

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

Дорошенко І.В., Івасюк Г.П., Фратавчан Т.М.

Вища математика
Частина I

Навчальний посібник

Чернівці
Чернівецький національний університет
2026

УДК 51(075.8)

В 558

Друкується за ухвалою Вченої Ради факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету

імені Юрія Федьковича,
протокол №6 від 28.01.2026 р.

Рецензенти: *Н.П. Процах*, доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри обчислювальної математики та програмування Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету «Львівська політехніка».

І.П.Мединський, доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри прикладної математики, Інституту прикладної математики та фундаментальних наук, Національного університету «Львівська політехніка»

В 558 Вища математика. Частина 1. Навчальний посібник/ Укл.: Дорошенко І.В., Івасюк Г.П., Фратавчан Т.М. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2026. – 181 с.

Посібник містить теоретичний матеріал, приклади розв’язування типових задач, підбір завдань та тестів для практичних занять з вищої математики. Для студентів спеціальностей факультету архітектури, будівництва та декоративно прикладного мистецтва та економічного факультету.

УДК 51(075.8)

© Дорошенко І. В., Івасюк Г.П., Фратавчан Т.М. 2026

© Чернівецький національний університет, 2026

Зміст

Передмова	5
Вступ	7
Розділ 1. Основні поняття	10
1.1. Поняття множини та основні операції з множинами	10
1.2. Основи математичної логіки	12
Контрольні питання	15
Тести для самоконтролю	15
Практичні завдання до розділу 1	17
Відповіді	20
Розділ 2. Лінійна алгебра	21
2.1. Матриці	21
Контрольні питання	27
Тести для самоконтролю	27
2.2. Визначники	30
Контрольні питання	38
Тести для самоконтролю	39
2.3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	43
2.4. Ранг матриці. Дослідження на сумісність СЛАР	58
2.5. Власні значення і власні вектори матриці	66
Контрольні питання	68
Тести для самоконтролю	69
2.6. Практичне застосування лінійної алгебри	73
Практичні завдання до розділу 2	90
Відповіді	104
Розділ 3. Векторна алгебра та аналітична геометрія	108
3.1. Операції над векторами	108

Контрольні питання	117
Тести для самоконтролю	117
3.2. Пряма на площині	121
Контрольні питання	127
Тести для самоконтролю	127
3.3. Площина та пряма у просторі	130
Контрольні питання	143
Тести для самоконтролю	144
3.3. Криві другого порядку	148
Контрольні питання	161
Тести для самоконтролю	162
Практичні завдання до розділу 3	166
Відповіді	172
Домашня контрольна робота	173
Література	179

Передмова

Навчальний посібник підготовлено авторами на основі багаторічного досвіду викладання курсу вищої математики студентам різних спеціальностей у Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича. Матеріали посібника відображають сучасні вимоги до математичної підготовки майбутніх інженерів-будівельників, економістів та орієнтовані на формування навичок застосування математичного апарату в інженерних та прикладних задачах.

Посібник складається з трьох логічно пов'язаних розділів. У першому розділі викладено поняття множини та основні операції з множинами та основи математичної логіки. Другий розділ присвячений елементам лінійної алгебри, які широко застосовуються при аналізі інженерних систем, розрахунку конструкцій та опрацюванні експериментальних даних. У третьому розділі розглядаються основи векторної алгебри та аналітичної геометрії, необхідні для опису геометричних об'єктів, просторових форм та інженерних конструкцій.

Кожен розділ містить добірку типових вправ, прикладних задач та тестових завдань різного рівня складності, що дозволяє ефективно використовувати посібник під час практичних занять, а також для організації самостійної роботи студентів. Відповіді до вправ подано наприкінці кожного розділу посібника, що сприяє самоконтролю та перевірці засвоєння матеріалу.

Структура навчального посібника є чітко впорядкованою: розділи мають одинарну нумерацію, підрозділи - подвійну, де перша цифра

відповідає номеру розділу, а друга вказує на відповідний підрозділ. Такий підхід полегшує навігацію матеріалом і зручний для використання в навчальному процесі.

У посібнику наведено велику кількість прикладів і задач, які ілюструють теоретичні положення та демонструють їх застосування в інженерній практиці. Теоретичні питання подано стисло й у доступній формі.

На завершення автори вважають за необхідне відзначити основні першоджерела, використані впродовж багаторічної педагогічної діяльності, які суттєво вплинули на зміст і стиль викладу матеріалу. Зокрема, важливу роль відіграли підручники: В.П. Лавренчук, Т.І. Готинчан, В.С. Дронь, О.С. Кондур «Вища математика. Курс лекцій у трьох частинах» [8, 9].

Вступ

Процес прийняття рішень у сфері бізнесу та адміністрування, будівництва та цивільної інженерії, що охоплює управління проєктами і виробничими процесами, планування будівельних робіт, раціональний розподіл матеріальних, фінансових і трудових ресурсів, вибір оптимальних інженерних рішень, аналіз техніко-економічних показників, прогнозування та календарне планування, на сучасному етапі неможливий без попереднього моделювання реальних процесів або їх окремих етапів. У зв'язку з цим уміння будувати й аналізувати математичні та комп'ютерні моделі є однією з ключових професійних компетентностей майбутнього інженера-будівельника.

Водночас аналогічні вимоги висуваються і до фахівців з менеджменту, діяльність яких пов'язана з управлінням проєктами, організацією виробничо-господарських процесів, стратегічним і оперативним плануванням, оцінюванням ефективності управлінських рішень, аналізом ризиків та оптимізацією використання ресурсів. У сучасних умовах менеджер повинен володіти інструментарієм кількісного аналізу, методами економіко-математичного та комп'ютерного моделювання для обґрунтування управлінських рішень у складних і динамічних системах.

Динамічність умов будівельної галузі та управлінського середовища, зростання вимог до якості, безпеки, енергоефективності об'єктів і результативності бізнес-процесів, а також жорстка конкуренція на ринку будівельних і управлінських послуг зумовлюють необхідність підготовки фахівців, здатних швидко адаптуватися до змін і приймати обґрунтовані техніко-економічні та управлінські

рішення. Це потребує опанування сучасних методів розв'язування прикладних задач, заснованих на системному аналізі, математичному моделюванні, чисельних методах і широкому використанні комп'ютерних технологій.

Розвиток системи вищої освіти орієнтований на формування системного мислення майбутнього фахівця - як інженера, так і менеджера - здатного комплексно аналізувати технічні, економічні, фінансові та організаційні аспекти професійної діяльності. Такі компетентності можуть бути сформовані лише на основі інтеграції фундаментальних математичних дисциплін із професійно орієнтованими інженерними та управлінськими курсами з урахуванням сучасних світових тенденцій розвитку науки, техніки та менеджменту.

Математична підготовка у формуванні фахівців будівельного та управлінського профілю відіграє надзвичайно важливу роль, оскільки саме вона є загальнонауковою основою для опанування спеціальних дисциплін, пов'язаних із розрахунком конструкцій, аналізом напружено-деформованого стану, оптимізацією проєктних рішень і будівельних процесів, а також із плануванням, прогнозуванням, фінансово-економічним аналізом та оцінюванням ефективності управління. Тому проблема професійної математичної підготовки майбутніх інженерів і менеджерів є актуальною та відповідає сучасним потребам економіки й будівельної галузі.

Ефективність засвоєння студентами математичних знань значною мірою залежить від створення гнучкого та сучасного навчально-методичного комплексу, здатного постійно оновлюватися, оперативно

реагувати на зміни зовнішнього середовища та адаптуватися до потреб як будівельної практики, так і управлінської діяльності. Це зумовлює необхідність переосмислення традиційних підходів до підготовки фахівців і посилення практико-орієнтованої складової навчання.

На сучасному етапі розвитку вищої освіти актуальною є проблема професійної підготовки студентів галузей знань за спеціальностями «Будівництво та цивільна інженерія» та «Менеджмент», яку слід розглядати як невід'ємну складову фундаментальної інженерної та управлінської освіти. Метою такої підготовки є не лише формування здатності до неперервного професійного розвитку та практичного застосування математичних методів у професійній діяльності, а й виховання високого рівня математичної культури як основи інженерного та управлінського мислення.

Розділ 1. Основні поняття

Метою вступного розділу є повторення базових понять, що стосуються **множин** і **висловлювань**, які надалі використовуватимуться при введенні нових термінів у наступних розділах. З цими поняттями ви вже мали змогу ознайомитися ще під час навчання в середній школі.

1.1. Поняття множини та основні операції з множинами

Множина - це сукупність об'єктів, об'єднаних певною спільною властивістю. Об'єкти, що входять до множини, називають **елементами множини**. Множини будемо позначати **великими літерами**, а їх елементи – **малими літерами**.

Запис $x \in M$ ($x \notin M$) читається як: *x належить (або не належить) множині M*.

Множину, яка **не містить жодного елемента**, позначають символом $\emptyset$ і називають **порожньою множиною**.

Множина зі **скінченною кількістю елементів** називається **скінченною**.

Множина з **нескінченною кількістю елементів** називається **нескінченною**.

Множину, елементами якої є числа, називають **числовою множиною**. Основні числові множини:

- $\mathbb{N}$ - множина всіх натуральних чисел;
- $\mathbb{Z}$ - множина цілих чисел (отримується з $\mathbb{N}$ додаванням нуля та від'ємних чисел);
- $\mathbb{Q}$ - множина раціональних чисел, тобто тих, які можна подати у вигляді дробу з цілих чисел;

Ірраціональні числа – це числа, які не можна подати у вигляді звичайного дробу $\frac{m}{n}$, де m - ціле, а n - натуральне число (наприклад, $\sqrt{2}$, π);

• $\mathbb{R}$ - множина всіх дійсних чисел, яка включає як раціональні, так і ірраціональні числа.

Множину **A** називають **підмножиною** множини **B** (позначають $A \subseteq B$), якщо кожен елемент A є також елементом B. Порожня множина є підмножиною будь-якої множини.

Якщо одночасно виконується $A \subseteq B$ і $B \subseteq A$, то множини **A** і **B** **рівні**, тобто містять ті самі елементи. Записуємо: $(A = B)$.

Операції над множинами

• **Об'єднання** множин A і B - це множина $(A \cup B)$, яка містить усі елементи, що належать принаймні одній з множин A або B.

• **Перетин** множин A і B - це множина $(A \cap B)$, яка складається з елементів, спільних для обох множин.

• Множини A і B називають **неретинними (диз'юнктними)**, якщо $A \cap B = \emptyset$.

• **Різниця** множин A і B - це множина $(A - B)$, яка містить ті елементи A, що не належать B.

• Якщо $A \subseteq B$, то множину $B - A$ називають **доповненням** множини A в множині B.

Інтервали на числовій прямій

Нехай a, b - дійсні числа такі, що $a < b$. Множину всіх чисел x , для яких виконується нерівність $a < x < b$, називають **відкритим інтервалом** і позначають $(a; b)$.

Множину всіх чисел x , для яких виконується нерівність $a \leq x \leq b$, називають **замкненим інтервалом** і позначають $[a;b]$.

Множину всіх чисел x , для яких виконується нерівність $a \leq x < b$ ($a < x \leq b$), називають **зліва замкненим і справа відкритим інтервалом** (відповідно **зліва відкритим і справа замкненим інтервалом**) і позначають $[a;b)$ ($(a;b]$).

Числа $(+\infty)$ і $(-\infty)$ не належать множині $\mathbb{R}$, але для будь-якого дійсного числа c виконується: $(-\infty < c < +\infty)$.

1.2. Основи математичної логіки

Висловлювання - це твердження у формі розповідного речення, про яке має сенс говорити, чи є воно **істинним** або **хибним**. Висловлювання будемо позначати малими літерами. Кожному висловлюванню можна приписати єдине значення істинності: **1**, якщо висловлювання істинне, і **0**, якщо воно хибне. **Запереченням** висловлювання p називають висловлювання $\neg p$, яке має протилежне значення істинності.

Із простих (елементарних) висловлювань за допомогою логічних операцій утворюють **складені висловлювання**, які називають **висловлювальними формулами**.

Основні логічні операції:

- $p \vee q$ - диз'юнкція (*p або q*),
- $p \wedge q$ - кон'юнкція (*p і q*),
- $p \Rightarrow q$ - імплікація (*якщо p , то q*),
- $p \Leftrightarrow q$ - еквівалентність (*p тоді й лише тоді, коли q*).

Істиннісні значення цих формул визначаються таблицею істинності.

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Приклад 1. Описати за допомогою висловлювальної формули твердження $x \notin A \cup B$.

Розв'язання. Оскільки об'єднання містить елементи, що належать хоча б одній з множин A або B , маємо:

$$x \notin A \cup B \Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B).$$

Висловлювальна форма відрізняється від висловлювання тим, що містить принаймні одну змінну.

Запис $\forall x: V(x)$ читається: *для кожного x виконується $V(x)$* і називається **універсальним (загальним) квантором**.

Запис $\exists x: V(x)$ читається: *існує таке x , що виконується $V(x)$* і називається **квантором існування**.

Зауваження 1. Якщо у висловлювальній формі присутні обидва квантори, порядок їх розміщення має значення. Якщо ж використовується лише один тип квантора, порядок не впливає на зміст.

Зауваження 2 (правила де Моргана для кванторів).

$$\begin{aligned}\neg(\exists x \in A : V(x)) &\Leftrightarrow \forall x \in A : \neg V(x), \\ \neg(\forall x \in A : V(x)) &\Leftrightarrow \exists x \in A : \neg V(x).\end{aligned}$$

Приклад 2. Опишемо за допомогою кванторів твердження, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq a$. Якщо відомо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall k > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \geq n_0 : |a_n - a| < k.$$

Розв’язання. Користуючись правилом де Моргана маємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq a \Leftrightarrow \exists k > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} n \geq n_0 : |a_n - a| \geq k.$$

Тобто існує таке додатне число k , що для будь-якого n_0 знайдеться $n \geq n_0$, для якого відхилення $|a_n - a|$ не менше за k .

У математиці часто використовуються **символи грецького алфавіту**, які наведені в наступній таблиці.

Велика літера	Мала літера	Читання
Α	α	альфа
Β	β	бета
Γ	γ	гамма
Δ	δ	дельта
Ε	ε	епсилон
Ζ	ζ	дзета
Η	η	ета
Θ	θ	тета
Ι	ι	йота
Κ	κ	каппа
Λ	λ	лямбда
Μ	μ	мю
Ν	ν	ню
Ξ	ξ	ксі
Ο	ο	омікрон
Π	π	пі
Ρ	ρ	ро
Σ	σ	сигма
Τ	τ	тау
Υ	υ	іпсилон

Велика літера	Мала літера	Читання
Ф	ф	фі
Х	χ	хі
Ψ	ψ	псі
Ω	ω	омега

Контрольні питання

1. Яка множина називається порожньою? Як вона позначається?
2. Які множини називають скінченними та нескінченними?
3. Що таке числова множина? Наведіть приклади числових множин.
4. Що означає, що множина А є підмножиною множини В?
5. За якої умови дві множини вважаються рівними?
6. Які множини називають диз'юнктними?
7. Що таке доповнення множини?
8. Що називається висловлюванням?
9. Які значення істинності може мати висловлювання?
10. Що таке заперечення висловлювання?
11. Які висловлювання називають складеними?
12. Перелічіть основні логічні операції та поясніть їх зміст.
13. Сформулюйте правила де Моргана для кванторів.

Тести для самоконтролю

1. Множина, що не містить жодного елемента, називається:
А) універсальною;
В) числовою;

- C) порожньою;
- D) нескінченною.

2. Запис $A \subseteq B$ означає, що:

- A) множини A і B не перетинаються;
- B) A містить більше елементів, ніж B ;
- C) кожен елемент A належить B ;
- D) A є доповненням B .

3. Яка з наведених множин є нескінченною?

- A) $\{1; 2; 3\}$;
- B) $\{x \in N \mid x < 10\}$;
- C) $\mathbb{Z}$;
- D) $\{0; 1\}$.

4. Об'єднання множин A і B - це множина, що містить:

- A) лише спільні елементи A і B ;
- B) елементи A , які не належать B ;
- C) всі елементи, що належать A або B ;
- D) лише елементи B .

5. Множини A і B називаються диз'юнктними, якщо:

- A) $A \subseteq B$;
- B) $A = B$;
- C) $A \cap B = \emptyset$;
- D) $A \cup B = \emptyset$.

6. Висловлювання - це:

- A) будь-яке речення;
- B) питання або наказ;

- С) розповідне речення з визначеним значенням істинності;
 D) формула з невідомими.
7. Яка логічна операція відповідає вислову «і»?
- A) диз'юнкція;
 B) імплікація;
 C) еквівалентність;
 D) кон'юнкція.

Практичні завдання до розділу 1

1. Дано множину $A = \{-1, 0, 1, 2\}$. Знайдіть усі її підмножини. Також встановіть, як пов'язана кількість усіх підмножин скінченної множини з кількістю її елементів.

2. Переліченням визначте всі пари множин A, B , які є підмножинами множини $\{1, 2, \dots, 8\}$ і одночасно задовольняють умови: $A \cup B = \{3, 5, 6, 8\}$, $A \cap \{4, 6, 8\} = \emptyset$, $B \cap \{1, 3, 5, 7\} = \{3, 5\}$.

3. Запишіть у вигляді інтервалу (або об'єднання інтервалів) множину

$$A = \{x \in \mathbb{R}; \frac{1}{x-1} \geq 1 \vee x^2 - 4x + 3 \geq 0\}.$$

4. Нехай задано множину чисел $M = \{858, 902, 910, 924, 988, 994, 1001\}$. Нехай A - елементи M , що діляться на 7; B - елементи M , що діляться на 11; C - елементи M , що діляться на 13. За допомогою множин A, B, C виразіть такі множини:

- a) $\{1001\}$; b) $\{858, 910, 924, 994, 1001\}$;
 c) $\{858, 902, 988\}$; d) $\{910, 994\}$.

5. Обчисліть кількості елементів множин A, B, C , якщо відомо:

$$|A-B|=20, |B-C|=14, |C-A|=15, |A \cap B|=10, |B \cap C|=9, |A \cap C|=12,$$

$$|A \cap B \cap C| = 0.$$

6. На будівельному форумі було зареєстровано 88 фахівців, кожен з яких володіє принаймні однією з таких професійних компетенцій: проєктування (Р), кошторисна справа (К), технічний нагляд (Т).

Відомо, що:

- проєктуванням володіють 59 учасників,
- кошторисною справою - 52 учасники,
- технічним наглядом - 31 учасник,
- лише одну компетенцію мають:
 - 17 осіб - тільки проєктування,
 - 14 осіб - тільки кошторисна справа,
 - 8 осіб - тільки технічний нагляд,
- одночасно проєктуванням і кошторисною справою володіють 31 учасник.

Скільки учасників володіють усіма трьома компетенціями одночасно?

7. Під час контролю якості на будівельному майданчику перевіряли 1000 бетонних конструкцій за трьома характеристиками: міцність (М), геометрична точність (G), якість поверхні (S).

Встановлено, що:

- 29 конструкцій мають знижену міцність,
- 26 конструкцій не відповідають вимогам геометричної точності,
- 30 конструкцій мають дефекти поверхні,
- жодна конструкція не має усіх трьох дефектів одночасно,
- 93,5 % конструкцій не мають жодного дефекту,
- 47 конструкцій мають знижену міцність або порушення геометрії,

•54 конструкції мають знижену міцність або дефекти поверхні.

Конструкції з будь-яким дефектом направляють на додаткову обробку або переробку.

Визначте:

- a) скільки конструкцій потребують виправлення геометричної точності;
- b) для скількох достатньо лише підвищити міцність;
- c) скільки конструкцій необхідно направити на покращення якості поверхні;
- d) скільки конструкцій потребують покращення поверхні або геометричної точності.

8. Визначте, які з наведених речень є висловлюваннями (мають істинність/хибність).

- a) Сума двох парних чисел не є парним числом.
- b) Факультет Архітектури ЧНУ в Чернівцях.
- c) Ірраціональні числа є підмножиною дійсних чисел.
- d) Вчися!
- e) Різниця двох цілих чисел є цілим числом.
- f) $2x + 3 = 0$.
- g) Рівняння $2x + 3 = 0$ має один дійсний корінь.
- h) Квадратний корінь із двох є раціональним числом..
- i) Трикутник зі сторонами 3 см, 4 см і 5 см є прямокутним.

9. Складіть заперечення наведених висловлювань

- a) Квадрат не є паралелограмом.
- b) Відрізок, що сполучає дві різні точки, є прямою.
- c) У гуртку менше ніж 18 студентів.

- d) Не всі дійсні числа є додатними.
- e) Жоден трикутник не є рівнобедреним.
- f) Не більш як два числа задовольняють нерівність $x + 5 < 10$.
- g) Кожне раціональне число належить множині цілих чисел.

Відповіді

1. $\{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{-1;0\}, \{-1;1\}, \{-1;2\}, \{0;1\}, \{0;2\}, \{1;2\}, \{-1;0;1\}, \{-1;0;2\}, \{0;1;2\}, \{-1;1;2\}, \emptyset$. **A.** Кількість підмножин дорівнює 2^k , де k — кількість елементів множини.
- 2. Чотири розв'язки: $A_1 = \emptyset$, $A_2 = \{3\}$, $A_3 = \{5\}$, $A_4 = \{3; 5\}$, $B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = \{3; 5; 6; 8\}$
- 3. $A = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$
- 4. а) $A \cap B \cap C$; б) $A \cup (B \cap C)$; в) $(B \cup C) \setminus A$; г) $A \setminus B$
- 5. $|A| = 30$, $|B| = 23$, $|C| = 27$ елементів
- 6. 5 учасників
- 7. а) 26 б) 16 в) 30 г) 49
- 8. а) Є висловлювання б) Не є висловлюванням в) Є висловлювання г) Не є висловлюванням е) Є висловлювання ф) Не є висловлюванням г) Є висловлювання х) Є висловлювання и) Є висловлювання
- 9. а) Квадрат є паралелограмом б) Відрізок, що сполучає дві різні точки, не є прямою в) У гуртку є щонайменше 18 студентів г) Усі дійсні числа є додатними е) Принаймні один трикутник є рівнобедреним ф) Принаймні три числа задовольняють нерівність $x + 5 < 10$ г) Принаймні одне раціональне число не належить множині цілих чисел