	27
2.2.2	Системи аксіом і моделі	27
2.2.3	Теореми	28
2.3	Контрольні питання та вправи	29
2.3.1	Контрольні питання	29
2.3.2	Вправи	29
3	АКСІОМАТИЧНА ТЕОРІЯ МНОЖИН ZFC	31
3.1	Мова та аксіоми	31
3.1.1	Історичні відомості про теорію множин	31
3.1.2	Мова теорії множин. Формули і класи	32
3.1.3	Аksiома об'ємності (в іншій термінології – екстенсiональностi)	34
3.1.4	Аksiома пари	35

3.1.5	Схема аксіом виділення	35
3.1.6	Аксіома суми	36
3.1.7	Аксіома степені (або множини підмножин)	36
3.1.8	Схема аксіом підстановки	37
3.1.9	Аксіома нескінченності	38
3.2	Ординали	39
3.2.1	Клас ординалів та порядкові типи	39
3.2.2	Цілком впорядковані множини	39
3.2.3	Відтинки цілком впорядкованої множини	40
3.2.4	Транзитивні множини та ординали	41
3.2.5	Порядок на класі всіх ординалів	41
3.2.6	Властивості класу ординалів	42
3.2.7	Порядковий тип цілком впорядкованої множини. Ізольовані та граничні ординали. Критерій граничного ординалу	43
3.2.8	Принцип трансфінитної індукції.	45
3.2.9	Арифметика ординалів	46
3.3	Аксіоми вибору та регулярності	48
3.3.1	Аксіома вибору	48
3.3.2	Теорема про трансфінитну рекурсію та доведення теореми Цермело .	48
3.3.3	Аксіома регулярності	51
3.3.4	Регулярні множини	51
3.3.5	Транзитивне замикання. Теорема фон Неймана	53
3.3.6	Рівносильність різних означень ординалу	54
3.4	Контрольні питання та вправи	56
3.4.1	Контрольні питання	56
3.4.2	Вправи	57
4	ТЕОРІЯ МОДЕЛЕЙ	60
4.1	Відбитки формули, абсолютні для певного класу	60
4.1.1	Відбитки формул. Екстенціональні класи	60
4.1.2	Абсолютні формули	61
4.1.3	Абсолютні операції	63
4.2	Абсолютність деяких формул та операцій	65
4.3	Сумісність аксіоми регулярності і теорема Мостовського про ізоморфізм .	73
4.4	Контрольні питання та вправи	77
4.4.1	Контрольні питання	77
4.4.2	Вправи	77
	Література	78

Розділ 1

ЧИСЛЕННЯ ВИСЛОВЛЕНЬ

1.1

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ. ВИСЛОВЛЕННЯ І ПРЕДИКАТИ

1.1.1. Предмет математичної логіки. Сьогодні математична логіка використовується в біології, медицині, лінгвістиці, економіці, педагогіці і, звичайно, у розвитку обчислювальної техніки, при розробці штучних мов для спілкування з машинами. Як виникла ця наука і що вона собою представляє?

Слово "логіка" ми часто чуємо у повсякденній розмові. Який же зміст цього слова? У тлумачному словнику української мови знаходимо "Логіка - наука про закони та форми мислення". Логіка вивчає ті форми мислення, які зафіксовані у мові у вигляді слів, речень та їх сукупностей. Перші поняття математичної логіки почали розвиватися ще з часів грецького філософа Арістотеля (384-322 рр. до нашої ери), але протягом багатьох століть вона майже зовсім не розвивалась. У XVIII німецький вчений Лейбніц задумав створити "нову" логіку, яка стала б "мистецтвом обчислень". В цій логіці, за його задумом кожному поняттю мав відповідати певний символ, а роздуми мали б вигляд обчислень. Цей задум не одразу отримав розвиток, лише в середині XIX століття ірландський математик Дж. Буль частково втілює у життя ідею Лейбніца. На мові булевої алгебри можна описувати роздуми та "обчислювати" їх результати; але вона охоплює лише "простіші" роздуми. Алгебра логіки Буля стала зародком нової науки - математичної логіки. В назві "математична логіка" відображаються дві характерні риси цієї науки: по-перше, математична логіка – це логіка, що використовує мову та методи математики; по-друге, математична логіка виникла з потреб математики, коли перед науковцями постали нерозв'язані проблеми, які вже не можна було розв'язати засобами самої математики.

Характеристичною рисою математичної логіки є також сучасний формальний аксіоматичний метод, розроблений одним з найвидатніших математиків XX століття Давидом Гільбертом (1862-1943). Формальний аксіоматичний метод – це розвинення,

уточнення та вдосконалення змістовного аксіоматичного методу, який виражено в аксіоматиці геометрії Евкліда. У шкільному курсі геометрії, учень отримує перші уявлення про те, як вибудовується математична теорія; що існують основні поняття, які не можна означити в термінах елементарніших понять, аксіоми про основні поняття, існують інші поняття, які означаються за допомогою основних, а також теореми, які виводяться з аксіом і теорем, яких встановлено раніше. Неевклідові геометрії демонструють, що певні твердження (наприклад, твердження про те, що аксіома паралельності незалежна від решти аксіом геометрії), які не можна довести в межах даної теорії, можна доводити шляхом логічного аналізу самої теорії.

Аксіоматичний метод Гільберта відрізняється від змістовного:

- повним абстрагуванням від *змісту* (формалізацією) як необхідним засобом уточнення;
- *точним* формулюванням *усіх* вихідних тверджень даної теорії
- явним формулюванням тих *логічних* засобів, які допускаються при побудові цієї теорії (правил виводу)

На базі цього методу стало можливим уточнення таких фундаментальних понять, як доведення, несуперечність теорії тощо. Теорія математичного доведення становить ядро математичної логіки. Кожне доведення полягає в послідовному застосуванні певних логічних засобів до вихідних тверджень. Встановлення та аналіз цих *логічних засобів* є необхідними для уточнення поняття математичного доведення. Таке уточнення було обумовлено розвитком математики і, перш за все, виникненням важливих математичних проблем, що базуються на теорії множин. Це, наприклад, проблема континууму, поставлена засновником теорії множин Георгом Кантором (1845-1918) у 1877 році, яку протягом десятиліть неможливо було розв'язати. Аналіз таких проблем наводив математиків на думку про те, що труднощі їх розв'язання обумовлено логічною природою цих проблем. Природно поставали питання: "Що точно означає вираз: *довести певне твердження* та *що таке математичне доведення*?" Адаже можна доводити окремі теореми не маючи строго означення поняття доведення, проте, не володіючи означенням, неможливо довести, що якась проблема не є розв'язною в даній теорії.

1.1.2. Класи і функції. При вивченні будь-якого математичного поняття зручно уявляти зібрання всіх об'єктів, які відповідають даному поняттю (тобто, мають певну властивість), і яке ми називатимемо *класом* і позначатимемо деякою літерою, наприклад, $\mathbb{U}$. Далеко не кожний клас можна вважати множиною у звичайному розумінні, як ми побачимо далі (див. парадокс Рассела). Ми мислимо клас, як "зібрання певних об'єктів". Ми не наводимо точного означення класу, але пишемо $P \in \mathbb{U}$ для позначення того факту, що об'єкт P належить до класу $\mathbb{U}$, тобто, має ту властивість, яка визначає даний клас $\mathbb{U}$. Домовимося клас таких об'єктів x , для яких виконується умова $p(x)$ записувати так: $\{x : p(x)\}$, а клас таких об'єктів з класу $\mathbb{C}$, для яких виконується умова $p(x)$ записувати так: $\{x \in \mathbb{C} : p(x)\}$.

Таким чином, поняття класу є елементарним, яке не означається через інші поняття (подібно поняттям точки та прямої в планіметрії). Два класи вважаються *рівними*, якщо вони породжені одним і тим самим поняттям (властивістю). Такий підхід дозволяє діяти з класами, як з множинами. Так, клас $\mathbb{U}$ називається *підкласом* класу $\mathbb{W}$ (записується $\mathbb{U} \subseteq \mathbb{W}$), якщо поняття, яке породжує клас $\mathbb{W}$, ширше за поняття, яке породжує клас $\mathbb{U}$, тобто якщо з $P \in \mathbb{U}$ випливає $P \in \mathbb{W}$ для довільного об'єкту P . *Об'єднанням* довільної сім'ї класів $(\mathbb{U}_i)_{i \in I}$ є клас $\bigcup_{i \in I} \mathbb{U}_i$, який відповідає такому поняттю, яке включає в себе всі поняття, що породжують відповідні класи $\mathbb{U}_i$. Точніше, $P \in \bigcup_{i \in I} \mathbb{U}_i$ означає, що $P \in \mathbb{U}_i$ для, принаймні, одного значення $i \in I$. Аналогічно вводяться інші теоретико-множинні операції над класами.

Одне з стандартних позначень класу: $\mathbb{N}$ – клас, що відповідає поняттю натурального числа. Ми звикли до того, що $\mathbb{N}$ є множиною, причому $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.

Нехай $n \in \mathbb{N}$ і $\mathbb{U}_1, \dots, \mathbb{U}_n, \mathbb{W}$ – класи. Через $(P_1, \dots, P_n)$ позначають *впорядкований набір об'єктів* $P_1, \dots, P_n$ (при вивченні аксіоматичної теорії множин ми дамо точне означення впорядкованого набору). Таким чином, рівність $(P_1, \dots, P_n) = (Q_1, \dots, Q_n)$ означає, що $P_i = Q_i$ для всіх $i = 1, \dots, n$. Запис $(P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{U}_1 \times \dots \times \mathbb{U}_n$ означає, що $(P_1, \dots, P_n)$ – впорядкований набір, причому $P_i \in \mathbb{U}_i$ для всіх $i = 1, \dots, n$. Клас $\mathbb{U}_1 \times \dots \times \mathbb{U}_n$ всіх таких наборів називається *декартовим добутком* класів $\mathbb{U}_1, \dots, \mathbb{U}_n$. Зокрема, при $\mathbb{U}_1 = \dots = \mathbb{U}_n = \mathbb{U}$ визначається декартовий степінь класу $\mathbb{U}$ як $\underbrace{\mathbb{U} \times \dots \times \mathbb{U}}_n$ і позначається через $\mathbb{U}^n$.

Наприклад, декартовий квадрат $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ множини всіх дійсних чисел $\mathbb{R}$ – це декартова площа.

Нагадаємо, що символи $\exists$ та $\forall$ називається кванторами *існування* та, відповідно, *загальності*. Вираз $(\exists x)p(x)$ служить скороченням речення “існує такий об'єкт x , для якого виконується $p(x)$ ”, а вираз $(\forall x)p(x)$ служить скороченням речення “для кожного об'єкту x виконується $p(x)$ ”. Використовуються також *обмежені квантори*: вираз $(\exists x \in \mathbb{X})p(x)$ служить скороченням речення “існує такий об'єкт x з класу $\mathbb{X}$, для якого виконується $p(x)$ ”, а вираз $(\forall x \in \mathbb{X})p(x)$ служить скороченням речення “для кожного об'єкту x з класу $\mathbb{X}$ виконується $p(x)$ ”.

Означення 1.1.1. Довільний підклас $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{U}_1 \times \dots \times \mathbb{U}_n$ декартового добутку $\mathbb{U}_1 \times \dots \times \mathbb{U}_n$ називається n -арним відношенням. Зокрема, для $n = 1$ відношення $\mathbb{G}$ називається унарним, а при $n = 2$ – бінарним.

Наприклад, бінарне відношення рівності $= \subseteq \mathbb{U} \times \mathbb{U}$ на довільному класі $\mathbb{U}$ складається з усіх пар однакових елементів (x, x) , де $x \in \mathbb{U}$.

Для бінарних відношень уводять поняття області визначення та множини значень.

Означення 1.1.2. Нехай $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ – бінарне відношення. Областю визначення та, відповідно, множиною значень відношення $\mathbb{G}$ називають такі класи:

$$\text{Dom } \mathbb{G} = \{x \in X : (\exists y \in Y)((x, y) \in \mathbb{G})\}, \quad (1.1)$$

$$\text{Ran } \mathbb{G} = \{y \in Y : (\exists x \in X)((x, y) \in \mathbb{G})\}. \quad (1.2)$$

Тепер ми наведемо, на перший погляд, незвичайне означення функції, яка діє між класами. Але для того, щоб читачеві було простіше сприймати це означення, будемо виходити зі звичайного означення, до якого читач звик ще зі школи. Для того, щоб уникнути нечітких слів у означенні функції типу «правило, яке ставить у відповідність», ми ототожнимо поняття функції та її графіку, і зосередимося на означенні графіку. Як охарактеризувати ті множини на площині $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$, які є графіками деяких функцій $F : D \rightarrow \mathbb{R}$, визначених на деяких підмножинах $D \subseteq \mathbb{R}$? Дуже просто: Γ є такою множиною тоді і лише тоді, коли перетин $\Gamma \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_0\}$ цієї множини Γ з довільною вертикальною прямою складається не більше, ніж з однієї точки. Оскільки ми ототожнюємо функцію F з її графіком Γ , то отримуємо таке означення функції.

Означення 1.1.3. Нехай $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ – класи. Бінарне відношення $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ називається функцією, якщо для довільних об’єктів x, y, z з умов $(x, y) \in \mathbb{F}$ та $(x, z) \in \mathbb{F}$ випливає, що $y = z$.

Нехай $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ – функція. Замість $(x, y) \in \mathbb{F}$ можна писати $y = F(x)$, беручи до уваги, що, за означенням, для кожного x існує, максимум, одне значення y таке, що $(x, y) \in \mathbb{F}$. Область визначення та множину значень функції визначають за загальними правилами (1.1) та, відповідно, (1.2). Запис $\mathbb{F} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{Y}$ означає, що $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ є функцією для певного класу $\mathbb{X}$, причому $\mathbb{A} = \text{Dom } \mathbb{F}$.

Якщо клас $\mathbb{X}$ є декартовим добутком $\mathbb{X} = \mathbb{U}_1 \times \dots \times \mathbb{U}_n$ класів $\mathbb{U}_1, \dots, \mathbb{U}_n$, то функція $\mathbb{F} \subseteq (\mathbb{U}_1 \times \dots \times \mathbb{U}_n) \times \mathbb{Y}$ називається *функцією n змінних*, а при $\mathbb{U}_1 = \dots = \mathbb{U}_n = \mathbb{U}$ – *функцією n змінних на класі $\mathbb{U}$* . Якщо ж, крім того, $\mathbb{Y} = \mathbb{U}$, то функція n змінних $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{U}^n \times \mathbb{U}$ на класі $\mathbb{U}$ називається *n -арною операцією* на класі $\mathbb{U}$. Підклас $\mathbb{U}' \subseteq \mathbb{U}$ називається *замкненим відносно операції $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{U}^n \times \mathbb{U}$* , якщо $\mathbb{F}(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{U}'$ для довільних $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{U}'$.

1.1.3. Висловлення та предикати. Висловлення виражається за допомогою розповідного речення в українській (або іншій) мові і є змістом цього речення. Стосовно кожного висловлення можна стверджувати, що воно є або істинним, або хибним. Наприклад, висловлення $3 \leq 5$ та $5 \leq 5$ істинні, а висловлення $8 \leq 5$ хибне. Для зручності той факт, що P є висловленням, ми позначатимемо через $P \in \mathcal{P}$, а клас $\mathcal{P}$ називатимемо *класом всіх висловлень*.

Зазначимо, що вираз $x \leq 5$ не є висловленням, тому що не можна однозначно стверджувати, чи є даний вираз істинним. Даний вираз можна розглядати як функцію, яка задана на множині $\mathbb{R}$ всіх дійсних чисел, і значення якої є висловлення.

Означення 1.1.4. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{U}_1, \dots, \mathbb{U}_n$ – класи. Довільна функція $F \subseteq (\mathbb{U}_1 \times \dots \times \mathbb{U}_n) \times \mathcal{P}$ називається *предикатом (або, точніше, n -арним предикатом)*.

Отже, $x \leq 5$ – це предикат від однієї змінної x , а $xy > z + 2$ – предикат від трьох змінних.

Якщо висловлення позначити літерою P , то запис $|P| = 1$ означає, що висловлення P є істинним. У протилежному випадку пишуть $|P| = 0$.

Операції над висловленнями. У звичайній мові висловлення з'єднуються різними зв'язками, що виражаються словами «не», «або», «і», «якщо ..., то», «тоді і тільки тоді, коли», і так з них утворюються складніші висловлення. У символічній мові математичної логіки ці зв'язки позначаються відповідно символами $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ і називаються *запереченням, диз'юнкцією, кон'юнкцією, імплікацією і еквівалентністю*. Точніше, вважається наступне.

- Запереченням $\neg P$ висловлення P називається висловлення, яке є істинним, якщо висловлення P є хибним і є хибним, коли P є істинним.
- Диз'юнкцією $P \vee Q$ висловлень P та Q називається висловлення, яке є істинним якщо, принаймні, одне з висловлень P та Q є істинним.
- Кон'юнкцією $P \wedge Q$ висловлень P та Q називається висловлення, яке є істинним лише тоді, коли обидва висловлення P та Q істинні.
- Імплікація $P \rightarrow Q$ висловлень P та Q називається висловлення, яке стверджує, що з P випливає Q (іншими словами, якщо P , то Q). Імплікація $P \rightarrow Q$ є хибною тоді і тільки тоді, коли P істинне, а Q хибне.
- Еквівалентністю $P \leftrightarrow Q$ висловлень P та Q називається висловлення, яке стверджує, що дані висловлення мають рівні значення істинності.

Зазначимо, що $\neg$ є унарною операцією, а $\vee, \wedge, \rightarrow$ та $\leftrightarrow$ – бінарні операції на класі $\mathcal{P}$ всіх висловлень. Операції над висловленнями називаються *пропозиційними (логічними) зв'язками*. Висловлення яке містить хоча б одну логічну зв'язку називається *складним висловленням*. Наприклад, висловлення "дзвінок не дзвонить або в квартирі нікого немає" є складним висловленням. Підкреслимо, що однією із задач логіки висловлень є визначення істинності чи хібності складного висловлення за даними істинісними значеннями елементарних висловлень, що його складають. Отже, згідно з вищеведеними означеннями, **істинність означених складених висловлень $\neg P, P \vee Q, P \wedge Q, P \rightarrow Q$ та $P \leftrightarrow Q$ не залежить від самих висловлень, а лише залежить від їхньої істинності**. Таким чином, можна скласти таблицю істинності введених унарної та бінарних операцій:

P	$\neg P$	P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1

Зауважимо, що означення імплікації може викликати деякий сумнів у читача, оскільки воно не цілком узгоджується з нашою інтуїцією слідування. Зокрема, це стосується перших двох рядків таблиці істинності. Не слід змішувати імплікацію з таким тлумаченням

зв'язки "якщо ..., то ..." яке надає їй причинно-наслідковий характер! Таблиця імплікації, звичайно не застосовна до такого тлумачення. Справа в тому, що в природній мові, як правило, не вживається слідування "якщо P , то Q " при умові, що Q хибне. Проте легко впевнитись, що введення означення імплікації відповідає тому розумінню слідування, якого дотримуються у математичних міркуваннях. З цією метою розглянемо наступне математичне твердження: "Для кожного дійсного числа x , якщо $x > 3$ то $x > 1$ істинність якого є очевидною. Зокрема, при $x = 2$ отримаємо "якщо $2 > 3$, то $2 > 1$ " ($|2 > 3| = 0$; $|2 > 1| = 1$, $|2 > 3 \rightarrow 2 > 1| = 1$); маємо випадок другого рядка таблиці. При $x = 0$ матимемо істинне твердження, яке відповідає першому рядку таблиці.

Розглянемо приклад імплікації із життя студентів. Висловлення «Якщо мені попадеться на іспиті білет № 13, то я отримаю відмінно» є імплікацією $P \rightarrow Q$ таких висловлень:

$P :=$ "на іспиті мені попався білет № 13"

$Q :=$ "я отримав/ла відмінно".

Нескладний аналіз чотирьох випадків істинності висловлень P та Q призводить до очевидного висновку: студент збреше лише у випадку, коли P істинне та Q хибне.

Питання про переклад пропозиційних зв'язків на терміни звичайної мови є неоднозначним. У математичній мові той факт, що імплікація $P \rightarrow Q$ має місце, часто передають виразом "Твердження P є достатньою умовою для твердження Q або "Твердження Q є необхідною умовою для твердження P ". Насправді неоднозначність перекладу на звичайну мову стосується і інших символів логічних операцій. Так, наприклад, символ $\wedge$ можна перекладати, як "і" а "але" "...незважаючи на ..." тощо. Пропонуємо читачу самотійно подумати над можливими перекладами інших пропозиційних зв'язків.

1.2.1. Рекурсивні означення і доведення теорем індукцією за довжиною об'єкта. Інколи математики пишуть: «побудуємо послідовність індуктивно» (або «за індукцією»). З точки зору математичної логіки, це не зовсім коректно: *індукція* – це метод доведення. Метод побудови, схожий на індукцію, називається *рекурсією*. Існування об'єкту, побудованого рекурсивно, можна доводити індуктивно, а можна використовувати загальну теорему про рекурсію, яка обґрунтовує існування таких об'єктів. Як рекурсія, так і відповідна індукція бувають різними: математична, трансфінітна та за довжиною об'єкта. Швидше за все, читач уже знайомий з принципом математичної індукції. Пізніше ми познайомимось з трансфінітною індукцією та рекурсією, а тепер – з третім видом індукції та рекурсії. Але, для кращого розуміння матеріалу, почнімо з математичної індукції та рекурсії.

Теорема 1.2.1 (Принцип математичної індукції). *Нехай $P : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}$ – предикат. Якщо*

$$(i) |P(1)| = 1;$$

$$(ii) \text{ для кожного } n \in \mathbb{N}, |P(n) \rightarrow P(n+1)| = 1,$$

то $|P(n)| = 1$ для довільного $n \in \mathbb{N}$.

Як правило, принцип математичної індукції приймають за аксіому. Але, для демонстрації аналогії з подальшими типами індукції, ми доведемо цю теорему, виходячи з наступної аксіоми.

АКСІОМА. *Кожна непорожня підмножина A натурального ряду $\mathbb{N}$ має найменший елемент.*

Доведення теореми 1.2.1. Нехай, навпаки, існує $n \in \mathbb{N}$, для якого $|P(n)| = 0$. Розглянемо множину таких номерів. З аксіоми випливає, що існує n_0 – найменший з таких номерів. З властивості (i) випливає, що $n_0 > 1$, а з мінімальності n_0 випливає, що $|P(n_0 - 1)| = 1$. За таблицею істинності, це суперечить властивості (ii), адже $|P(n_0)| = 0$. $\square$

Наступна теорема, яка часто використовується в математиці, як очевидна річ, має не зовсім просте доведення. Залишимо його читачеві для самостійного розбору.

Теорема 1.2.2 (Математична рекурсія). *Нехай $\mathbb{U}$ – клас та $\mathbb{F} : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U}$ – унарна операція. Тоді для довільного $u_0 \in \mathbb{U}$ існує єдина послідовність $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ з $\mathbb{U}$ з властивостями*

$$(i) u_1 = u_0;$$

$$(ii) u_{n+1} = \mathbb{F}(u_n) \text{ для довільного } n \in \mathbb{N}.$$

Доведення. Доведемо існування такої послідовності $u_n = G(n)$, тобто, функції $G \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{U}$ з $\text{Dom } G = \mathbb{N}$, для якої

$$(i') \quad G(1) = u_0;$$

$$(ii') \quad G(n+1) = \mathbb{F}(G(n)) \text{ для довільного } n \in \mathbb{N}.$$

Уведемо предикат $P \subseteq \mathbb{N} \times \mathcal{P}$, визначивши для кожного $m \in \mathbb{N}$ висловлення $P(m)$

існує єдина функція $G_m \subseteq \{1, \dots, m\} \times \mathbb{U}$ з властивостями

$$(i_m) \quad G_m(1) = u_0;$$

$$(ii_m) \quad G_m(n+1) = \mathbb{F}(G_m(n)) \text{ для довільного } n \in \{1, \dots, m-1\}$$

і доведемо за допомогою принципу математичної індукції, що $|P(m)| = 1$ для кожного $m \in \mathbb{N}$. Зазначимо, що $P(1)$ стверджує існування єдиної функції $G_1 \subseteq \{1\} \times \mathbb{U}$ з одноеlementною областю визначення $\{1\}$ та єдиною умовою $G_1(1) = u_0$, яка, фактично і визначає цю функцію. Припустимо, що для даного $m \in \mathbb{N}$ має місце $|P(m)| = 1$ і доведемо, що $|P(m+1)| = 1$. Нехай $G_m \subseteq \{1, \dots, m\} \times \mathbb{U}$ – та єдина функція, яка існує, згідно з припущенням. Визначимо функцію $G_{m+1} \subseteq \{1, \dots, m, m+1\} \times \mathbb{U}$, поклавши

$$G_{m+1} = G_m \cup \{(m+1, \mathbb{F}(G_m(m)))\}. \quad (1.3)$$

Оскільки $G_{m+1}(1) = G_m(1) = u_0$, то виконується (i_{m+1}) . Доведемо (ii_{m+1}) . Якщо $n \in \{1, \dots, m-1\}$, то, згідно з (ii_m) , $G_{m+1}(n+1) = G_m(n+1) = \mathbb{F}(G_m(n)) = \mathbb{F}(G_{m+1}(n))$. Якщо $n = m$, то з (1.3) дістаємо $G_{m+1}(m+1) = \mathbb{F}(G_m(m))$, а отже, (ii_{m+1}) доведено. Таким чином, $|P(m)| = 1$ для кожного $m \in \mathbb{N}$. Крім того, з (1.3) випливає, що $G_m \subseteq G_{m+1}$ для всіх $m \in \mathbb{N}$. За допомогою принципу математичної індукції доводимо, що

$$\text{для довільних } m, n \in \mathbb{N} \text{ з умови } m \leq n \text{ випливає, що } G_m \subseteq G_n. \quad (1.4)$$

Доведемо, що відношення $G = \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{U}$ є функцією. Нехай $(m, u) \in G$ та $(m, v) \in G$. Виберемо, згідно з означенням G , номери $i, j \in \mathbb{N}$ такі, що $(m, u) \in G_i$ та $(m, v) \in G_j$. Покладемо $k = \max\{i, j\}$. З (1.4) дістаємо, що $(m, u) \in G_k$ та $(m, v) \in G_k$. Оскільки G_k – функція, то $u = v$. Таким чином, G – функція.

Оскільки $(1, u_0) \in G_1 \subseteq G$, то $G(1) = u_0$, а отже, (i') доведено. Для доведення (ii') зазначимо, що, згідно з означенням G маємо $G(n+1) = G_{n+1}(n+1)$ та $G(n) = G_{n+1}(n)$. Тоді з (ii_{n+1}) отримуємо $G(n+1) = G_{n+1}(n+1) = \mathbb{F}(G_{n+1}(n)) = \mathbb{F}(G(n))$. А отже, (ii') встановлено.

Нарешті, доведемо єдиність функції G з властивостями (i') та (ii') . Нехай $G', G'' \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{U}$ – функції з $\text{Dom } G' = \text{Dom } G'' = \mathbb{N}$ та властивостями (i') та (ii') . Рівність $G' = G''$, яку нам треба довести, означає, що для довільних x, y умови $(x, y) \in G'$ та $(x, y) \in G''$ рівносильні. Ми доведемо принципом математичної індукції, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність $G'(n) = G''(n)$. Цього буде достатньо, адже $\text{Dom } G' = \text{Dom } G'' = \mathbb{N}$. З умови (i') для обох функцій випливає, що $G'(1) = G''(1)$. Припустимо, що для даного $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність $G'(n) = G''(n)$. Тоді, згідно з умовою (ii') для обох функцій, $G'(n+1) = \mathbb{F}(G'(n)) = \mathbb{F}(G''(n)) = G''(n+1)$. Отже, з принципу математичної індукції

впливає, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність $G'(n) = G''(n)$. $\square$

Наступна теорема для читача нова. Вона обґрунтовує існування і надає конструкцію об'єктів, які визначатимуться далі в нашому курсі за допомогою *рекурсивних означень за довжиною об'єкта*.

Попереджаємо своїх читачів, що теореми 1.2.3 та 1.2.4 сприймаються на перший погляд досить важко, проте вони стають абсолютно зрозумілими, коли їх будемо застосовувати до поняття пропозиційних форм.

Теорема 1.2.3 (Рекурсія за довжиною об'єкта). *Нехай $M = \{\mathbb{F}_i^{n_i}\}_{i \in I}$ – деяка множина операцій $\mathbb{F}_i^{n_i} : \mathbb{U}^{n_i} \rightarrow \mathbb{U}$, $n_i \in \mathbb{N}$, $i \in I$, на класі $\mathbb{U}$ та $\mathbb{U}_0 \subseteq \mathbb{U}$ – підклас. Тоді існує єдиний найменший (в розумінні включення $\subseteq$) підклас $\mathbb{U}_M$ класу $\mathbb{U}$, який містить $\mathbb{U}_0$ і замкнений відносно кожної операції $\mathbb{F}_i^{n_i} \in M$. Більш того, $\mathbb{U}_M = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{U}_n$, де для кожного $n = 0, 1, \dots$*

$$\mathbb{U}_{n+1} = \mathbb{U}_n \cup \{\mathbb{F}_i^{n_i}(u_1, \dots, u_{n_i}) : i \in I, u_1, \dots, u_{n_i} \in \mathbb{U}_n\}. \quad (1.5)$$

Доведення. З (1.5) безпосередньо випливає, що $\mathbb{U}_n \subseteq \mathbb{U}_{n+1}$ для всіх n , звідки для кожного фіксованого $m \in \mathbb{N}$ індукцією відносно $n - m$ доводимо, що

$$\mathbb{U}_m \subseteq \mathbb{U}_n \text{ для довільних } m \leq n. \quad (1.6)$$

Доведемо, що клас $\mathbb{U}_M$ має потрібні властивості. Клас $\mathbb{U}_M$ містить $\mathbb{U}_0$ за означенням класу $\mathbb{U}_M$. Доведемо замкненість $\mathbb{U}_M$ відносно всіх операцій $\mathbb{F}_i^{n_i} \in M$. Нехай $j \in I$ та $u_1, \dots, u_{n_j} \in \mathbb{U}_M$. Нехай, для певності, $u_k \in \mathbb{U}_{m_k}$ для $k = 1, \dots, n_j$. Покладемо $m = \max\{m_1, \dots, m_{n_j}\}$. З (1.6) дістаємо, що $u_k \in \mathbb{U}_m$ для $k = 1, \dots, n_j$. З (1.5) випливає, що $\mathbb{F}_j^{n_j}(u_1, \dots, u_{n_j}) \in \mathbb{U}_{m+1}$, а з огляду на $\mathbb{U}_{m+1} \subseteq \mathbb{U}_M$ отримуємо $\mathbb{F}_j^{n_j}(u_1, \dots, u_{n_j}) \in \mathbb{U}_M$. Отже, замкненість $\mathbb{U}_M$ відносно всіх операцій доведено. Доведемо мінімальність класу $\mathbb{U}_M$. Нехай підклас $\mathbb{U}' \subseteq \mathbb{U}$ теж містить $\mathbb{U}_0$ та замкнений відносно всіх операцій $\mathbb{F}_i^{n_i} \in M$. Використовуючи (1.5) за допомогою принципу математичної індукції доводимо, що $\mathbb{U}_n \subseteq \mathbb{U}'$ для всіх $n = 0, 1, \dots$. За означенням класу $\mathbb{U}_M$ маємо $\mathbb{U}_M \subseteq \mathbb{U}'$, що й означає мінімальність. Нарешті, мінімальний клас єдиний, згідно з означеннями мінімальності та рівності двох класів. $\square$

Теорема 1.2.4 (Індукція за довжиною об'єкта). *Нехай $\mathbb{U}_M$ – мінімальний підклас класу $\mathbb{U}$, що містить підклас $\mathbb{U}_0 \subseteq \mathbb{U}$, замкнений відносно кожної операції $\mathbb{F}_i^{n_i} \subseteq \mathbb{U}^{n_i} \times \mathbb{U}$, $n_i \in \mathbb{N}$ з множини операцій $M = \{\mathbb{F}_i^{n_i}\}_{i \in I}$. Нехай $P : \mathbb{U}_M \rightarrow \mathcal{P}$ – предикат, причому*

(i) $|P(x)| = 1$ для довільного $x \in \mathbb{U}_0$;

(ii) для довільних $i \in I$, $u_1, \dots, u_{n_i} \in \mathbb{U}_M$

$$\left| \left(P(u_1) \wedge P(u_2) \wedge \dots \wedge P(u_{n_i}) \right) \rightarrow P(\mathbb{F}_i^{n_i}(u_1, \dots, u_{n_i})) \right| = 1.$$

Тоді $|P(x)| = 1$ для довільного $x \in \mathbb{U}_M$.

Доведення. Нехай, навпаки, існує $x \in \mathbb{U}_M$, для якого $|P(x)| = 0$. Згідно з теоремою 1.2.3, $\mathbb{U}_M = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{U}_n$, де класи $\mathbb{U}_n$ при $n = 1, 2, \dots$ визначаються рекурсивно формулою (1.5). Нехай n_0 – найменший з номерів n , для яких існує $x \in \mathbb{U}_n$ з $|P(x)| = 0$, а $x_0 \in \mathbb{U}_{n_0}$ – такий елемент, що $|P(x_0)| = 0$. З (i) дістаємо, що $n_0 > 0$. А отже, згідно з (1.5) для $n = n_0 - 1$, враховуючи, що $x_0 \notin \mathbb{U}_{n_0-1}$, маємо $x_0 = \mathbb{F}_i^{n_i}(u_1, \dots, u_{n_i})$ для деяких $i \in I$ та $u_1, \dots, u_{n_i} \in \mathbb{U}_{n_0-1}$. З мінімальності n_0 отримуємо, що $|P(u_1)| = 1, \dots, |P(u_{n_i})| = 1$, що суперечить умові (ii). $\square$

1.2.2. Пропозиційні операції та пропозиційні форми. Штучні мови, що створюються для потреб логіки називаються *формалізованими мовами*. Формалізована мова будується наступним чином: задається алфавіт мови, тобто вихідні символи; кожна послідовність вихідних символів називається словом; потім вводиться синтаксис, тобто набір правил, що виділяє з усіх слів формалізованої мови слова, які називаються формулами. Такою формалізованою мовою є, зокрема, мова логіки висловлень. Будь яка формалізована мова будується таким чином, щоб для довільного слова у цій мові чітко можна було відрізнити чи є воно формулою чи набором символів, що не є формулою.

Пропозиційні літери, символи пропозиційних операцій та дужки становлять вихідні символи мови алгебри висловлень. Будь-яка послідовність вихідних символів є *виразом* мови. З множини всіх виразів виділяють пропозиційні форми, які в мові числення висловлень відповідають словам в природній мові.

Застосуємо наведені вище відомості про рекурсію для означення пропозиційних форм. Нехай $\mathbb{U}$ – клас всіх виразів у деякому алфавіті, а $\mathfrak{F}_0$ – підклас класу $\mathbb{U}$ всіх пропозиційних констант та пропозиційних змінних. *Пропозиційними константами* називаються довільні конкретні висловлення $A, B, \dots \in \mathcal{P}$, а *пропозиційними змінними* – довільні змінні $P, Q, \dots$, значення яких пробігають клас $\mathcal{P}$ всіх висловлень. На класі $\mathbb{U}$ визначимо формально *пропозиційні зв'язки (операції)* заперечення, диз'юнкції, кон'юнкції, імплікації та еквівалентності за допомогою виразів $\neg x$, $(x) \vee (y)$, $(x) \wedge (y)$, $(x) \rightarrow (y)$, $(x) \leftrightarrow (y)$. Дужки навколо виразів указують на однозначний порядок виконання операції. Символу кожного логічного зв'язку відповідає пара дужок, що робить запис досить громіздким. З метою спрощення встановлюються правила скорочення числа дужок:

- зовнішні дужки в записі кінцевої форми опускаються;
- усім пропозиційним зв'язкам приписується певний ранг, який знижується в міру переміщення зліва направо в такому записі символів операцій: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. При цьому вважається, що зв'язок вищого рангу зв'язує сильніше, ніж зв'язок нижчого рангу.

Останній по порядку логічний зв'язок називається *головним*.

Означення 1.2.5. Клас $\mathcal{F}$ всіх пропозиційних форм *визначається як найменший (у розумінні включення) підклас класу $\mathbb{U}$, який містить $\mathfrak{F}_0$ та замкнений відносно всіх пропозиційних операцій*. *Пропозиційними формами називаються елементи класу $\mathcal{F}$ і тільки вони*.

Згідно з теоремою 1.2.3, $\mathcal{F} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n$, де

$$\mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n \cup \left\{ \neg f, f \vee g, f \wedge g, f \rightarrow g, f \leftrightarrow g : f, g \in \mathcal{F}_n \right\}$$

для кожного $n = 0, 1, 2, \dots$

Домовимося нульовий степінь довільного непорожнього класу покладати рівним множині, що складається з порожньої множини $\mathbb{D}^0 = \{\emptyset\}$ (подібно до того, як нульовий степінь довільного ненульового числа визначається рівним одиниці). Таким чином, функції нульової кількості змінних (зокрема, 0-арні операції) приймають рівно одне значення, а тому ототожнюються з константами.

Твердження 1.2.6. *Пропозиційні форми є операціями на класі $\mathcal{P}$ всіх висловлень.*

Доведення індукцією за довжиною пропозиційної форми. (див. теорему 1.2.4).

(i) Згідно з домовленістю, пропозиційні константи є 0-арними операціями. Пропозиційна змінна є тотожною функцією однієї змінної.

(ii) Нехай пропозиційна форма $\varphi = \varphi(P_1, \dots, P_m)$ є функцією змінних $P_1, \dots, P_m$, а пропозиційна форма $\psi = \psi(Q_1, \dots, Q_n)$ є функцією змінних $Q_1, \dots, Q_n$, де $m, n \in \{0, 1, \dots\}$. Тоді $\varphi \vee \psi = \varphi(P_1, \dots, P_m) \vee \psi(Q_1, \dots, Q_n)$ є функція змінних $P_1, \dots, P_m, Q_1, \dots, Q_n$ (змінних може бути менше, якщо списки змінних цих пропозиційних форм φ та ψ перетинаються). Аналогічно доводиться, що решта пропозиційних зв'язок є функціями багатьох змінних. $\square$

Покажемо на прикладі, як будується таблиця істинності, що відповідає даній пропозиційній формі.

Приклад 1.2.7. $\varphi(P, Q, R) = \neg P \rightarrow Q \vee R$

P	Q	R	$\neg P$	$Q \vee R$	φ
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1

Таблиця істинності пропозиційної форми задає певну функцію істинності. При цьому не слід плутати ці два поняття. Форма є "ім'ям" відповідної функції істинності. Та сама функція істинності може зображатись різними пропозиційними формами (річ може мати кілька назв). Проте кожній пропозиційній формі алгебри висловлень відповідає єдина таблиця істинності, отже, єдина функція істинності, подібно тому, як кожному імені в формалізованій мові відповідає тільки один предмет. Оскільки істинність висловлення

$|\cdot|$ є відображенням з $\mathcal{P}$ у двоелементну множину $\{0, 1\}$, то для довільної пропозиційної форми φ композиція $|\varphi|$ є функцією багатьох змінних на класі $\mathcal{P}$ зі значеннями в $\{0, 1\}$.

Означення 1.2.8. Функцією істинності називають довільну функцію n змінних $F : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$, де n може приймати довільне значення $0, 1, 2, \dots$.

Означення 1.2.9. Булевою називають довільну функцію, значення якої, як і значення всіх її аргументів, належать заданій двоелементній множині.

Очевидно, що функції істинності алгебри висловлень є булевими функціями.

Зокрема, константи 0 і 1 є функціями істинності від нульової кількості змінних. Зауважимо, що кожна пропозиційна форма $\varphi(P_1, \dots, P_n)$ породжує функцію істинності $F : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ за таким правилом: для довільних значень змінних $x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\}$ нехай $P_1, \dots, P_n$ – довільні висловлення такі, що $|P_i| = x_i$ для всіх $i = 1, \dots, n$. Тоді покладемо

$$F_\varphi(x_1, \dots, x_n) = |\varphi(P_1, \dots, P_n)|.$$

Визначена у такий спосіб функція істинності F_φ не залежить від вибору висловлень $P_1, \dots, P_n$, згідно з означенням істинності пропозиційних зв'язок.

Виникає природне питання: чи кожному функцію істинності можна зобразити за допомогою пропозиційної форми? Відповідь на це питання дамо трохи згодом.

Серед всіх пропозиційних форм особливе місце займають так звані тавтології.

Означення 1.2.10. Пропозиційна форма φ називається тавтологією, якщо $|\varphi| = 1$ для довільних значень змінних, від яких залежить пропозиційна форма φ . Іншими словами, коли її функція істинності тотожно дорівнює 1.

Той факт, що пропозиційна форма φ є тавтологією, позначають так: $\models \varphi$.

Тавтології ще називають тотожно істинними формулами, або законами числення висловлень. Наведемо приклади найважливіших тавтологій.

- 1) $\neg\neg P \leftrightarrow P$ – закон повторного заперечення.
- 2) $P \vee \neg P$ – закон виключення третього.
- 3) $\neg(P \wedge \neg P)$ – закон виключення суперечності.
- 4) $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$ – закон контрапозиції.
- 5) $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$ – закон самодистрибутивності імплікації.

Згідно з означеннями, має місце таке твердження.

Твердження 1.2.11.

- 1) Пропозиційна форма φ є тавтологією тоді і лише тоді, коли $F_\varphi \equiv 1$.
- 2) Пропозиційні форми φ та ψ еквівалентні тоді і тільки тоді, коли $F_\varphi = F_\psi$.

Очевидно довести те, що пропозиційна форма є тавтологією можна за допомогою таблиць істинності. Проте часто виявляється зручним, так званий, *метод відшукування контрприкладів*. Продемонструємо нижче, як можна спростити доведення в окремих випадках на прикладі наступної пропозиційної форми

$$f := (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

Доведемо, що ПФ f є тавтологією від супротивного. Нехай, навпаки, f не є тавтологією. Тоді існують істинні значення змінних P, Q, R , при яких $|P \rightarrow (Q \rightarrow R)| = 1$ та $|(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)| = 0$. З останньої умови отримуємо $|P \rightarrow Q| = 1$ та $|P \rightarrow R| = 0$. Звідси по чергову, починаючи з останньої умови, отримуємо, що $|P| = 1$, $|R| = 0$ та $|Q| = 1$. Але це суперечить умові $|P \rightarrow (Q \rightarrow R)| = 1$. Отже, припущення про те, що f не є тавтологією, хибне.

У математиці із даних, вже встановлених співвідношень, виводять нові співвідношення. Аналогічно в алгебрі висловлень з відомих тавтологій виводять інші. Важливим способом утворення нових тавтологій є *підстановка* в дану пропозиційну форму.

Теорема 1.2.12. *Якщо пропозиційна форма $\varphi(P_1, \dots, P_n)$ є тавтологією, то пропозиційна форма φ^* , утворена з форми $\varphi(P_1, \dots, P_i, \dots, P_n)$ підстановкою довільної форми з класу $\mathcal{F}$ замість кожного входження пропозиційної букви P_i в φ , є також тавтологією.*

Означення 1.2.13. *Пропозиційні форми φ та ψ називаються еквівалентними (записується $\varphi \equiv \psi$), якщо пропозиційна форма $\varphi \leftrightarrow \psi$ є тавтологією (тобто їх функції істинності тотожно рівні).*

Підкреслимо, що символ " $\equiv$ " не є символом операції числення висловлень, а означає певне відношення між пропозиційними формами, цей символ належить не предметній мові логіки висловлень, а метамові.

Наведемо основні рівносильності алгебри висловлень:

- 1) $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$ – комутативність кон'юнкції;
- 2) $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$ – асоціативність кон'юнкції;
- 3) $P \vee Q \equiv Q \vee P$ – комутативність диз'юнкції;
- 4) $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$ – асоціативність диз'юнкції;
- 5) $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ – перший дистрибутивний закон;
- 6) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ – перший дистрибутивний закон;
- 7) $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$ – правило де Морґана;
- 8) $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ – правило де Морґана.

Означення 1.2.14. Пропозиційна форма $\varphi = \varphi(P_1, \dots, P_n)$ називається логічним наслідком пропозиційних форм $\psi_1, \dots, \psi_n$ (записується $\psi_1, \dots, \psi_n \models \varphi$), якщо пропозиційна форма $(\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n) \rightarrow \varphi$ є тавтологією.

Цікаво зазначити, що довільну «логічну» операцію «можна виразити» через операції диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення. Точніше, довільна пропозиційна форма еквівалентна певній комбінації диз'юнкції, кон'юнкції та заперечення.

Повернімось до питання: чи кожному функції істинності можна зобразити за допомогою пропозиційної форми? Наступна теорема дає відповідь, навіть більше, демонструє повноту пропозиційних зв'язок диз'юнкції, кон'юнкції і заперечення.

Теорема 1.2.15 (Теорема про повноту). Для довільної функції істинності $F : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$ існує пропозиційна форма φ така, що $F_\varphi = F$. Більш того, можна вимагати, щоби ця пропозиційна форма була побудована за допомогою лише пропозиційних констант, пропозиційних змінних, диз'юнкцій, кон'юнкцій і заперечень.

Доведення. Для пропозиційної змінної P та числа $\xi \in \{0, 1\}$ визначимо пропозиційну форму

$$\tau_\xi(P) = \begin{cases} P, & \text{якщо } \xi = 1 \\ \neg P, & \text{якщо } \xi = 0. \end{cases}$$

Зазначимо, що

$$|\tau_\xi(P)| = 1 \quad \text{тоді і лише тоді, коли} \quad |P| = \xi. \quad (1.7)$$

Зафіксуємо довільну функції істинності $F : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$. Якщо $n = 0$, то функція є константою і шукану форму можна буде знайти серед пари висловлень-констант, одне з яких є хибним, а друге – істинним. Отже, нехай $n \geq 1$. Покладемо

$$\varphi(P_1, \dots, P_n) = \bigvee_{\{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \{0, 1\}^n : F(\xi_1, \dots, \xi_n) = 1\}} \bigwedge_{i=1}^n \tau_{\xi_i}(P_i) \quad (1.8)$$

і доведемо, що $F_\varphi = F$.

Зафіксуємо довільний набір $(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ і виберемо висловлення $A_1, \dots, A_n$ так, що $|A_i| = x_i$ для всіх $i = 1, \dots, n$. Тоді умова $|\varphi(A_1, \dots, A_n)| = 1$, згідно з (1.8), рівносильна наступній: $\exists(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \{0, 1\}^n : \left(F(\xi_1, \dots, \xi_n) = 1 \right) \wedge \left(\forall i \, |\tau_{\xi_i}(A_i)| = 1 \right)$, яка з урахуванням (1.7), в свою чергу, рівносильна умові

$$\exists(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \{0, 1\}^n : \left(F(\xi_1, \dots, \xi_n) = 1 \right) \wedge \left(\forall i \, |A_i| = \xi_i \right).$$

Але оскільки $|A_i| = x_i$ для всіх $i = 1, \dots, n$, то остання умова рівносильна тому, що $F(x_1, \dots, x_n) = 1$. А це й означає, що $F_\varphi = F$. $\square$

Наслідок 1.2.16. Довільна пропозиційна форма еквівалентна деякій композиції диз'юнкцій, кон'юнкцій і заперечень.

Зауваження 1.2.17. З правил де Морґана випливає, що теорема 1.2.15 і наслідок 1.2.16 залишаться істинними, якщо в формулюваннях забрати або кон'юнкції, або диз'юнкції.

1.3.1. Контрольні питання.

- 1) Що таке висловлення?
- 2) Дайте означення предиката.
- 3) Дайте визначення операцій над висловленнями.
- 4) Що таке пропозиційні зв'язки?
- 5) Від чого залежить істинність складених висловлень?
- 6) Дайте визначення головного зв'язку.
- 7) Як визначається клас всіх пропозиційних форм?
- 8) Що таке функція істинності?
- 9) Дайте означення тавтології.
- 10) Коли пропозиційні форми є еквівалентними?
- 11) Що таке логічний наслідок пропозиційних форм?

1.3.2. Вправи.

- 1) Вказати які з даних виразів є висловленнями, які є предикатами, а які не є ні висловленнями, ні предикатами?
 - (a) Кожний студент є жінкою.
 - (b) $2 \leq 1$.
 - (c) (Кожний студент є жінкою) $\rightarrow (2 \leq 1)$.
 - (d) (Число r є раціональним) $\vee (r = \sqrt{5})$.
 - (e) Для довільного дійсного числа x існує натуральне число n таке, що $n \leq x$.
 - (f) Для довільного дійсного числа x .
 - (g) Існує натуральне число n таке, що $n \leq x$.
 - (h) 15 олівців.
 - (i) Властивість A впливає з властивості B .
 - (j) Кожний півень є рибою.
 - (k) Існує довільне число, відмінне від нуля.

- (l) Байрон – німецький поет.
- (m) 5 – просте число.
- (n) Що більше: 4 чи 3?
- (o) $a > 3$.
- (p) 17 ділиться націло на 4.
- (q) Існує довільне число, відмінне від нуля.
- (r) Існує деяке число, відмінне від нуля.
- (s) $\sin x \leq 1$.
- (t) Число 100000000 дуже велике.
- (u) Цілих чисел більше ніж натуральних.
- (v) Загальний член збіжного числового ряду прямує до нуля.
- (w) $x \leq y + z$.

Визначити які з наведених вище висловлень істинні. Кожний предикат перетворити в істинне висловлення за допомогою слів «довільний» та «існує».

2) Визначити істинність наступних висловлень.

- (a) «Чернівці розташовані на річці Прут і $2+3=5$ ».
- (b) «1 – просте число або 2 – просте число».
- (c) «якщо $3 \leq 2$, то білі ведмеді живуть у Африці».

3) З'ясувати істиннісні значення висловлень A , B та C , якщо

- (a) « $A \wedge (2 \cdot 2 = 4)$ » – істинне висловлення;
- (b) « $B \vee (2 \cdot 2 = 5)$ » – істинне висловлення;
- (c) « $C \vee (2 \cdot 2 = 5)$ » – хибне висловлення.

4) Сформулювати у вигляді імплікацій наступні речення:

- (a) Сума величин внутрішніх кутів трикутника дорівнює 180° .
- (b) Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.
- (c) В прямокутному трикутнику квадрат довжини гіпотенузи дорівнює сумі квадратів довжин катетів.

5) Предикат P задається на множині натуральних чисел за допомогою предикату « x -просте число». Чому дорівнюють $P(1)$, $P(2)$, $P(6)$ у таблиці істинності?

6) Довести наступні твердження для довільних висловлень P та Q .

- (a) $|\neg P| = 1 - |P|$.

$$(b) \quad |P \vee Q| = |P| + |Q| - |P||Q|.$$

$$(c) \quad |P \wedge Q| = |P||Q|.$$

- 7) Записати подібні формули (як у вправі вище) для істинності імплікації та еквівалентності. Точніше, виразити наступні істинності через арифметичні операції над значеннями $|P|$ та $|Q|$.

$$(a) \quad |P \rightarrow Q| = ?$$

$$(b) \quad |P \leftrightarrow Q| = ?$$

- 8) Який з наступних виразів є пропозиційною формою?

$$(a) \quad (\text{Кожний студент є жінкою}) \rightarrow (P \wedge (2 \leq 1)).$$

$$(b) \quad (\text{Число } r \text{ є раціональним}) \vee (r = \sqrt{5}).$$

$$(c) \quad P \leftrightarrow (P \wedge (x \leq 2)).$$

$$(d) \quad P \wedge \wedge(Q \Leftrightarrow R).$$

$$(e) \quad \forall x \exists y (x \leq y).$$

- 9) У заданих пропозиційних формах встановити головну операцію (зв'язок).

$$(a) \quad (P \rightarrow \neg Q) \wedge R \vee \neg Q.$$

$$(b) \quad \neg P \vee (P \rightarrow Q) \leftrightarrow Q \wedge (\neg P \rightarrow Q).$$

- 10) Довести, що наступні пропозиційні форми є тавтологіями.

$$(a) \quad \neg\neg P \leftrightarrow P - \text{закон повторного заперечення.}$$

$$(b) \quad P \vee \neg P - \text{закон виключення третього.}$$

$$(c) \quad \neg(P \wedge \neg P) - \text{закон виключення суперечності.}$$

$$(d) \quad (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P) - \text{закон контрапозиції.}$$

$$(e) \quad \left(P \rightarrow (Q \rightarrow R) \right) \rightarrow \left((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R) \right) - \text{закон самодистрибутивності імплікації.}$$

- 11) Довести, що якщо φ та $\varphi \rightarrow \psi$ – тавтології, то ψ – теж тавтологія.

- 12) Вказати, які з наведених нижче пропозиційних форм А-F є еквівалентними.

$$\text{A. } (P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q).$$

$$\text{B. } (P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P).$$

$$\text{C. } (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P).$$

$$\text{D. } (P \vee Q) \wedge (P \rightarrow Q).$$

$$\text{E. } P.$$

$$\text{F. } Q.$$

13) Довести такі еквівалентності.

- (a) $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$.
- (b) $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$.
- (c) $P \vee Q \equiv Q \vee P$.
- (d) $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$.
- (e) $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.
- (f) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.
- (g) $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$ – правило де Морґана.
- (h) $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$ – правило де Морґана.
- (i) $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$.
- (j) $P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$.
- (k) $\neg\neg P \equiv P$.
- (l) $P \vee P \equiv P$.
- (m) $P \wedge P \equiv P$.
- (n) $P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$.

14) Визначити, в яких випадках друга пропозиційна форма є логічним наслідком першої.

- (a) $X \wedge Y, X$;
- (b) $X, X \wedge Y$;
- (c) $Y, X \vee Y$;
- (d) $X \wedge Y, X \vee Y$;
- (e) $X \wedge Y, X \rightarrow Y$;
- (f) $X \rightarrow Y, Y \rightarrow X$;
- (g) $X \rightarrow Y, \overline{X} \rightarrow \overline{Y}$;
- (h) $(X \rightarrow Y) \wedge X, Y$;
- (i) $(X \rightarrow Y) \wedge Y, X$.

15) Довести:

- (a) $P \rightarrow Q, P \models Q$ (правило виводу «modus ponens»);
- (b) $P \rightarrow Q, \neg Q \models \neg P$ (правило виводу «modus tollens»).