

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

І. І. Клевчук

Теорія керування:
методичні вказівки та завдання до
лабораторних робіт

Чернівці
Чернівецький національний університет
2025

УДК 519.8 (076.5)

Рекомендовано до друку Вченою радою факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (протокол № 5 від "15" грудня 2025 року)

Клевчук І.І.

К 48 Теорія керування: методичні вказівки та завдання до лабораторних робіт. – Чернівці: ЧНУ, 2025. – 35 с.

Методичні рекомендації містять завдання для лабораторних робіт і теоретичні відомості, необхідні для їх виконання, з дисципліни "Теорія керування".

Для студентів, що здобувають освіту в галузі знань 12 - Інформаційні технології (спеціальності 122 - Комп'ютерні науки, 124 Системний аналіз). Можуть бути корисними для студентів інших спеціальностей при вивченні методів теорії керування та їх застосуванні у прикладних дослідженнях. Знання і досвід, набуті в цьому курсі, будуть корисними в майбутній практичній діяльності студентів при моделюванні на ЕОМ різноманітних прикладних процесів та аналізі експериментальних даних.

Укладач: Клевчук Іван Іванович, доктор. фіз.-мат. наук, доцент

Зміст

Вступ.....	4
Мета і завдання навчальної дисципліни.....	4
1. Критерій Гурвіца.....	5
2. Побудова областей стійкості лінійних автономних диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями.....	7
Завдання до лабораторної роботи № 1.....	10
Контрольні запитання до лабораторної роботи № 1.....	11
3. Керованість лінійних систем.....	11
3.1. Керованість лінійних стаціонарних систем.....	11
3.2. Керованість лінійних нестаціонарних систем.....	12
3.3. Оптимальне керування лінійними системами з квадратичним функціоналом.....	12
3.4. Регулювання стану системи. Оптимальна стабілізація керованого руху.....	13
4. Метод динамічного програмування.....	14
4.1. Принцип оптимальності Беллмана.....	14
4.2. Застосування динамічного програмування до системи диференціальних рівнянь.....	15
4.3. Лінійно-квадратична задача.....	17
5. Фільтри Калмана-Б'юсі.....	18
6. Методи розв'язування матричного алгебраїчного рівняння Ляпунова.....	19
6.1. Розв'язування матричного алгебраїчного рівняння Ляпунова шляхом зведення до векторної системи алгебраїчних рівнянь.....	19
6.2. Розв'язування матричного алгебраїчного рівняння Ляпунова методом матричної сигнум-функції.....	20
7. Розв'язування матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті методом матричної сигнум-функції.....	20
8. Розв'язування матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті для неперервного випадку методом Ньютона-Рафсона.....	22
Завдання до лабораторної роботи № 2.....	23
Контрольні запитання до лабораторної роботи № 2.....	34
Література.....	35

Вступ

Навчальна дисципліна призначена для ознайомлення студентів з основними теоретичними та практичними аспектами теорії керування.

Вивчення навчальної дисципліни "Теорія керування" дозволить студентам оволодіти знаннями основ класичної та сучасної теорії керування, принципами побудови систем керування; методами проектування і дослідження систем керування; методами дослідження стійкості і якості неперервних систем.

Вивчення поведінки і конструювання систем керування є основною задачею теорії керування. При цьому на перший план висувають такі властивості систем, як стійкість і оптимальність.

При дослідженні різноманітних практичних задач керування істотною роль відіграє теорія стійкості. Під стійкістю звичайно розуміють властивість системи або якогось стану зберігатись при малих змінах початкових станів, зовнішніх впливів, параметрів системи і т.д.

Різнманітні реальні процеси, що відбуваються в навколишньому середовищі, найчастіше є керованими, тобто протікають різним чином в залежності від конкретного впливу на них керуючої сторони. При цьому природним є прагнення обрати в деякому розумінні оптимальний керуючий вплив, тобто найкращий в порівнянні з усіма іншими можливими варіантами керування.

Мета і завдання навчальної дисципліни

Мета навчальної дисципліни: Дати достатньо повний виклад математичних основ сучасної теорії керування на рівні ідей, які базові для методів теорії керування та оптимального керування системами з неперервним та дискретним аргументами. Отримані знання, вміння та навички - основа сучасного підходу до аналізу, синтезу і розрахунку систем керування за найновішими ідеями і принципами у систематизованому вигляді.

Завдання навчальної дисципліни: Отримані знання, вміння та навички - основа сучасного підходу до аналізу, синтезу і розрахунку систем керування за найновішими ідеями і принципами у систематизованому вигляді.

Знання і досвід, набуті в цьому курсі, будуть корисними в майбутній практичній діяльності студентів при дослідженні математичних моделей систем керування.

Дисципліна формує такі компетентності за ОП:

ЗК01. Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу;

ЗК02. Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях;

ЗК07. Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел;

ЗК10. Здатність працювати автономно;

ЗК11. Здатність генерувати нові ідеї (креативність);

ФК1. Здатність використовувати системний аналіз як сучасну міждисциплінарну методологію, що базується на прикладних математичних методах та сучасних інформаційних технологіях і орієнтована на вирішення задач аналізу і синтезу технічних, економічних, соціальних, екологічних та інших складних систем.

ФК5. Здатність формулювати задачі оптимізації при проектуванні систем управління та прийняття рішень, а саме: математичні моделі, критерії оптимальності, обмеження, цілі управління; обирати раціональні методи та алгоритми розв'язання задач оптимізації та оптимального керування.

3. Пререквізити. Вказуються дисципліни чи сертифіковані курси, які здобувач вищої освіти має вивчити до початку або разом із цією дисципліною, що підвищує ефективність засвоєння курсу. Математичний аналіз, диференціальні рівняння, алгебра і геометрія, обчислювальні методи, математичне та комп'ютерне моделювання. Постреквізити. Диференціально-функціональні рівняння.

4. Результати навчання В результаті вивчення дисципліни студент повинен ЗНАТИ:

- загальну класифікацію систем керування та їх математичних моделей;
- основні властивості систем керування: керованість, спостережуваність, критерії цих властивостей;
- задачі про побудову регуляторів та спостерігачів;
- методи оптимального керування.

ВМІТИ:

- застосовувати критерії для перевірки властивостей керованості і спостережуваності лінійних систем керування;
- будувати функції Гамільтона і застосовувати принцип максимуму для дослідження оптимальних процесів;
- розв'язувати задачі оптимального керування методом Беллмана;
- будувати області стійкості для лінійних автономних диференціальних рівнянь із двома запізненнями;
- розв'язувати матричні алгебраїчні рівняння Ляпунова і Ріккаті, які виникають у задачах оптимального керування.

Наведені результати навчання за відповідною дисципліною співвідносяться із такими програмними результатами навчання:

ПР1. Знати і вміти застосовувати на практиці диференціальне та інтегральне числення, ряди та інтеграл Фур'є, аналітичну геометрію, лінійну алгебру та векторний аналіз, функціональний аналіз та дискретну математику в обсязі, необхідному для вирішення типових завдань системного аналізу.

ПР7. Знати основи теорії оптимізації, оптимального керування, теорії прийняття рішень, вміти застосовувати їх на практиці для розв'язування прикладних задач управління і проєктування складних систем.

1. Критерій Гурвіца

Нехай маємо характеристичний многочлен

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_0 > 0, \quad (1)$$

з дійсними коефіцієнтами і додатним старшим коефіцієнтом. Будемо вважати, що коефіцієнти a_k визначені при всіх невід'ємних k , причому $a_k = 0$ при $k > n$ (насправді нам потрібні ці коефіцієнти тільки при $k \leq 2n$).

Многочлен (1) називається стійким, якщо всі його корені лежать у лівій півплощині, тобто якщо їх дійсні частини від'ємні.

На основі характеристичного многочлена (1) утворюється матриця Гурвіца за такими правилами:

- 1) матриця має n рядків та n стовпців, у першому рядку розташовуються непарні коефіцієнти, після чого рядок заповнюють до останньої комірки нулями;
- 2) другий рядок містить усі парні коефіцієнти і також заповнюється нулями до останньої комірки;
- 3) третій і четвертий рядки отримують зсувом вправо відповідно першого й другого рядків на один елемент, а зліва проставляють нуль;
- 4) аналогічно зсувом вправо попередніх рядків на один елемент отримують наступні рядки;
- 5) на головній діагоналі матриці розташовують усі коефіцієнти, крім a_0 .

Матриця Гурвіца має вигляд

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & a_{2n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & a_{2n-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2n-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2n-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Визначниками Гурвіца $D_1, \dots, D_n$ многочлена f називаються головні мінори його матриці Гурвіца. Отже,

$$D_1 = a_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \dots$$

Зауважимо, що $D_n = a_n D_{n-1}$.

Теорема Гурвіца для многочленів з дійсними коефіцієнтами. Многочлен f з дійсними коефіцієнтами і додатним старшим коефіцієнтом стійкий тоді і тільки тоді, коли всі його визначники Гурвіца додатні, тобто $D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n > 0$.

Приклад 1. Дослідити стійкість нульового розв'язку рівняння $x''' + 6x'' + 3x' + 2x = 0$.

■ Характеристичне рівняння $\lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, коефіцієнти $a_0 = 1, a_1 = 6, a_2 = 3, a_3 = 2$, матриця Гурвіца

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо її головні мінори

$$\Delta_1 = a_1 = 6, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 18 - 2 = 16 > 0, \Delta_3 = a_3 \cdot \Delta_2 = 2 \cdot 16 = 32 > 0.$$

Всі мінори додатні, отже, нульовий розв'язок рівняння асимптотично стійкий. ■

Приклад 2. Дослідити стійкість нульового розв'язку рівняння $x''' + x'' + 4x' + 30x = 0$.

■ Характеристичне рівняння $\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 30 = 0$, коефіцієнти $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 30$, матриця Гурвіца

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 30 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 30 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо її головні мінори

$$\Delta_1 = a_1 = 1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 30 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 30 = -26 < 0.$$

Маємо $\Delta_2 < 0$, тому нульовий розв'язок рівняння нестійкий. Характеристичне рівняння має корінь $\lambda = -3$, отже, виконується рівність $\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 30 = (\lambda + 3)(\lambda^2 - 2\lambda + 10)$, тому корені характеристичного рівняння $\lambda = 1 \pm 3i$. ■

Приклад 3. Дослідити стійкість нульового розв'язку рівняння $x^{(4)} + 2x''' + 4x'' + 7x' + 3x = 0$.

■ Характеристичне рівняння $\lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 + 7\lambda + 3 = 0$, коефіцієнти $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 7, a_4 = 3$, матриця Гурвіца

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо її головні мінори

$$\Delta_1 = a_1 = 2 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 7 = 1 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \\ = 56 + 0 + 0 - 0 - 49 - 12 = -5 < 0.$$

Маємо $\Delta_3 < 0$, тому нульовий розв'язок рівняння нестійкий. ■

2. Побудова областей стійкості лінійних автономних диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями

Дослідження стійкості розв'язків диференціально-різницевого рівняння є важливою прикладною задачею. Необхідною і достатньою умовою асимптотичної стійкості розв'язків лінійних автономних систем диференціальних рівнянь із запізненнями є від'ємність дійсних частин всіх коренів характеристичного квазіполінома. Тому для знаходження області стійкості систем з багатьма запізненнями можна застосовувати амплітудно-фазовий метод, метод D -розбиттів, метод Меймана і Чеботарьова та ін.

Особливо простим є метод D -розбиттів, коли простір коефіцієнтів розбивається на області гіперплощинами, точкам яких відповідають квазіполіноми, що мають хоча б один нуль на уявній осі. Очевидно, що точкам кожної області такого D -розбиття відповідають квазіполіноми з однаковим числом нулів із додатною дійсною частиною. Якщо таких областей скінченне число, то неважко виділити серед них область стійкості. Але часто існує нескінченне число областей D -розбиття.

Тому доцільно спочатку за допомогою принципу аргументу знайти обмеження, які задовольняє область стійкості, а потім уже застосовувати метод D -розбиттів. Доведемо обмеженість області стійкості і побудуємо області стійкості при різних відхиленнях аргументу.

Розглянемо рівняння

$$\frac{dz}{dt} = a_1 z(t-1) + a_2 z(t-2) + \dots + a_n z(t-n), \quad (1)$$

де коефіцієнти a_k , $1 \leq k \leq n$, дійсні.

Для того, щоб нульовий розв'язок рівняння (1) був асимптотично стійким, необхідно і достатньо, щоб всі корені характеристичного рівняння

$$\lambda = a_1 e^{-\lambda} + a_2 e^{-2\lambda} + \dots + a_n e^{-n\lambda} \quad (2)$$

лежали в лівій півплощині $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Означення. Областю стійкості рівняння (2) називається множина точок $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, для яких всі корені рівняння (2) задовольняють умову $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Теорема. Область стійкості рівняння (2) обмежена [1].

Лема. Якщо вектор $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ належить області стійкості рівняння (2), то $c + a_1 + a_2 + \dots + a_n < 0$.

Розглянемо випадок рівняння із двома запізненнями.

Застосуємо метод D -розбиттів до рівняння

$$\lambda = a e^{-m\lambda} + b e^{-n\lambda}, \quad (3)$$

де m та n – взаємно прості натуральні числа, $m < n$. Квазіполіном має нульовий корінь, якщо $a + b = 0$. Ця пряма і є однією з ліній, що утворюють межу D -розбиття.

Нехай тепер рівняння (3) має суто уявний корінь iy , $y \neq 0$:

$$a(\cos my - i \sin my) + b(\cos ny - i \sin ny) = iy.$$

Відокремлюючи дійсну і уявну частини, одержимо систему

$$a \cos my + b \cos ny = 0, \quad a \sin my + b \sin ny = -y. \quad (4)$$

Розв'яжемо систему (4), якщо

$$\begin{vmatrix} \cos my & \cos ny \\ \sin my & \sin ny \end{vmatrix} = \sin(n-m)y \neq 0.$$

Рівняння ліній D – розбиття в параметричній формі матимуть вигляд

$$a = \frac{y \cos ny}{\sin(n-m)y}, \quad b = -\frac{y \cos my}{\sin(n-m)y}.$$

Ці лінії розбивають площину параметрів (a, b) на нескінченне число областей, всередині кожної з яких рівняння (3) має однакове число коренів з додатною дійсною частиною.

Система (4) може бути сумісною також у випадку, коли її головний визначник $\sin(n-m)y = 0$. Це можливо при $y \neq 0$ тоді і тільки тоді, коли $\cos my = \cos ny = 0$ або $my = \pi/2 + k\pi$, $ny = \pi/2 + l\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{Z}$. Такі рівності виконуються тільки у випадку, коли m та n непарні. Якщо ж m та n парні, то досить взяти $k = (m-1)/2$, $l = (n-1)/2$, $y = \pi/2$ і система (4) визначатиме пряму лінію $a \sin m\pi/2 + b \sin n\pi/2 = -\pi/2$. Крім цієї прямої існуватиме ще зліченне число однаково віддалених взаємно паралельних прямих, які є лініями D – розбиття. У цьому випадку лініями D – розбиття будуть прямі, кут нахилу яких рівний $\pi/4$ або $-\pi/4$. При непарних m та n відбувається біфуркація появи нових ліній D – розбиття.

У випадку, коли $m = 1$, n – непарне натуральне число ($n > 1$), область стійкості обмежена $\frac{n+3}{2}$ дугами ліній, серед яких дві дуги будуть відрізками прямих. Інші дуги одержуються із параметричного зображення

$$a = \frac{y \cos ny}{\sin(n-1)y}, \quad b = -\frac{y \cos y}{\sin(n-1)y}$$

при $0 < y < \frac{2\pi}{3}$.

Як приклад знайдемо область стійкості рівняння

$$\lambda = ae^{-\lambda} + be^{-3\lambda}.$$

Щоб знайти оцінки для коефіцієнтів a та b , використаємо методику доведення теореми 1. Застосуємо принцип аргументу до прямокутника на рис. 1.

Спочатку припустимо, що $\alpha = 0$. Тоді при $||a| - |b|| \geq \pi$ маємо $|ae^{-iy} + be^{-3iy}| \geq \pi \geq |iy|$, тому зміна аргументу функції $P(\lambda) = \lambda - ae^{-\lambda} - be^{-3\lambda}$ при русі вздовж контура $ABCD$ буде додатною. Отже, функція $P(\lambda)$ буде мати нуль у прямокутнику $ABCD$.

Застосовуючи цю ж методику до прямокутника $ABCD$ при $\alpha = 1$, одержимо, що функція $P(\lambda)$ буде мати нуль у цьому прямокутнику при $||a|e^{-1} - |b|e^{-3}| \geq \sqrt{\pi^2 + 1}$.

Із наших міркувань випливає, що для точок (a, b) із області стійкості правильні нерівності

$$||a| - |b|| \leq \pi, \quad ||a|e^{-1} - |b|e^{-3}| \leq \sqrt{\pi^2 + 1}. \quad (5)$$

Згідно з лемою 3 область стійкості повинна задовольняти ще одну нерівність

$$a + b < 0. \quad (6)$$

Нерівності (5) і (6) визначають на площині параметрів a та b деякий обмежений многокутник.

Для знаходження області стійкості застосуємо тепер метод D -розбиттів. Пряма $a + b = 0$ є однією з ліній, що утворюють межу D -розбиття.

Якщо квазіполіном має суто уявний корінь iy , то рівняння меж D -розбиття в параметричній формі матимуть вигляд

$$a = \frac{y(4 \cos^2 y - 3)}{2 \sin y}, \quad b = -\frac{y}{2 \sin y}. \quad (7)$$

Побудуємо лінії, що відповідають випадку $\cos y = \cos 3y = 0$. Ці рівняння мають сумісні корені $y = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Тому лініями D -розбиття будуть прямі $a - b = (-1)^{k+1}(\pi/2 + k\pi)$.

Відзначимо, що лінії D -розбиття досить нанести в многокутник, що обмежує область стійкості. Неважко переконатися, що зв'язна область, обмежена відрізками прямих

$$b = -a, \quad -\frac{\pi}{4} \leq a \leq \frac{1}{2}; \quad b = a + \frac{\pi}{2}, \quad -3\frac{\pi}{4} \leq a \leq -\frac{\pi}{4}$$

та дугою лінії (7) при $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ є областю стійкості. Область стійкості рівняння (3), у якому $m = 1$, а $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, відповідно, – це заштрихована частина площини, зображена на рис. 1, 2, 3.

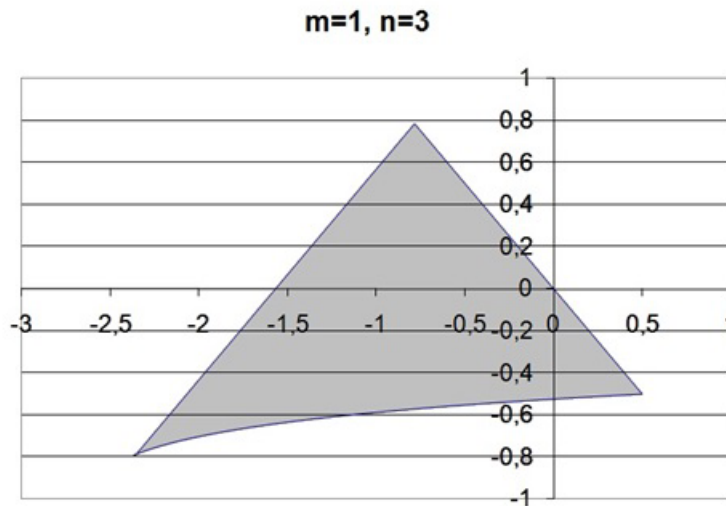


Рис. 1

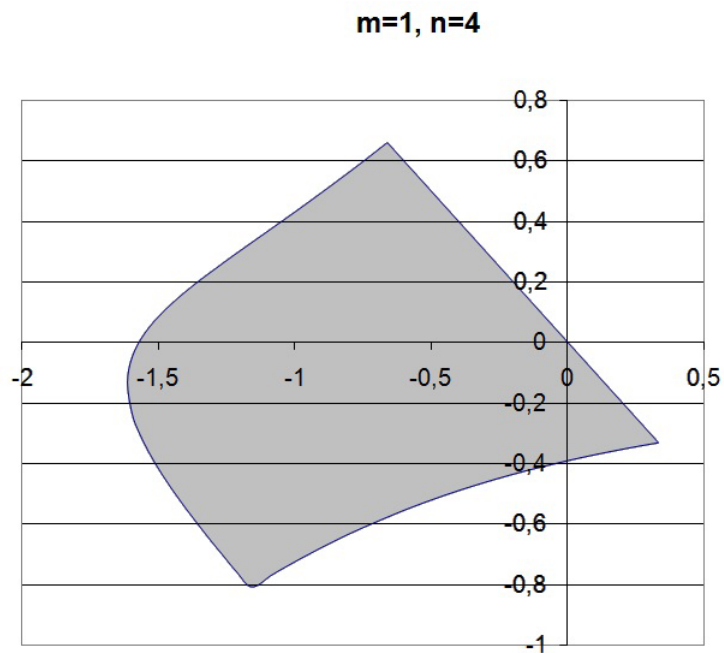


Рис. 2

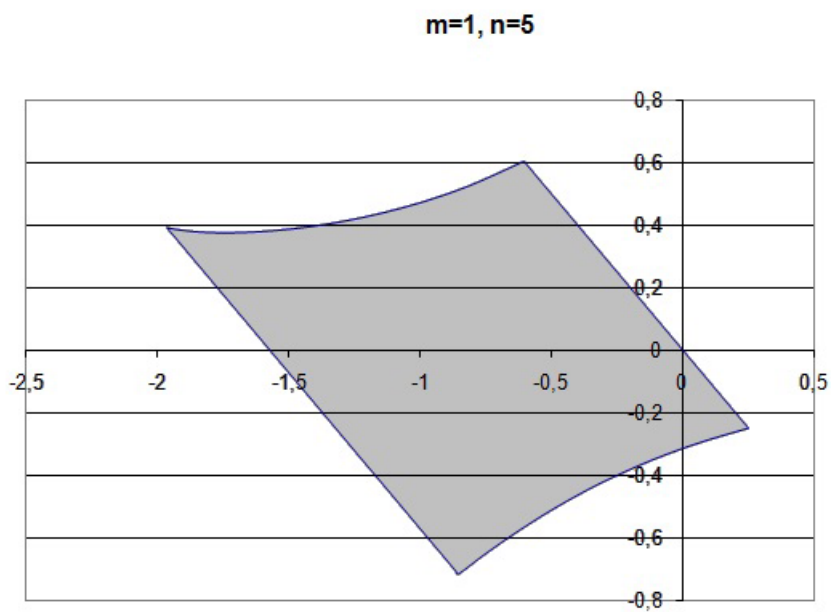


Рис. 3

Завдання до лабораторної роботи № 1

Побудувати в MS Excel область стійкості для характеристичного рівняння (3) із двома параметрами m та n . Нижче вказано варіанти вибору m та n .

- | | | | |
|---------------------|----------------------|----------------------|---------------------|
| 1) $m = 1, n = 2$. | 2) $m = 1, n = 3$. | 3) $m = 2, n = 3$. | 4) $m = 1, n = 4$. |
| 5) $m = 3, n = 4$. | 6) $m = 1, n = 5$. | 7) $m = 2, n = 5$. | 8) $m = 3, n = 5$. |
| 9) $m = 4, n = 5$. | 10) $m = 1, n = 6$. | 11) $m = 2, n = 6$. | |

- 12) $m = 3, n = 6$. 13) $m = 4, n = 6$. 14) $m = 5, n = 6$.
 15) $m = 1, n = 7$. 16) $m = 2, n = 7$. 17) $m = 3, n = 7$.
 18) $m = 4, n = 7$. 19) $m = 5, n = 7$. 20) $m = 6, n = 7$.
 21) $m = 1, n = 8$. 22) $m = 2, n = 8$. 23) $m = 3, n = 8$.
 24) $m = 5, n = 8$. 25) $m = 4, n = 8$. 26) $m = 6, n = 8$.
 27) $m = 7, n = 8$. 28) $m = 1, 5; n = 2$. 29) $m = 1, 4; n = 2, 5$.
 30) $m = 1, 4; n = 3$. 31) $m = 1, 4; n = 5$. 32) $m = 1, 4; n = 4, 6$.
 33) $m = 1, 5; n = 5$. 34) $m = 1, 5; n = 6$. 35) $m = 1, 5; n = 7$.
 36) $m = 2; n = 5$. 37) $m = 2; n = 6, 2$. 38) $m = 2; n = 6, 5$.
 39) $m = 2, 2; n = 5$. 40) $m = 2; n = 5, 5$.

Контрольні запитання до лабораторної роботи № 1

1. Що таке критерій Гурвіца і для чого він використовується?
2. Які умови необхідні для застосування критерію Гурвіца до характеристичного полінома?
3. Як побудувати матрицю Гурвіца для полінома четвертого степеня?
4. Що таке область стійкості для диференціального рівняння із запізненням?
5. Які методи використовуються для визначення меж області стійкості?
6. Як запізнення впливає на стійкість лінійної системи?
7. Опишіть загальний підхід до побудови області стійкості у просторі параметрів запізнення.
8. Яким чином можна перевірити зміну стійкості системи при зміні одного з параметрів запізнення?
9. Що таке керованість динамічної системи?
10. Яка різниця між керованістю та спостережністю?
11. Що означає повна керованість системи?
12. У чому полягає суть критерію Калмана для перевірки керованості лінійної стаціонарної системи?
13. Дослідити керованість системи.
14. Дослідити спостережуваність системи.

3. Керованість лінійних систем

3.1. Керованість лінійних стаціонарних систем

Розглянемо систему диференціальних рівнянь [2 – 11]

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t), t \geq t_0, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \quad (1)$$

де вектор $x(t)$ визначає стан системи, вектор $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^T$ складається з керуючих сил або керувань $u_i(t)$, A, B – сталі матриці, що мають відповідно розміри $n \times n$ та $n \times m$. Обмежень на керування не накладається.

Означення. Система (1) називається керованою на відрізку $[t_0, t_1]$, якщо для довільних векторів $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_1 \in \mathbb{R}^n$ знайдеться таке керування $u(t)$, при якому існує розв'язок системи (1), що задовольняє умови $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$.

Іншими словами, керовану систему із довільного початкового стану x_0 можна перевести в момент часу t_0 можна перевести в стан x_1 в момент часу t_1 при відповідному виборі керування. Умови керованості системи (1) залежать від рангу матриці керованості, яка має вигляд

$$K = (B, AB, \dots, A^{n-1}B). \quad (2)$$

Теорема 1. Для керованості системи (1) необхідно і досить, щоб ранг матриці керованості K був рівний n (розмірності вектора x) [9].

3.2. Керованість лінійних нестационарних систем

Наведемо достатні умови керованості лінійних нестационарних систем

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m. \quad (3)$$

Означення керованості аналогічне означенню для стаціонарних систем.

Припускається, що матриці $A(t)$ і $B(t)$ неперервно диференційовні до порядку $n-1$ включно в околі деякої точки $\tau \in [t_0, t_1]$. Нехай матриці $K_i(t)$ визначаються такими співвідношеннями

$$K_1(t) = B(t), K_i(t) = A(t)K_{i-1}(t) - \frac{dK_{i-1}}{dt}, 2 \leq i \leq n.$$

Теорема 2. Якщо існує така точка $\tau \in [t_0, t_1]$, в котрій ранг матриці

$$K = (K_1, K_2, \dots, K_n)$$

рівний n , то система (3) керована на інтервалі $[t_0, t_1]$.

3.3. Оптимальне керування лінійними системами з квадратичним функціоналом

Розглянемо нестационарну лінійну систему [9]

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (4)$$

$t \in [t_0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $A(t)$ – $n \times n$ матриця, $B(t)$ – $n \times m$ матриця, $x(t_0) = x_0$. Моменти часу t_0 і T а також початковий стан x_0 задані.

Керування $u(t)$ повинно бути вибрано так, щоб мінімізувати квадратичний функціонал

$$J(u) = x'(T)N_1x(T) + \int_{t_0}^T (x'(t)N_2(t)x(t) + u'(t)N_3(t)u(t))dt. \quad (5)$$

Через N_1 і $N_2(t)$ позначені невід'ємно визначені $n \times n$ матриці, тобто симетричні матриці, що задовольняють умову $a'N_1a \geq 0$, $a'N_2(t)a \geq 0$ для кожного $a \in \mathbb{R}^n$. Матриця $N_3(t)$ – додатно визначена $m \times m$ -матриця, тобто симетрична матриця, що задовольняє умову $b'N_3(t)b > 0$ для кожного $b \in \mathbb{R}^m$, $b \neq 0$. Припускається, що матриці $A(t)$, $B(t)$, $N_2(t)$, $N_3(t)$ мають кусково неперервні елементи.

За допомогою принципу максимуму Понтрягіна можна показати, що оптимальне керування для задачі (4)-(5) матиме вигляд

$$u_0(t) = -N_3^{-1}(t)B'(t)P(t)x(t), \quad (6)$$

де $P(t)$ – розв'язок матричного диференціального рівняння Ріккати

$$\frac{dP}{dt} + A'(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)B(t)N_3^{-1}(t)B'(t)P(t) + N_2(t) = 0 \quad (7)$$

з граничною умовою $P(T) = N_1$.

Диференціальне рівняння, що визначає закон руху системи (4) згідно з (6) буде таким:

$$\frac{dx}{dt} = [A(t) - B(t)N_3^{-1}(t)B'(t)P(t)]x(t), \quad (8)$$

початкова умова $x(t_0) = x_0$.

При цьому мінімальне значення критерію якості (5), що відповідає керуванню (6), визначається співвідношенням

$$\min_u J(u) = J(u_0) = x_0' P(t_0) x_0.$$

Розв'язком рівняння Ріккаті (7) є невід'ємно визначена симетрична матриця $P(t)$, тобто матриця, що задовольняє умови $P'(t) = P(t)$, $a' P(t) a \geq 0$ для кожного $a \in \mathbb{R}^n$.

Щоб знайти розв'язок задачі (4)-(5), треба спочатку розв'язати в оберненому часі рівняння (7), запам'ятати значення матриці $P(t)$ у вузлах сітки, а потім розв'язати рівняння (8) вперед.

3.4. Регулювання стану системи. Оптимальна стабілізація керованого руху

Нехай рівняння руху системи має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu. \quad (9)$$

Розглянемо граничний випадок, коли кінець інтервалу $T \rightarrow \infty$. При цьому функціонал, котрий треба мінімізувати, буде мати вигляд

$$J_\infty = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T (x'(t) N_2 x(t) + u'(t) N_3 u(t)) dt,$$

де N_2 та N_3 – додатно визначені симетричні матриці.

Припустимо, що система (9) цілком керована, тобто

$$\text{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n. \quad (10)$$

Рівняння Ріккаті (7) тепер набуде вигляду

$$\frac{dP}{dt} = -A'P - PA + PBN_3^{-1}B'P - N_2,$$

гранична умова $P(T) = 0$.

Розв'язок рівняння Ріккаті, що задовольняє граничну умову $P(T) = 0$, позначимо через $P(t, 0, T)$. Як впливає із результатів американського математика Калмана, для стаціонарних цілком керованих систем цей розв'язок має при $T \rightarrow \infty$ границю

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P(t, 0, T) = \bar{P},$$

де $\bar{P}$ – стала симетрична додатно визначена матриця, що є розв'язком матричного алгебраїчного рівняння Ріккаті

$$A'\bar{P} + \bar{P}A - \bar{P}BN_3^{-1}B'\bar{P} + N_2 = 0. \quad (11)$$

Аналогічно формулі (6) оптимальне керування має вигляд

$$u(t) = -N_3^{-1}B'\bar{P}x. \quad (12)$$

Диференціальні рівняння руху оптимальної системи будуть такими:

$$\frac{dx}{dt} = [A - BN_3^{-1}B'\bar{P}]x,$$

причому оптимальна система асимптотично стійка, тобто

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Оптимальне значення функціонала

$$J_{\infty}(x, t) = \int_t^{\infty} (x'(\tau)N_2x(\tau) + u'(\tau)N_3u(\tau))d\tau$$

буде таким:

$$J_{\infty}^*(x, t) = x'(t)\bar{P}x(t).$$

Отже, ми одержали розв'язок задачі оптимальної стабілізації: знайти таке керування $u(t)$, що забезпечує асимптотичну стійкість нульового розв'язку системи (9) і доставляє мінімум функціоналу $J_{\infty}^*(x, t_0)$.

При виконанні умови (10) оптимальне стабілізуюче керування можна вибрати у вигляді (12), де матриця $\bar{P}$ є розв'язком матричного алгебраїчного рівняння (11).

Аналогічно можна знайти розв'язок задачі оптимальної стабілізації для неавтономних систем, коли матриці A , B , N_2 , N_3 залежать від часу. В цьому випадку оптимальне керування буде мати вигляд (12), а матриця $\bar{P}$ буде розв'язком матричного диференціального рівняння Ріккати.

4. Метод динамічного програмування

4.1. Принцип оптимальності Беллмана

Розглянемо керовану систему, що описується такою системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \quad (1)$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$,

$$f(x, u, t) = \begin{pmatrix} f_1(x, u, t) \\ \dots \\ f_n(x, u, t) \end{pmatrix}.$$

Нехай на вектор керувань накладено деякі обмеження $u \in \Omega$, де Ω – деяка область в просторі $\mathbb{R}^m$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ (обмеження характеризують обмеженість ресурсів).

Метою керування є мінімізація функціонала

$$Q = \int_0^T G(x(t), u(t), t)dt \rightarrow \min_{u \in \Omega},$$

де G – деяка обмежена неперервна функція змінних x, u, t , T – задана фіксована величина.

Метод динамічного програмування ґрунтується на сформульованому Р. Беллманом принципі оптимальності. Цей принцип справджується для систем, наступний рух яких повністю визначається станом цієї системи в даний момент часу. До таких систем відносяться, наприклад, системи, що описуються диференціальними рівняннями (1), дискретні системи та інші.

Принцип оптимальності. Оптимальна поведінка має ту властивість, що які б не були початковий стан і розв'язок в початковий момент, наступні розв'язки повинні утворювати оптимальну поведінку відносно стану, що одержується в результаті першого розв'язку.

Розглянемо оптимальну траєкторію системи (1), що проходить через задану точку $x(0)$. Значення $x(T)$ невідоме. Точка $x(t_1)$ розбиває розглядувану траєкторію на дві ділянки 1 і 2. Ділянці 2 відповідає функціонал

$$Q_2 = \int_{t_1}^T G(x(t), u(t), t) dt. \quad (2)$$

Принцип оптимальності стверджує, що ділянка 2 оптимальної траєкторії 1-2 сама по собі є оптимальною траєкторією системи (1), що виходить з точки $x(t_1)$ і дає мінімум функціоналу (2).

4.2. Застосування динамічного програмування до системи диференціальних рівнянь (1)

Розглянемо систему (1) з фіксованим моментом часу T і вільним кінцем траєкторії $x(T)$. Задано початковий стан системи

$$x(t)|_{t=0} = x(0).$$

Треба знайти керування $u = u(t)$, що задовольняє обмеження $u \in \Omega$ і доставляє мінімум функціоналу

$$Q = \int_0^T G(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \min_{u \in \Omega}.$$

Нехай знайдена оптимальна траєкторія системи (1), що проходить через точку $x(0)$. Мінімальне значення функціонала Q , що відповідає оптимальній траєкторії, позначимо через $S(x(0), 0)$.

Стан системи в момент часу t буде $x(t)$. Стан системи в момент часу $t' = t + \Delta t$ позначимо так:

$$x(t + \Delta t) = x(t') = x'.$$

Згідно з принципом оптимальності ділянка оптимальної траєкторії від точки $x(t)$ до точки $x(T)$ сама по собі є оптимальною траєкторією, що доставляє мінімум функціоналу

$$Q_t = \int_t^T G(x, u, s) ds.$$

Це мінімальне значення функціонала Q_t позначимо через $S(x(t), t) = S(x, t)$,

$$S(x, t) = \min_{u(s) \in \Omega} \int_t^T G(x(s), u(s), s) ds. \quad (3)$$

Інтеграл у правій частині формули (3) запишемо у вигляді $\int_t^{t'} \dots + \int_{t'}^T \dots$, тоді (3) набуде вигляду

$$S(x, t) = \min_{u(\tau) \in \Omega, t \leq \tau \leq t'} \left[\int_t^{t'} G(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \min_{u(s) \in \Omega, t' \leq s \leq T} \int_{t'}^T G(x(s), u(s), s) ds \right] =$$

$$= \min_{u(\tau) \in \Omega, t \leq \tau \leq t'} \left[\int_t^{t'} G(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + S(x', t') \right]. \quad (4)$$

Згідно з (1)

$$x' = x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{dx}{dt} \Delta t + o(\Delta t) = x(t) + f(x(t), u(t), t) \Delta t + o(\Delta t).$$

Припустимо, що функція S неперервна і має неперервні частинні похідні за всіма своїми аргументами. Тоді

$$\begin{aligned} S(x', t') &= S(x(t) + f(x(t), u(t), t) \Delta t + o(\Delta t), t + \Delta t) = S(x, t) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\partial S(x, t)}{\partial x_i} f_i(x, u, t) \Delta t + \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} \Delta t + o(\Delta t) = \\ &= S(x, t) + \langle \text{grad} S(x, t), f(x, u, t) \rangle \Delta t + \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} \Delta t + o(\Delta t), \end{aligned}$$

де $\text{grad} S(x, t) = \left(\frac{\partial S(x, t)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial S(x, t)}{\partial x_n} \right)^T$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярний добуток. Підставивши останній вираз в (4), одержимо

$$\begin{aligned} S(x, t) &= \min_{u(\tau) \in \Omega, t \leq \tau \leq t'} \left[\int_t^{t'} G(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + S(x, t) + \right. \\ &\left. + \langle \text{grad} S(x, t), f(x, u, t) \rangle \Delta t + \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} \Delta t + o(\Delta t) \right]. \quad (5) \end{aligned}$$

Функція $S(x, t)$ не залежить від u . Тому доданки $S(x, t)$ та $\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} \Delta t$ можна винести за знак $\min$ і переписати (5) так

$$\begin{aligned} -\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} &= \min_{u(\tau) \in \Omega, t \leq \tau \leq t'} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t'} G(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \right. \\ &\left. + \langle \text{grad} S(x, t), f(x, u, t) \rangle + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right]. \end{aligned}$$

Перейдемо до границі при $\Delta t \rightarrow 0$. Тоді

$$-\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = \min_{u \in \Omega} [G(x, u, t) + \langle \text{grad} S(x, t), f(x, u, t) \rangle]. \quad (6)$$

Рівняння (6) називається рівнянням Беллмана. Оскільки в результаті мінімізації відносно u виразу в квадратних дужках права частина рівняння (6) не буде містити u , то (6) буде нелінійним рівнянням першого порядку з частинними похідними типу рівнянь Гамільтона-Якобі.

Отже, рівняння Беллмана за умов гладкості $S(x, t)$ дає необхідні умови оптимальності.

Гранична умова для рівняння (6) буде такою: $S(x, T) = 0$.

Зауваження. Розглянемо систему (1) з критерієм

$$J(u) = \varphi(x(T)) + \int_{t_0}^T G(x(t), u(t), t) dt \rightarrow \min_{u \in \Omega}.$$

Тоді можна одержати таке ж рівняння Белмана (6) з граничною умовою $S(x, T) = \varphi(x)$.

4.3. Лінійно-квадратична задача

Застосуємо метод динамічного програмування до лінійної системи

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad x(t_0) = x_0, \quad (7)$$

з квадратичним критерієм

$$J(u) = x'(T)N_1x(T) + \int_{t_0}^T (x'(s)N_2(s)x(s) + u'(s)N_3(s)u(s))ds, \quad (8)$$

де матриці N_1 і $N_2(s)$ симетричні і невід'ємно визначені, а матриця $N_3(s)$ симетрична і додатно визначена.

Для задачі (7), (8) запишемо рівняння Белмана (6):

$$-\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = \min_{u \in \Omega} [x'N_2x + u'N_3u + \langle \text{grad}S(x, t), (Ax + Bu) \rangle] \quad (9)$$

з граничною умовою $S(x, T) = x'N_1x$. Щоб знайти $\min_{u \in \Omega}$ в квадратних дужках, продиференціюємо цей вираз відносно u і прирівняємо похідну до нуля. Тоді

$$B' \text{grad}S + 2N_3(t)u = 0, \quad u = -\frac{1}{2}N_3^{-1}(t)B' \text{grad}S. \quad (10)$$

Підставляючи (10) в (9), одержимо

$$-\frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = x'N_2x + (\text{grad}S)'Ax - \frac{1}{4}(\text{grad}S)'BN_3^{-1}B' \text{grad}S. \quad (11)$$

Будемо шукати розв'язок рівняння (11) у вигляді $S(x, t) = x'P(t)x$, тоді $\text{grad}S = 2Px$ і для $P(t)$ одержимо рівняння

$$\frac{dP(t)}{dt} + N_2 + A'P + PA - PBN_3^{-1}B'P = 0, \quad t_0 \leq t \leq T,$$

з умовою $P(T) = N_1$.

Отже, $u(t, x) = -N_3^{-1}(t)B'P(t)x$, а мінімальне значення критерію якості $J(u_0) = x_0'P(t_0)x_0 = S(x_0, t_0)$.

5. Фільтри Калмана-Б'юсі

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)W(t). \quad (1)$$

Тут x – n -вимірний вектор стану системи, $A(t)$ – $n \times n$ -матриця, $W(t)$ – r -вимірний векторний випадковий процес, $B(t)$ – $n \times r$ -матриця.

За допомогою спостережень визначається m -вимірний вектор z

$$z(t) = C(t)x(t) + V(t),$$

де $C(t)$ – $m \times n$ -матриця, а $V(t)$ – m -вимірний векторний випадковий процес.

Випадкові процеси $W(t)$ і $V(t)$ є гауссовими випадковими процесами типу білого шуму з нульовими середніми значеннями $M[W(t)] = 0$, $M[V(t)] = 0$. Їх кореляційні матриці мають вигляд

$$\begin{aligned} \text{cov}[W(t), W(\tau)] &= M[W(t)W'(\tau)] = Q(t)\delta(t - \tau), \quad \text{cov}[V(t), V(\tau)] = \\ &= M[V(t)V'(\tau)] = R(t)\delta(t - \tau), \quad \text{cov}[W(t), V(\tau)] = M[W(t)V'(\tau)] = 0, \end{aligned}$$

де $\delta(t)$ – дельта-функція Дірака, $Q(t)$ – симетрична додатно визначена $r \times r$ -матриця, $R(t)$ – симетрична додатно визначена $m \times m$ -матриця.

Ми припускаємо, що $x(t_0)$ – n -вимірний гауссовий випадковий вектор з нульовим середнім значенням $M[x(t_0)] = 0$ і кореляційною матрицею

$$M[x(t_0)x'(t_0)] = \Sigma_0, \quad (2)$$

причому невід'ємно визначена матриця Σ_0 відома. Крім того, припускається, що $W(t)$, $V(t)$ і $x(t_0)$ незалежні.

Оскільки $M[W(t)] = 0$ і $M[x(t_0)] = 0$, то $M[x(t)] = 0$ для всіх t .

Будемо шукати фільтр, що описується диференціальним рівнянням

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = F(t)\bar{x}(t) + G(t)z(t), \quad \bar{x}(t_0) = 0, \quad (3)$$

де $\bar{x}(t)$ – оцінка стану системи $x(t)$. Різницю $e(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ будемо називати похибкою фільтра. Параметри фільтра (3), тобто функції $F(t)$ і $G(t)$ треба вибрати так, щоб доставити мінімум функціоналу $J(t) = M[e'(t)e(t)]$.

Через $\Sigma(t)$ позначимо кореляційну матрицю похибки фільтра $\Sigma(t) = M[e(t)e'(t)]$. Оскільки $\bar{x}(t_0) = 0$, то $\Sigma(t_0) = M[x(t_0)x'(t_0)] = \Sigma_0$. Матриця $\Sigma(t)$ розмірності $n \times n$ задовольняє рівняння

$$\frac{d\Sigma}{dt} = A(t)\Sigma + \Sigma A'(t) - \Sigma C'(t)R^{-1}(t)C(t)\Sigma + B(t)Q(t)B'(t) \quad (4)$$

з початковою умовою $\Sigma(t_0) = \Sigma_0$.

Рівняння (4) є матричним диференціальним рівнянням Ріккати.

Диференціальне рівняння оптимального фільтра можна записати у вигляді

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = [A(t) - \Sigma C'(t)R^{-1}(t)C(t)]\bar{x}(t) + \Sigma C'(t)R^{-1}(t)z(t), \quad (5)$$

$\bar{x}(t_0) = 0$.

Для стаціонарних систем справджується наступна теорема.

Теорема. Нехай A, B, C, Q і R – сталі матриці, причому матриці Q і R додатно визначені. Припустимо, що стаціонарна система (1) цілком керована і цілком спостережувана, тобто виконуються умови

$$\text{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n, \quad \text{rank}(C', A'C', \dots, (A')^{n-1}C') = n.$$

Тоді

1. Розв'язок $\Sigma(t, 0, t_0)$ рівняння Ріккати

$$\frac{d\Sigma}{dt} = A\Sigma + \Sigma A' - \Sigma C' R^{-1} C \Sigma + B Q B' \quad (6)$$

має при $t_0 \rightarrow -\infty$ границю $\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \Sigma(t, 0, t_0) = \bar{\Sigma}$, котра існує для всіх t , причому $\bar{\Sigma}$ є стала симетрична матриця, що є розв'язком матричного алгебраїчного рівняння Ріккати

$$A\bar{\Sigma} + \bar{\Sigma}A' - \bar{\Sigma}C'R^{-1}C\bar{\Sigma} + BQB' = 0. \quad (7)$$

2. Кожний розв'язок $\Sigma(t, \Sigma_0, t_0)$ рівняння (6), що задовольняє початкову умову $\Sigma(t_0) = \Sigma_0$, де матриця Σ_0 невід'ємно визначена, прямує рівномірно до $\bar{\Sigma}$ при $t \rightarrow \infty$.

6. Методи розв'язування матричного алгебраїчного рівняння Ляпунова

6.1. Розв'язування матричного алгебраїчного рівняння Ляпунова шляхом зведення до векторної системи алгебраїчних рівнянь

Будемо розв'язувати рівняння

$$F'X + XF = -Q, \quad (1)$$

де F, Q – задані матриці, матриця $Q = (q_{ij})$ симетрична і додатно визначена, $X = (x_{ij})$, $X = X'$ – шукана матриця, шляхом зведення матричного рівняння Ляпунова до векторної системи алгебраїчних рівнянь. Будемо використовувати кронекеровий добуток матриць. Кронекеровий добуток $n \times n$ матриць $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ – це матриця розмірності $n^2 \times n^2$, що позначається символом $A \otimes B$ і має вигляд

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix}.$$

Нехай зберігається порядок обходу матриць по рядках. Позначимо

$$\bar{X} = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn})',$$

$$\bar{Q} = (q_{11}, q_{12}, \dots, q_{1n}, \dots, q_{n1}, q_{n2}, \dots, q_{nn})',$$

тоді одержимо систему

$$\bar{W} \cdot \bar{X} = -\bar{Q},$$

де $\bar{W} = F' \otimes E + E \otimes F'$. Недолік методу – потрібно багато пам'яті.

6.2. Розв'язування матричного алгебраїчного рівняння Ляпунова методом матричної сигнум-функції

Якщо власні значення матриці A не лежать на уявній осі, то можна визначити послідовність

$$X_{k+1} = \frac{1}{2}(X_k + X_k^{-1}), \quad X_0 = A, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Послідовність X_k збігається, а її границя називається сигнум-функцією від матриці A і позначається $\text{sgn}A$. Якщо матриця A стійка, тобто всі її власні значення мають від'ємні дійсні частини, то $\text{sgn}A = -E$.

Нехай треба розв'язати рівняння Ляпунова

$$A'P + PA = C, \quad (2)$$

де всі власні значення матриці A мають від'ємні дійсні частини.

Домноживши рівняння (2) зліва на $(A')^{-1}$, а справа на A^{-1} , одержимо

$$PA^{-1} + (A')^{-1}P = (A')^{-1}CA^{-1}.$$

Звідси і із (2) випливає

$$\frac{1}{2}(A' + (A')^{-1})P + \frac{1}{2}P(A + A^{-1}) = \frac{1}{2}(C + (A')^{-1}CA^{-1}).$$

Одержимо такий метод розв'язування рівняння (2). Підставимо $A_0 = A$ і побудуємо

$$A_{k+1} = \frac{1}{2}(A_k + A_k^{-1}), \quad C_{k+1} = \frac{1}{2}(C_k + (A'_k)^{-1}C_kA_k^{-1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Тоді

$$A'_{k+1}P + PA_{k+1} = C_{k+1}. \quad (3)$$

Оскільки $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = -E$, то ліва частина рівняння (3) прямує до $-2P$, тому

$$P = -\frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} C_k.$$

Збіжність цього методу залежить від близькості спектру матриці A до уявної осі. Чим ближче спектр до уявної осі, тим повільніша збіжність.

7. Розв'язування матричного алгебраїчного рівняння Ріккати методом матричної сигнум-функції

Для розв'язування рівняння

$$A'P + PA - PBN_3^{-1}B'P + N_2 = 0 \quad (1)$$

розглянемо матрицю

$$Z = \begin{pmatrix} A & -BN_3^{-1}B' \\ -N_2 & -A' \end{pmatrix}.$$

Матриця Z розмірності $2n$ є гамільтоновою. Тому вона має n власних значень λ в лівій півплощині, їм відповідає інваріантний підпростір L_- , а також n власних значень λ в правій півплощині – їм відповідає L_+ . Справджується рівність

$$(sgnZ)x = \begin{cases} x, & x \in L_+, \\ -x, & x \in L_-. \end{cases}$$

Нехай $d(\lambda) = \det(\lambda E - Z)$ – характеристичний многочлен матриці Z . Факторизуємо цей многочлен, тобто подамо його у вигляді добутку поліномів $d(\lambda) = \varphi_-(\lambda)\varphi_+(\lambda)$ так, що нулі полінома $\varphi_-(\lambda)$ лежать в лівій півплощині, а $\varphi_+(\lambda)$ – в правій. Тоді шуканий розв’язок рівняння (1) визначається співвідношенням Басса

$$\varphi_-(Z) \begin{bmatrix} E \\ P \end{bmatrix} = 0. \quad (2)$$

Матриця $sgnZ$ має ті ж власні вектори, що й матриця Z , а власні значення $sgnZ$ рівні ± 1 . Характеристичний поліном матриці $sgnZ$ має вигляд

$$\det(\lambda E - sgnZ) = (\lambda + 1)^n(\lambda - 1)^n.$$

Із співвідношенням Басса (2) одержимо

$$(E + sgnZ)^n \begin{bmatrix} E \\ P \end{bmatrix} = 0,$$

або

$$(E + sgnZ) \begin{bmatrix} E \\ P \end{bmatrix} = 0.$$

Звідси знаходимо

$$WP = -M, \quad (3)$$

де

$$W = \begin{bmatrix} Z_{12} \\ Z_{22} + E \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} Z_{11} + E \\ Z_{21} \end{bmatrix}, \quad sgnZ = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}.$$

Розв’язок рівняння (3) має вигляд

$$P = -W^+M, \quad (4)$$

де W^+ – псевдообернена матриця до матриці W .

Отже, алгоритм розв’язування рівняння Ріккаті (1) зводиться до виконання таких кроків.

1. Утворюємо матрицю Z і наближено знаходимо $sgnZ \approx X_n$, за формулою

$$X_{n+1} = \frac{1}{2}(X_n + X_n^{-1}), \quad X_0 = Z, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Обчислення зупиняємо, якщо $\|X_n - X_{n-1}\| < \varepsilon$.

2. Виділяємо блоки матриці $sgnZ$ і знаходимо матриці W і M . За формулою (4) знаходимо розв’язок P рівняння Ріккаті. Для знаходження W^+ можна скористатися формулою

$$W^+ = (W'W)^{-1}W'.$$

8. Розв'язування матричного алгебраїчного рівняння Ріккати для неперервного випадку методом Ньютона-Рафсона

Розглянемо лінійну стаціонарну систему на безмежному інтервалі, що має вигляд

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad x(0) = x_0, \quad (1)$$

з критерієм якості

$$J(u) = \int_0^\infty (x'(s)N_2x(s) + u'(s)N_3u(s))ds, \quad (2)$$

де A , B – матриці розмірностей $n \times n$ та $n \times m$ відповідно, N_2 і N_3 – симетричні і додатно визначені матриці відповідних розмірностей. Оптимальне стабілізуюче керування для задачі (7), (8) при якому система (7) є асимптотично стійкою, визначається формулою

$$u(t) = -N_3^{-1}B'Px(t) = -Kx(t). \quad (3)$$

Симетрична і невід'ємно визначена матриця P у формулі (3) задовольняє матричне алгебраїчне рівняння Ріккати

$$A'P + PA - PBN_3^{-1}B'P + N_2 = 0. \quad (4)$$

Розглянемо один із алгоритмів розв'язування рівняння (4) – метод зведення до послідовності рівнянь Ляпунова. Цей підхід є одним із методів Ньютона розв'язування нелінійних рівнянь за допомогою послідовного розв'язування лінійних рівнянь.

Він реалізується наступним чином. Спочатку вибирається матриця L_0 так, щоб спектр матриці $(A + BL_0)$ лежав у лівій півплощині. Далі розв'язується послідовність рівнянь Ляпунова, що має вигляд

$$(A' + L_j'B')P_j + P_j(A + BL_j) + N_2 + L_j'N_3L_j = 0,$$

$$L_j = -N_3^{-1}B'P_{j-1}, \quad j \geq 1.$$

Можна показати, що

а) всі матриці $(A + BL_j)$ стійкі, якщо матриця $(A + BL_0)$ стійка;

б) $P_{j+1} \leq P_j$, тобто матриця $(P_j - P_{j+1})$ невід'ємно визначена;

в) $\lim_{j \rightarrow \infty} P_j = P$.

Зупинимось на питанні вибору матриці L_0 . Нехай система (1) керована, тобто $\text{rang}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$. Тоді матриця $L_0 = -B'Z^{-1}$ стабілізує систему (1), якщо додатно визначена симетрична матриця Z задовольняє матричне рівняння Ляпунова

$$(A + \beta E)Z + Z(A' + \beta E) = 2BB',$$

де число $\beta > \|A\|$ ($\|A\|$ – довільна норма матриці A). Якщо матриця A асимптотично стійка, то доцільно вибрати $L_0 = 0$. Така процедура вибору L_0 фактично зводить процес розв'язування рівняння (4) до розв'язування послідовності рівнянь Ляпунова

$$F'X + XF = -Q,$$

де F , Q – задані матриці, матриця Q симетрична і додатно визначена, $X = X'$ – шукана матриця.

Завдання до лабораторної роботи № 2

Варіант 1

Задана система:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккаті для задачі оптимальної стабілізації

$$\int_0^{\infty} (x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t) + u^2(t)) dt \rightarrow \min$$

методом Ньютона-Рафсона. Рівняння Ляпунова зводити до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Варіант 2

Задана система:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккаті для задачі оптимальної стабілізації

$$\int_0^{\infty} (x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t) + u^2(t)) dt \rightarrow \min$$

методом Ньютона-Рафсона. Рівняння Ляпунова розв'язувати методом матричної сигнум-функції.

Варіант 3

Задана система:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Методом матричної сигнум-функції розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккаті для задачі оптимальної стабілізації

$$\int_0^{\infty} (x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t) + u^2(t)) dt \rightarrow \min.$$

Варіант 4

Задана система:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати для задачі оптимальної стабілізації

$$\int_0^{\infty} (x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)) dt \rightarrow \min$$

методом Ньютона-Рафсона. Рівняння Ляпунова зводити до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Варіант 5

Задана система:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати для задачі оптимальної стабілізації

$$\int_0^{\infty} (x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)) dt \rightarrow \min$$

методом Ньютона-Рафсона. Рівняння Ляпунова розв'язувати методом матричної сигнум-функції.

Варіант 6

Задана система:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Методом матричної сигнум-функції розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати для задачі оптимальної стабілізації

$$\int_0^{\infty} (x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)) dt \rightarrow \min.$$

Варіант 7

Задана система:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати для задачі оптимальної стабілізації

$$\int_0^{\infty} (x_1^2(t) + x_2^2(t) + \frac{1}{4}u^2(t))dt \rightarrow \min.$$

методом Ньютона-Рафсона. Рівняння Ляпунова розв'язувати методом матричної сигнум-функції.

Варіант 8

Для побудови фільтра Калмана розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати:

$$A\Sigma + \Sigma A' - \Sigma C'R^{-1}C\Sigma + BQB' = 0, \quad (1)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,1 \end{pmatrix}, C = (1, 0), Q = 1, R = 0,005.$$

Для розв'язування рівняння (1) використати метод Ньютона-Рафсона. Рівняння Ляпунова зводити до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Варіант 9

Для побудови фільтра Калмана розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати:

$$A\Sigma + \Sigma A' - \Sigma C'R^{-1}C\Sigma + BQB' = 0, \quad (1)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,1 \end{pmatrix}, C = (1, 0), Q = 1, R = 0,005.$$

Для розв'язування рівняння (1) використати метод Ньютона-Рафсона. Рівняння Ляпунова розв'язувати методом матричної сигнум-функції.

Варіант 10

Для побудови фільтра Калмана розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати:

$$A\Sigma + \Sigma A' - \Sigma C'R^{-1}C\Sigma + BQB' = 0, \quad (1)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,1 \end{pmatrix}, C = (1, 0), Q = 1, R = 0,005.$$

Для розв'язування рівняння (1) використати метод матричної сигнум-функції.

Варіант 11

Для побудови фільтра Калмана методом Рунге-Кутта розв'язати матричне диференціальне рівняння Ріккати:

$$\frac{d\Sigma}{dt} = A\Sigma + \Sigma A' - \Sigma C' R^{-1} C \Sigma + B Q B', \quad (1)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,1 \end{pmatrix}, C = (1, 0), Q = 1, R = 0,005.$$

Рівняння (1) розв'язувати на відрізку $[0; 2]$ з початковою умовою

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Побудувати графіки компонент матричного розв'язку на комп'ютері.

Варіант 12

Для побудови фільтра Калмана розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати:

$$A\Sigma + \Sigma A' - \Sigma C' R^{-1} C \Sigma + B Q B' = 0, \quad (1)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, R = \frac{1}{2}, Q = 1.$$

Для розв'язування рівняння (1) використати метод Ньютона-Рафсона. Рівняння Ляпунова зводити до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Варіант 13

Для побудови фільтра Калмана розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати:

$$A\Sigma + \Sigma A' - \Sigma C' R^{-1} C \Sigma + B Q B' = 0, \quad (1)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, R = \frac{1}{2}, Q = 1.$$

Для розв'язування рівняння (1) використати метод Ньютона-Рафсона. Рівняння Ляпунова розв'язувати методом матричної сигнум-функції.

Варіант 14

Для побудови фільтра Калмана розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати:

$$A\Sigma + \Sigma A' - \Sigma C' R^{-1} C \Sigma + B Q B' = 0, \quad (1)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, R = \frac{1}{2}, Q = 1.$$

Для розв'язування рівняння (1) використати метод матричної сигнум-функції.

Варіант 15

Задана система:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати для задачі оптимальної стабілізації

$$\int_0^{\infty} (x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)) dt \rightarrow \min$$

методом Ньютона-Рафсона. Рівняння Ляпунова зводити до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Варіант 16

Задана система:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати для задачі оптимальної стабілізації

$$\int_0^{\infty} (x_1^2(t) + 2x_2^2(t) + u^2(t)) dt \rightarrow \min$$

методом Ньютона-Рафсона. Рівняння Ляпунова розв'язувати методом матричної сигнум-функції.

Варіант 17

Задана система:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Методом матричної сигнум-функції розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати для задачі оптимальної стабілізації

$$\int_0^{\infty} (x_1^2(t) + x_2^2(t) + 2u^2(t)) dt \rightarrow \min.$$

Варіант 18

Задана система:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Методом Рунге-Кутта розв'язати матричне диференціальне рівняння Ріккати для задачі оптимального керування з функціоналом

$$\int_0^2 (x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)) dt \rightarrow \min.$$

Побудувати графіки компонент матричного розв'язку на комп'ютері.

Варіант 19

Задана система:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Методом матричної сигнум-функції розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати для задачі оптимальної стабілізації

$$\int_0^\infty (x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t) + \frac{1}{2}u^2(t)) dt \rightarrow \min.$$

Варіант 20

Задана система:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Методом матричної сигнум-функції розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати для задачі оптимальної стабілізації

$$\int_0^\infty (x_1^2(t) + x_2^2(t) + 4u^2(t)) dt \rightarrow \min.$$

Варіант 21

Для побудови фільтра Калмана розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати:

$$A\Sigma + \Sigma A' - \Sigma C'R^{-1}C\Sigma + BQB' = 0, \quad (1)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,1 \end{pmatrix}, C = (1, 0), Q = 1, R = 0,004.$$

Для розв'язування рівняння (1) використати метод матричної сигнум-функції.

Варіант 22

Для побудови фільтра Калмана розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати:

$$A\Sigma + \Sigma A' - \Sigma C'R^{-1}C\Sigma + BQB' = 0, \quad (1)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, R = \frac{1}{2}, Q = 4.$$

Для розв'язування рівняння (1) використати метод матричної сигнум-функції.

Варіант 23

Задана система:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Методом матричної сигнум-функції розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати для задачі оптимальної стабілізації

$$\int_0^\infty (x_1^2(t) + x_2^2(t) + 9u^2(t))dt \rightarrow \min.$$

Варіант 24

Задана система:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Методом матричної сигнум-функції розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати для задачі оптимальної стабілізації

$$\int_0^\infty (x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t) + 9u^2(t))dt \rightarrow \min.$$

Варіант 25

Задана система:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^3, u \in \mathbb{R},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати для задачі оптимальної стабілізації

$$\int_0^{\infty} (x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t) + \frac{1}{2}u^2(t))dt \rightarrow \min$$

методом Ньютона-Рафсона. Рівняння Ляпунова зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Варіант 26

Для побудови фільтра Калмана розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати:

$$A\Sigma + \Sigma A' - \Sigma C'R^{-1}C\Sigma + BQB' = 0, \quad (1)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,1 \end{pmatrix}, C = (1, 0), Q = 1, R = 0,01.$$

Для розв'язування рівняння (1) використати метод матричної сигнум-функції.

Варіант 27

Для побудови фільтра Калмана розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати:

$$A\Sigma + \Sigma A' - \Sigma C'R^{-1}C\Sigma + BQB' = 0, \quad (1)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, R = \frac{1}{2}, Q = 2.$$

Розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати (1) методом Ньютона-Рафсона. Рівняння Ляпунова зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Варіант 28

Для побудови фільтра Калмана розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати:

$$A\Sigma + \Sigma A' - \Sigma C'R^{-1}C\Sigma + BQB' = 0, \quad (1)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, R = \frac{1}{2}, Q = 2.$$

Для розв'язування рівняння (1) використати метод матричної сигнум-функції.

Варіант 29

Для побудови фільтра Калмана розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати:

$$A\Sigma + \Sigma A' - \Sigma C'R^{-1}C\Sigma + BQB' = 0, \quad (1)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, R = \frac{1}{2}, Q = 2.$$

Розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати (1) методом Ньютона-Рафсона. Рівняння Ляпунова розв'язувати методом матричної сигнум-функції.

Варіант 30

Задана система:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати для задачі оптимальної стабілізації

$$\int_0^\infty (x_1^2(t) + x_2^2(t) + \frac{1}{2}u^2(t))dt \rightarrow \min$$

методом матричної сигнум-функції.

Варіант 31

Задана система:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати для задачі оптимальної стабілізації

$$\int_0^\infty (x_1^2(t) + x_2^2(t) + \frac{1}{2}u^2(t))dt \rightarrow \min$$

методом Ньютона-Рафсона. Рівняння Ляпунова зводити до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Варіант 32

Задана система:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати для задачі оптимальної стабілізації

$$\int_0^{\infty} (x_1^2(t) + x_2^2(t) + \frac{1}{4}u^2(t))dt \rightarrow \min$$

методом матричної сигнум-функції.

Варіант 33

Задана система:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати для задачі оптимальної стабілізації

$$\int_0^{\infty} (x_1^2(t) + x_2^2(t) + \frac{1}{3}u^2(t))dt \rightarrow \min$$

методом матричної сигнум-функції.

Варіант 34

Задана система:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати для задачі оптимальної стабілізації

$$\int_0^{\infty} (x_1^2(t) + x_2^2(t) + \frac{1}{5}u^2(t))dt \rightarrow \min$$

методом матричної сигнум-функції.

Варіант 35

Задана система:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Методом Рунге-Кутта розв'язати матричне диференціальне рівняння Ріккати для задачі оптимального керування з функціоналом

$$\int_0^2 (x_1^2(t) + x_2^2(t) + \frac{1}{2}u^2(t))dt \rightarrow \min.$$

Побудувати графіки компонент матричного розв'язку на комп'ютері.

Варіант 36

Для побудови фільтра Калмана розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати:

$$A\Sigma + \Sigma A' - \Sigma C'R^{-1}C\Sigma + BQB' = 0, \quad (1)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, R = \frac{1}{3}, Q = 3.$$

Розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати (1) методом матричної сигнум-функції.

Варіант 37

Задана система:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати для задачі оптимальної стабілізації

$$\int_0^\infty (x_1^2(t) + x_2^2(t) + \frac{1}{6}u^2(t))dt \rightarrow \min$$

методом матричної сигнум-функції.

Варіант 38

Задана система:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R},$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати матричне алгебраїчне рівняння Ріккати для задачі оптимальної стабілізації

$$\int_0^{\infty} (x_1^2(t) + x_2^2(t) + \frac{1}{7}u^2(t))dt \rightarrow \min$$

методом матричної сигнум-функції.

Контрольні запитання до лабораторної роботи № 2

1. Знаходження рангу матриці.
2. Сингулярні числа і сингулярний розклад прямокутної матриці.
3. Псевдообернена матриця.
4. Що таке метод динамічного програмування?
5. Які основні ідеї лежать в основі динамічного програмування?
6. У чому полягає принцип оптимальності Белмана?
7. Які типові проблеми розв'язуються за допомогою методу динамічного програмування?
8. Застосування динамічного програмування до системи диференціальних рівнянь.
9. Принцип максимуму Понтрягіна.
10. Оптимальне керування лінійними системами з квадратичним функціоналом (лінійно-квадратична задача).
11. Оптимальна стабілізація керованого руху. Побудова оптимального регулятора.
12. Оптимальні фільтри Калмана-Б'юсі.
13. Розв'язування матричного алгебраїчного рівняння Ляпунова шляхом зведення до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.
14. Розв'язування матричного алгебраїчного рівняння Ляпунова методом матричної сигнум-функції.
15. Розв'язування матричного алгебраїчного рівняння Ріккати методом матричної сигнум-функції.
16. Розв'язування матричного алгебраїчного рівняння Ріккати методом Ньютона-Рафсона.
17. Керованість лінійних дискретних систем.

Література

1. Клевчук І.І., Гритчук М.В. Побудова областей стійкості лінійних автономних диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями // Буковинський математичний журнал. - 2022. - 10, № 1. - С. 61-70.
2. Клевчук І.І. Квазіоптимальна стабілізація лінійних керованих сингулярно збурених систем із запізненням // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 269. Математика. - Чернівці: Рута, 2005. - С. 56 - 59.
3. Сучасна теорія управління. Частина 2. Прикладні аспекти сучасної теорії управління [Електронний ресурс] : підручник / Ю. М. Ковриго, О. В. Степанець, Т. Г. Баган, О. С. Бунке ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. - Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. - 155 с.
4. Методи сучасної теорії управління: підручник / А.П. Ладанюк, Н.М. Луцька, В.Д. Кишенько, Л.О. Власенко, В.В. Іващук - Київ: Ліра-К, 2018. - 368 с.
5. Новицький І. В., Ус С.А. Сучасна теорія керування: навч. посіб.; Мво освіти і науки України, Держ. вищ. навч. закл. "Нац. гірн. ун-т". Дніпро : НГУ, 2017. - 262 с.
6. Теорія автоматичного управління /Укл.: Николайчук Я.М., Возна Н.Я. - Тернопіль: Гал-друк, 2015. - 59 с.
7. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування. - К.: Либідь, 2007 - 656с.
8. Харабет О. М. Вивчення класичної теорії автоматичного управління за допомогою сучасного персонального комп'ютера - Одеса: Бахва, 2014. - 187 с.
9. Теорія керування для інформатиків : підручник / Ю. В. Крак, А. В. Шатирко. - К.: ВПЦ "Київський університет 2015. - 175 с.
10. Гоголюк П.Ф., Гречин Т.М. Теорія автоматичного керування: Навч. посібник. - Львів: Видавництво Національного університету "Львівська політехніка 2009. - 280 с.
11. Теорія керування: навч. посіб. / В.Є. Бахрушин, Т.Ю. Огаренко. - Запоріжжя: Класичний приватний університет, 2014. - 224 с.