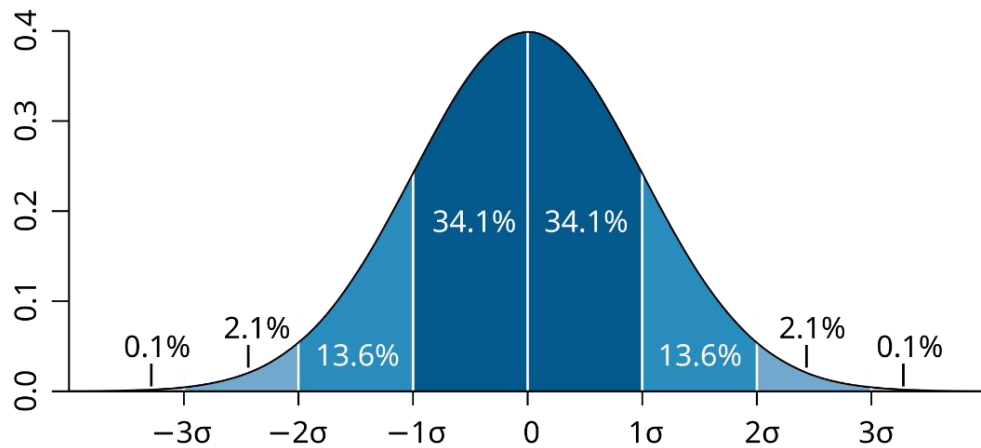


Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТІ НА ОСНОВІ WOLFRAM MATHEMATICA



Чернівці
Чернівецький національний університет
2024

Друкується за ухвалою вченої ради
навчально наукового інституту фізико-технічних і комп'ютерних наук
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича

Рецензенти:

Білинський І.В. професор кафедри фізики та методики її навчання
Криворізьського державного педагогічного університету,
доктор фіз.-мат. наук, професор

Гришук А.М. завідувач кафедри фізики та методики її навчання
Житомирського державного університету імені Івана
Франка, кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Головацький В.А. , Головацький І.В.

Теорія ймовірності на основі Wolfram Mathematica: навчальний посібник/
В. А. Головацький, І. В. Головацький. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2024.
– 204 с.

В посібнику викладено теоретичні відомості з комбінаторики, основи теорії ймовірності, елементи математичної статистики, теорії надійності та теорії похибок з розглядом великої кількості прикладів і задач з аналітичними розв'язками та числовими розрахунками в системі Wolfram Mathematica.

Аналітичні, числові та графічні можливості системи комп'ютерної алгебри суттєво покращують вивчення теорії ймовірності. Використання генератора випадкових чисел дозволяє проводити експерименти з теорії ймовірностей. З іншої сторони, розв'язання великої кількості задач методами комп'ютерного моделювання створює можливості для оволодіння студентами системи комп'ютерної алгебри Wolfram Mathematica, яка їм буде корисною при вивченні інших фізико-математичних дисциплін.

Для здобувачів вищої освіти фізико-математичних спеціальностей.

СПИСОК СКОРОЧЕНЬ

ДВВ – дискретна випадкова величина

НВВ – неперервна випадкова величина

ЗМІСТ

Розділ 1. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ	6
1. Множини та дії над ними	6
2. Випадкові події. Ймовірність події. Класичне, статистичне та геометричне означення ймовірності	19
3. Елементи комбінаторики.....	31
4. Основні теореми теорії ймовірностей.....	46
4.1. Операції над подіями.....	46
4.2. Теореми додавання ймовірностей.....	47
4.3. Теореми множення ймовірностей.....	51
4.4. Ймовірність настання принаймні однієї події.....	56
5. Надійність системи	57
6. Формула повної ймовірності і формула Байєса.....	61
6.1. Формула повної ймовірності	61
6.2. Ймовірність гіпотез. Формула Байєса	63
7. Повторні випробування	72
7.1. Послідовні незалежні випробування. Формула Бернуллі	72
7.2. Формула Пуассона (теорема Пуассона)	75
7.3. Локальна теорема Муавра–Лапласа	77
7.4. Інтегральна теорема Муавра –Лапласа	82
Розділ 2. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ	92
1. Види випадкових величини. Закон розподілу випадкових величин	92
2. Густина ймовірності (щільність) неперервної випадкової величини.....	98
3. Числові характеристики випадкових величин. Математичне сподівання, мода та медіана.....	106
4. Дисперсія випадкової величини. Властивості дисперсії	108
5. Моменти випадкової величини. Асиметрія та ексцес	114
6. Багатовимірні випадкові величини	117
6.1. Закон розподілу двовимірної випадкової величини	117
6.2. Числові характеристики двовимірної випадкової величини	123
Розділ 3. РОЗПОДІЛИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН	130
1. Рівномірний розподіл	130

2. Біномний розподіл	135
3. Геометричний розподіл	138
4. Від’ємний біноміальний розподіл (розподіл Паскаля)	143
5. Розподіл Пуассона.....	146
6. Показниковий (експоненційний) розподіл	151
7. Гіпергеометричний розподіл	156
8. Нормальний закон розподілу	159
9. Т-розподіл Стюдента	164
10. Імовірнісна твірна функція. Послідовність незалежних випробувань із різними імовірностями	167
Розділ 4. ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ, ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ.....	171
1. Нерівність Чебишева	172
2. Закон великих чисел Чебишева	174
3. Теореми Бернуллі та Пуассона	175
4. Центральна гранична теорема	177
Розділ 5. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА	180
1. Вибірковий метод.....	181
2. Числові характеристики вибірки	183
3. Статистичні оцінки параметрів розподілу ймовірності. Метод моментів..	187
4. Методика статистичної обробки експериментальних даних	189
Список літератури	195
Додаток 1. Таблиця значень функції Гауса	197
Додаток 2. Таблиця значень функції Лапласа.....	201
Додаток 3. Програма розрахунку значень функції Лапласа	203
Додаток 4. Основні типи розподілів.....	204

Розділ 1. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ

1. Множини та дії над ними

Поняття множини в математиці є аксіоматичним поняттям, яке не потребує означення. Інтуїтивно під множиною розуміють сукупність певних різних об'єктів, які розглядаються як єдине ціле. Наприклад, можна говорити про множину всіх книг у бібліотеці, множину літер українського алфавіту, або про множину коренів певного рівняння тощо.

Множину, в якій задано порядок розміщення її елементів, називають *впорядкованою*. Множина може бути як *скінченною*, так і *безмежною*, як *дискретною*, так і *неперервною*. Приклади таких множин: усі натуральні двоцифрові числа, множина натуральних, чи дійсних чисел.

Об'єкти, які входять до множини, називають її елементами. Вважається, що всі елементи множини різні. Елементом множин може бути інша множина. Наприклад, множина академічних груп університету, у якій кожний елемент є множиною студентів.

Для позначення конкретних множин використовують великі букви латинського алфавіту: $A, B, C, \dots$, або великі букви з індексами $A_1, A_2, A_3, \dots$. Для позначення елементів множин використовують малі букви латинського алфавіту: $a, b, c, \dots$, або малі букви з індексами $a_1, a_2, a_3, \dots$.

Належність елемента множині позначається символом $\in$: $a \in A$ – елемент a належить множині A ; неналежність елемента множині позначається символом $\notin$: $s \notin B$ – елемент s не належить множині B .

Множину, яка не містить жодного елемента називають *порожньою*. Така множина позначається як $\emptyset$ або $\{\}$. Кількість елементів у скінченній множині називається *потужністю* множини і позначається $|A|$.

Множина вважається заданою, якщо про будь-який елемент можна сказати, належить він цій множині чи не належить. Множина може бути задана такими способами:

- за допомогою опису властивостей елементів множини.

Наприклад:

множина, що утворена з чисел Фібоначчі $F=\{1, 2, 3, 5, \dots\}$ – кожне наступне число є сумою двох попередніх. Причому вся послідовність Фібоначчі містить два однакових перших елементи $\{1, 1, 2, 3, 5, \dots\}$ і тому не може називатись множиною;

множина перших 100 натуральних чисел $A=\{x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 100\}$;

- переліком (або списком) елементів. Наприклад: $A=\{1, 2, 3, 4\}$;
- аналітичним, за допомогою операцій над іншими множинами та іншими методами.

Між множинами існують відношення включення та рівності.

Дві множини A і B називаються *рівними* (записується $A=B$), якщо вони мають однаковий набір елементів.

Множина B називається *підмножиною* множини A , якщо кожен елемент множини B належить множині A . Наприклад: $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$, $B=\{2, 4, 6, \dots\}$, B – підмножина A . Множина A – надмножина B (охоплююча множина B). Позначення: $B \subseteq A$ означає « B включається в A », $\subseteq$ – знак нестрогого включення. Можливий і такий запис для множини A , яка охоплює множину B : $A \supseteq B$.

Якщо $B \subseteq A$ і $A \neq B$, то B називають *власною (строгою чи істинною) підмножиною* A . У цьому випадку використовують таке позначення: $B \subset A$, $\subset$ – знак строгого включення.

Множина, підмножинами якої є всі множини, що розглядаються, називається *універсальною* множиною або *універсумом* і позначається E або U .

Множина, елементами якої є всі підмножини множини A і тільки вони, називається *множиною підмножин* або *булеаном* множини A і позначається $P(A)$.

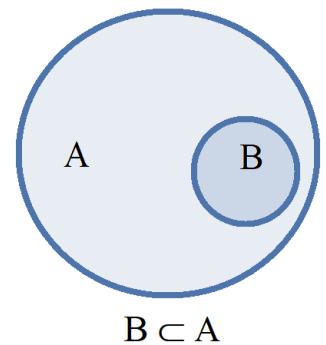
У разі скінченної підмножини A , що складається з n елементів, множина підмножин $P(A)$ містить 2^n елементів. З них 2^{n-1} власних підмножин та 2 невластивих підмножин.

Приклад. Розглянемо утворення булеана множини $A=\{1, 2, 3\}$:

$P(A)=\{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Перша й остання підмножини невластні, решта – власні.

Множини і відношення між ними зручно задавати графічно за допомогою так званих діаграм Ейлера-Венна. Множина зображується замкненою кривою довільної форми (найчастіше – кругом). Точки, які лежать всередині замкненої кривої, можна розглядати як елементи відповідної множини. Діаграму Ейлера-Венна можна розглядати як окремий випадок задання множини переліком його елементів. В цьому випадку всередині діаграми Ейлера-Венна можуть бути зображені символічні позначення елементів.



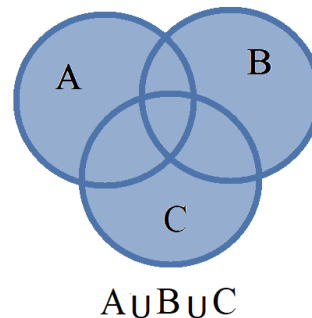
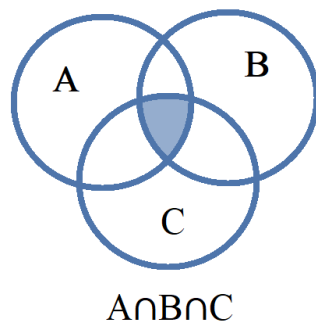
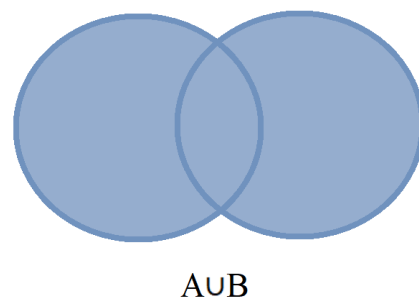
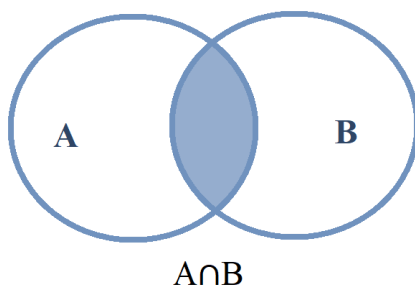
Розглянемо операції, що можуть виконуватися над множинами.

Об'єднанням двох множин A і B називається множина $A \cup B$, яка складається з усіх їхніх елементів, що належать хоча б одній з множин $A \cup B := \{x | x \in A \text{ або } x \in B\}$. Об'єднання складається з усіх елементів множини A , усіх елементів множини B і не містить ніяких інших елементів.

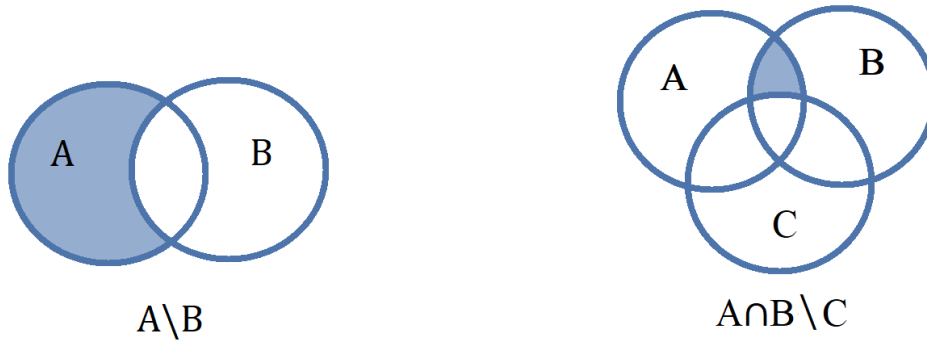
Перерізом двох множин A і B називається множина $A \cap B$, яка складається з усіх тих і тільки тих елементів, що належать і A , і B :

$$A \cap B := \{x | x \in A \text{ і } x \in B\}$$

Різні випадки перерізу й об'єднання множин зручно зображати на діаграмах Ейлера-Венна:

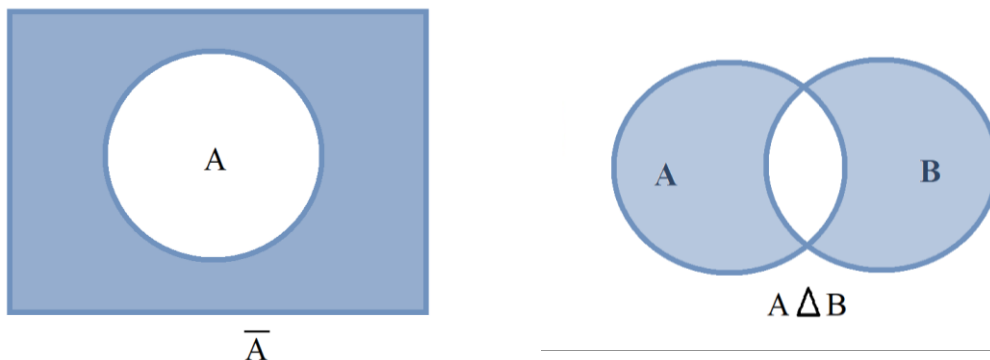


Різницею множин A і B (записується $A \setminus B$) називається множина тих елементів, які належать множині A і не належать множині B .



Доповненням множини A називається множина, яка складається з усіх елементів, які не належать множині A , але які належать універсальній множині U . Доповнення множини A позначають $\bar{A}$ (читають: « A з рискою» або «доповнення A »). Універсум U на діаграмі позначають прямокутником

Симетричною різницею двох множин A і B (записується $A \Delta B$) називається множина, що включає всі елементи вихідних множин, які не належать одночасно множинам A і B .



За умовчанням приймається наступний пріоритет операцій: $\cap, \cup, \setminus, \Delta$. Для зміни цього порядку у виразі використовують дужки.

За допомогою діаграм легко довести наступні співвідношення, властивості та закони:

1. $\bar{A} = U \setminus A$
2. $A \setminus B = (A \cap \bar{B})$
3. $A \Delta B = A \cup B \setminus A \cap B$

Закони поглинання

$$1. A \cap (A \cup B) = A$$

$$2. A \cup (A \cap B) = A$$

Закони де Моргана

$$1. \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$2. \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$3. \bar{\bar{A}} = A$$

Закони ідемпотентності

$$1. A \cap A = A$$

$$2. A \cup A = A$$

Властивості $\emptyset$ та U

$$1. A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$2. A \cap U = A$$

$$3. A \cup \emptyset = A$$

$$4. A \cup U = U$$

$$5. A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$6. A \cup \bar{A} = U$$

$$7. \bar{U} = \emptyset$$

$$8. \bar{\emptyset} = U$$

Розглянемо ще одну важливу операцію з теорії множин, яка використовується в математиці, комбінаториці та програмуванні – декартовий (прямий) добуток.

Декартовим добутком двох множин A та B називається множина усіх можливих впорядкованих пар, у яких перший компонент належить множині A , а другий – множині B .

Декартів добуток множин позначають так $A \times B$.

Наприклад для $A = \{x, y, z\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ отримуємо

$$A \times B = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3), (z, 1), (z, 2), (z, 3)\}$$

Виконаємо операції з множинами в системі *Mathematica*.

Для задання множин будемо використовувати тип змінних *List* (список). Елементами списку можуть бути дані будь-якого типу. У списку допускається щоб елементи повторювались, тому щоб

виключити однакові елементи скористаємось функцією **Union**. Після виконання цієї функції отримаємо впорядковану множину:

```
A = {1, 2, 3, 4, 4, 1}
{1, 2, 3, 4, 4, 1}
```

```
A = Union[A]
{1, 2, 3, 4}
```

? Union

Union[list₁, list₂, ...] gives a sorted list of all the distinct elements that appear in any of the list_i.

Union[list] gives a sorted version of a list, in which all duplicated elements have been dropped. >>

Для автоматичного задання множини методом опису її елементів використаємо функцію **Table**:

? Table

Table[expr, n] generates a list of n copies of expr.

Table[expr, {i, i_{max}}] generates a list of the values of expr when i runs from 1 to i_{max}.

Table[expr, {i, i_{min}, i_{max}}] starts with i = i_{min}.

Table[expr, {i, i_{min}, i_{max}, di}] uses steps di.

Table[expr, {i, {i₁, i₂, ...}}] uses the successive values i₁, i₂,

Table[expr, {i, i_{min}, i_{max}}, {j, j_{min}, j_{max}}, ...]

gives a nested list. The list associated with i is outermost. >>

```
B = Table[i2, {i, 1, 5}]
{1, 4, 9, 16, 25}
```

Перетин та об'єднання множин A і B знайдемо за допомогою функцій **Intersection** та **Union**, які можна замінити відповідними операторами $\cap$ та $\cup$. Ці оператори можна знайти в палітрі інструментів, або використати наступні послідовності клавіш (з допомогою клавіші **Esc** в системі *Mathematica* можна уводити велику кількість спецсимволів):

Esc inter **Esc** (для $\cap$)

Esc un **Esc** (для $\cup$)

```
B = Table[i2, {i, 1, 5}]  
{1, 4, 9, 16, 25}
```

```
Intersection[A, B]  
{1, 4}
```

```
Union[A, B]  
{1, 2, 3, 4, 9, 16, 25}
```

```
A ∩ B  
{1, 4}
```

```
A ∪ B  
{1, 2, 3, 4, 9, 16, 25}
```

? Intersection

Intersection[list₁, list₂, ...] gives a sorted list of the elements common to all the list_i. >>

? Union

Union[list₁, list₂, ...] gives a sorted list of all the distinct elements that appear in any of the list_i.

Union[list] gives a sorted version of a list, in which all duplicated elements have been dropped. >>

Різницю множин $A \setminus B$ та $B \setminus A$ розрахуємо використовуючи функцію **Complement**.

? Complement

Complement[e_{all}, e₁, e₂, ...] gives the elements in e_{all} that are not in any of the e_i. >>

```
Complement[A, B]  
{2, 3}
```

```
Complement[B, A]  
{9, 16, 25}
```

```
Complement[B, A, {9, 25}]  
{16}
```

```
({1, 3, 5} ∪ {2, 4, 6} ∪ {0}) ∩ {3, 6, 9}  
{3, 6}
```

Функція **Complement**, як і попередні функції **Intersection** та **Union** дозволяють використовувати три і більше аргументів. При використанні операторів слід пам'ятати, що пріоритет виконання $\cap$ вищий ніж $\cup$.

Кількість елементів або *потужність* множини будемо визначати функцією **Length**.

? Length

Length[*expr*] gives the number of elements in *expr*. >>

Length[A ∪ B]
7

Декартовий (прямий добуток) множин в системі *Mathematica* можна розрахувати за допомогою функції **Tuples**

```
A = {x, y, z}; B = {1, 2, 3}; Tuples[{A, B}]  
{ {x, 1}, {x, 2}, {x, 3}, {y, 1},  
  {y, 2}, {y, 3}, {z, 1}, {z, 2}, {z, 3} }
```

? Tuples

Tuples[*list*, *n*] generates a list
of all possible *n*-tuples of elements from *list*.
Tuples[{*list*₁, *list*₂, ...}] generates a list of all possible
tuples whose *i*th element is from *list*_{*i*}. >>

За допомогою описаних функцій розв'яжемо в системі *Mathematica* декілька задач. Використовуючи функцію циклу **Do** та функцію розгалуження за умовою **If**.

Задача 1.1. Розглянемо множину натуральних чисел на проміжку [1, 1000]. Знайти кількість елементів цього масиву, які можна представити у вигляді суми квадратів двох натуральних чисел.

Розв'язок.

```

Y = {};
Do[If [ $i^2 + j^2 \leq 1000$ , AppendTo[Y,  $i^2 + j^2$ ]], {i, 1, 32},
  {j, 1, 32}]
Length[Y]
Length[Union[Y]]
756
309

```

Програма починається з створення порожнього списку **Y**, до якого в подвійному циклі **Do** додаються елементи, які задовольняють умову $i^2 + j^2 < 1000$. Ітераційні змінні **i** та **j** змінюються в межах, які забезпечують перебір усіх можливих комбінацій натуральних чисел. При цьому у список **Y** записується багато елементів, що дублюються. Для виключення повторів використовуємо функцію **Union**, а шукану кількість елементів підрахує функція **Length**. Додавання нових елементів у список **Y** відбувалося за допомогою функції **AppendTo**:

? AppendTo

AppendTo[s, elem] appends *elem* to the value of *s*, and resets *s* to the result. >>

Задача 1.2. Встановити, яка буква в заданому тексті зустрічається найчастіше. Текстом для досліджень вибрати 20 рядків з «Енеїди» І. П. Котляревського:

«Еней був парубок моторний
 І хлопець хоть куди козак,
 Удавсь на всеє зле проворний,
 Завзятіший од всіх бурлак.
 Но Греки, як, спаливши Трою,
 Зробили з неї скирту гною,
 Він, взявши торбу, тягу дав;
 Забравши деяких Троянців,
 Осмалених, як гиря, ланців,
 Пятами з Трої накивав....»

Розв'язок. Створимо множину **A**, яка міститиме усі букви, що зустрічаються у текстовому рядку **str** за виключенням множини спецзнаків. Функція **Character** перетворює текстовий рядок у масив символів, а функція **ToLowerCase** замінює великі літери малими.

```
str = "Еней був парубок моторний
І хлопець хоть куди козак,
Удався на всеє зле проворний,
Завзятийший од всіх бурлак.
Но греки, як спаливши Трою,
Зробили з неї скирту гною,
Він, взявши торбу, тягу дав;
Забравши деяких троянців,
Осмалених, як гиря, ланців,
П'ятами з Трої наживав.
Він, швидко поробивши човни,
На синє море попускав,
Троянців насажавши повні,
І куди очі почухран.
Но зла Юнона, суча дочка,
Розкудкудакалась, як квочка, –
Енея не любила – страх;
Давно уже вона хотіла,
Його щоб душа полетіла
К чортам і щоб і дух не пах.";
str = ToLowerCase[str];
A = Complement[Union[Characters[str]], {" ", ",", ".", ";", "-", ":", " ", "
"}]
{a, б, в, г, д, е, ж, з, и, й, к, л, м, н, о, п, р, с, т, у, х, ц, ч, ш, щ, ь, ю, я, є, і, ї}

Length[A]
31
```

? Characters

Characters["string"] gives a list of the characters in a string. >>

У списку **B** помістимо частоту вживання кожної букви з множини **A** у рядку **str**. Розрахунок кількості входжень букв у тексті виконаємо функцією **StringCount**. Функція **Max** визначає максимальне значення серед елементів числового масиву **B**. Позицію *pos* найбільшого елемента в масиві **B** знаходить функція **Position**. Розрахунок показує, що цій позиції в множині **A** відповідає літера “о”.

```

B = Table[StringCount[str, A[[i]]], {i, 1, Length[A]}]
{38, 10, 28, 5, 13, 16, 2, 11, 25, 6, 23, 14, 5, 27, 41,
 12, 21, 13, 15, 17, 10, 4, 7, 8, 2, 4, 4, 12, 2, 15, 2}

m = Max[B]; pos = Position[B, m]; pos
A[[pos[[1, 1]]]]

{{15}}

o

```

? StringCount

StringCount["string", "sub"] gives a count of the number of times "sub" appears as a substring of "string".
 StringCount["string", patt] gives the number
 of substrings in "string" that match the general string expression *patt*.
 StringCount["string", {patt₁, patt₂, ...}] counts the number of occurrences of any of the *patt_i*.
 StringCount[{s₁, s₂, ...}, p] gives the list of results for each of the *s_i*. >>

? Max

Max[x₁, x₂, ...] yields the numerically largest of the *x_i*.
 Max[{x₁, x₂, ...}, {y₁, ...}, ...] yields the largest element of any of the lists. >>

? Position

Position[expr, pattern] gives a list of the positions at which objects matching *pattern* appear in *expr*.
 Position[expr, pattern, levelspec] finds only objects that appear on levels specified by *levelspec*.
 Position[expr, pattern, levelspec, n] gives the positions of the first *n* objects found.
 Position[pattern] represents an operator form of Position that can be applied to an expression. >>

Задача 1.3. Знайти кількість простих чисел на проміжку [1, 100], які можна представити у вигляді суми квадратів двох натуральних чисел.

Розв'язок. На відміну від задачі 1.1 необхідно спочатку створити множину простих чисел. Для цього використовується логічна функція **PrimeQ**, яка перевіряє чи належить число до множини простих чисел. Створюємо множину простих чисел в заданому проміжку та масив натуральних чисел, які можна представити у вигляді суми квадратів двох натуральних чисел. Шукана множина розраховується як переріз двох множин.

```

A = {};
Do[If[PrimeQ[i], AppendTo[A, i]], {i, 1, 100}]
B = {};
Do[If[i2 + j2 ≤ 100, AppendTo[B, i2 + j2]], {i, 1, 10}, {j, 1, 10}]
S = A ∩ B
{2, 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97}

Length[S]
12

```

Необхідно відмітити, що список B не є множиною, оскільки у ньому присутні повтори елементів. Для перетворення його у множину потрібно було б вставити ще один рядок коду: $B = \text{Union}[B]$. Але цього можна не робити, бо після виконання операції перерізу отримується список S без повторів, тобто множина.

Цього ж результату можна було б досягнути простішим шляхом:

```

S = {}; Do[k = i2 + j2;
If[k ≤ 100 && PrimeQ[k], AppendTo[S, k]], {i, 1, 10}, {j, 1, 10}]
Length[Union[S]]
12

```

Задача 1.4. Нехай A множина цілих чисел на проміжку $[1, 25]$, B – множина цілих чисел з проміжку $[1, 25]$, які можна представити у вигляді суми квадратів двох цілих чисел. Знайти $A \setminus B$.

Розв'язок.

```

A = Range[25];
B = {};
Do[k = i2 + j2;
If[k ≤ 25, AppendTo[B, k]], {i, 1, 5}, {j, 1, 5}]
B = Union[B]
Complement[A, B]

{2, 5, 8, 10, 13, 17, 18, 20, 25}

{1, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 19, 21, 22, 23, 24}

```

З отриманого результату слідує, що 9 з 25 чисел може бути представлено у вигляді суми квадратів двох цілих чисел.

Задачі для самостійного розв'язування.

1. За допомогою діаграм зобразіть наступні вирази:

$$(A \cup B) \cap C, \quad A \cup B \cap C, \quad A \cap B \setminus C$$

2. Задано множини $A1 = \{2,4,8,16,20,21,28\}$,

$$A2 = \{12,16,17,18,21,22,26\}, \quad A3 = \{2,3,4,17,20,24,25,30\}$$

Знайти множини:

$$B1 = A1 \cup A2 \setminus A3 \text{ (8 елементів),}$$

$$B2 = A1 \cap A2 \setminus A3 \text{ (2 елементи)}$$

$$B3 = A1 \cap A2 \cup A2 \cap A3 \text{ (5 елементів)}$$

3. Розглянемо множину парних натуральних чисел менших за 1000. Складіть програму за допомогою якої знайдіть кількість елементів цього масиву, які можна представити у вигляді суми кубів двох натуральних чисел. (9 елементів).
4. Числовим методом створіть множину квадратів натуральних чисел менших 70 та множину кубів натуральних чисел менших 20. Розрахувати скільки у цих множин спільних елементів. (4 елементи).
5. Числовим методом знайдіть спільні елементи у множини простих чисел менших 100 та множини чисел ряду Фібоначчі (ряд Фібоначчі це натуральні числа, які задовольняють таку умову: кожне наступне число є сумою двох попередніх). (5 елементів).

2. Випадкові події. Ймовірність події. Класичне, статистичне та геометричне означення ймовірності

Одне з основних понять теорії ймовірностей – це поняття події. *Подія* – це будь-який результат, що виникає внаслідок випробування. Події позначають великими літерами латинської алфавіту: A , B , C , тощо.

Подію, яка може відбутися або не відбутися за певних умов, називають *випадковою подією*. Наприклад, при підкиданні монети, неможливо заздалегідь передбачити, що випаде – орел чи решка (герб чи цифра).

Подію, яка обов'язково відбудеться під час випробування, називають *вірогідною подією* та позначають символом Ω . Подію, що не може статися за умов даного випробування, називають неможливою і позначають символом $\emptyset$.

Наприклад, при киданні грального кубика, випадання кількості очок, меншої від семи, є вірогідною подією, а випадання семи чи більше очок – неможливою подією.

Випадкові події називають *несумісними* в деякому випробуванні, якщо вони в цьому випробуванні не можуть статися одночасно. Наприклад, внаслідок одного підкидання монети може настати одна з двох подій: подія A – поява орла, і подія B – поява решки. Очевидно, що події A і B – несумісні, оскільки не можуть відбутися одночасно.

Випадкові події називають *сумісними*, якщо вони в деякому випробуванні можуть відбутися одночасно. Наприклад, при киданні грального кубика може статися одночасно дві події: подія A – випадання парної кількості очок і подія B – випадання кількості очок, що кратна трьом.

Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ називають *попарно несумісними*, якщо жодна пара цих подій не може відбутися одночасно в одному випробуванні.

Кажуть, що сукупність подій утворює *повну групу*, якщо принаймні одна з цих подій неодмінно станеться внаслідок випробування.

Наприклад, під час одного кидка грального кубика можливі шість різних подій: випадання 1, 2, 3, 4, 5 або 6. Ці шість подій утворюють повну групу несумісних подій у цьому досліді, оскільки кожна подія виключає інші, і всі можливі результати випробовування охоплені цими подіями.

Найпростіші несумісні результати випробування, які утворюють повну групу, називають *елементарними* подіями.

Дві події A й $\bar{A}$ називають *протилежними*, якщо відсутність однієї з них у результаті випробування означає наявність іншої.

Наприклад: при перевірці якості виробу події «виріб бракований» й «виріб стандартний» є протилежними.

Сукупність усіх можливих наслідків певного випробування називають *простором елементарних подій*, а самі елементарні події – *точками простору*. При киданні двох кубиків точками простору елементарних подій є 36 пар чисел, що утворюють множину S .

Розглянемо подію A , яка полягає в тому, що сума очок обох кубиків дорівнює 5. Множина елементарних подій, які є множиною можливих варіантів появи події A : $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 2\}, \{4, 1\}\}$. Отже, з 36 різних елементарних подій, подія A , яка нас цікавить, має 4 сприятливі елементарні події.

Класичне означення ймовірності.

Ймовірність випадкової події A визначається як відношення числа елементарних подій, які сприяють настанню події A , до загальної кількості можливих елементарних подій:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (2.1)$$

де n – кількість можливих елементарних подій, m – кількість елементарних подій, що сприяють події A . Оскільки $m \leq n$, то ймовірність є невід'ємним числом, яке не більше одиниці

Таким чином, чисельною характеристикою події A буде відповідна їй ймовірність. Наприклад, для події A – отримання 5 очок у сумі з двох кубиків ймовірність $P(A) = 4/36 \approx 0,11$.

Якщо для події B $m=n$, то подія B є вірогідною подією Ω , ймовірність якої дорівнює 1: $P(B) = 1$. Прикладом вірогідної події у випадку з двома кубиками може бути подія отримання більше ніж 1 очко у сумі. Якщо жодна з n елементарних подій не сприяє певній події ($m = 0$), то така подія є неможливою $\emptyset$. Ймовірність неможливої події дорівнює 0: $P(\emptyset)=0$. Прикладом неможливої події у випадку двох кубиків є подія отримання більше ніж 12 очок у сумі.

Простір елементарних подій у випробуванні може бути як *скінченним*, так і *нескінченним*. Якщо множина точок цього простору є зліченною, його називають *дискретним*. Класичне визначення ймовірності базується на простішому понятті – *рівноможливості* подій, коли кількість можливих результатів випробування є скінченною. Однак, сфера застосування класичної ймовірності для опису випадкових явищ є досить вузькою. Наприклад, за її допомогою неможливо визначити ймовірність розпаду атома радіоактивної речовини протягом певного часу або ймовірність влучення стріли в ціль. У таких випадках ймовірності визначаються експериментально або в результаті складних розрахунків.

Статистичне означення ймовірності.

Відносною частотою події A називається відношення числа дослідів, у яких подія A настала, до загальної кількості випробувань:

$$W(A) = \frac{M}{N}, \quad 0 \leq w(A) \leq 1 \quad (2.2)$$

Між відносною частотою і класичним визначенням ймовірності є така різниця: ймовірність можна обчислити теоретично (до проведення експерименту), тоді як відносна частота визначається тільки після проведення випробувань (на основі дослідів).

Припустимо, що виконується серія однакових випробувань, і подія A є одним із можливих результатів. Практика показує, що за постійних умов для багатьох явищ кількість випадків події A підпорядковується певним закономірностям. Тобто, коли кількість випробувань N є достатньо великою, відносна частота появи події $w(A)$, буде майже однаковою у багатьох серіях експериментів. Зі

збільшенням кількості випробувань N різниця між відносними частотами в різних серіях зменшується. У довгих серіях експериментів відносні частоти появи події групуються навколо певного сталого значення.

Експериментально підтверджено, що в ситуаціях, де застосовують класичне визначення ймовірності, за великої кількості випробувань значення відносної частоти майже не відрізняється від ймовірності P (за винятком рідкісних випадків). Цей факт дозволяє припустити, що в загальному випадку існує певна стала величина, біля якої коливаються відносні частоти події у різних серіях випробувань. Цю сталу називають статистичною ймовірністю випадкової події.

Статистична ймовірність випадкової події – це стала величина, яка відображає ймовірність настання події на основі відносних частот її проявів у великій кількості випробувань. Вона розраховується як частка кількості випадків, коли подія відбулася, до загальної кількості спостережень. Ця величина наближається до теоретичної ймовірності події з ростом кількості експериментів.

$$P(A) \approx W(A), \quad P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} w(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N} \quad (2.3)$$

На практиці кількість випробувань завжди обмежена, однак принципово важливою є можливість за незмінних умов повторювати їх необмежену кількість разів. Це дозволяє виявити закономірності та наблизитися до реальної ймовірності події, навіть якщо в кожному окремому експерименті кількість спроб обмежена.

Введене таким чином означення статистичної ймовірності має такі недоліки:

1. Не існує чітких критеріїв, на основі яких можна приймати рішення про припинення дослідів.
2. В принципі неможливо забезпечити абсолютно однакові умови проведення дослідів.

Тим не менше, статистична ймовірність добре працює на практиці.

Продемонструємо на прикладі властивість стійкості. За даними шведської статистики відносна частота народження дівчаток за 1985 р. по місяцях характеризувалась наступними числами:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.486	0.489	0.490	0.471	0.478	0.482	0.462	0.484	0.485	0.491	0.482	0.473

Як бачимо, відносна частота коливається біля числа $W = 0.481$, яке можна прийняти за приблизне значення імовірності народження дівчинки. Цікаво, що статистичні дані різних країн дають приблизно таке ж значення відносної частоти народження дівчинки.

Англійський математик-статистик К. Пірсон (1857-1936 рр.) кидав монету 24000 разів і при цьому герб випав 12012 разів.

$$W = \frac{12012}{24000} \approx \frac{1}{2}$$

Дж. Е. Керріх провів експеримент з підкиданням монети, коли був інтернованим у таборі для військовополонених під час другої світової війни. Було проведено 10 серій експериментів по 1000 підкидань у кожній. Число випадань гербів розподілилося так:

502	511	497	529	504	476	507	528	504	529
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Як бачимо, ці числа групуються біля значення 500.

Геометричне означення ймовірності.

Класичне і статистичне визначення ймовірності застосовуються лише в тих випадках, коли простір елементарних подій є зліченим. Тепер розглянемо ймовірності випробувань з незліченим простором елементарних подій.

Нехай область g є підобластю області G , тобто повністю знаходиться всередині неї. Ці області можуть бути визначені як у просторі, так і на площині або на прямій. Іншими словами, вони можуть бути просторовими об'єктами, плоскими фігурами або відрізками. Мірою областей G і g будемо називати довжину, площу або об'єм залежно від того, чи йдеться про відрізки, плоскі чи просторові

фігури. Випадковим чином виберемо точку M з області G і знайдемо ймовірність події A – потрапляння точки M в область g .

Припустимо, що точка M має однакову ймовірність бути в будь-якій частині області G . Простір елементарних подій цього випробування є множиною усіх точок, що належать області G , а сукупність сприятливих подій – є множиною усіх точок області g . Логічно вважати, що ймовірність потрапляння точки в будь-яку частину області G пропорційна розміру цієї частини і не залежить від її форми. Тоді можна ввести геометричне визначення ймовірності:

$$p = \frac{\text{mes } g}{\text{mes } G}, \quad (2.4)$$

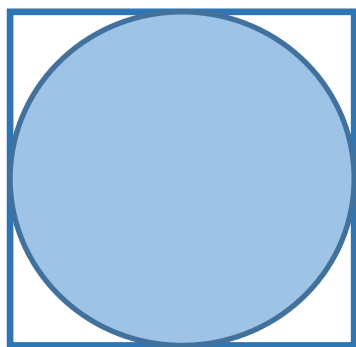
де символ *mes* (від лат. *measure* – міра) означає міру області (довжину в 1D, площу в 2D, об'єм в 3D).

Геометричну ймовірність можна розглядати як узагальнення класичної ймовірності на випадок незліченних рівноможливих подій. На геометричній ймовірності ґрунтується метод Монте-Карло, що застосовується для розрахунку багатовимірних інтегралів. За допомогою геометричної ймовірності можна визначити площу чи об'єм фігур з складними границями.

Розглянемо приклади розрахунку геометричної ймовірності.

Задача 2.1. В квадрат вписано круг. Здійснюють постріл так, що куля точно попадає в квадрат, причому ймовірність попадання в будь-яку точку квадрата однакова. Знайти ймовірність події A , яка полягає в тому, що куля попаде всередину круга.

Розв'язання: Нехай a – сторона квадрата, тоді його $\text{mes } G = a^2$.



Площа круга з радіусом $a/2$ дорівнює $\frac{\pi a^2}{4}$, тому

$$\text{mes } g = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Ймовірність події A обчислюється як відношення площ згідно (2.4)

$$P(A) = \frac{\text{mes } g}{\text{mes } G} = \frac{\pi}{4} \approx 0.785.$$

Задача 2.2 Розглядається множина усіх натуральних чисел від 1 до 100. Випадковим чином вибирається з цієї множини 3 числа. Яка ймовірність, що серед них буде просте число?

Розв'язок. Спочатку розв'яжемо задачу прямим перебором усіх варіантів у системі *Mathematica*, а потім перевіримо результат за формулою гіпергеометричної ймовірності.

Створюємо множину натуральних чисел A . За допомогою функції **Subsets**[$A, \{3\}$] створюємо множину T усіх варіантів підмножин з трьох чисел. Потужність множини T зберігаємо у змінній n . Кількість варіантів підмножин з трьох чисел можна також отримати за формулою кількості комбінацій C_{100}^3 (функція **Binomial**[100, 3]). Створюємо множину B простих чисел менших 100 (їх кількість рівна 25). У циклі **Do** перевіряємо перетини усіх елементів множини T , які є підмножинами з трьох елементів множини A , з множиною B . Якщо перетин не порожня множина, то збільшуємо лічильник m на одиницю. У кінці циклу у змінній m отримаємо частоту події. Поділимо частоту m на загальну кількість елементарних подій n і отримаємо ймовірність $p \approx 0.58241$.

```
A = Range[100];
T = Subsets[A, {3}]; n = Length[T]
B = {}; Do[If[PrimeQ[i], AppendTo[B, i]], {i, 1, 100}]; k = Length[B]
m = 0; Do[If[T[[i]] ∩ B ≠ {}, m++], {i, 1, n}];
{n, m, p = m / n}
N[p, 5]

161700

25

{161700, 94175,  $\frac{3767}{6468}$ }

0.58241
```

Ми встановили, що серед перших 100 натуральних чисел є 25 простих. За допомогою формули гіпергеометричної ймовірності розрахуємо суму ймовірностей отримати у вибірці трьох чисел зі 100 натуральних 3, 2 та 1 просте число. Ця сума ймовірностей точно збігається з

результатом попереднього розрахунку.

```
c[n_, k_] := n! / k! / (n - k)!  
(c[25, 3] + c[25, 2] * c[75, 1] + c[25, 1] * c[75, 2]) / c[100, 3] // N  
(*те ж саме через обернену ймовірність*)  
1 - c[75, 3] / c[100, 3] // N  
  
0.582406  
  
0.582406
```

Задача 2.3 Розглядається відрізок $[0,1]$ та відрізок $[0.5,0.75]$. Генеруючи в системі Mathematica дійсні випадкові числа в діапазоні $\{0, 1\}$ визначити відносну частоту події попадання випадкового числа у відрізок $[0.5, 0.75]$. Експеримент проводиться серіями з 1 000, 10 000, 100 000, 1 000 000 спроб.

Розв'язок. Створимо функцію з іменем **myfun** та одним аргументом n типу *Integer*, яка моделюватиме експеримент в одній серії з n спроб. Тіло функції міститься в підпрограмі **Block** оскільки містить декілька команд (рядків програмного коду). Функція повертає результат останньої операції. Цикл **Do** виконується n разів. Функція **Boole** переводить логічну змінну True/False у відповідне ціле число 1/0. Викликаємо функцію **myfun** з різними значеннями аргументу і отримаємо шукані відносні частоти.

```
myfun[n_Integer] := Block[{a = 0, b = 1,  $\alpha$  = 0.5,  $\beta$  = 0.75, m = 0, c},  
  Do[c = Random[Real, {a, b}];  
    m = m + Boole[ $\alpha \leq c \leq \beta$ ], {i, 1, n}];  
  N[m / n] ]  
  
{myfun[1000], myfun[10000], myfun[100000], myfun[1000000]}  
  
{0.264, 0.2453, 0.2511, 0.250254}
```

Результати показують, що відносна частота події попадання випадкового числа у відрізок $[0.5, 0.75]$ дорівнює відношенню довжин заданих відрізків. Подібні експерименти можна провести з площами та об'ємами. Подібний метод використовують для розрахунку багатовимірних інтегралів.

Задача 2.4 На площині випадковим чином вибирається відрізок, так щоб координати його кінців задовольняли наступні співвідношення:

$$-1 \leq x_1 \leq 1; -1 \leq y_1 \leq 1; -1 \leq x_2 \leq 1; -1 \leq y_2 \leq 1.$$

Знайти ймовірність того, що відрізок матиме довжину не більше одиниці та повністю поміщається в крузі одиничного радіуса з центром в початку координат.

Розв'язок. За допомогою генератора випадкових чисел згенеруємо n відрізків. Координати початків відрізків збережемо у масиві A , а координати їх кінців у масиві B . У циклі виконаємо перевірку виконання заданих умов для кожного відрізка:

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 &\leq 1, \\ (x_1)^2 + (y_1)^2 &\leq 1, \\ (x_2)^2 + (y_2)^2 &\leq 1.\end{aligned}$$

Змінна m підрахує кількість відрізків, для яких виконуватимуться усі умови. При зростанні n відносна частота m/n прямує до числового значення, яке збігається з шуканою ймовірністю.

При $n=1\,000\,000$ отримаємо $m/n \approx 0.36$. Здійснивши декілька серій випробувань можна помітити, що результат змінюється в четвертій значущій цифрі. Для збільшення точності необхідно збільшити кількість випробувань.

```
n = 1000000;
A = Table[{Random[Real, {-1, 1}], Random[Real, {-1, 1}]}, {i, 1, n}];
B = Table[{Random[Real, {-1, 1}], Random[Real, {-1, 1}]}, {i, 1, n}];
m = 0;
Do[
  m =
    m + Boole[(A[[i, 1]] - B[[i, 1]])^2 + (A[[i, 2]] - B[[i, 2]])^2 ≤ 1 &&
      A[[i, 1]]^2 + A[[i, 2]]^2 ≤ 1 && B[[i, 1]]^2 + B[[i, 2]]^2 ≤ 1], {i, 1, n}];
N[m / n]

0.361243
```

Цю ж задачу можна розв'язати за допомогою 4-кратного інтегрування за змінними x_1, x_2, y_1, y_2 у межах від -1 до 1. Результат поділимо на об'єм куба з стороною 2 в 4-мірному просторі – $2^4 = 16$

```
NIntegrate[Boole[(x1 - x2)^2 + (y1 - y2)^2 ≤ 1 && x1^2 + y1^2 ≤ 1 && x2^2 + y2^2 ≤ 1],
  {x1, -1, 1}, {y1, -1, 1}, {x2, -1, 1}, {y2, -1, 1}] / 2^4
0.361785
```

```
NIntegrate[1, {x1, -1, 1}, {y1, -1, 1}, {x2, -1, 1}, {y2, -1, 1}]
16.
```

Розглянемо інші приклади розрахунку ймовірностей подій у системі Wolfram Mathematica.

Задача 2.5. Розрахувати ймовірності випадання усіх можливих сум очок при киданні двох гральних кубиків.

Розв'язок.

```
S = {};
Do[AppendTo[S, {i, j}], {i, 1, 6}, {j, 1, 6}]
Do[Ak = {};
  Do[If[S[[i, 1]] + S[[i, 2]] == k, AppendTo[Ak, S[[i]]]],
    {i, 1, Length[S]}],
  {k, 0, 14}]
S
{{1, 1}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {1, 6}, {2, 1}, {2, 2},
 {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}, {2, 6}, {3, 1}, {3, 2}, {3, 3},
 {3, 4}, {3, 5}, {3, 6}, {4, 1}, {4, 2}, {4, 3}, {4, 4},
 {4, 5}, {4, 6}, {5, 1}, {5, 2}, {5, 3}, {5, 4}, {5, 5},
 {5, 6}, {6, 1}, {6, 2}, {6, 3}, {6, 4}, {6, 5}, {6, 6}}

A5
{{1, 4}, {2, 3}, {3, 2}, {4, 1}}

Table[Length[Ak], {k, 1, 13}]
{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0}
```

У першому циклі **Do** створюється множина S , що містить усі можливі 36 елементарних подій. У наступних двох циклах створюються множини A_k , які сприяють події випадання на двох кубиках у сумі k очок. Нижче виведено вигляд множин S та A_5 . Потужність (кількість елементів) множин A_k для значень k від 1 до 13 виведено списком за допомогою функції **Table**.

Ймовірність кожної події A_k розрахуємо за стандартною формулою $P(A) = m/n$, а також побудуємо графік дискретних значень ймовірностей $p(k)$ для усіх можливих значень сум очок k .

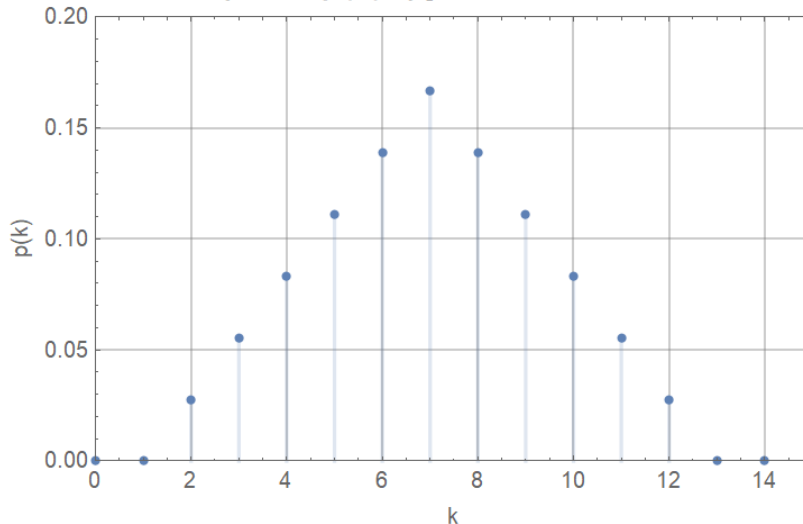
```
P = Table[Length[Ak] / 36, {k, 1, 13}]
```

```
{0, 1/36, 1/18, 1/12, 1/9, 5/36, 1/6, 5/36, 1/9, 1/12, 1/18, 1/36, 0}
```

```
N[P, 3]
```

```
{0, 0.0278, 0.0556, 0.0833, 0.111, 0.139, 0.167, 0.139, 0.111, 0.0833, 0.0556, 0.0278, 0}
```

```
DiscretePlot[Length[Ak] / Length[S], {k, 0, 14}, Frame → True,  
PlotRange → {{0, 15}, {0, 0.2}}, GridLines → Automatic,  
FrameLabel → {"k", "p(k)"}]
```



Якщо не створювати масив варіантів, а лише рахувати їх кількість, то програма матиме простіший вигляд

```
ar = {};  
Do[s = 0;  
  Do[If[i + j == m, s = s + 1], {i, 1, 6}, {j, 1, 6}];  
  AppendTo[ar, s], {m, 1, 13}];  
Print[ar]  
  
{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0}
```

Перевіримо отриманий результат прямим випробовуванням за допомогою функції генерування випадкового цілого числа **RandomInteger[{1,6}]**, яка щоразу видає з однаковою ймовірністю цілі числа в заданому діапазоні {1,6} (аналогічний результат можна отримати використовуючи загальну функцію **Random[Integer,{1,6}]**).

```
imax = 10000;
```

```
P = Table[0, 13];
```

```
Do[k = RandomInteger[{1, 6}] + RandomInteger[{1, 6}]; P[[k]] ++, imax];
```

```
N[P / imax, 3]
```

```
{0, 0.0245, 0.0522, 0.0805, 0.113, 0.143, 0.167, 0.144, 0.110, 0.0825, 0.0560, 0.0266, 0}
```

При 10 000 спроб отримано відносні частоти подій A_k , близькі до теоретичних значень ймовірностей. Збільшення кількості спроб покращують результат.

Задача 2.6. Розрахувати ймовірності випадання усіх можливих сум очок при киданні трьох гральних кубиків.

Розв'язок. Можливі значення суми очок трьох кубиків містяться в проміжку $k=[3, 18]$

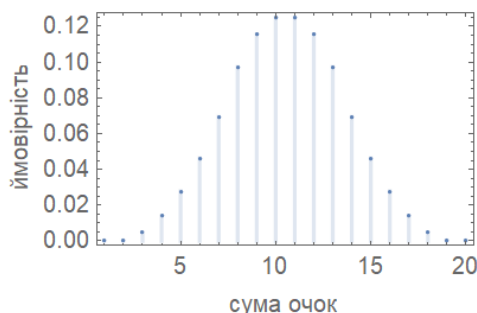
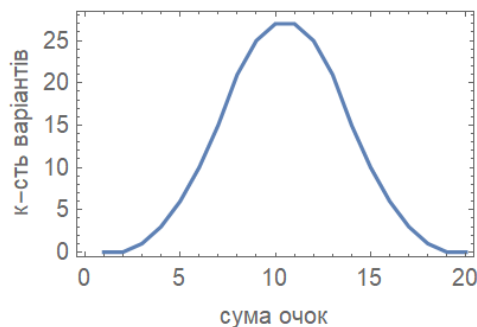
Простіша програма

```
ar = {};
Do[s = 0;
  Do[If[i + j + k == m, s = s + 1], {i, 1, 6}, {j, 1, 6}, {k, 1, 6}];
  AppendTo[ar, s], {m, 1, 21}]
Print[ar]

{0, 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27, 27, 25, 21, 15, 10, 6, 3, 1, 0, 0, 0}
```

Побудуємо графіки

```
ListPlot[ar, Joined → True, Frame → True,
  FrameLabel → {"сума очок", "к-сть варіантів"}]
DiscretePlot[ar[[k]] / 216, {k, 1, 20}, Frame → True,
  FrameLabel → {"сума очок", "ймовірність"}]
```



3. Елементи комбінаторики

Комбінаторика – розділ математики, присвячений розв'язанню задач вибору та розташування елементів деякої множини відповідно до заданих правил. Кожне таке правило визначає спосіб побудови певної конструкції із елементів вихідної множини, що зветься комбінаторною конфігурацією. Найпростішими прикладами комбінаторних конфігурацій є *перестановки, розміщення та комбінації*.

3.1. Основні правила комбінаторики

Багато формул і теорем комбінаторики ґрунтуються на двох основних правилах: правило суми та правило добутку.

Правило суми. Нехай $n(A)$, $n(B)$ – кількість елементів скінченних множин A та B відповідно, які не перетинаються. Тоді кількість елементів множини C , яка є об'єднанням множин A і B ($C = A \cup B$) визначаються сумою кількостей елементів A і B , тобто

$$n(C) = n(A) + n(B).$$

Іншими словами: якщо є можливість вибрати елемент з деякої множини A n способами, а елемент з множини B , яка не має спільних елементів з множиною A , – k способами, то вибрати елемент множини A або елемент множини B можна $n + k$ способами.

Правило добутку. Нехай потрібно послідовно виконати k дій. Перша дія може бути виконана n_1 способом, друга дія – n_2 способами і т.д. Тоді всі k дій можна виконати $n_1 * n_2 * \dots * n_k$ способами.

Нехай A_1 – множина способів виконання першої дії, A_2 – множина способів виконання другої дії, ..., A_k – k -ої дії. Тоді елемент $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ декартового добутку множин $A_1, A_2, \dots, A_k$ задає один з способів виконання k дій разом. Кількість таких способів визначається добутком кількостей елементів цих множин $n_1 * n_2 * \dots * n_k$. Декартовий добуток множин позначають так: $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$.

Приклад: Скількома способами можна вибрати чотиризначне число, усі цифри якого різні?

У десятковій системі обчислення десять цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. На першому місці може стояти будь-яка з дев'яти цифр (крім нуля), тобто $n_1 = 9$. На другому місці – будь-яка із тих, що залишилися, крім вибраної (але можна використати й цифру нуль), тобто $n_2 = 9$. Третю

цифру можна вибрати $n_3 = 8$ способами, а четверту – $n_4 = 7$ способами. За правилом добутку, шукане число способів вибору чотиризначного числа з різними цифрами дорівнює $n_1 n_2 n_3 n_4 = 4536$.

3.2. Розміщення, перестановки, комбінації

Нехай M – множина, яка складається з n елементів.

Розміщенням із n елементів по k називають довільну впорядковану підмножину множини M , яка містить k елементів.

Два розміщення вважаються різними не тільки тоді, коли вони складаються з різних елементів, але й коли містять однакові елементи, проте їх порядок відрізняється.

Кількість розміщень з n елементів по k ($k \leq n$) позначають A_n^k і обчислюють за формулою

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) \quad (3.1)$$

Для виведення формули (3.1) скористаємося правилом добутку. Щоб скласти будь-яке розміщення з n елементів по k , необхідно заповнити k місць елементами розглянутої множини. На 1-му місці можна розмістити будь-який з n елементів, тобто $n_1 = n$. На другому місці – будь-який із $n-1$ елементів, крім вибраного, тобто $n_2 = n-1$. Міркуючи аналогічно, одержуємо, що 3-тє місце можна заповнити $n_3 = n-2$ способами і т. д. Останнє k -те місце можна заповнити $n_k = n - (k-1)$ способами. Усі k місць за правилом добутку можна заповнити $n_1 n_2 \dots n_k = n(n-1) \dots (n-k+1)$ способами. Таким чином, помноживши чисельник і знаменник на $(n-k)!$ отримаємо формулу (3.1).

Позначення кількості розміщень літерою A має логічне пояснення, яке походить від латинського слова "arrangement" (розміщення або впорядкування).

В системі *Mathematica* множину з розміщеннями k елементів з множини, що містить n елементів можна створити за допомогою функції **Permutations**. Розглянемо усі способи використання цієї функції:

? Permutations

Permutations[list] generates a list of all possible permutations of the elements in list.

Permutations[list, n] gives all permutations containing at most n elements.

Permutations[list, {n}] gives all permutations containing exactly n elements. >>

Задача 3.1. Скласти всі двозначні числа, використовуючи цифри 3, 6 та 9, не враховуючи числа з повторюваними цифрами.

Розв'язання. Отримаємо 36, 39, 63, 69, 93, 96. Загальна кількість різних чисел $A_3^2=6$.

```
M = {3, 6, 9};
```

```
A = Permutations[M, {2}]
```

```
Length[A]
```

```
{{3, 6}, {3, 9}, {6, 3}, {6, 9}, {9, 3}, {9, 6}}
```

```
6
```

Задача 3.2. У корзині міститься 5 різних цукерок. Ви дістаєте навмання три цукерки: одну собі і по одній двом товаришам. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання. $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, використовуючи формулу (3.1), отримаємо $A_5^3=5*4*3=60$. В системі *Mathematica* за допомогою функції **Permutations[M, {3}]** отримаємо множину A усіх варіантів розміщень 5 елементів по 3. Множина A містить 60 елементів.

```
M = {1, 2, 3, 4, 5};
```

```
A = Permutations[M, {3}];
```

```
Length[A]
```

```
60
```

Для розрахунку кількості розміщень із n елементів по k можна створити окрему функцію

$$\text{Ank}[n_ , k_] := \frac{n!}{(n - k)!}$$

```
Ank[5, 3]
```

```
60
```

Розміщенням з повтореннями з n елементів по k називають довільний впорядкований масив з k елементів із множини M . Причому елементи в кожному масиві з k елементів не обов'язково різні, тобто він у загальному випадку не є множиною чи підмножиною.

Іншими словами розміщення з повтореннями називають *впорядкованою (n, m) вибіркою з поверненнями*.

Кількість розміщень із повтореннями з n елементів по k обчислюють за формулою

$$\bar{A}_n^k = n^k \quad (3.2)$$

Цю формулу легко отримати з таких міркувань: кожний з k елементів, які вибирають має n варіантів, а за правилом добутку отримаємо (3.2).

В системі *Mathematica* множину з розміщень з повтореннями можна створити за допомогою функції **Tuples**. Розглянемо усі способи використання цієї функції:

? Tuples

Tuples[list, n] generates a list of all possible n -tuples of elements from list.

Tuples[{list₁, list₂, ...}] generates a list of all possible tuples whose i^{th} element is from list _{i} . >>

Задача 3.3. У меню кафе міститься 3 види соку $M = \{1, 2, 3\}$. Двоє відвідувачів замовили по склянці соку. Скільки варіантів замовлень може бути?

Розв'язання. За формулою (3.2) отримаємо $\bar{A}_3^2 = 9$. Варіанти замовлень отримаємо за допомогою функції **Tuples**.

```
A = Tuples[{1, 2, 3}, 2]
```

```
Length[A]
```

```
{{1, 1}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 1}, {2, 2}, {2, 3}, {3, 1}, {3, 2}, {3, 3}}
```

```
9
```

Задача 3.4. Дві особи увійшли в ліфт на першому поверсі дев'ятиповерхового будинку. Скільки існує варіантів їх виходу з ліфта, починаючи з другого поверху?

Розв'язання. Задача подібна до задачі про варіанти розташування 2 різних предметів у 8 ящиках. Кількість таких способів згідно формули (3.2) дорівнює $8^2 = 64$. Усі можливі способи виходу з ліфту можна

подати у вигляді списку пар чисел $\{f_1, f_2\}$, де f_1 – поверх виходу першого пасажера, f_2 – поверх виходу другого пасажера

```
A = Tuples[{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, 2]
Length[A]
{{2, 2}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}, {2, 6}, {2, 7}, {2, 8}, {2, 9},
 {3, 2}, {3, 3}, {3, 4}, {3, 5}, {3, 6}, {3, 7}, {3, 8}, {3, 9},
 {4, 2}, {4, 3}, {4, 4}, {4, 5}, {4, 6}, {4, 7}, {4, 8}, {4, 9},
 {5, 2}, {5, 3}, {5, 4}, {5, 5}, {5, 6}, {5, 7}, {5, 8}, {5, 9},
 {6, 2}, {6, 3}, {6, 4}, {6, 5}, {6, 6}, {6, 7}, {6, 8}, {6, 9},
 {7, 2}, {7, 3}, {7, 4}, {7, 5}, {7, 6}, {7, 7}, {7, 8}, {7, 9},
 {8, 2}, {8, 3}, {8, 4}, {8, 5}, {8, 6}, {8, 7}, {8, 8}, {8, 9},
 {9, 2}, {9, 3}, {9, 4}, {9, 5}, {9, 6}, {9, 7}, {9, 8}, {9, 9}}
```

64

Розміщення з n елементів по n називають **перестановками**. Різні перестановки мають однакові елементи і відрізняються лише порядком їх розташування. Кількість перестановок з n елементів дорівнює $n!$

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n! \quad (3.3)$$

В системі *Mathematica* множину перестановок елементів множини M можна створити за допомогою вже розглянутої функції **Permutations**, якщо для розміру підмножин перестановок вказати кількість елементів (потужність) множини M .

Задача 3.5. Скількома способами можна скласти чергу з п'яти осіб?

Розв'язання. Скористаємося формулою (3.3), з якої отримаємо:

$$P_5 = 5! = 120.$$

```
M = {1, 2, 3, 4, 5};
A = Permutations[M, {5}];
Length[A]
120
```

Перестановками з повтореннями називають перестановки елементів масиву, якщо деякі з цих елементів однакові. Кількість таких перестановок буде меншою ніж $n!$, оскільки деякі перестановки нічого

не змінюють через однакові елементи. Кількість перестановок з повторенням, які утворюються з n елементів, серед яких є k_1 елементів 1-го типу, k_2 елементів 2-го типу, ..., k_m елементів m -го типу обчислюють за формулою

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} \quad (3.4)$$

Задача 3.6. Використовуючи усі 10 літер слова «математика» склали пароль. Скільки різних паролів можна утворити перестановкою цих літер?

Розв'язання. Слово «математика» містить наступні літери: «м» – 2, «а» – 3, «т» – 2, «е» – 1, «и» – 1, «к» – 1. За формулою (3.4) отримаємо:

$$P_{10}(2, 3, 2) = \frac{10!}{2! 3! 2!} = 151200.$$

Для розрахунку в системі *Mathematica* кількості різних перестановок з повтореннями $P_n(k_1, k_2, \dots, k_m)$ можна створити відповідну функцію

```
pnk[n_Integer, k_List: {}] := n! / Product[k[[i]]!, {i, 1, Length[k]}];
pnk[10, {2, 3, 2}]
151200
```

Інший спосіб розрахувати кількість паролів, це створити множину паролів і визначити її потужність (кількість елементів). З цією задачею легко справляється розглянута нами функція **Permutation**, яка створює множину перестановок елементів масиву A . Тобто, у випадку однакових елементів у масиві A , у результуючому масиві будуть виключені однакові перестановки.

```
A = Characters["математика"]
{м, а, т, е, м, а, т, и, к, а}

Length[Permutations[A, {10}]]
151200
```

Комбінацією (сполукою) з n елементів по k називають будь-яку підмножину з k елементів множини M , яка відрізняється від інших підмножин хоча б одним елементом. На відміну від розміщення, у

комбінаціях порядок елементів не має значення. Кількість сполук з n по k ($k \leq n$) позначають C_n^k та обчислюють за формулою

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (3.5)$$

З кожного сполучення з k елементами можна утворити P_k упорядкованих розміщень. Тому кількість сполучень із n елементів по k дорівнює числу розміщень з n елементів по k , поділеному на число перестановок з k елементів:

$$C_n^k = A_n^k / P_k \quad (3.6)$$

Вважають, що $C_n^0 = 1$

Для розрахунку кількості комбінацій з n елементів по k ($k \leq n$) в системі *Mathematica* існує вбудована функція **Binomial**

? Binomial

Binomial[n , m] gives the binomial coefficient $\binom{n}{m}$. >>

Для створення множини усіх комбінацій з n елементів по k можна використати функцію **Subsets**.

? Subsets

Subsets[$list$] gives a list of all possible subsets of $list$.

Subsets[$list$, n] gives all subsets containing at most n elements.

Subsets[$list$, { n }] gives all subsets containing exactly n elements.

Subsets[$list$, { n_{min} , n_{max} }] gives all subsets containing between n_{min} and n_{max} elements.

Subsets[$list$, $nspec$, s] limits the result to the first s subsets.

Subsets[$list$, $nspec$, { s }] gives if possible the s^{th} subset. >>

Задача 3.7. У корзині міститься 5 різних цукерок. Ви дістаєте навмання три цукерки. Скількома способами це можна зробити, якщо послідовність вибору цукерок не має значення? Навести усі варіанти комбінацій вибраних цукерок.

Розв'язання. На відміну від подібної задачі 3.2 у даній задачі виключені дублювання комбінацій, які відрізняються лише порядком елементів. Тому для множини $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ за формулою (3.5), отримаємо $C_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 / 6 = 10$. В системі *Mathematica* за допомогою функції **Subsets[M, {3}]** отримаємо множину A усіх варіантів сполучень 5 елементів по 3.

```

M = Range[5]
A = Subsets[M, {3}]
Length[A]
{1, 2, 3, 4, 5}
{{1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 2, 5}, {1, 3, 4}, {1, 3, 5},
 {1, 4, 5}, {2, 3, 4}, {2, 3, 5}, {2, 4, 5}, {3, 4, 5}}
10

```

Інший спосіб розв’язання задачі полягає в тому, щоб з розв’язку задачі 3.2 відкинути комбінації, які відрізняються лише порядком елементів. Для цього скористаємося функцією **Sort** для сортування елементів в комбінаціях, а потім функція **Union** видалить комбінації, що дублюються.

```

A = Permutations[M, {3}];
Length[A]
A = Table[Sort[A[[i]]], {i, 1, Length[A]}];
Union[A] // Length
60
10

```

Задача 3.8. На зборах присутні 30 студентів. Скількома способами можна обрати президію зборів, що складається з трьох осіб?

$$C_{30}^3 = \frac{30!}{3!27!} = 30 \cdot 29 \cdot 28 / 6 = 4060$$

```

Binomial[30, 3]
4060

Subsets[Range[30], {3}] // Length
4060

```

Комбінацією з повтореннями з n елементів по k називають довільний набір з k елементів із множини M (елементи в наборі можуть повторюватися).

Кількість комбінацій з повтореннями з n елементів по k обчислюють за формулою

$$\bar{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = C_{n+k-1}^k \quad (3.7)$$

Наприклад: Задана множина $M = \{1,2,3\}$ ($n = 3$). Складемо множину комбінацій з $k = 2$ елементів з повтореннями:

$\{\{1,1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,1\}, \{2,2\}, \{2,3\}, \{3,1\}, \{3,2\}, \{3,3\}\}$.

Кількість різних комбінацій дорівнює – 6. Цю кількість можна розрахувати за формулою (3.7). $\bar{C}_n^k$ – це кількість способів, якими можна розкласти по n ящиках k однакових предметів. Тоді множина M це множина номерів ящиків, а комбінації, в яких номери повторюються означає, що у цій комбінації у ящику з відповідним номером знаходяться два предмети.

Задача 3.9. Скількома способами можна розташувати 2-і однакових кульки у 5 ящиках? Навести усі варіанти таких розташувань.

Розв’язання. Якщо б це були різні кульки, то кількість способів визначалась би за формулою (3.2) кількістю розміщень з повтореннями з 5 елементів по 2, тобто $\bar{A}_5^2 = 5^2 = 25$. Для однакових кульок кількість способів обчислюється за формулою (3.7) як кількість комбінацій з повтореннями з 5 елементів по 2, тобто $\bar{C}_5^2 = \frac{6!}{2!4!} = 15$. Кількість комбінацій менша, оскільки для однакових кульок деякі комбінації з 25 дублюються. Наприклад, кожна з комбінацій $\{1, 2\}$ та $\{2, 1\}$ описує одну і ту ж ситуацію: перший та другий ящик містять по одній кульці. Цю задачу можна розв’язати інакше: спочатку розрахуємо скільки варіантів розмістити по 2 кульки в одному ящику. Таких варіантів буде 5. Додавимо до них кількість варіантів розмістити 2 кульки в 5 різних ящиках. Оскільки кульки однакові. То використовуємо формулу для комбінації без повторення $C_5^2 = 10$. Разом отримаємо $5 + 10 = 15$.

У системі *Mathematica* немає стандартної функції для створення множини комбінацій з повтореннями $\bar{C}_n^k$. Таку множину можна створити з множини **A** (множини розміщень з повтореннями), видаливши комбінації, які містять однаковий набір елементів (розташованих у різному порядку). Так ми отримаємо **B** – множину комбінацій з повтореннями.

```

A = Tuples[{1, 2, 3, 4, 5}, {2}]
Length[A]
B = Table[Sort[A[[i]]], {i, 1, Length[A] }];
B = Union[B]
Length[B]
{{1, 1}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5},
 {2, 1}, {2, 2}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 5},
 {3, 1}, {3, 2}, {3, 3}, {3, 4}, {3, 5},
 {4, 1}, {4, 2}, {4, 3}, {4, 4}, {4, 5},
 {5, 1}, {5, 2}, {5, 3}, {5, 4}, {5, 5}}
25
{{1, 1}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5},
 {2, 2}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}, {3, 3},
 {3, 4}, {3, 5}, {4, 4}, {4, 5}, {5, 5}}
15

```

Для вилучення однакових комбінацій спочатку сортуємо кожний елемент списку (кожну пару чисел). Після цього однакові комбінації стануть однаковими елементами масиву **B**. Для їх видалення використовуємо функцію **Union**, яка створює з масиву множину **B** з різними елементами. Потужність множини **B** дорівнює 15. Отже, 2 однакових кульки розкладаються по 5 ящиках 15 способами.

Задача 3.10. У магазині пропонують 6 різних видів цукерок. Скількома можливими способами можна обрати 8 цукерок?

Розв'язання. Шукане число $\bar{C}_6^8 = \frac{13!}{8! 5!} = 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot \frac{13}{120} = 1287$.

У системі Mathematica розраховуємо аналогічно до задачі 3.9.

```

(6 + 8 - 1) !
-----
8! (6 - 1) !
1287

```

```

A = Tuples[{1, 2, 3, 4, 5, 6}, {8}];
A = Table[Sort[A[[i]]], {i, 1, Length[A] }];
Union[A] // Length
1287

```

3.3 Гіпергеометрична ймовірність.

Розглянемо наступну задачу. Нехай у групі з N об'єктів знаходиться K відмічених об'єктів. Встановимо ймовірність того, що при виборі з групи n об'єктів ми виберемо k відмічених.

Вибрати з N по n (без врахування впорядкованості) можна C_N^n способами. Вибрати з K відмічених об'єктів по k можна C_K^k способами, причому кожному з них відповідає C_{N-K}^{n-k} способів вибору невідмічених об'єктів. Тому загальна кількість способів вибору n об'єктів, серед яких k відмічених, дорівнює $C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}$. Таким чином,

$$P = \frac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}. \quad (3.8)$$

Ймовірність, що задається виразом (3.8), називається *гіпергеометричною ймовірністю*.

Приклад. Розрахуємо ймовірність вгадати 3 числа в розіграші «Спортлото 6 з 49»

$$P_3 = \frac{C_6^3 C_{43}^3}{C_{49}^6} = \frac{8815}{499422} \approx 0.0177$$

Ймовірність вгадати 5 чисел

$$P_5 = \frac{C_6^5 C_{43}^1}{C_{49}^6} \approx 0.0000184 = 1.8 \cdot 10^{-5},$$

а вгадати усі шість чисел

$$P_6 = \frac{C_6^6 C_{43}^0}{C_{49}^6} \approx 0.00000007 = 0.7 \cdot 10^{-7}$$

Перевіримо отриманий результат ймовірності P_3 статистичним методом, тобто експериментально в системі *Mathematica*. Для цього складемо програму генерування 6 випадкових чисел з 49 можливих. Потім здійснимо 10000 спроб вгадати ці числа. У результаті отримаємо значення ймовірності дуже близьке до розрахованого.

```

Rozigrash = Union[Table[RandomInteger[{1, 49}], 6]]
loter := Table[RandomInteger[{1, 49}], 6]
imax = 10000;
i = 0;
Do[If[Length[Rozigrash ∩ loter] ≥ 3, i++], imax];
i / imax // N
c[n_, k_] := Binomial[n, k]
p = c[6, 3] c[43, 3] / c[49, 6]
N[p]

```

```
{4, 18, 26, 31, 32, 46}
```

```
0.0176
```

$$\frac{8815}{499422}$$

```
0.0176504
```

Задачі для самостійного розв'язування.

1. Знайти найбільш ймовірні значення суми очок, що випадуть при чотирикратному киданні грального кубика.
2. За допомогою генератора випадкових чисел знайти значення числа π через визначення площі одиничного круга.
3. Пін-код телефону складається з 4 цифр. Скільки пін-кодів можна скласти, у яких усі цифри різні? (розміщення $A_{10}^4 = 5040$)
4. Скільки можна скласти трицифрових чисел, які містять кожную з цифр $\{1, 2, 3\}$? (перестановки $P_3 = A_3^3 = 3! = 6$)
5. Скільки часу потрібно затратити щоб перебрати усі варіанти 4-значного цифрового паролю, якщо перевірка одного паролю триває 3 с? (розміщення з повтореннями $\bar{A}_{10}^4 = 10^4 = 10000$, $30000\text{с} = 8\text{год } 20\text{хв}$)
6. Скільки різних 4-значних цифрових паролів можна скласти використовуючи лише парні цифри $\{0, 2, 4, 6, 8\}$? (розміщення з повтореннями $\bar{A}_5^4 = 5^4 = 625$)
7. Гральний кубик кидають двічі. Яка ймовірність, що другий раз випаде більше очок ніж перший? ($P=15/36$)
8. Скільки варіантів різних номерів автомобілів можна утворити з 4 цифр? Яка ймовірність того, що з 4 цифр номера машини три однакові? ($P=0.037$)
9. Скількома способами можна впорядкувати множину натуральних чисел $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ так, щоб парні числа займали парні номери позицій? $((n!)^2)$
10. Скільки різних 4-значних парних чисел з різними цифрами можна скласти? ($8 * 8 * 7 * 4 + 9 * 8 * 7 * 1 = 2296$ - у першому доданку кількість чисел, що закінчуються на 2,4,6,8, а у другому, що закінчуються на 0)

Комбінаторика в системі *Mathematica*

N	Назва	Формула	Функції в <i>Mathematica</i>
1	Розміщення із n елементів по k	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	Permutations [M, {k}]
2	Розміщення з повтореннями з n елементів по k	$\bar{A}_n^k = n^k$	Tuples [M, k]
3	Перестановка n (Розміщення з n елементів по n)	$P_n = n!$	n! - к-сть Permutations [M, {n}]
4	Перестановки з повтореннями	$\bar{P}_n(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$	Permutations [M, {n}]
5	Комбінації (сполуки) з n елементів по k	$C_n^k = \frac{n!}{k! (n-k)!}$	Binomial [n, k] – к-сть Subsets [M, {k}]
6	Множина підмножин множини A потужністю n (булеан)	2^n – к-сть всіх підмножин	Subsets [A, n]
7	Комбінації з повтореннями з n елементів по k	$\bar{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k! (n-1)!} = C_{n+k-1}^k$	Tuples [M, k], а потім відсортувати елементи в кожній комбінації і видалити дублікати
8	Прямий (декартовий) добуток двох множин A={a1, a2, a3} B={b1,b2}	$C = A \times B$ $C = \{\{a1, b1\}, \{a1, b2\}, \dots, \{a3, b2\}\}$	Tuples [{A, B}]

Приклади використання функцій комбінаторики в системі *Wolfram Mathematica* для формування множин, списків і підрахунку кількості елементів.

Permutations [{1, 2, 3, 4}, {2}]

{{1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 1}, {2, 3},
{2, 4}, {3, 1}, {3, 2}, {3, 4}, {4, 1}, {4, 2}, {4, 3}}

$$\frac{4!}{(4-2)!}$$

12

A = Tuples [{1, 2, 3, 4}, 2]

{{1, 1}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 1}, {2, 2}, {2, 3},
{2, 4}, {3, 1}, {3, 2}, {3, 3}, {3, 4}, {4, 1}, {4, 2}, {4, 3}, {4, 4}}

Length [A] == 4²

True

Permutations [{1, 2, 3}, {3}]

{{1, 2, 3}, {1, 3, 2}, {2, 1, 3}, {2, 3, 1}, {3, 1, 2}, {3, 2, 1}}

3!

6

Subsets [{1, 2, 3, 4}, {3}]

{{1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4}}

Binomial [4, 3]

4

Subsets [{1, 2, 3}, 3]

{{}, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}}

2³

8

Tuples [{1, 2, 3}, {5, 6}]

{{1, 5}, {1, 6}, {2, 5}, {2, 6}, {3, 5}, {3, 6}}

4. Основні теореми теорії ймовірностей

Ми вже навчилися обчислювати ймовірності випадкових подій, користуючись різними означеннями ймовірності випадкової події. Зараз розглянемо, як обчислювати ймовірності складних подій, враховуючи їх сумісність чи несумісність, а також залежність чи незалежність. Такі задачі вирішуються за допомогою теорем додавання та множення ймовірностей.

4.1. Операції над подіями

На практиці обчислити ймовірність за класичним означенням часто буває складно, оскільки не для кожного експерименту можна точно визначити ймовірнісний простір елементарних подій. Елементарні події можуть утворювати складніші події, що робить необхідним вивчення алгебри подій – сукупності правил для роботи з подіями. Ці правила є важливими, оскільки на їх основі визначаються ймовірності одних подій через ймовірності інших.

Алгебричні операції над подіями можуть бути зведені до операцій над множинами. Простір елементарних подій розглядається як універсальна множина, а події – як її підмножини. У такому підході відношення між подіями інтерпретуються через відношення між множинами, що дозволяє легко визначити поняття суми та добутку подій, застосовуючи правила теорії множин.

Сумою (об'єднанням) двох подій A і B називають подію C , яка полягає в настанні хоча б однієї з цих подій, тобто подія C настає, якщо відбувається або подія A , або подія B , або обидві події одночасно. Суму подій позначають

$$C = A + B, \text{ або } C = A \cup B.$$

Наприклад, якщо подія A – це поява парної кількості очок при киданні грального кубика ($A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$), а подія B – поява кількості очок, що кратна трьом ($B = \{\omega_3, \omega_6\}$), то подія $A \cup B$ складається з елементарних подій $\omega_2, \omega_3, \omega_4$ й ω_6 , тобто $A \cup B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6\}$.

У цьому прикладі елементарна подія ω_6 входить і в подію A і в подію B . Отже, це *сумісні* події. Події, які не можуть відбутися одночасно називаються *несумісними*. Якщо події A і B несумісні, то їх сума полягає в появі або лише події A , або лише події B .

Добутком (перерізом) двох подій A і B називають подію C , яка полягає в тому, що відбуваються одночасно і подія A , і подія B . Пишуть $C = A \cdot B$, або $C = A \cap B$. Так, у прикладі, який ми розглянули, $A \cap B = \omega_6$.

Очевидно, якщо події A і B несумісні, то їхній добуток є неможливою подією: $A \cap B = \emptyset$.

Добутком кількох подій $A_1, A_2, \dots, A_m$ називають подію A , яка відбувається при настанні всіх цих подій одночасно.

Події й операції над ними часто ілюструють геометрично, подібно до зображення операцій над множинами.

4.2. Теорема додавання ймовірностей

Спочатку розглянемо несумісні події A і B , тобто такі, що не можуть відбутись одночасно, оскільки не мають спільних елементів простору елементарних подій. Нехай $P(A)$ і $P(B)$ імовірності цих подій. Тоді справедлива наступна теорема.

Теорема 1. (про ймовірність суми несумісних подій). Ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій, тобто якщо $A \cap B = \emptyset$, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \quad (4.1)$$

Доведення (для класичної ймовірності). Нехай n – загальна кількість можливих елементарних подій, m_1 кількість елементарних подій, що сприяють появі події A , m_2 – кількість елементарних подій, що сприяють появі події B . Оскільки події A та B несумісні, то відсутні елементарні події, які сприяють одночасному настанню цих подій, тому $m_1 + m_2$ – кількість елементарних подій, що сприяють настанню або події A , або події B . Отже

$$P(A \cup B) = (m_1 + m_2) / n = m_1 / n + m_2 / n = P(A) + P(B)$$

Для довільної кількості попарно несумісних подій $A_1, A_2, \dots, A_n$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n),$$

або, у згорненому вигляді, $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

Задача 4.1. Стрілець має влучити в мішень, що складається з трьох областей, які не перекриваються. Ймовірність влучення

стрільцем в першу, другу та третю області дорівнює 4/25, 9/50, 7/25 відповідно. Яка ймовірність влучення у мішень з одного пострілу?

Розв'язання. Нехай події A_1 , A_2 , та A_3 відповідають влученню стрілка в першу, другу і третю області відповідно. Ймовірності цих подій дорівнюють відповідно 4/25, 9/50 та 7/25.

Очевидно, що події A_1 , A_2 , та A_3 несумісні (неможливо влучити в дві області одночасно, оскільки вони не перекриваються). Влучення в мішень (подія A) є сумою несумісних подій A_1 , A_2 , A_3 : $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. За щойно доведеною теоремою

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 4/25 + 9/50 + 7/25 = 31/50 = 0,62$$

Протилежними називають такі дві несумісні події, які разом утворюють повну групу подій. Подію, що протилежна до події A , позначають $\bar{A}$. Події A і $\bar{A}$ несумісні, тому $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

Якщо події A і $\bar{A}$ утворюють повну групу, то під час випробування одна з них обов'язково настане, тобто сума протилежних подій є вірогідна подія: $A \cup \bar{A} = \Omega$. Позначимо $P(A) = p$, а $P(\bar{A}) = q$. Тоді $P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$. За теоремою додавання ймовірностей отримаємо $p + q = 1$; $p = 1 - q$; $q = 1 - p$.

Задача 4.2. В корзині 15 куль: 10 чорних, 5 білих. Яка ймовірність того, що з чотирьох навмання взятих куль 1) одна біла; 2) хоча б одна біла?

Розв'язання. 1) Використаємо формулу класичного означення ймовірності $P = m/n$. Розглянемо подію $A_1 = \{\text{з чотирьох куль одна біла}\}$. Кількість усіх елементарних подій дорівнює кількості різних способів (комбінацій) вибору 4 куль з 15, тобто $n = C_{15}^4 = 1365$. Кількість елементарних подій, що сприяють події A_1 , дорівнює кількості способів (комбінацій) вибору трьох чорних куль з 10 і одну білу з 5, тобто $m = C_{10}^3 C_5^1 = 120 * 5 = 600$. Отже, ймовірність того, що серед чотирьох навмання взятих куль є одна біла $P(A_1) = 600/1365 = 40/91$.

2) Нехай подія $A = \{\text{з чотирьох куль хоча б одна біла}\}$. Ця подія є сумою чотирьох несумісних подій A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , які полягають у тому, що серед чотирьох куль є відповідно 1, 2, 3, 4 білі:

$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$. За теоремою про ймовірність суми несумісних подій $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4)$. Ймовірності $P(A_2)$, $P(A_3)$, $P(A_4)$ знаходимо так само, як $P(A_1)$:

$$P(A_2) = C_{10}^2 C_5^2 / C_{15}^4 = 30/91$$

$$P(A_3) = C_{10}^1 C_5^3 / C_{15}^4 = 20/273$$

$$P(A_4) = C_5^4 / C_{15}^4 = 1/273$$

Отже,

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = 40/91 + 30/91 + 20/273 + 1/273 = 11/13.$$

PA1 = Binomial[10, 3] Binomial[5, 1] / Binomial[15, 4];

PA2 = Binomial[10, 2] Binomial[5, 2] / Binomial[15, 4];

PA3 = Binomial[10, 1] Binomial[5, 3] / Binomial[15, 4];

PA4 = Binomial[5, 4] / Binomial[15, 4];

{PA1, PA2, PA3, PA4}

Total[%]

$$\left\{ \frac{40}{91}, \frac{30}{91}, \frac{20}{273}, \frac{1}{273} \right\}$$

$$\frac{11}{13}$$

Ймовірність події A можна розрахувати інакше. Дійсно, подією, протилежною до події A , є подія $\bar{A} = \{\text{серед чотирьох куль немає жодної білої (усі 4 кулі чорні)}\}$. Тоді $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - C_{10}^4 C_5^0 / C_{15}^4$

PA = 1 - Binomial[10, 4] / Binomial[15, 4]

$$\frac{11}{13}$$

Задача 4.3. В ящику 10 білих і 6 чорних куль. Випадковим чином вибирають дві кулі. Визначити ймовірність того, що ці кулі будуть одного кольору.

Розв'язання. Нехай подія A – кулі одного кольору, подія B – кулі білі, подія C – кулі чорні. Очевидно, що події B і C несумісні, а подія $A = B \cup C$, тому за теоремою про додавання несумісних подій $P(A) = P(B) + P(C)$. Знайдемо $P(B)$ та $P(C)$:

$$P(B) = C_{10}^2 / C_{16}^2 = 3/8$$

$$P(C) = C_6^2 / C_{16}^2 = 1/8$$

Отже, $P(A) = 3/8 + 1/8 = 1/2$

```

PB = Binomial[10, 2] / Binomial[16, 2];
PC = Binomial[6, 2] / Binomial[16, 2];
{PB, PC, PB + PC}

```

```

{3/8, 1/8, 1/2}

```

Теорема 1 стосувалася додавання лише несумісних подій. Тепер розглянемо сумісні події A і B . Сума подій A і B – це подія, яка настає, якщо відбувається або тільки подія A , або тільки подія B , або обидві події одночасно (тобто події $A \cap B$).

Теорема 2. (про ймовірність суми подій).

Ймовірність суми (об'єднання) двох подій дорівнює сумі їхніх ймовірностей за вирахуванням ймовірності їхнього добутку (перетину):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad (4.2)$$

Формула (4.2) правильна як для сумісних, так і для несумісних подій. Дійсно, для несумісних подій A і B справедлива рівність $A \cap B = \emptyset$, отже ймовірність $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$. У загальному випадку $P(A \cap B) \geq 0$, і тому $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$. Ця нерівність перетворюється в рівність, якщо події A і B є несумісними.

Доведення. Це теорема легко доводиться на основі діаграм, але розглянемо доведення на основі операцій над подіями.

Враховуючи, що події A і B сумісні, подія $A \cup B$ відбудеться, якщо відбудеться одна з трьох несумісних подій $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$ або $A \cap B$. Таким чином, маємо:

$$A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B). \quad (4.3)$$

Подія A настане, якщо відбудеться одна з двох несумісних подій: $A \cap \bar{B}$ або $A \cap B$. Аналогічно, подія B настане, якщо відбудеться одна з двох несумісних подій $\bar{A} \cap B$ або $A \cap B$.

Отже, маємо $A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$ та $B = (\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)$. Використовуючи теорему додавання ймовірностей несумісних подій отримуємо:

$$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B);$$

$$P(B) = P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B) \Rightarrow P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B).$$

Таким чином, з рівняння (4.3) отримуємо:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Зауваження. Ця теорема може бути записана для трьох сумісних подій

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C),$$

А також узагальнена для довільної скінченної кількості подій.

Задача 4.4. Генератор випадкових цілих чисел видає з ймовірністю 0.5 парне число, з ймовірністю $1/3$ число, що ділиться націло на 3 і з ймовірністю $1/6$ число, що ділиться на 6. Знайти ймовірність того, що згенероване число буде ділитися на 3 або буде парним.

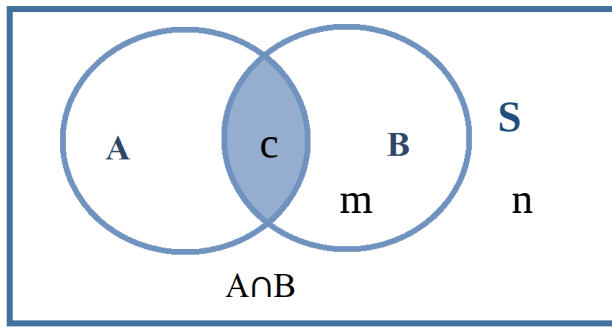
Розв'язання. Зрозуміло, що подія А (парне число) та подія В (число ділиться на 3) не є несумісними. Тому використовуватимемо формулу (4.2). Ймовірність події С (число ділиться на 6) дорівнює ймовірності $P(A \cap B)$. Отже, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

4.3. Теорема множення ймовірностей

Як вже було зазначено, основою для визначення ймовірності випадкової події є сукупність певних умов. Якщо при обчисленні ймовірності $P(A)$ не враховуються жодні додаткові обмеження, окрім цих умов, така ймовірність називається *безумовною*. Якщо ж подія А відбувається за умови, що настала інша подія В, причому $P(B) > 0$, то ймовірність події А називають *умовною* і обчислюють за формулою

$$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B), \quad (P(B) > 0). \quad (4.4)$$

Цю формулу легко отримати використовуючи класичне означення ймовірності та наступну діаграму



Нехай n – кількість елементарних подій множини S , яка містить множини A і B ; m – кількість елементарних подій множини B ; c – кількість елементарних подій, що належать одночасно обом множинам A і B . Отже, ймовірність події A при умові, що відбулась інша подія B визначається відношенням $P(A|B) = c/m$, оскільки відбулась одна з m елементарних подій множини B . Поділимо чисельник та знаменник на n і отримаємо $P(A|B) = \frac{c}{m} = \frac{c/n}{m/n} = P(A \cap B)/P(B)$.

Подію A називають *незалежною* від події B , якщо ймовірність настання події A не залежить від того, чи відбулася подія B і справедлива рівність

$$P(A|B) = P(A). \quad (4.5)$$

Подію A називають *залежною* від події B , якщо ймовірність настання події A залежить від того, чи відбулася подія B , $P(A|B) \neq P(A)$.

Приклад залежних подій. Підкидають дві монети. Нехай, подія B – хоча б на одній монеті випала цифра, подія A – на першій монеті випав *герб*. Розрахуємо ймовірності $P(A) = 0.75$, $P(B) = 0.5$, $P(A|B) = 0.5$ – ймовірність події A при умові, що на першій монеті – *герб*. Ймовірність одночасно настання подій $P(A \cap B) = 0.25$. Отже, справедлива формула $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$. Це означає, що події A і B залежні. Дійсно, $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ та $P(A|B) \neq P(A)$.

Теорема 3. (множення ймовірностей залежних подій). Розглянемо дві залежні події A і B , причому відомі ймовірності $P(A)$ і $P(B|A)$. Ймовірність одночасної появи двох залежних подій дорівнює добутку ймовірності настання однієї з них на умовну ймовірність настання іншої, обчисленої за умови, що перша відбулася:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A). \quad (4.6)$$

або

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B). \quad (4.7)$$

Наслідок. Якщо події A_i ($i = 1, n$) залежні, то ймовірність одночасного настання цих подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовні ймовірності решти, причому ймовірність настання кожної наступної події обчислюється за припущення, що всі попередні події відбулися:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}). \quad (4.8)$$

Наприклад, для трьох залежних подій A, B, C маємо:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B) \quad (4.9)$$

Теорема 4. (множення ймовірностей незалежних подій).

Ймовірність одночасного настання двох незалежних подій A і B дорівнює добутку їх ймовірностей

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad (4.10)$$

Події називають *незалежними в сукупності*, якщо ймовірність будь-якої події не залежить від настання довільної групи інших.

Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ будуть незалежними в сукупності тоді і тільки тоді, коли ймовірність добутку довільної їх комбінації дорівнює добутку відповідних ймовірностей, тобто

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}) \quad (4.11)$$

для $k = 2, 3, \dots, n$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. Якщо ця рівність виконується за $k = 2$, то події $A_1, A_2, \dots, A_n$ називають *попарно незалежними*. Попарно незалежні події можуть не бути незалежними в сукупності.

Задача 4.5. Двоє стрільців здійснюють по одному пострілу. Ймовірність влучення в ціль першим стрільцем – 0.8, а другим – 0.9. Визначити ймовірність того, що обидва стрільці влучили в ціль. Яка ймовірність, що перший влучив, а другий – ні?

Розв'язання. $P(A)=0.8$, $P(B)=0.9$. Враховуючи незалежність подій A і B , ймовірність їх одночасної появи дорівнює добуткові ймовірностей появи кожної з них:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.8 \cdot 0.9 = 0.72.$$

Знайдемо ймовірність того, що перший стрілець влучив (подія A), а другий ні (протилежна до B подія, тобто подія $\bar{B}$). Ймовірність $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0.1$. Отже, $P(A \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}) = 0.8 \cdot 0.1 = 0.08$.

Задача 4.6. (задача Бернштейна). Три грані правильного тетраедра, виготовленого з однорідного матеріалу, мають цифри 1, 2, 3, а на четвертій грані присутні всі три цифри одночасно: 1, 2, 3. Позначимо подію A_i ($i = 1, 2, 3$) як подію, що тетраедр впаде на грань з цифрою i . Потрібно довести, що події A_1 , A_2 і A_3 є попарно незалежними, але не є незалежними в сукупності.

Розв'язання. Очевидно, що $P(A_i) = 2/4 = 1/2$ ($i = 1, 2, 3$).

Покажемо, що події A_1 , A_2 , A_3 попарно незалежні. Оскільки $P(A_1 \cap A_2) = 1/4$ (подія A_1 , A_2 настає тоді і тільки тоді, коли тетраедр падає на четверту грань), то $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = 1/4$, тобто події A_1 та A_2 є незалежними. Аналогічно незалежні події A_2 та A_3 , A_1 та A_3 . Але події A_1 , A_2 і A_3 не є незалежними в сукупності, оскільки

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1/4 \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 1/8$$

Задача 4.7. Студент готуючись до екзамену вивчив лише 20 з 25 питань програми. В екзаменаційному білеті міститься три запитання. Знайти ймовірність того, що студент складе іспит на відмінно. Тобто знатиме відповіді на всі три запитання.

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що студент відповів на всі питання білету; подія A_i ($i = 1, 2, 3$) – студент відповів на i -те запитання. Тоді $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ і за формулою умовної ймовірності $P(A) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)$

Очевидно, що $P(A_2|A_1) = 19/24$, $P(A_3|A_1 \cap A_2) = 18/23$

$$P(A) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = 57/115 \approx 0.496$$

Цю задачу можна розв'язати користуючись комбінаторикою та використовуючи поняття класичної ймовірності: загальна кількість комбінацій n для вибору 3 запитань з 25 визначається як $n = C_{25}^3$, а

кількість комбінацій m , при яких студент знає всі відповіді $m = C_{20}^3$.
Отже, ймовірність $P(A) = C_{20}^3 / C_{25}^3 = \frac{57}{115}$.

$$\frac{\text{Binomial}[20, 3] / \text{Binomial}[25, 3]}{115}$$

Задача 4.8. Партія зі 100 приладів підлягає вибірковому контролю. Умовою непридатності партії є наявність хоча б одного бракованого приладу серед 5, що відібрані для контролю. Визначити ймовірність того, що партія буде визнана непридатною, якщо в ній міститься 4% браку.

Розв'язання. Розгляньмо такі події: A – партію забраковано, A_k – k -й перевірений прилад з 5 відібраних – якісний ($k=1, \dots, 5$), B – серед 5 вибраних одиниць товару всі якісні.

Тоді подію B можна записати у вигляді добутку усіх подій A_k : $B = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$. Якщо відбудеться подія B , то партію товару буде прийнято, тобто події A і B – протилежні: $B = \bar{A}$. Тому,

$$P(A) = 1 - P(B) = 1 - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$$

Очевидно, що події A_k залежні. Тому, за формулою (4.8),

$$P(A) = 1 - P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_2 \cap A_1) \cdot P(A_4|A_3 \cap A_2 \cap A_1) \cdot P(A_5|A_4 \cap A_3 \cap A_2 \cap A_1),$$

Тобто $P(A) = 1 - \frac{96}{100} \cdot \frac{95}{99} \cdot \frac{94}{98} \cdot \frac{93}{97} \cdot \frac{92}{96} \approx 0.19$. Тут враховано, що серед 100 приладів було 96 якісних, після вибору першого якісного залишилось 95 якісних з 99 і т.д.

Цю задачу можна розв'язати й інакше, використовуючи поняття класичної ймовірності та комбінаторику:

$$P(A) = 1 - C_{96}^5 / C_{100}^5 \approx 0.188$$

$$1 - \frac{96}{100} \cdot \frac{95}{99} \cdot \frac{94}{98} \cdot \frac{93}{97} \cdot \frac{92}{96} // N$$

0.188125

$$1 - \text{Binomial}[96, 5] / \text{Binomial}[100, 5] // N$$

0.188125

4.4. Ймовірність настання принаймні однієї події

Розглянемо ситуацію, коли в результаті n послідовних випробувань може настати n подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, незалежних в сукупності. Їх ймовірності відомі $p_1, p_2, \dots, p_n$, а ймовірності протилежних подій $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$, визначаються так

$$q_1 = 1 - p_1, q_2 = 1 - p_2, \dots, q_n = 1 - p_n$$

Теорема 5. Ймовірність того, що відбудеться хоча б одна з подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, незалежних в сукупності, обчислюють за формулою

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n \quad (4.12)$$

Наслідок. Якщо події $A_1, A_2, \dots, A_n$ мають однакову ймовірність p , то ймовірність настання хоча б однієї з них буде:

$$P(A) = 1 - q^n. \quad (4.13)$$

Задача 4.9. Ймовірність влучення в ціль хоча б один раз при 4-х пострілах складає 0,9984. Яка ймовірність влучення з одного пострілу.

Розв'язання. Позначимо подію A як влучення хоча б один раз при 4-х пострілах, p – ймовірність влучення для кожного пострілу, $q=1-p$ – ймовірність промаху. $P(A) = 1 - q^4=0.9984$, $q^4=0.0016$, $q=0.2$, $p=0.8$

Задача 4.10. Для виграшу в лотерею необхідно вгадати 6 чисел з 49. Для вгадування гравець використав генератор випадкових чисел, який за одну спробу генерує 6 чисел з 49. Скільки спроб потрібно зробити, щоб ймовірність принаймні одного виграшу дорівнювала 50%.

Розв'язання. Ймовірність вгадати з однієї спроби

$$p = \frac{1}{C_{49}^6} \approx 7.1511 \cdot 10^{-8}$$

Ймовірність не вгадати з n спроб $(1 - p)^n$. Отже, ймовірність вгадати з n спроб мінімум 1 раз $1 - (1 - p)^n$. За умовою задачі

$$1 - (1 - p)^n = \frac{1}{2},$$

$$\text{Звідси отримаємо } n = -\frac{\ln(2)}{\ln(1-p)} \approx 9\,692\,840 \approx 9.7 \cdot 10^6.$$

Усього варіантів вибору 6 чисел з 49: $C_{49}^6 = 13\,983\,816 \approx 14 \cdot 10^6$. Отже, якщо б гравець використав $9.7 \cdot 10^6$ спроб простим перебором цих варіантів, то ймовірність виграшу була б вищою $9.7/14 \approx 0,7$.

5. Надійність системи

Надійністю системи називають імовірність її безвідмовної роботи протягом гарантійного терміну. У складних системах надійність всієї системи залежить від надійності її компонентів. Для обчислення надійності систем її виражають через надійність окремих елементів цієї системи, яка вважається відомою, оскільки вона визначається технологією їх виробництва та умовами експлуатації чи може бути визначена тестуванням.

При цьому можливі різні варіанти впливу складових на безвідмовну роботу системи.

Системи складаються з n елементів, з'єднаних послідовно або паралельно.



Рис. 5.1. Послідовне з'єднання елементів

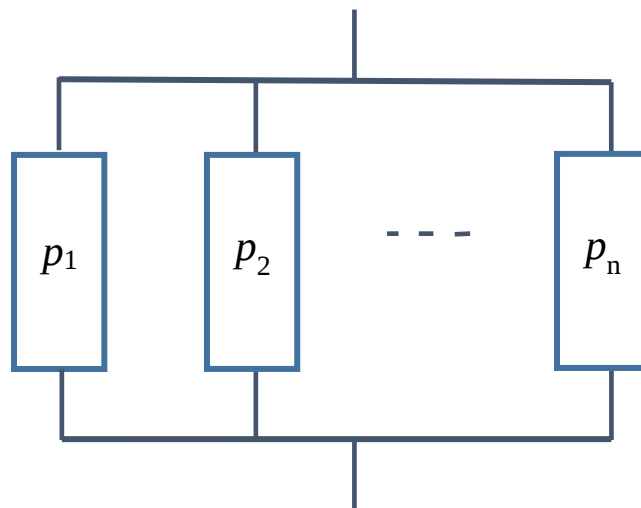


Рис. 5.2. Паралельне з'єднання елементів

Позначимо p_k надійність k -го елемента, q_k – ймовірність виходу з ладу k -го елемента протягом гарантійного терміну, P – надійність блока.

Послідовне з'єднання (рис. 5.1). Такий блок працюватиме безвідмовно лише тоді, коли усі його елементи працюватимуть безвідмовно. За теоремою множення ймовірностей незалежних подій імовірність безвідмовної роботи такого блока

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n.$$

Паралельне з'єднання (рис. 5.2). Якщо хоча б один елемент не вийде з ладу, то такий блок працюватиме безвідмовно. Тому ймовірність P безвідмовної роботи блоку з паралельним з'єднанням

$$P = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n.$$

Варто зазначити, що для розуміння надійності системи, яка складається з кількох елементів, аналогія з електричною схемою не завжди є точною. Якби це були компоненти електричного кола, то струм проходив би через усі елементи (при цьому сила струму була б обернено пропорційною до опору кожного з них). Однак у логічних схемах такого типу функціонує лише один елемент, тоді як інші перебувають у резерві: вони залишаються працездатними, але не беруть участі у виконанні завдання.

Задача 5.1. Світлодіодна стрічка складається з 30 світлодіодів, з'єднаних послідовно, які працюють незалежно. Ймовірність відмови кожного світлодіода дорівнює 0,005. Знайти ймовірність відмови усієї стрічки.

Розв'язання. Відмова світлодіода – подія, протилежна до його безвідмовної роботи. Ймовірність безвідмовної роботи елементів світлодіодної стрічки $p = 1 - q = 0.995$. Ймовірність безвідмовної роботи усієї стрічки (послідовне з'єднання)

$$P = p^n = 0.995^{30} \approx 0.86$$

Ймовірність відмови стрічки $P \approx 1 - 0.86 = 0.14$

Задача 5.2. Світлодіодна стрічка складається з 30 світлодіодів, які з'єднані по два паралельно, і 15 таких пар з'єднано послідовно. Ймовірність відмови кожного світлодіода дорівнює 0,005. Знайти ймовірність відмови усієї стрічки, якщо вважати, що відмова лише одного світлодіода у парі не призводить до негативних наслідків для усієї стрічки.

Розв'язання. Ймовірність одночасної відмови обох світлодіодів у парі $q = 0.005^2$ (паралельне з'єднання). Ймовірність безвідмовної роботи кожної пари $p = 1 - q = 1 - 0.005^2$. Ймовірність безвідмовної роботи усієї стрічки (послідовне з'єднання)

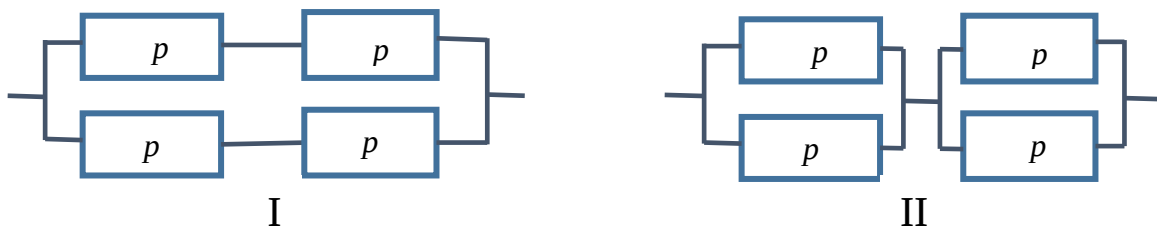
$$P = p^{15} = (1 - 0.005^2)^{15} \approx 0.99963$$

Ймовірність відмови стрічки $P \approx 1 - 0.99963 = 0.00037$.

Порівнюючи цю ймовірність з ймовірністю відмови стрічки, у якій усі світлодіоди з'єднано послідовно (Задача 4.8), бачимо, що надійність стрічки зросла більш ніж в 350 раз.

Задача 5.3. Прилад, що використовується в електричній схемі, складається з двох різних блоків, які з'єднані послідовно. Надійність кожного блоку однакова і дорівнює $p = 0.9$. Для збільшення надійності всього приладу можна паралельно до нього підключити аналогічний резервний прилад, або паралельно до кожного блоку підключити дублюючий блок. Який спосіб збільшення надійності забезпечить вищу надійність всієї системи? Як змінюватиметься різниця в надійності цих схем при збільшенні k -сті блоків у приладі?

Розв'язання.



$$\text{I)} \quad P1 = 1 - (1 - p^2)^2 = 0.964$$

$$\text{II)} \quad P2 = (1 - (1 - p)^2)^2 = 0.980$$

Отже, схема II надійніша на 1.6%.

У випадку, коли k -сть блоків $n=3$, отримаємо

$$P1 = 1 - (1 - p^3)^2 = 0.927,$$

$$P2 = (1 - (1 - p)^2)^3 = 0.970,$$

при $n=4$:

$$P1 = 1 - (1 - p^4)^2 = 0.882,$$

$$P2 = (1 - (1 - p)^2)^4 = 0.961.$$

при $n=10$:

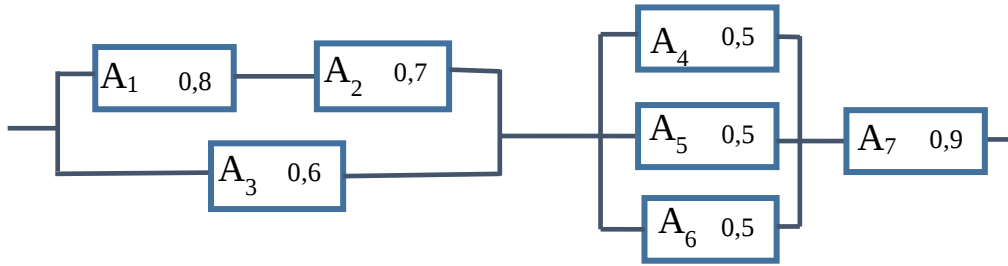
$$P1 = 1 - (1 - p^{10})^2 = 0.576,$$

$$P2 = (1 - (1 - p)^2)^{10} = 0.904.$$

Отже, при збільшенні кількості блоків різниця в надійності цих схем підключення зростає.

Задача 5.4. Обчислити надійність складної системи, наведеної на рисунку, на основі заданої надійності кожного елемента

$P(A_1) = 0.8, P(A_2) = 0.7, P(A_3) = 0.6, P(A_4) = 0.5, P(A_5) = 0.5,$
 $P(A_6) = 0.5, P(A_7) = 0.9$



Розв'язання. Три блоки A_{123} , A_{456} та A_7 з'єднані послідовно, тому надійність системи дорівнює добутку надійності кожного блоку

$$P = P(A_{123})P(A_{456})P(A_7)$$

Блок A_{123} складається з паралельно з'єднаних блоків A_{12} та A_3 , тому його надійність визначається через ймовірність одночасної відмови блоків A_{12} та A_3 . Ймовірність відмови блоку A позначатимемо $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

$$P(A_{123}) = 1 - P(\bar{A}_{12})P(\bar{A}_3) = 1 - 0.44 \cdot 0.4 = 0.824$$

$$P(\bar{A}_{12}) = 1 - P(A_{12}) = 1 - P(A_1)P(A_2) = 1 - 0.8 \cdot 0.7 = 0.44$$

$$P(\bar{A}_3) = 1 - P(A_3) = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$P(A_{456}) = 1 - P(\bar{A}_4)P(\bar{A}_5)P(\bar{A}_6) = 1 - 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.875$$

$$P = 0.824 \cdot 0.875 \cdot 0.9 = 0.6489$$

6. Формула повної ймовірності і формула Байєса

6.1. Формула повної ймовірності

Нехай подія A може відбутися лише за умови, що відбулася одна з подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, які несумісні та утворюють повну групу, тобто $H_i \cap H_j = \emptyset$, при $j \neq i$, і $\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1$. Події $H_1, H_2, \dots, H_n$, називають *гіпотезами*. Нехай ймовірності гіпотез $P(H_i)$ й умовні ймовірності $P(A|H_i)$ ($i = 1, \dots, n$) події A відомі. Тоді ймовірність події A можна визначити за такою теоремою.

Теорема 6. (формула повної ймовірності). Ймовірність події A дорівнює сумі добутків ймовірностей гіпотез на відповідні їм умовні ймовірності події A :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i) \quad (6.1)$$

Перевіримо цю формулу на прикладі грального кубика. Розрахуємо ймовірність події A – випадання парної кількості очок. Нам відомо, що $P(A) = 0.5$, але перевіримо це значення з результатом розрахунку за формулою $P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2)$, де H_1 – випадання кількості очок, що кратна 3. H_2 – випадання кількості очок, що не кратна 3. Очевидно, що $H_1 + H_2 = 1$, тобто ці події утворюють повну групу. $P(H_1) = \frac{2}{6} = 1/3$, $P(H_2) = \frac{4}{6} = 2/3$. $P(A|H_1) = 1/2$ – ймовірність парної кількості очок при умові що випала кількість очок кратне 3. $P(A|H_2) = \frac{2}{4} = 1/2$ – ймовірність парної кількості очок при умові що випала кількість очок не кратна 3. Отримаємо

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \frac{1}{3} * \frac{1}{2} + \frac{2}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Задача 6.1. В цеху виготовляються деталі трьома бригадами. На складі готової продукції виявили, що 50% деталей випущено першою бригадою, 30% – другою і 20% – третьою. У продукції першої бригади брак складає 2%, другої – 3%, а третьої – 5%. Зі складу випадковим чином беруть одну деталь. Знайти ймовірність того, що ця деталь бракована.

Розв'язання. Нехай подія A – вибрана деталь бракована, а події H_1, H_2, H_3 є гіпотезами про те, що вона виготовлена першою, другою або третьою бригадою відповідно. За умовою, ймовірності того, що деталь виготовлена першою, другою, третьою бригадами дорівнюють $P(H_1)=0.5, P(H_2)=0.3, P(H_3)=0.2$. Умовна ймовірність того, що бракована деталь виготовлена першою бригадою $P(A|H_1)=0.02$, другою – $P(A|H_2) = 0.03$, третьою – $P(A|H_3)= 0.05$.

Ймовірність того, що навмання вибрана деталь бракована описується формулою повної ймовірності:

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i) \cdot P(A|H_i) = 0.5 \cdot 0.02 + 0.3 \cdot 0.03 + 0.2 \cdot 0.05 = 0.029.$$

Задача 6.2. У двох корзинах містяться чорні та білі кульки. У першій корзині – 4 білі та 6 чорних кульки, а в другій – 6 білих і 4 чорних. З першої корзини навмання вибрану одну кульку переклали у другу корзину. Після цього з другої корзини дістали одну кульку. Треба визначити ймовірність того, що витягнута кулька є білою.

Розв'язання. Розглянемо події: H_1 – з першої корзини до другої переклали білу кульку, H_2 – з першої корзини до другої переклали чорну кульку. $P(H_1) = 0.4, P(H_2) = 0.6$ і H_1 і H_2 утворюють повну групу подій ($P(H_1) + P(H_2) = 1$). Подія A – з другої корзини витягли білу кульку.

$$P(A|H_1) = \frac{6 + 1}{10 + 1} = 7/11$$

$$P(A|H_2) = \frac{6}{10 + 1} = 6/11$$

За формулою повної ймовірності:

$$P(A) = \sum_{i=1}^2 P(H_i) \cdot P(A|H_i) = \frac{4}{10} \cdot \frac{7}{11} + \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{11} = \frac{32}{55} \approx 58.2\% .$$

6.2. Ймовірність гіпотез. Формула Байєса

Наслідком теореми множення і формули повної ймовірності є формула Байєса або теорема гіпотез.

Нехай несумісні події (гіпотези) $H_1, H_2, \dots, H_n$ утворюють повну групу, і відомі їхні ймовірності: $P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$. Подія A може настати лише сумісно з однією з гіпотез H_i ($i = 1, \dots, n$), до того ж відомі умовні ймовірності $P(A|H_i)$.

Нехай подія A відбулася. Це змінить ймовірності гіпотез. Оскільки A залежить від H_i , то й H_i залежить від A . Задача полягає в тому, щоб, маючи нову інформацію – подія A відбулася, – переоцінити ймовірності гіпотез. Тобто потрібно визначити умовні ймовірності гіпотез $P(H_i|A)$. Зокрема, очевидно, що гіпотези, які виключають можливість появи події A , слід відкинути. Нехай подія A настала разом з H_i , тобто відбулася подія $H_i \cap A$. За теоремою про ймовірність добутку подій

$$P(A \cap H_i) = P(A) \cdot P(H_i|A) = P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

звідки $P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{P(A)}$, де $P(A)$ знаходимо за формулою повної ймовірності: $P(A) = \sum_{k=1}^n P(H_k) \cdot P(A|H_k)$. В результаті отримаємо формулу для розрахунку ймовірностей гіпотез H_i за умови, що подія A відбулася – *формулу Байєса*:

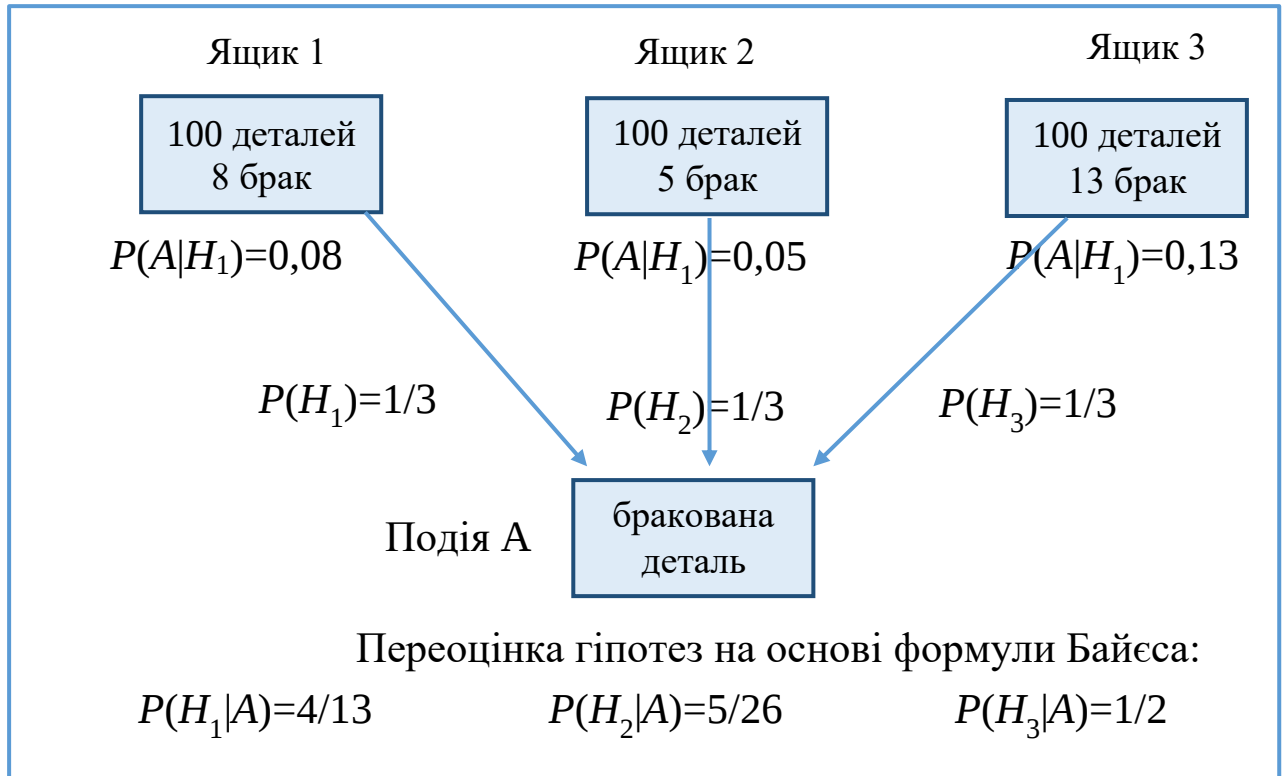
$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{\sum_{k=1}^n P(A|H_k) \cdot P(H_k)} \quad (6.2)$$

Подія A може настати лише разом з однією із подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, які утворюють повну групу, тому зрозуміло, що $\sum_{i=1}^n P(H_i|A) = 1$.

Задача 6.3. Нехай у трьох ящиках міститься по 100 деталей, серед яких є браковані. Причому у першому ящику 8 бракованих деталей, у другому ящику – 5, а у третьому – 13. Випадковим чином вибирають ящик, з якого навмання беруть одну деталь. Ця деталь виявилась бракована (подія A). Визначити ймовірність того, що деталь взяли з 1-го, 2-го чи 3-го ящика.

Очевидно, що найбільш імовірно, що ця деталь походить із третього ящика, оскільки частка браку в ньому є найбільшою, хоча початково всі гіпотези мали однакову ймовірність, оскільки H_1, H_2, H_3 – вибір з 1-го, 2-го чи 3-го ящиків – були рівноможливими:

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=1/3.$$



Отже, після настання події A , виникає необхідність переоцінити ймовірності гіпотез H_1, H_2, H_3 і визначити ймовірності гіпотез H_i за умови, що відбулась подія A , тобто потрібно за формулою Байєса розрахувати такі умовні ймовірності $P(H_i|A)$. Величини $P(A|H_i)$ – умовні ймовірності взяти браковану деталь з 1-го, 2-го і 3-го ящиків легко визначити поділивши кількість бракованих деталей на загальну кількість деталей у відповідному ящику:

$$P(A|H_1) = 8/100 = 0.08,$$

$$P(A|H_2) = 5/100 = 0.05,$$

$$P(A|H_3) = 13/100 = 0.13 .$$

Ймовірність події A за формулою повної ймовірності (знаменник у формулі Байєса):

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A|H_k) \cdot P(H_k) = 0.08 \cdot \frac{1}{3} + 0.05 \cdot \frac{1}{3} + 0.13 \cdot \frac{1}{3} = \frac{13}{150}.$$

Тоді ймовірність того, що взята бракована деталь – із 1-го ящика,

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{0.08 \cdot 1/3}{13/150} = 4/13$$

Аналогічно знаходимо ймовірності того, що бракована деталь взята із 2-го і 3-го ящика відповідно:

$$P(H_2|A) = \frac{0.05 \cdot 1/3}{13/150} = 5/26, \quad P(H_3|A) = \frac{0.13 \cdot 1/3}{13/150} = 1/2.$$

Отже, найімовірніше, що деталь взято з третього ящика. Оскільки події $H_1|A$, $H_2|A$, $H_3|A$ утворюють повну групу, то $\sum_{k=1}^n P(H_k|A) = \frac{4}{13} + \frac{5}{26} + \frac{1}{2} = 1$.

У випадку однакових ймовірностей $P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)$ та однакової кількості деталей у ящиках цей же результат можна отримати простіше, виходячи з того, що усіх бракованих деталей 26, тому ймовірність отримати браковану деталь з першого ящика $8/26=4/13$, з другого $5/26$, а з третього $13/26=1/2$.

Така логіка вже не підходить для випадку різних ймовірностей $P(H_1) \neq P(H_2) \neq P(H_3)$ чи різної кількості деталей у ящиках. У цьому випадку для визначення ймовірності того, що деталь була взята з першого ящика необхідно визначити яка доля від повної ймовірності отримати браковану деталь припадає саме на перший ящик.

Розглянемо наступний приклад.

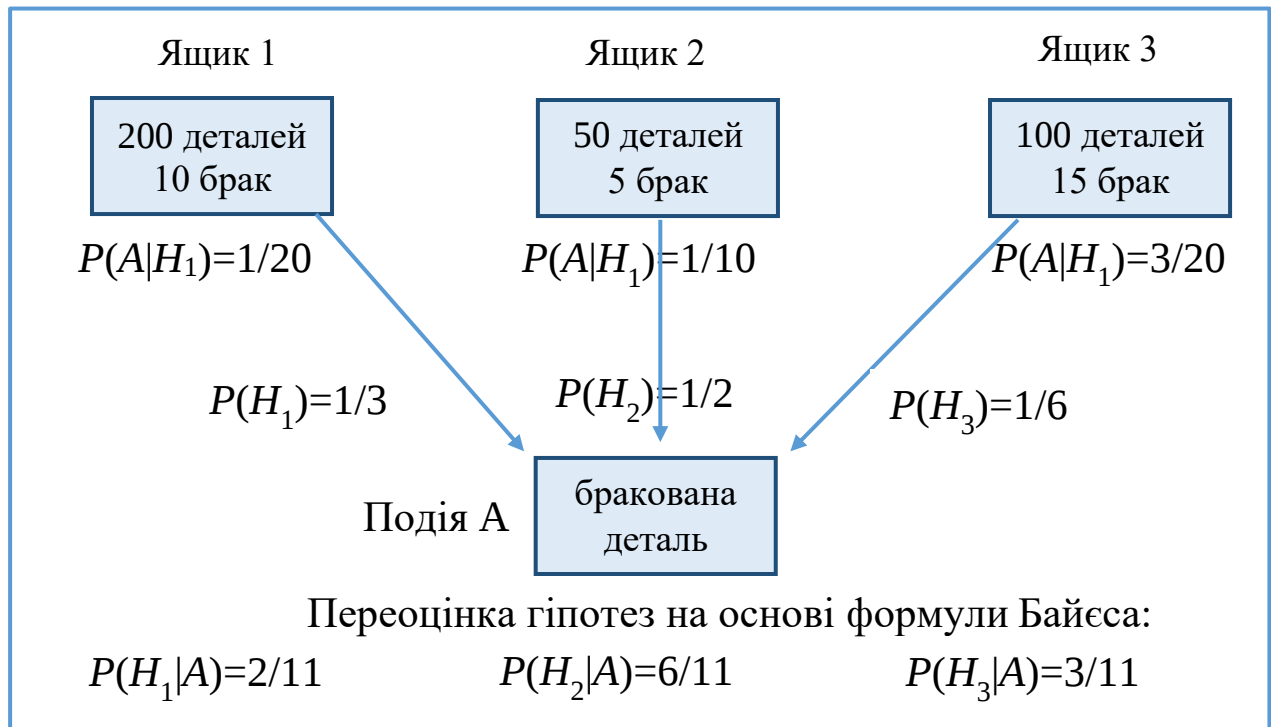
Задача 6.4. Нехай у трьох ящиках міститься 200, 50 та 100 деталей відповідно. Відомо, що у першому ящику 10 бракованих деталей, у другому – 5, у третьому – 15. Ймовірності, що деталь виберуть з першого ящика складає $1/3$, з другого – $1/2$, а з третього – $1/6$. Навмання вибрана деталь виявилась бракована. Яка ймовірність, що ця деталь була взята з першого ящика? З другого? З третього?

Розв'язання. Ймовірність події A (вибрана бракована деталь) розрахуємо за формулою повної ймовірності:

$$P(A) = \sum_{k=1}^3 P(A|H_k) \cdot P(H_k) = 1/20 \cdot \frac{1}{3} + 1/10 \cdot \frac{1}{2} + 3/20 \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{120}$$

Ймовірність того, що ця деталь з першого ящика:

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{1/20 \cdot 1/3}{11/120} = 2/11$$



Аналогічно знаходимо ймовірності того, що взята бракована деталь із другого та третього ящиків:

$$P(H_2|A) = \frac{1/10 \cdot 1/2}{11/120} = 6/11, \quad P(H_3|A) = \frac{3/20 \cdot 1/6}{11/120} = 3/11.$$

Сума ймовірностей залишається рівною одиниці:

$$2/11 + 6/11 + 3/11 = 1.$$

Задача 6.5. Пристрій включає два послідовно з'єднані блоки. Ймовірність відмови першого блоку становить 0.2, а другого – 0.1. Під час випробування пристрій зазнав відмови. Визначити ймовірність того, що вийшов з ладу перший блок.

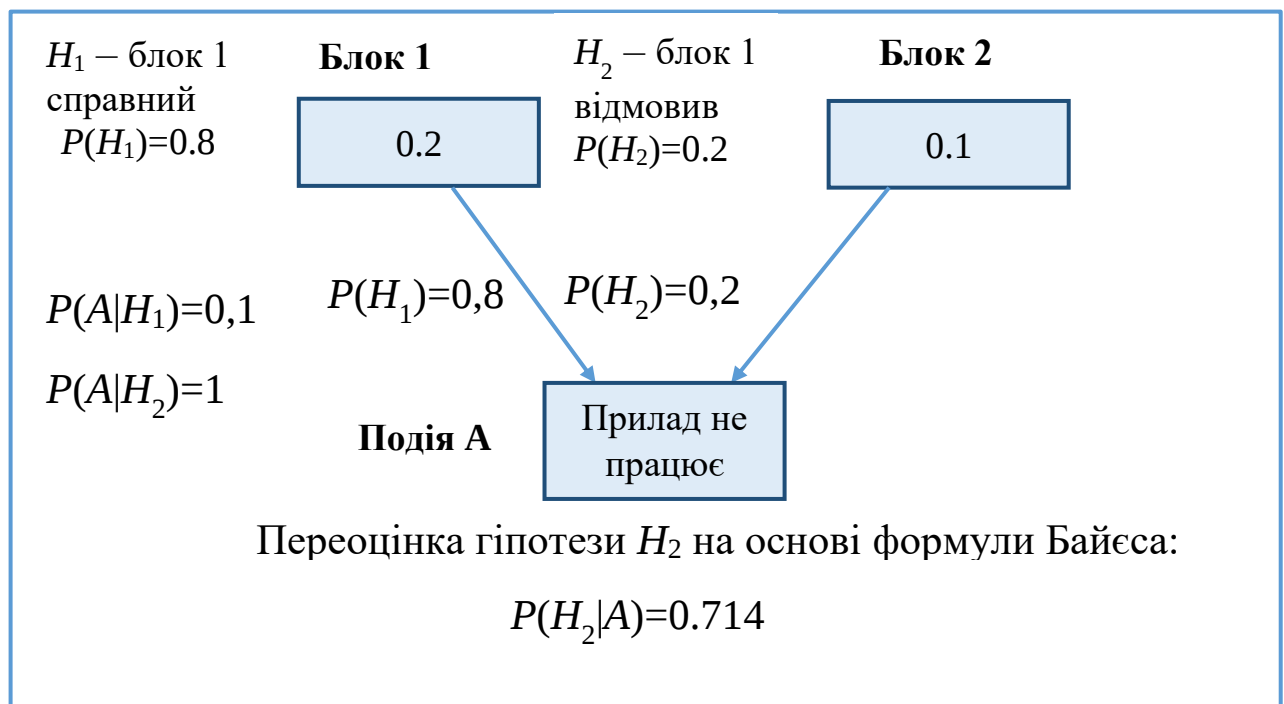
Розв'язання. Позначимо: А – прилад вийшов з ладу; H_1 – перший блок справний, H_2 – перший блок відмовив.

Зауваження: Невірно було б позначити H_2 – другий блок справний, бо ця подія сумісна з гіпотезою H_1 , а гіпотези повинні утворювати повну групу несумісних подій.

З умови задачі відомо: $P(H_1) = 0.8$; $P(H_2) = 0.2$, $P(A|H_1) = 0.1$ (бо якщо перший блок справний, то пристрій вийде з ладу внаслідок відмови другого блоку з ймовірністю 0.1); $P(A|H_2) = 1$ (оскільки блоки з'єднані послідовно і вихід з ладу першого блоку обов'язково призведе відмову пристрою в цілому). Тоді за формулою Байєса маємо

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_1)P(H_1)}$$

$$P(H_2|A) = \frac{1 \cdot 0.2}{1 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.8} = \frac{0.2}{0.28} = 0.714$$



Задача 6.6. (Парадокс Монті-Голла). Уявіть себе на телегрі, де вам потрібно обрати одні з трьох дверей: за одними з них автомобіль; за двома іншими по козі. Ви обираєте одні двері, наприклад №3, ведучий відчиняє одні з двох інших, наприклад №2, за якими коза. Тоді він каже вам: «Бажаєте змінити вибір на двері №1?» Чи отримаєте ви перевагу, якщо зміните свій вибір? Яка ймовірність виграти автомобіль, якщо ви зміните свій вибір?



Розв'язання. Позначимо події A_1, A_2, A_3 – автомобіль за 1-ми, 2-ми чи 3-ми дверима відповідно. Події B_1, B_2, B_3 – ведучий відкрив 1-і, 2-і чи 3-і двері відповідно. Ми вибрали двері №3, а ведучий відкрив двері №2. Розрахуємо ймовірність, що автомобіль за дверима №1, тобто $P(A_1|B_2)$. За формулою Байєса отримаємо

$$P(A_1|B_2) = \frac{P(A_1)P(B_2|A_1)}{P(B_2)} = \frac{P(A_1)P(B_2|A_1)}{P(B_2|A_1)P(A_1) + P(B_2|A_2)P(A_2) + P(B_2|A_3)P(A_3)}$$

Ймовірності подій A_1, A_2, A_3 однакові, бо на початку всі двері закриті $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$.

$P(B_2|A_1) = 1$ – це ймовірність ведучому відкрити двері №2 при умові, що автомобіль за дверима №1. Зрозуміло, що у нього нема іншого вибору, бо він бачить де автомобіль.

$P(B_2|A_2) = 0$ – ведучий не може відкрити двері №2, якщо там автомобіль. $P(B_2|A_3) = 1/2$ – ймовірність ведучому відкрити двері №2 при умові, що автомобіль за дверима №3. Якщо автомобіль за дверима №3 (на які Ви вказали), у ведучого є два можливих варіанти: двері №1 і №2. Ці варіанти рівноймовірні.

У результаті отримуємо:

$$P(A_1|B_2) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{1 \cdot \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

Тобто, змінивши свій перший вибір, ймовірність виграшу зростає у два рази.

Перевіримо експериментально отриманий результат. Для цього складемо програму в *Mathematica*

```
count = 0;  
Do[a = RandomInteger[{1, 3}];  
  h = RandomInteger[{1, 3}];  
  range = Range[3];  
  rest = Complement[range, {a}, {h}];  
  nb = RandomInteger[{1, Length[rest]}];  
  b = rest[[nb]];  
  If[Complement[range, {b}, {h}] == {a}, count++, {100}];  
count
```

66

У змінній **a** зберігається номер дверей, за якими знаходиться автомобіль, у змінній **h** зберігається номер дверей, на які вказує гравець. У масиві **rest** зберігаються номери дверей, які ведучий може відкрити. Змінна **b** вказує на номер дверей, які відкриває ведучий. В результаті залишаються двері, на які може вказати гравець, якщо готовий змінити свій перший вибір. Повторюємо дослід 100 раз і підраховуємо скільки разів автомобіль знаходиться за дверима, на які гравець вказав би, якщо б змінив свій початковий вибір. Результат виконання цієї програми змінюється у невеликих межах біля значень 66-67, що відповідає ймовірності $2/3$.

Задача 6.7. (Задача Льюїса Керролла про трьох в'язнів)

Троє в'язнів чекають на вирок: двох з них страчуть, а одного помилують. Жоден з в'язнів не знає, хто саме буде страчений, але тюремник знає результати. Один із в'язнів (назвемо його в'язень *A*) звертається до тюремника з таким проханням: "Ти знаєш, хто буде страчений. Я знаю, що з трьох нас двоє будуть страчені. Скажи мені ім'я одного з моїх товаришів, кого точно страчуть, але не називай мене, навіть якщо я є одним з двох засуджених." Тюремник погоджується, перевіряє список і каже: "В'язень *B* буде страчений." В'язень *A* вигукує: "Ура! Тепер ймовірність, що я залишусь живим 50%"

Доведіть, що ймовірність виживання в'язня *A* залишилась рівною $1/3$.
Розв'язання. Можливі три варіанти страт: $\{AB, BC, CA\}$. Ймовірності їх відповідно: $P(AB)$, $P(BC)$, $P(CA)$ і вони рівні $1/3$. Ймовірність того,

що тюремник назве в'язня B позначимо $P(B)$. Розрахуємо умовну ймовірність $P(BC|B)$ – це ймовірність залишитися живим в'язню A після повідомлення тюремника.

$$P(BC|B) = \frac{P(B|BC) * P(BC)}{P(B)},$$

де $P(B) = P(B|BC) * P(BC) + P(B|AB) * P(AB) + P(B|AC) * P(AC)$.
 $P(B|AC) = 0$, бо тюремник не зможе назвати B , якщо його нема у списку до страти.

$P(B|AB) = 1$, бо іншого варіанту у нього нема.

$P(B|BC) = 1/2$, бо у тюремника є два варіанти: B і C .

$$P(BC|B) = \frac{\frac{1}{2} * \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} * \frac{1}{3} + 1 * \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.$$

Отже, ймовірність вижити у в'язня A не змінилась і він зарано зрадив. Насправді мав би зрадити в'язень C , оскільки його ймовірність вижити зросла удвічі.

Задача 6.8. Виготовлені в цеху деталі відправляються для перевірки їх якості до одного з двох контролерів. Ймовірність того, що деталь буде перевіряти перший контролер, становить 0.6, а другий – 0.4. Ймовірність того, що деталь визнається бракованою першим контролером, дорівнює 0.06, а другим – 0.02. Знайдіть ймовірність того, що деталь перевіряв другий контролер, якщо деталь була визнана бракованою. Знайдіть ймовірність того, що деталь перевіряв перший контролер, якщо деталь була визнана стандартною.

Задача 6.9. Робітник обслуговує три верстати. Ймовірність виготовлення бракованої деталі на першому верстаті становить 0.04, на другому – 0.01, а на третьому – 0.07. Продуктивність першого верстата утричі перевищує продуктивність другого, а третього – удвічі нижча за продуктивність другого.

а) Визначити ймовірність того, що випадково обрана деталь є бракованою.

б) Якщо випадково обрана деталь виявилася бракованою, на якому верстаті найімовірніше її було виготовлено?

Задача 6.10. Нехай ймовірність браку у першого робітника $p_1 = 0,9$, у другого робітника – $p_2 = 0,5$, а в третього – $p_3 = 0,2$, Перший робітник виготовив $n_1 = 800$ деталей, другий – $n_2 = 600$ деталей, а третій – $n_3 = 900$ деталей. Начальник цеху бере випадкову деталь, і вона виявляється бракованою. Постає питання, з якою ймовірністю цю деталь виготовив третій робітник?

$$(P(A_1) = \frac{8}{23}, \dots, P(B|A_3) = 0.2, \dots, P(A_3|B) = 0.15)$$

Задача 6.11. Студент може різним способом вчасно добратися в інститут на пари. Він з ймовірністю 50% може сісти в автобус, який його з ймовірністю 70% вчасно привезе в інститут, з ймовірністю 20% поїде на таксі, яке його з ймовірністю 90% вчасно привезе, з ймовірністю 10% студент піде пішки і тоді з ймовірністю 50% не запізниться, а ще може з ймовірністю 10% сісти не в той автобус і тоді з ймовірністю 90% запізниться. Знайти ймовірність того, що студент вчасно прийде на пари (подія **A**), ймовірність того, що він запізниться (подія **B**). Яка ймовірність того, що студент сів не в той автобус, якщо він вчасно потрапив на пари? Яка ймовірність того, що студент сів не в той автобус, якщо він запізнився на пари?

$$(P(A) = 0.6, P(B) = 0.4, P(A|H_4) = \frac{1}{30}, P(B|H_4) = 0.45)$$

7. Повторні випробування

7.1. Послідовні незалежні випробування. Формула Бернуллі

Означення. Якщо проводяться n незалежних випробувань за однакових умов, де ймовірність події A в кожному випробуванні дорівнює p і не залежить від інших випробувань, така послідовність випробувань називається *схемою Бернуллі*.

Нехай проводиться скінченна кількість спроб n , у кожній з яких подія A може відбутися з ймовірністю p , причому результат кожної спроби не залежить від інших. Такі спроби називаються незалежними стосовно події A . Знайдемо $P_n(k)$ – ймовірність настання події A рівно k разів у результаті проведення n незалежних спроб, за умови, що ймовірність її настання в кожній спробі є однаковою $P(A) = p$. Ймовірність ненастання події A (тобто настання події $\bar{A}$) $P(\bar{A}) = q = 1 - p$. Зазначимо, що в даному випадку не потрібно, щоб подія A відбулася k разів у певній послідовності. Ймовірність того, що в n спробах подія A настане k разів, а в $n-k$ спробах настане протилежна подія $\bar{A}$, дорівнює $p^k \cdot q^{n-k}$ (за теоремою множення ймовірностей незалежних подій). Оскільки, подія A може настати k разів у різних комбінаціях, то їх кількість дорівнює C_n^k . Використовуючи теорему додавання ймовірностей, отримаємо *формулу Бернуллі*:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (7.1)$$

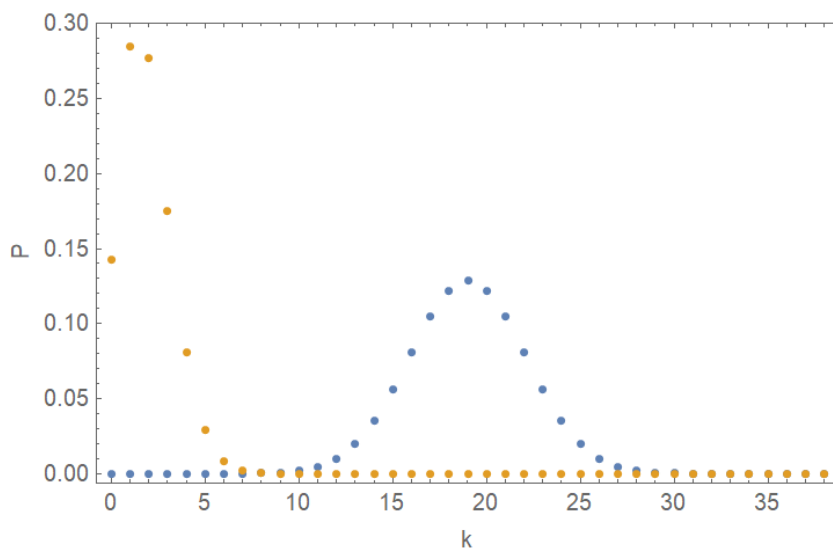
Число k_0 , за якого ймовірність $P_n(k_0)$ найбільша, називають *найімовірнішим числом настання події A або модою*. Очевидно, що величина $k_0 \approx np$.

Наприклад, при $p = 0.5$ і $n = 38$ справедливо очікувати, що $k_0 = 19$. Важче встановити значення k_0 у випадку $p = 0.05$ і $n = 38$. Оскільки у цьому випадку $np = 1.9$ і здавалось б, що $k_0 = 2$. Насправді розрахунок показує, що $P_{38}(2) = 0.277$ а $P_{38}(1) = 0.285$. Отже можна довести, що найімовірніша кількість k_0 появ події в n незалежних випробуваннях Бернуллі задовольняє такі нерівності

$$np - q \leq k_0 \leq np + p, \text{ або } (n + 1)p - 1 \leq k_0 \leq (n + 1)p. \quad (7.2)$$

Довжина інтервалу, який визначає ця нерівність, дорівнює одиниці і ціле число k_0 має бути в цьому інтервалі. Отже, якщо $(n + 1)p$ – ціле число, то дві границі інтервалу є цілі числа і найбільшого значення ймовірності $P_n(k)$ досягається при $k_1 = (n + 1)p - 1$ та $k_2 = (n + 1)p$. Для прикладу в системі *Mathematica* побудуємо графік розподілу ймовірності $P_{38}(k)$ при $p = 0.5$ та $p = 0.05$.

```
n = 38; p = 0.5; q = 1 - p;
A1 = Table[{k, Binomial[n, k] p^k q^(n-k)}, {k, 0, n}];
p = 0.05; q = 1 - p;
A2 = Table[{k, Binomial[n, k] p^k q^(n-k)}, {k, 0, n}];
fig1 = ListPlot[{A1, A2}, Frame -> True, FrameLabel -> {"k", "P"},
PlotRange -> All]
```



З графіка видно, що максимум ймовірності припадає на величину k_0 , яка визначається формулами (7.2).

Легко показати, що ймовірність появи події A у n випробуваннях менше ніж m разів розраховують за формулою

$$P_n(k < m) = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(m - 1) = \sum_{k=0}^{m-1} P_n(k), \quad (7.3)$$

а ймовірність поява події A не менше ніж m разів розраховують за формулою

$$P_n(k \geq m) = \sum_{k=m}^n P_n(k), \text{ або } P_n(k \geq m) = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} P_n(k). \quad (7.4)$$

Для ймовірності поява події A не менше ніж m_1 разів і не більше ніж m_2 використовують таку формулою

$$P_n(m_1 \leq k \leq m_2) = \sum_{k=m_1}^{m_2} P_n(k) . \quad (7.5)$$

Ймовірність настання події A хоча б один раз у n випробуваннях доцільно обчислювати за формулою $P_n(1 \leq m \leq n) = 1 - q^n$.

Формула Бернуллі є одним з доданків розкладу бінома Ньютона:

$$(p + q)^n = p^n + n \cdot p^{n-1}q + \dots + C_n^k p^k q^{n-k} + \dots + q^n. \quad (7.6)$$

Якщо p – ймовірність настання події A в одному випробуванні, то кожний доданок цього розкладу відповідає ймовірності настання події A у серії з n випробувань ту кількість разів, яка дорівнює степені величини p в цьому доданку. Сума усіх доданків у формулі (7.6) дорівнює одиниці, оскільки $p + q = 1$.

Задача 7.1. Студентська група складається з 20 студентів. Кожний студент може прийти на лекцію з ймовірністю 90% і ця ймовірність ніяк не пов'язана з ймовірностями відвідування лекції рештою студентів. Яка ймовірність того, що на лекцію прийдуть не менше 18 студентів?

Розв'язання. Скористаємося формулою (5.4) і розрахуємо ймовірність того, що лекцію відвідають не менше 18 студентів:

$$P_{20}(18 \leq k \leq 20) = \sum_{k=18}^{20} P_{20}(k) = \sum_{k=18}^{20} C_{20}^k 0.9^k 0.1^{20-k} \approx 0.677 .$$

Ця ймовірність збігається з ймовірністю того, що лекцію пропустить не більше ніж 2 студенти:

$$P_{20}(0 \leq k \leq 2) = \sum_{k=0}^2 P_{20}(k) = \sum_{k=0}^2 C_{20}^k 0.1^k 0.9^{20-k} \approx 0.677$$

p = 0.9;

n = 20;

Sum[Binomial[n, k] p^k (1 - p)^{n-k}, {k, 18, 20}]

0.676927

Задача 7.2. Технологічний процес виготовлення продукції на заводі дозволяє отримати 90% виробів найвищого сорту. Знайти найімовірніше число виробів найвищого сорту в партії з 200 штук.

Розв'язання. За умовою задачі $n = 200$; $p = 0.912$; $q = 1 - p = 0.088$. Використовуючи подвійну нерівність (5.2), дістаємо:

$$200 \cdot 0.912 - 0.088 \leq k_0 \leq 200 \cdot 0.912 + 0.912$$

$$182.312 \leq k_0 \leq 183.312 \quad \text{Отже, } k_0 = 183.$$

Граничні теореми формули Бернуллі

Обчислення ймовірності за формулою Бернуллі викликає певні труднощі, якщо числа n і k великі, оскільки необхідно розраховувати вирази з високими степенями та складні комбінації C_n^k . Тому для розрахунку цих ймовірностей часто застосовують значно простіші асимптотичні (наближені) формули, які впливають з граничної теореми Пуассона, з локальної та з інтегральної теорем Муавра–Лапласа.

Термін «граничні теореми» в обох випадках пов’язаний з тим, що ці теореми встановлюють поведінку ймовірності $P_n(k)$ або $P_n(k_1 \leq k \leq k_2)$ за певних умов, однією з яких є умова $n \rightarrow \infty$. З огляду на це за досить великих значень n ($n \geq 100$) та за малих p замість формули Бернуллі часто використовують наближені формули.

Зауваження: *Wolfram Mathematica* здатна виконувати розрахунки за формулою Бернуллі абсолютно точно навіть при великих n і k . Це дає можливість оцінити точність асимптотичних формул в конкретних задачах.

7.2. Формула Пуассона (теорема Пуассона)

Теорема Пуассона. Якщо $n \rightarrow \infty$ і $p \rightarrow 0$ так, що $np \rightarrow \lambda$, $0 < \lambda < \infty$, то

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (7.7)$$

для будь-якого сталого $k=0, 1, 2, \dots$. Тобто для малоїмовірних подій (малі значення p) і для достатньо великих n ($n \cdot p < 10$) ймовірність того, що подія настане рівно k разів можна розрахувати за наближеною формулою Пуассона

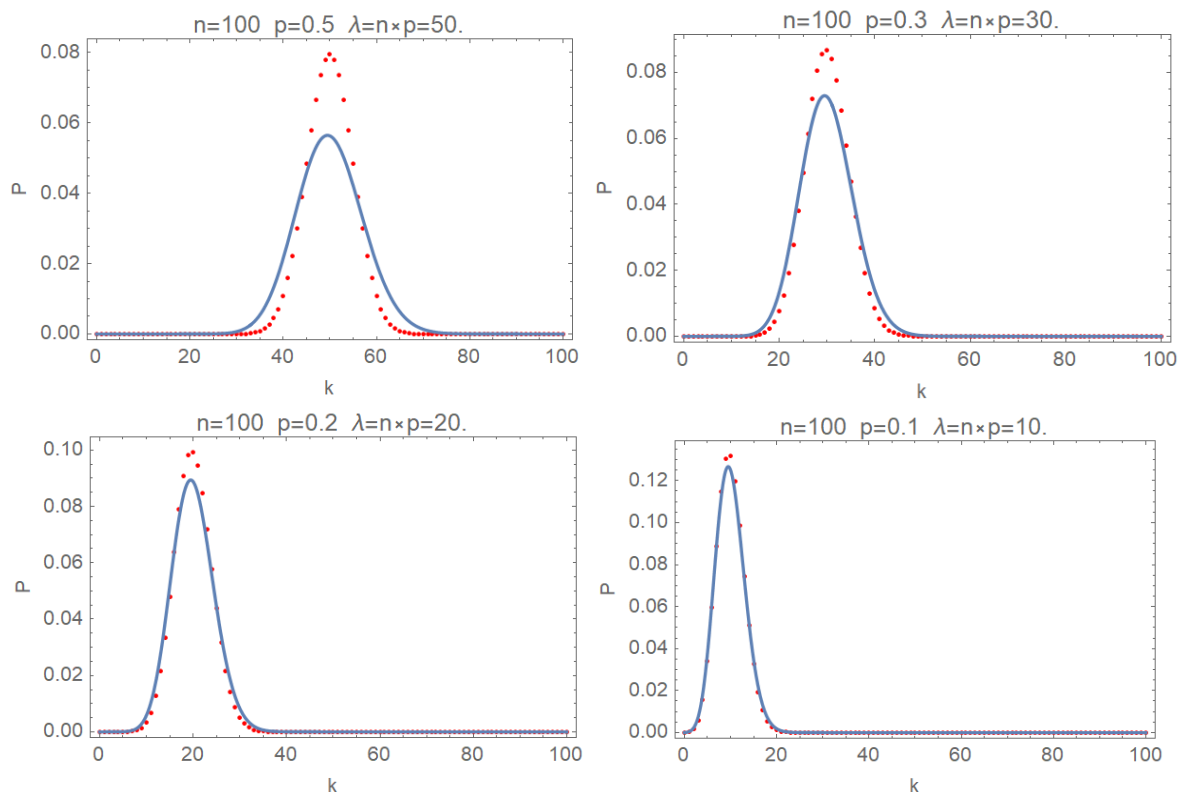
$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np. \quad (7.8)$$

Для порівняння наведемо результати розрахунків за формулами (7.7) та (7.8) для $n = 100$ та різних значень p в системі *Mathematica*.

```

q := 1 - p;
A := Table[{k, Binomial[n, k] pk qn-k}, {k, 0, n}];
fig1 := ListPlot[A, Frame → True, FrameLabel → {"k", "P"},
  PlotLabel → Row[{"n=", n, " p=", p, " λ=n×p=", n p}],
  PlotRange → All, PlotStyle → {Red}]
poisson[λ_, k_] := (λ)k / k! E-λ
fig2 := Plot[poisson[n p, k], {k, 0, n}, Frame → True, PlotRange → All]
n = 100; p = 0.5; Show[fig1, fig2]
n = 100; p = 0.3; Show[fig1, fig2]
n = 100; p = 0.2; Show[fig1, fig2]
n = 100; p = 0.1; Show[fig1, fig2]

```



На графіках суцільною лінією наведено функцію Пуассона при різних значеннях параметра $\lambda = n \cdot p$. При зменшенні λ точність розрахунку ймовірності за формулою Пуассона зростає. За критерій застосовності формули Пуассона можна вибрати виконання умови $\lambda < 10$.

Розглянемо приклад використання формули Пуассона.

Задача 7.3. У місті Чернівці 0,4% мешканців хворих на Covid-19. Яка ймовірність, що серед 1000 відвідувачів НН ІФТКН п'ятеро будуть носіями інфекції?

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Розв'язання. З формули Бернуллі $P_{1000}(5) = C_{1000}^5 p^5 q^{995}$, $p=0.004$, $q=0.996$

```
p = 0.004; n = 1000; k = 5; Binomial[n, k] p^k (1 - p)^(n-k)
0.156607
```

Отже, з точної формули Бернуллі отримаємо $P_{1000}(5) \approx 0.1566$
Розрахуємо за наближеною формулою Пуассона:

```
poisson[λ_, k_] := (λ)^k / k! E^-λ
poisson[1000 * 0.004, 5]
0.156293
```

Перевіримо критерій застосовності формули Пуассона ($\lambda < 10$).
 $1000 \cdot 0.004 = 4 < 10$. Отже, для малої ймовірності та великих n формула Пуассона дозволяє розрахувати ймовірність в моделі Бернуллі з високою точністю.

7.3. Локальна теорема Муавра–Лапласа

Локальна теорема Муавра–Лапласа. Якщо у схемі Бернуллі кількість випробувань n достатньо велика, а ймовірність p появи події A в одному випробуванні відмінна від нуля й одиниці, то ймовірність появи події A рівно m разів можна наближено розрахувати за формулою

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad (7.9)$$

де $q = 1-p$, $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Тобто

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}} \exp\left[-\frac{(m-np)^2}{2npq}\right], \quad (7.10)$$

Формулу (7.9) називають *локальною формулою Лапласа*. Вона справджується з прийнятним рівнем точності, якщо $\boxed{npq \geq 10}$. Чим більше значення npq , тим більша точність формули Лапласа. Щоб краще задовольнялась ця умова ймовірність p не повинна бути надто близькою до 0 або до 1. Відносна похибка формули (7.9) $\varepsilon \rightarrow 0$, якщо $n \rightarrow \infty$. Функцію $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ називають *функцією Гауса*. Функція Гауса – парна: $\varphi(x) = \varphi(-x)$. Графік функції Гауса називають кривою

Гауса. Функцію Гауса ще називають *функцію густини ймовірності для стандартного нормального розподілу випадкової величини*.

У системі *Mathematica* аналітичний вигляд функції густини ймовірності різних розподілів можна отримати за допомогою функції **PDF** (скорочення від *probability density function*)

`PDF[NormalDistribution[0, 1], x]`

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

Функція Гауса досягає максимального значення при $x = 0$, а при $|x| > 4$ практично дорівнює нулю. Визначений інтеграл від функції Гауса в межах $(-\infty, \infty)$ дорівнює одиниці, а в межах $(-4, 4) \approx 0.999937$, тому в практичних розрахунках приймають $\varphi(|x| > 4) \approx 0$.

Побудуємо графік функції Гауса

`Plot[PDF[NormalDistribution[0, 1], x], {x, -4, 4}]`

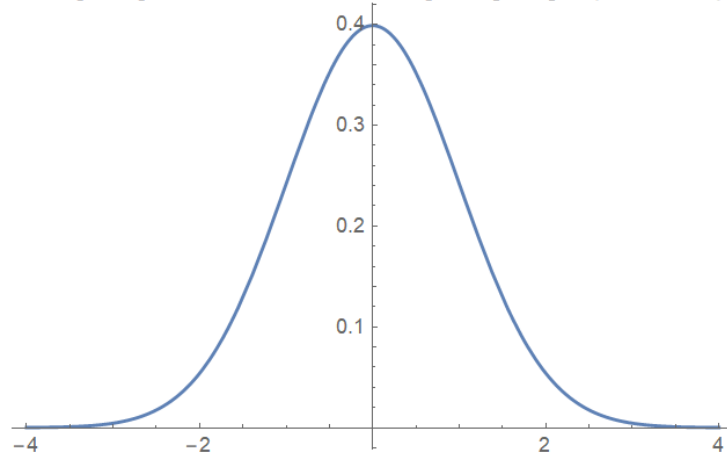


Рис.7.1. Функція Гауса.

Якщо $|x| > 4$, то, як видно з графіка $\varphi(x)$ практично дорівнює 0. Дослідити властивості функції Гауса можна в системі *Mathematica*.

Локальну формулу Лапласа, тобто ймовірність $P_n(m)$, можна отримати, якщо застосувати відповідні значення аргументів

`PDF[NormalDistribution[n p, Sqrt[n p q]], m]`

$$\frac{e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}}}{\sqrt{2\pi npq}}$$

Для порівняння наведемо результати розрахунків за точною формулою (7.1) та наближеною (7.10) для $n = 40, 20, 200$ та різних значень p в системі *Mathematica*.

```
q := 1 - p;
A := Table[{k, Binomial[n, k] p^k q^(n-k)}, {k, 0, n}];
fig1 := ListPlot[A, Frame → True, FrameLabel → {"m", "P"},
  PlotLabel → Row[{"n=", n, "  p=", p, "  n×p×q=", n p q}],
  PlotRange → All, PlotStyle → {Red}]

gaus[x_] :=  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$  Exp[-x^2/2];

Laplas[n_, p_, m_] :=  $\frac{1}{\sqrt{n p (1-p)}}$  gaus[ $\frac{m - n p}{\sqrt{n p (1-p)}}$ ]

fig2 := Plot[Laplas[n, p, m], {m, 0, n}, Frame → True,
  PlotRange → All]

n = 40; p = 0.5; Show[fig1, fig2]
n = 40; p = 0.2; Show[fig1, fig2]
n = 20; p = 0.1; Show[fig1, fig2]
n = 200; p = 0.95; Show[fig1, fig2]
```

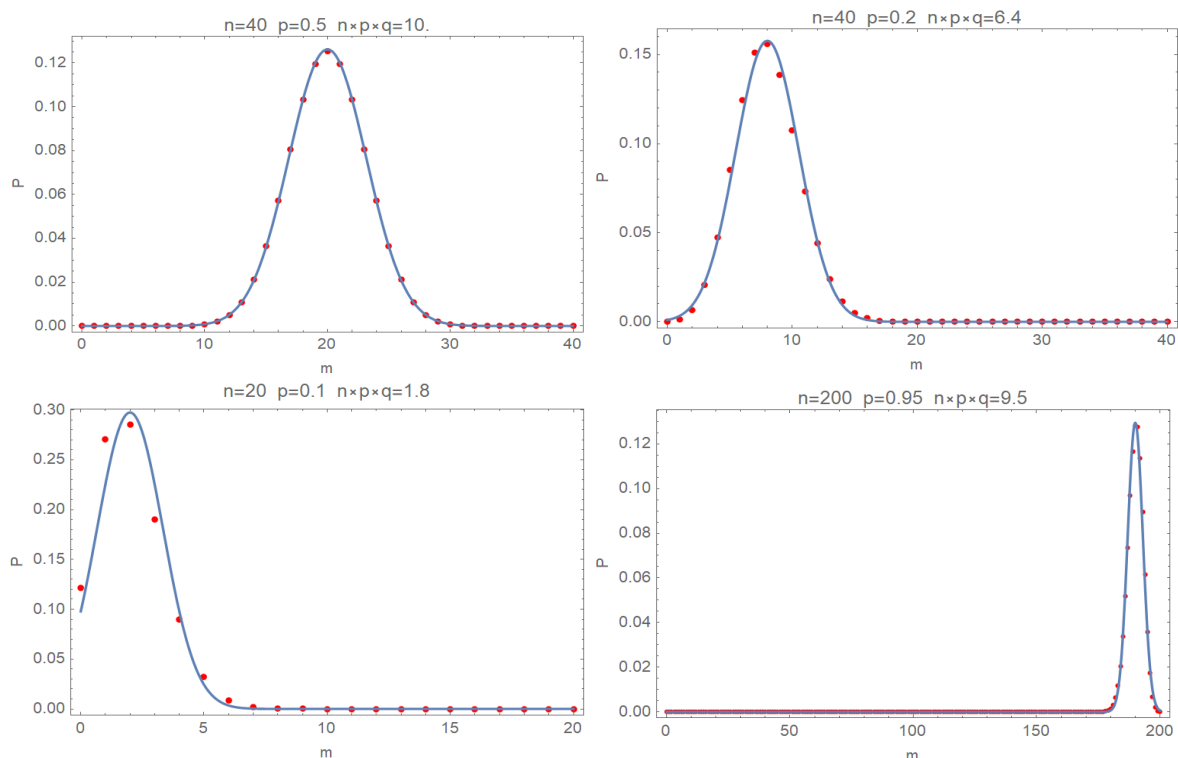


Рис.7.1. Ймовірності $P_n(m)$: суцільна лінія – за локальною формулою Лапласа; червоні точки – за точною формулою Бернуллі.

На графіках суцільною лінією наведено функцію Лапласа при різних значеннях параметра $\lambda = n \cdot p \cdot q$. При зменшенні λ точність

розрахунку ймовірності за формулою Лапласа спадає. За критерій застосовності локальної формули Лапласа можна вибрати виконання умови $\lambda = npq \geq 10$.

Побудуємо графіки функцій нормального розподілу при різних значеннях величини $\sigma = \sqrt{npq}$ помістивши всі максимуми в початок координат (змістивши вліво на np).

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

```
Plot[Evaluate[Table[PDF[NormalDistribution[0, σ], x], {σ, {2/3, 1, 2, 3}}]],
{x, -10, 10}, Filling -> Axis, Frame -> True, PlotRange -> {-0.005, 0.65},
GridLines -> Automatic, PlotLabel -> "Густина нормального розподілу",
FrameLabel -> {"X", "f(x)"}, PlotLegends -> {"σ=2/3", "σ=1", "σ=2", "σ=3"}]
```

Густина нормального розподілу

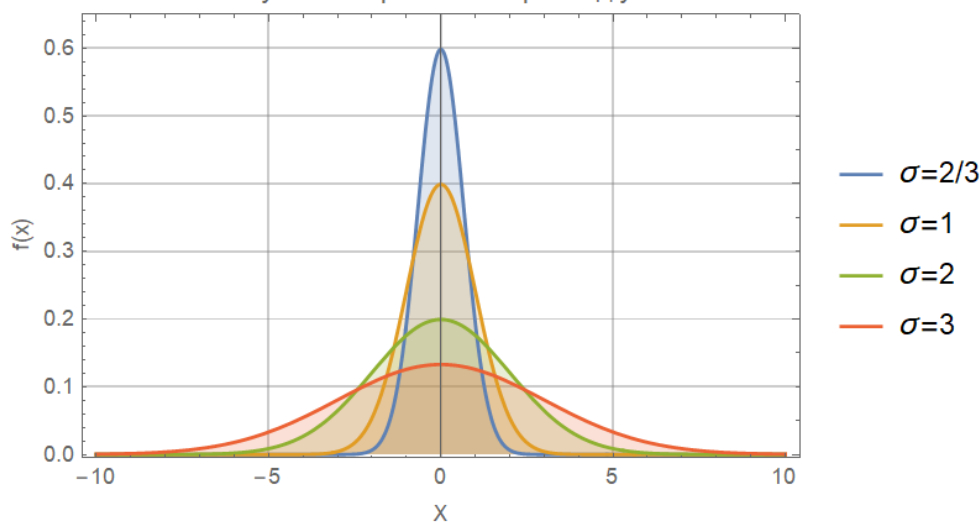


Рис.7.2. Графіки функцій нормального розподілу при $\sigma = 2/3, 1, 3/2$.

При збільшенні величини σ ширина розподілу зростає, а максимальне значення зменшується. Величина ймовірності при зміщенні по осі Ox від максимуму на величину $x/\sigma > 4$ практично дорівнює нулю. Наприклад, при $\sigma = 3$ можна обмежитись розглядом інтервалу $|\Delta x| = 12$, а при $\sigma = 5 \rightarrow |\Delta x| = 20$.

Розглянемо використання формули Лапласа на прикладі.

Задача 7.4. Відомо, що у великій партії випущених приладів 20% не відповідають стандарту. Випадковим чином вибирають 300 приладів. Яка ймовірність того, що серед них є а) 190, б) 230, в) 245 одиниць стандартних приладів?

Розв'язання. $p = 0.8, q = 0.2, n = 300$, а m приймає значення 190, 230 та 245. Оскільки виконується умова $npq = 48 > 10$, то скористаємось локальною теоремою Муавра–Лапласа (5.8). $np = 240$

$P_{300}(190) \approx \frac{1}{\sqrt{48}} \varphi\left(\frac{190-240}{\sqrt{48}}\right)$, оскільки $|x| = \frac{|190-240|}{\sqrt{48}} = 7.2 > 4$,
то $P_{300}(190) \approx \frac{1}{\sqrt{48}} \varphi(7.2) = 0$ тобто подія практично неможлива.

$$P_{300}(230) \approx \frac{1}{\sqrt{48}} \varphi\left(\frac{230-240}{\sqrt{48}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{48}} \varphi(1.443) \approx 0.02$$

$$P_{300}(245) \approx 0.04.$$

Значення функції Гауса можна знайти в таблиці (див. Додаток).

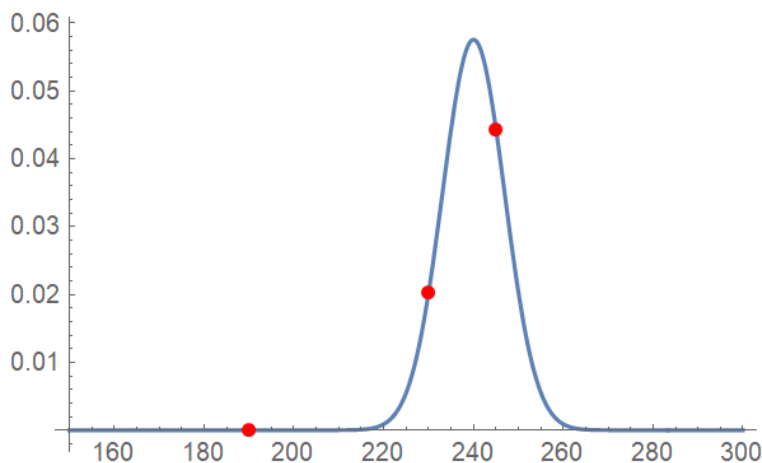
n = 300; p = 0.8; q = 0.2;

PDF[NormalDistribution[n p, Sqrt[n p q]], m] /. m -> {190, 230, 245}
{2.82187 × 10⁻¹³, 0.0203189, 0.0443805}

Отримані значення ймовірностей можна нанести на графік густини ймовірності для нормального розподілу випадкової величини $P_n(m)$. З графіка видно, що друга та третя точка попадають в діапазон $220 < m < 260$, в якому ймовірність має ненульове значення.

n = 300; p = 0.8; q = 0.2;

Plot[PDF[NormalDistribution[n p, Sqrt[n p q]], m], {m, 150, n},
PlotRange -> All, Epilog -> {Red, PointSize[0.02],
Point[{190, 0}, {230, 0.0203}, {245, 0.0444}]}]



7.4. Інтегральна теорема Муавра –Лапласа

Часто в умовах схеми Бернуллі виникає потреба розрахувати не $P_n(m)$ – ймовірність того, що випадкова подія в n випробуваннях настане рівно m разів, а ймовірність настання події не менше m_1 і не більше m_2 разів. Позначимо цю ймовірність $P_n(m_1, m_2)$. Для знаходження $P_n(m_1, m_2)$ потрібно підсумовувати окремі ймовірності для всіх m з інтервалу $(m_1 < m < m_2)$

$$P_n(m_1, m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P(m).$$

Якщо цей інтервал значень m великий, то такі обчислення будуть досить громіздкими. У випадку великих значень n сумування можна замінити інтегруванням і тоді для обчислення згаданої ймовірності використовують інтегральну теорему Муавра-Лапласа.

Теорема. При великій кількості випробувань n в умовах схеми Бернуллі ймовірність $P_n(m_1, m_2)$ того, що випадкова подія A настане не менше ніж m_1 і не більше m_2 разів, визначають за інтегральною формулою Муавра –Лапласа:

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \quad (7.11)$$

де

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

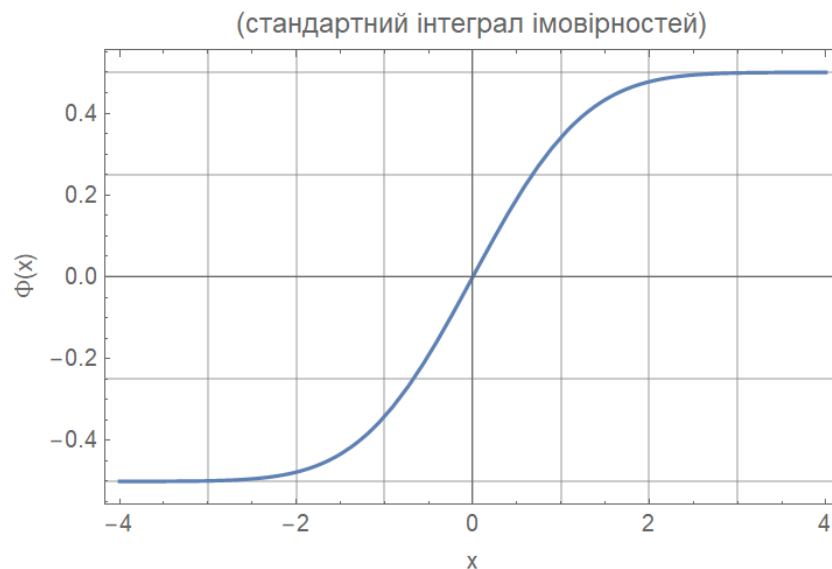
(p – ймовірність настання події A в одному випробуванні, $q=1-p$), а $\Phi(x)$ – стандартний інтеграл ймовірностей (функція Лапласа)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt. \quad (7.12)$$

Інтеграл, що входить в функцію $\Phi(x)$ не може бути вираженим через елементарні функції, тому для функції Лапласа створені таблиці, які використовують для розрахунку ймовірностей. В системі *Mathematica* побудуємо графік функції $\Phi(x)$. З формули (7.12) та графіка видно, що ця функція непарна, тобто $\Phi(x) = -\Phi(-x)$

$$\Phi[x_] := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt;$$

```
Plot[Φ[x], {x, -4, 4}, Frame → True, FrameLabel → {"x", "Φ(x)"},
GridLines → {{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}, {-0.5, -0.25, 0, 0.25, 0.5}},
PlotLabel → "Функція Лапласа \n(стандартний інтеграл імовірностей)"]
```



В системі *Mathematica* функцію Лапласа $\Phi(x)$ можна виразити через функцію **Erf**

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt == \frac{1}{2} \text{Erf}\left[\frac{x}{\sqrt{2}}\right]$$

True

?? Erf

Erf[z] gives the error function erf(z).

Erf[z₀, z₁] gives the generalized error function erf(z₁) – erf(z₀). >>

Для визначення ймовірності відхилення відносної частоти появи події від p (ймовірності успіху в одному випробуванні), враховуючи симетричність нормального розподілу, використовують таку формулу

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon n / \sqrt{npq}\right) \quad (7.13)$$

де ε – задана величина відхилення частоти, $\frac{m}{n}$ – відношення кількості успіхів до загальної кількості випробувань (*відносна частота появи події*).

Формулу (7.13) можна отримати з співвідношення (7.11), якщо ввести Δ – відхилення кількості успіхів від найбільш ймовірної їх кількості, яка дорівнює np і врахувати, що $\Delta = \varepsilon n$.

$$P(np - \Delta, np + \Delta) = P(|m - np| \leq \Delta) = 2\Phi(\Delta/\sqrt{npq}). \quad (7.14)$$

Отже, за допомогою формули (7.13) можна оцінити ймовірність того, що різниця між частотою події та істинним значенням ймовірності успіху в конкретному випробуванні не більша за наперед задану величину ε .

Розглянемо приклад використання формул Муавра – Лапласа.

Задача 7.5. Завод випускає однотипні прилади. Технологія дозволяє виготовляти прилади, які відповідатимуть стандарту з ймовірністю $p = 0.95$. За день на заводі виготовлено 800 приладів. Яка ймовірність того, що серед них буде стандартних приладів: 1) від 720 до 780 шт.; 2) від 750 до 770 шт.?

Розв'язання.

$$n=800, p=0.95, q=0.05, 720 \leq m \leq 780; 740 \leq m \leq 790.$$

$$\sqrt{npq} = \sqrt{800 \cdot 0.95 \cdot 0.05} = \sqrt{38} \approx 6.2$$

$$np = 800 \cdot 0.95 = 760$$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{720 - 760}{6.2} \approx -6.5$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{780 - 760}{6.2} \approx 3.23$$

$$P_n(720, 780) \approx \Phi(3.23) - \Phi(-6.5) \approx 0.499412 + 0.5 \approx 0.999412.$$

Значення $\Phi(3.23)$ та $\Phi(-6.5) = -\Phi(6.5)$ можна знайти в таблиці (див. Додаток), або розрахувати в системі *Mathematica*.

$$n = 800; p = 0.95; q = 0.05;$$

$$m1 = 720; m2 = 780;$$

$$\Phi[x_] := \frac{1}{2} \operatorname{Erf}\left[\frac{x}{\sqrt{2}}\right]; x1 = \frac{m1 - np}{\sqrt{npq}}; x2 = \frac{m2 - np}{\sqrt{npq}};$$

$$\{\Phi[x1], \Phi[x2], \Phi[x2] - \Phi[x1]\}$$

$$\{-0.5, 0.499412, 0.999412\}$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{Erf}\left[\frac{x_1}{\sqrt{2}}, \frac{x_2}{\sqrt{2}}\right]$$

0.999412

Можна використати для розрахунку функцію густини ймовірності для нормального розподілу випадкової величини і розрахувати інтеграл в межах від m_1 до m_2 .

$$\text{Integrate}\left[\text{PDF}\left[\text{NormalDistribution}\left[n p, \sqrt{n p q}\right], m\right], \{m, m_1, m_2\}\right]$$

0.999412

$$\Phi_2[x_] := \text{Integrate}\left[\text{PDF}\left[\text{NormalDistribution}\left[0, 1\right], t\right], \{t, 0, x\}\right];$$

$$\{\Phi_2[x_1], \Phi_2[x_2], \Phi_2[x_2] - \Phi_2[x_1]\}$$

{-0.5, 0.499412, 0.999412}

Результат отримано такий же: $P = 0.499412 + 0.5 = 0.999412$.

Функція Лапласа $\Phi(x)$ дорівнює площі під кривою $\varphi(t)$ ($\varphi(t)$ – функція Гауса) у межах від точки $t=0$, де $\varphi(t)$ має максимум, до точки $t=x$. Якщо кінцева точка $t=x$ знаходиться лівіше ніж $t=0$, то площа від’ємна.

Точне значення шуканої ймовірності можна розрахувати за допомогою суми значень ймовірностей виготовлення стандартних деталей m_1 до m_2

$$\text{Sum}\left[\text{Binomial}\left[n, m\right] p^m q^{n-m}, \{m, m_1, m_2\}\right]$$

0.999869

Задача 7.6. Нехай виконується 625 незалежних випробувань і ймовірність появи деякої події в кожному з них $p = 0.8$. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи цієї події відрізнятиметься від p за абсолютною величиною не більше, ніж на 0.04.

Розв’язання. За умовою задачі $n=625$, $p=0.8$, $q=0.2$, $\varepsilon = 0.04$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = P\left(\left|\frac{m}{n} - 0.8\right| \leq 0.04\right) = 2\Phi\left(0.04 \sqrt{625/0.8 \cdot 0.2}\right)$$

$$= 2\Phi(2.5) = 2 \cdot 0.4938 = 0.9876$$

```
n = 625; p = 0.8; q = 1 - p; eps = 0.04;
```

```
 $\Phi[x\_]$  := 0.5 Erf[ $\frac{x}{\text{Sqrt}[2]}$ ];
```

```
P = 2  $\Phi$ [eps n /  $\sqrt{n p q}$ ]
```

```
0.987581
```

Задача 7.7. Посіяно 600 насінин з ймовірністю проростання для кожної насінини $p = 0.9$. Знайти межу відхилення частоти проростань насіння від ймовірності p , якщо ця межа повинна гарантуватись з ймовірністю $P=0.995$.

Розв'язання. За умовою задачі $n=600$, $p=0.9$, $q=0.1$,

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 0.995.$$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 2\Phi(\varepsilon n / \sqrt{npq}) = 0.995$$

$$\Phi(x) = \frac{0.995}{2} = 0.4975$$

Для знаходження x за відомим значенням $\Phi(x)$ необхідно користуватись таблицями функції Лапласа (див. Додаток).

$$x = \varepsilon \frac{n}{\sqrt{npq}} = 2.81 \quad \varepsilon = 0.034$$

Перевіримо розв'язок задачі в системі *Mathematica*

```
n = 600; p = 0.9; q = 1 - p; P = 0.995;
```

```
 $\Phi[x\_]$  :=  $\frac{1}{2}$  Erf[ $\frac{x}{\sqrt{2}}$ ];
```

```
FindRoot[ $\Phi[x]$  == P / 2, {x, 0, 10}]
```

```
FindRoot[ $\Phi[\varepsilon n / \sqrt{n p q}]$  == P / 2, { $\varepsilon$ , 0, 1}]
```

```
{x → 2.80703}
```

```
{ $\varepsilon$  → 0.034379}
```

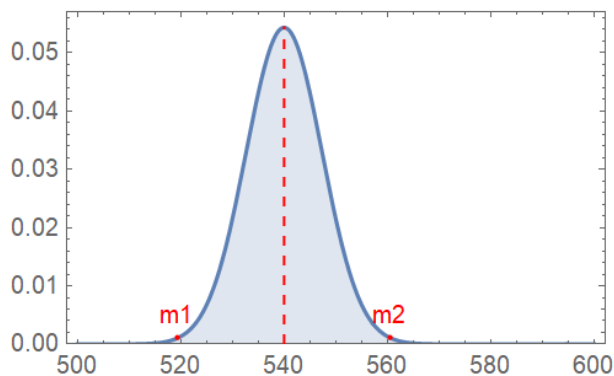
Проаналізуємо отриманий результат. З найбільшою ймовірністю проросте $n \cdot p = 540$ насінин. З ймовірністю $P = 0.995$ проросте від $m_1 \approx 520$ до $m_2 \approx 560$ насінин ($\varepsilon \cdot n \approx 20$). Цей результат наочно відображено на графіку розподілу ймовірності проростання насінин.

```
n = 600; p = 0.9; q = 1 - p;
eps = 0.03438; m1 = n (p - eps); m2 = n (p + eps);

f[m_] :=  $\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{npq}} e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}}$ 

Integrate[f[m], {m, m1, m2}]
Plot[f[m], {m, 500, n}, PlotRange -> {0, 0.057}, Frame -> True,
  Epilog -> {Red, Text["m1", {m1, 0.005}], Text["m2", {m2, 0.005}],
    Dashed, Line[{ {np, 0}, {np, f[np]} }], PointSize[0.01],
    Point[{ {m1, f[m1]}}, {m2, f[m2]} ]}], Filling -> Axis]
```

0.995001



Також в системі *Mathematica* легко розрахувати точні значення ймовірності $P_{600}(540)$ та $P_{600}(520 \leq m \leq 560)$ за формулою Бернуллі

```
Binomial[600, 540] 0.9540 0.160
0.054213

 $\sum_{m=520}^{560} \text{Binomial}[600, m] 0.9^m 0.1^{600-m}$ 
0.994697
```

Задача 7.8. Ймовірність появи події A в кожному з n незалежних випробувань $p = 0.5$. Знайти таку кількість випробувань n , при якій з ймовірністю $P=0.7698$ можна очікувати, що відносна частота появи події відхилиться від її ймовірності за абсолютною величиною не більше, ніж на $\varepsilon = 0.02$.

Розв'язання. За умовою $p=0.5, q=0.5, \varepsilon = 0.02$

Знайдемо кількість випробувань n , для якої

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0.5\right| \leq 0.02\right) = 2 \cdot \Phi(0.02 \sqrt{n}/\sqrt{0.25}) = 0.7698$$
$$\Phi(0.04 \sqrt{n}) = 0.3843,$$

Скористаємось таблицею функції Лапласа

$$0.04 \sqrt{n} = 1.2$$

$$n=900$$

Задачі для самостійного розв'язування.

1. Ймовірність виходу з ладу кожного з 7 приладів під час випробування становить 0.2, і стан одного приладу не залежить від стану інших. Необхідно знайти такі ймовірності: а) жоден прилад не вийде з ладу; б) рівно один прилад вийде з ладу; в) не більше ніж два прилади вийдуть з ладу; г) принаймні три прилади вийдуть з ладу. $P_7(0)$; $P_7(1)$; $P_7(m < 3)$; $P_7(m \geq 3)$.
2. Статистичні обстеження свідчать, що 80% студентів зареєстровані у мережі facebook. Яка ймовірність того, що три з п'яти навмання вибраних студентів мають акаунт в facebook?
3. Кидаємо монету 6 раз. Знайти ймовірність того, що герб випаде 1, 3, 5 разів.
4. Кидаємо гральний кубик 4 рази. Знайти ймовірність того, що шістка випаде не менше ніж 1 раз.
5. Складний пристрій містить 1000 елементів. Ймовірність відмови впродовж гарантійного терміну одного елемента не залежить від інших елементів і дорівнює 0,001. Визначити ймовірність того, що вийдуть з ладу а) рівно два елементи; б) не менше ніж два елементи.
6. Постачальник відправив замовникові 1000 виробів, які можуть пошкодитись в дорозі. Ймовірність такого пошкодження для кожного виробу дорівнює 0,002. Визначити ймовірність того, що в дорозі будуть пошкоджені рівно 4 вироби? Пошкодиться не більше ніж один виріб?
7. Книгу надруковано тиражом 90000 примірників. Ймовірність неправильного брошурування книги дорівнює 0.0001. Знайти ймовірність того, що в тиражі є 5 неправильно брошурованих книг.
8. У середньому 70% студентів виконують домашні завдання. Яка ймовірність того, що з 100 студентів кафедри не менше ніж 80 виконали домашнє завдання?
9. Ймовірність влучення в літак при кожному пострілі з гвинтівки становить 0,001. Виконується 3000 пострілів. Потрібно визначити ймовірність того, що відбудеться хоча б одне влучення.

10. Завод відправив на базу 1000 справних виробів. Під час транспортування кожен виріб може бути пошкоджений з ймовірністю 0,003. Необхідно визначити ймовірність того, що на базу надійдуть 3 пошкоджені вироби.
11. В одержаній партії виробів 0,6% браку. Яка ймовірність виявити у партії з 1000 випадково вибраних виробів: а) 6 штук бракованих виробів; б) 7 штук бракованих виробів; в) хоча б один бракований виріб?
12. Виробничий цех заводу освітлюється за допомогою 500 електролампочок, які увімкнуті незалежно одна від одної. Ймовірність того, що кожна електролампочка в електромережі витримає стрибок напруги і не перегорить дорівнює 0,8. Яка ймовірність того, що з 500 електролампочок під час стрибка напруги не перегорить: 1) не більш ніж 380 лампочок; 2) не менш ніж 390 лампочок.
13. Верстат-автомат виготовляє деталі. Ймовірність того, що вони задовольняють стандарту $p = 0,9$. Із продукції беруть партію деталей. Скільки деталей має містити партія, щоб з ймовірністю 0,9973 можна було стверджувати: у партії відхилення відносної частоти появи нестандартної деталі від ймовірності $p = 0,9$ не перевищуватиме 0,03? Визначити можливу кількість нестандартних деталей у партії за даних умов.
14. Випробовування відбуваються 38 раз за схемою Бернуллі. Ймовірність настання події A (успіху) в кожному випробовуванні $p = 0,05$. Знайти найімовірніше число k_0 настання події A . Знайти ймовірність події A при цьому найімовірнішому числі $P(k_0)$ а також $P(k_0 - 1)$ та $P(k_0 + 1)$.
15. Для розіграшу було виготовлено 1000 лотерейних білетів, серед яких 30 виграшних. Яка найбільш ймовірна кількість виграшних білетів серед 99 придбаних? Скільки мінімально потрібно придбати білетів, щоб найвірогідніша кількість виграшів була рівною одному? Скільки максимально потрібно придбати білетів, щоб найвірогідніша кількість виграшів була рівною одному?

16. Ймовірність виготовлення виробу найвищої якості на заводі становить 0,85. Випадково відбирають 700 виробів. Потрібно визначити довірчий інтервал для відносної частки виробів найвищої якості з ймовірністю 0,999.
17. Ймовірність появи випадкової події в кожному з n незалежних випробувань є постійною величиною, яка дорівнює p . Знайти ймовірність того, що при цьому виконуватиметься нерівність

$$np - 1.5\sqrt{npq} \leq t \leq np + 1.5\sqrt{npq}$$

Розділ 2. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

1. Види випадкових величини. Закон розподілу випадкових величин

Випадкова величина – це змінна, яка набуває певного значення з множини можливих значень при кожному випробуванні, але заздалегідь невідомо, яке саме значення буде отримано. На відміну від випадкової події, яка може або відбутися, або не відбутися, випадкова величина обов'язково приймає деяке значення в результаті випробування. Випадкову подію можна розглядати як окремий випадок випадкової величини, яка приймає лише два значення – одне, наприклад, 1 – «подія відбулася», друге 0 – «подія не відбулася». Отже, випадкова подія є якісним вираженням випадкової величини, а поняття "випадкова величина" є узагальненням поняття "випадкова подія". Використання випадкових величин дозволяє провести більш детальний аналіз ймовірнісних явищ. Наприклад, при задачі студентом іспиту можна розглядати випадкову подію "студент здав іспит" або випадкову величину "отримана оцінка", яка може набувати значень від 0 до 100 балів, що дає значно більше інформації про знання студента.

Випадкові величини поділяються на дискретні та неперервні. *Дискретна випадкова величина* (ДВВ) має скінченну або зліченну множину можливих значень, тоді як *неперервна випадкова величина* (НВВ) може приймати будь-які значення з деякого інтервалу числової осі. Прикладами неперервних випадкових величин є покази аналогових приладів, розміри деталей, час очікування автобуса. При вимірюванні температури тіла ртутними термометрами можна отримати неперервні випадкові величини в певному діапазоні, пов'язаному з точністю приладу. Якщо навіть ми одержимо при вимірюванні два однакові покази, то, підвищивши точність, ми переконаємося, що покази відрізняються в наступному знаку. Отже, всі можливі значення неперервних випадкових величин не можна пронумерувати, використовуючи скінченну множину чисел.

Випадкові величини позначатимемо великими літерами – X , Y , Z , ..., а їх можливі числові значення – відповідними малими літерами.

Наприклад, $x_1, x_2, \dots, x_n$ – можливі значення дискретної випадкової величини X .

Як згадувалося раніше, у результаті випробування випадкова величина приймає одне зі своїх можливих значень. Таким чином, певну інформацію про випадкову величину можна подати переліком можливих значень для дискретної випадкової величини або зазначивши інтервал можливих значень для неперервної випадкової величини. Проте така інформація буде неповною.

Для повного опису випадкової величини необхідно вказати не лише можливі значення, а й ймовірності їх набуття для ДВВ або густину ймовірності для НВВ. Ця інформація задається за допомогою закону розподілу, який встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та ймовірностями їх набуття. Форми завдання закону розподілу можуть бути табличними, графічними або аналітичними. Для ДВВ найзручнішою формою є ряд розподілу – таблиця, що містить всі можливі значення випадкової величини та відповідні їм ймовірності.

Законом розподілу випадкової величини називається будь-яка залежність, яка встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та ймовірностями їхнього настання. Існують різні форми подання закону розподілу: *таблична, графічна та аналітична*. Для дискретної випадкової величини найбільш зручною є таблична форма у вигляді ряду розподілу, який містить усі можливі значення випадкової величини разом із відповідними ймовірностями.

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
P	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9

Символом p_i позначено ймовірність того, що випадкова величина прийме своє i -те значення, тобто x_i . Останній факт зазвичай позначають так: $p_i = P(X = x_i)$. Ряд розподілу придатний тільки для дискретної випадкової величини, оскільки для неперервної випадкової величини неможливо перерахувати всі можливі значення.

Приклад 1. Нехай по повітряній цілі випущено три зенітні ракети, причому ймовірність влучення кожної з них дорівнює 0.7. Випадкова величина X – кількість влучень у ціль. Побудувати закон розподілу величини X .

x_i	0	1	2	3
p_i	0.027	0.189	0.441	0.343

Звернемо увагу на суттєву властивість ряду розподілу $\sum_{i=1}^4 p_i = 1$. Дійсно, у ряді розподілу повинні бути перераховані всі можливі значення випадкової величини, тому події $X = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) утворюють повну групу несумісних подій, сума ймовірностей яких дорівнює 1. Графічне подання закону розподілу дискретної випадкової величини здійснюється за допомогою багатокутника розподілу.

Багатокутником розподілу випадкової величини називається ламана лінія, що з'єднує точки (x_i, p_i) . Координати цих точок на осі абсцис представляють усі можливі значення випадкової величини, а на осі ординат – відповідні ймовірності. Графічне подання даних є більш наочним, ніж табличне. Побудуємо таблицю та графік розподілу за допомогою системи *Mathematica* (рис.1.1)

```
p = 0.7; q = 1 - p;
X = {0, 1, 2, 3};
Px = {q^3, 3 q^2 p, 3 q p^2, p^3};
A = Table[{X[[k]], Px[[k]]}, {k, 1, 4}];
TableForm[A, TableHeadings -> {Automatic, {"xi", "pi"}}],
TableDirections -> Row]
ListPlot[A, Joined -> True, Epilog -> {PointSize[0.02], Point[A]},
Frame -> True, FrameLabel -> {"X", "P"}, GridLines -> Automatic]
```

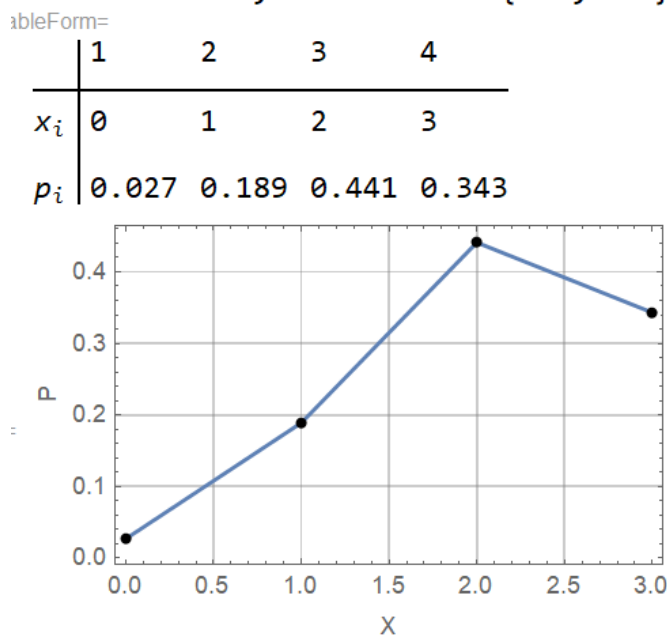


Рис. 1.1. Таблиця та багатокутник розподілу ДВВ.

Аналітична форма завдання закону розподілу полягає в тому, що задається аналітичний вираз (формула), за допомогою якої можна обчислити ймовірність p_i для будь-якого значення x_i . Так, наприклад, для попереднього прикладу, можна у відповідності з формулою Бернуллі вказати вираз

$$p_i = C_3^{i-1} 0.7^{i-1} 0.3^{4-i}, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

який і є аналітичною формою закону розподілу величини X , оскільки дає можливість обчислити ймовірність p_i для будь-якого можливого значення $x_i = i - 1$.

Ряд розподілу підходить для опису лише дискретних випадкових величин із кінцевою кількістю можливих значень. Якщо випадкова величина є неперервною або має нескінченну чи дуже велику кількість можливих значень, такий спосіб представлення закону розподілу стає незручним або навіть неприйнятним. У таких випадках використовують інші методи, зокрема функцію розподілу.

Функцією (інтегральною функцією) розподілу випадкової величини X називається функція $F(x)$, що визначає ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, менше від x :

$$F(x) = P(X < x) \quad (1.1)$$

Отже, функція розподілу в будь-якій точці осі x дорівнює ймовірності того, що випадкова величина (дискретна чи неперервна) прийме довільне значення ліворуч від точки на осі з абсцисою x .

Користуючись визначенням функції $F(x)$, можна обчислити ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу $[a, b)$.

$$P(X < b) = F(b)$$

$$P(X < a) = F(a)$$

$$P(a \leq X < b) = F(b) - F(a).$$

З означення функції розподілу витікають такі її властивості:

1. Значення функції розподілу належать інтервалу $[0, 1]$, тобто $0 \leq F(x) \leq 1$.

2. Функція розподілу – неспадна функція, тобто, якщо $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \geq F(x_1)$.

3. Якщо всі можливі значення випадкової величини належать інтервалу $[a, b]$, то $F(x) = 0$ при $x < a$ і $F(x) = 1$ при $x > b$.

4. Якщо можливі значення випадкової величини належать всій числовій осі, то функція розподілу на мінус нескінченності прямує до нуля, на плюс нескінченності прямує до одиниці, тобто

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1 \quad (1.2)$$

З властивостей функції розподілу випливає, що графік цієї функції для НВВ є гладкою кривою, яка поступово зростає від 0 до 1. Для ДВВ функція розподілу розривна, графік є ступінчастим. Побудуємо графік функції розподілу ДВВ з прикладу, наведеного на рис. 1.1.

```
kmax = 3;
```

```
DiscretePlot[ $\sum_{k=0}^m A[[k+1, 2]]$ , {m, 0, kmax},
```

```
PlotRange -> {{0, kmax}, {0, 1}}, Frame -> True,
```

```
ExtentSize -> Right, ExtentMarkers -> {"Filled", "Empty"},
```

```
FrameLabel -> {"X", "F"}, GridLines -> Automatic]
```

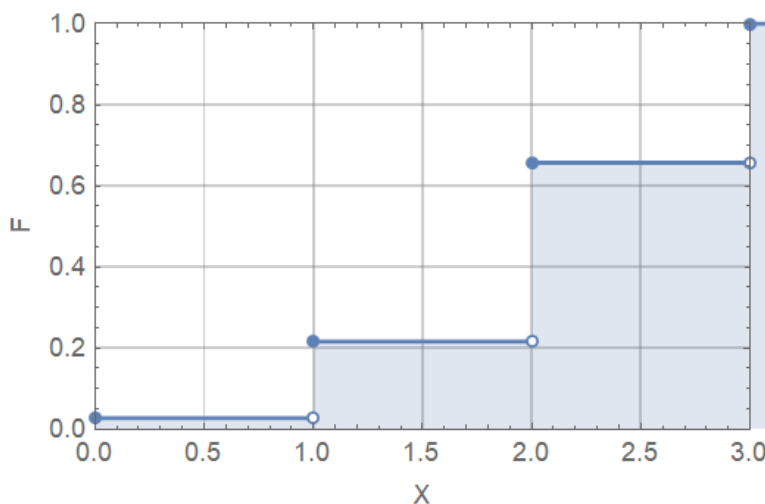


Рис. 1.2. Функція розподілу дискретної випадкової величини.

Задача 1.1. Побудувати таблицю, багатокутник та графік функції розподілу випадкової величини закон розподілу якої задано в аналітичній формі $p_i = C_{10}^{i-1} 0.6^{i-1} 0.4^{11-i}$, $i = 1, 2, \dots, 10, 11$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
p_i	0.	0.	0.01	0.04	0.11	0.2	0.25	0.21	0.12	0.04	0.01

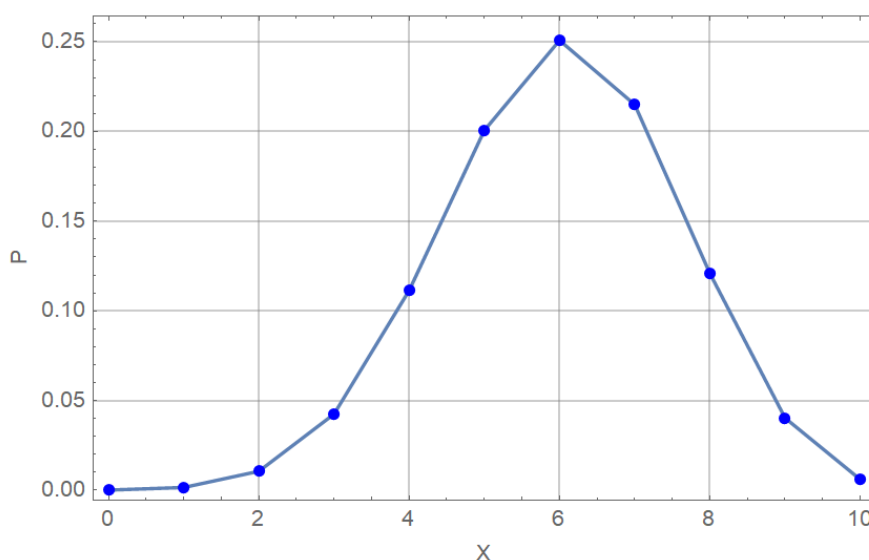


Рис. 1.3. Багатокутник розподілу дискретної випадкової величини.

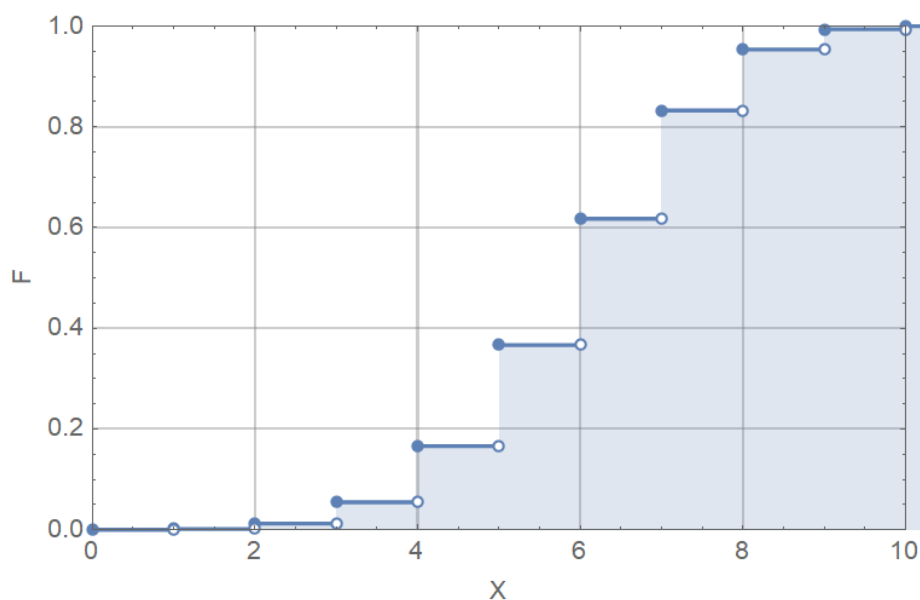


Рис. 1.4. Функція розподілу дискретної випадкової величини.

2. Густина ймовірності (щільність) неперервної випадкової величини

Розподіл ДВВ наочно відображає багатокутник. З якого можна визначити ймовірність кожного дискретного значення.

Для НВВ подібний розподіл можна уявити як граничний випадок, коли кількість дискретних значень прямує до нескінченності. Тоді багатокутник прямує до неперервної кривої, яку називають *густиною ймовірності*, або *щільністю* неперервної випадкової величини.

На відміну від багатокутника для ДВВ, де можна було встановити ймовірність кожного дискретного значення, щільність НВВ не дає такої інформації, оскільки кількість можливих значень неперервної величини нескінченна. Для неперервної випадкової величини можна говорити лише про ймовірність отримання значення НВВ у певному інтервалі. Якщо розмір інтервалу прямуватиме до нуля, то і ймовірність прямуватиме до нуля. Отже, ймовірність того, що НВВ набуде одного якогось конкретного значення, дорівнює нулю.

Графік густини ймовірності дає можливість визначити на яких інтервалах неперервної величини ймовірність більша, а на яких менша. А також. Де вона приймає максимальне значення.

Щільністю розподілу неперервної випадкової величини називається границя відношення ймовірності попадання неперервної випадкової величини на елементарний відрізок до довжини цього відрізка, коли довжина відрізка прямує до нуля

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} \quad (2.1)$$

Оскільки

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) ,$$

то можна стверджувати, що щільність розподілу є диференціальною функцією розподілу і дорівнює похідній від функції розподілу

$$f(x) = F'(x) \quad (2.2)$$

З означення видно, що щільність розподілу придатна для опису законів розподілу НВВ і не придатна для ДВВ.

Розглянемо властивості функції щільності розподілу НВВ.

1. Функція щільності розподілу невід'ємна функція. Дійсно, щільність розподілу є похідною неспадної функції $F(x)$, а похідна від'ємна тільки на інтервалі спадання функції.
2. Ймовірність того, що НВВ X прийме значення, яке належить інтервалу (a, b) , дорівнює визначеному інтегралу від щільності розподілу, узятому в межах від a до b :

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx \quad (2.3)$$

3. Інтеграл від щільності розподілу у нескінченних межах дорівнює 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \quad (2.4)$$

якщо всі можливі значення неперервної випадкової величини належать інтервалу (a, b) , то

$$\int_a^b f(x)dx = 1 \quad (2.5)$$

4. Якщо відома щільність розподілу $f(x)$, то функцію розподілу $F(x)$ можна знайти зі співвідношення

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad (2.6)$$

Графік щільності розподілу називають *кривою розподілу*. У відповідності з наведеними вище властивостями вся площа під кривою розподілу до осі абсцис дорівнює 1. Ймовірність попадання на інтервал (a, b) дорівнює площі під кривою на цьому інтервалі.

Розглянемо графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$

Задача 2.1. Побудувати графік густини розподілу неперервної випадкової величини $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ та відповідну їй інтегральну функцію розподілу $F(x)$. Визначити ймовірність того, що неперервна випадкова величина прийме значення в інтервалі $(-1, 1)$.

Розв'язання.

Побудову графіків здійснимо в системі *Mathematica*.

$$f[x_] := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E^{-\frac{x^2}{2}};$$

```
Plot[f[x], {x, -4, 4}, Frame → True, FrameLabel → {"X", "P"},
GridLines → Automatic, PlotRange → {0, 0.45},
PlotLabel → "Щільність розподілу f(x)",
Epilog → {Dashed, Line[{{-1, 0}, {-1, f[-1]}}],
Line[{{1, 0}, {1, f[1]}}], Red, PointSize[0.015],
Point[{{-1, f[-1]}, {1, f[1]}}]}]
```

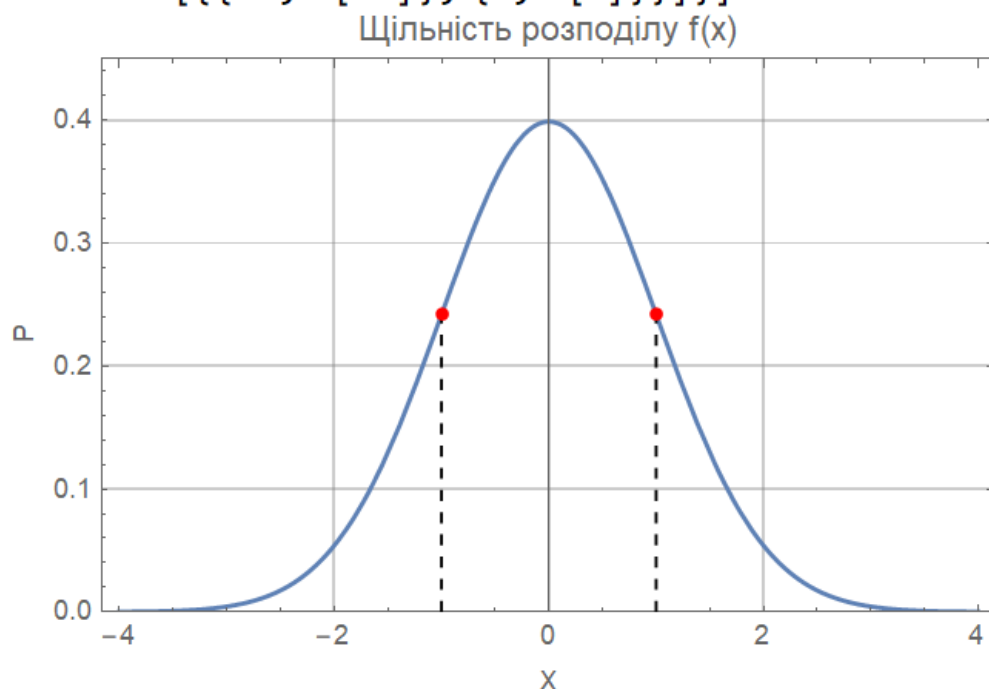


Рис.2.4. Графік густини розподілу неперервної випадкової величини.

Вираз для інтегральної функції розподілу матиме такий вигляд

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Тобто функція $F(x)$ це ймовірність попадання випадкової неперервної величини в інтервал $(-\infty, x)$ і дорівнює площі під кривою густини розподілу від $-\infty$ до точки x .

Ймовірність того, що неперервна випадкова величина прийме значення в інтервалі $(-1, 1)$ визначається за формулою (2.3)

$$P(-1 < X < 1) = \int_{-1}^1 f(x) dx,$$

Або, враховуючи (2.6)

$$P(-1 < X < 1) = F(1) - F(-1).$$

Побудуємо графік функції $F(x)$ та визначимо $P(-1 < X < 1)$

```
F[x_] := Integrate[f[t], {t, -Infinity, x}]
Plot[Evaluate[F[x]], {x, -4, 4}, Frame -> True, FrameLabel -> {"X", "P"},
PlotRange -> {0, 1.01}, GridLines -> Automatic,
PlotLabel -> "Функція розподілу F(x)",
Epilog -> {Text["F(-1) = " <> ToString[Round[F[-1.], 0.0001]],
{-2, 0.19}], Text["F(1) = " <> ToString[Round[F[1.], 0.0001]],
{-2, 0.88}], Red,
Text["P(-1 < X < 1) = F(1) - F(-1) = " <>
ToString[Round[F[1.] - F[-1], 0.001]], {-1.5, 0.65}],
Dashed, Line[{{-1, 0}, {-1, F[-1]}}, {-4.2, F[-1]}],
Line[{{1, 0}, {1, F[1]}}, {-4.2, F[1]}], Red, PointSize[0.015],
Point[{{-1, F[-1]}, {1, F[1]}}]}]
Функція розподілу F(x)
```

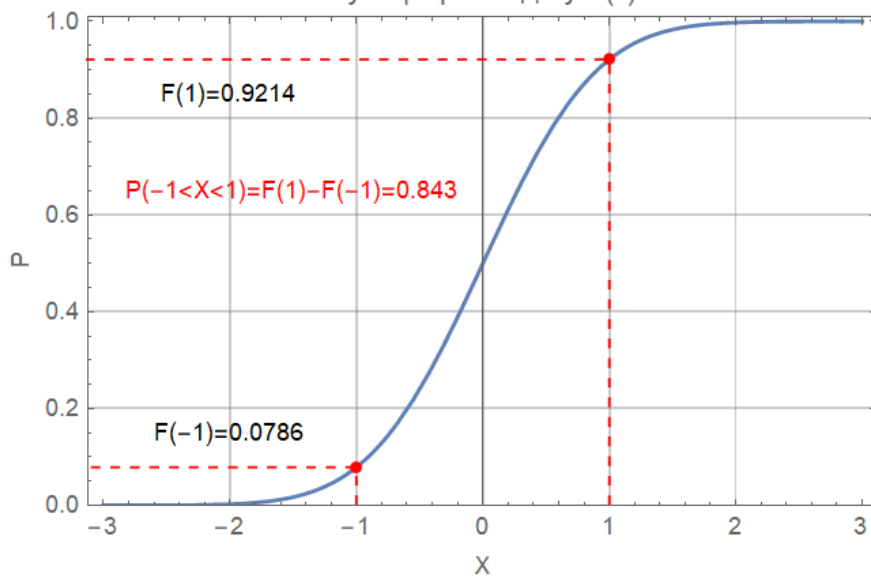


Рис.2.5. Графік функції розподілу неперервної випадкової величини.

Тут використано функцію **Evaluate**, яка забезпечує розрахунок інтеграла під час побудови графіка.

$$P(-1 < X < 1) = F(1) - F(-1) = 0.843$$

Задача 2.2. Дано функцію $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \alpha e^{-\beta x}, & x > 0. \end{cases}$

При яких значеннях α і β функція $f(x)$ є густиною розподілу деякої випадкової величини X ? Знайти функцію розподілу $F(x)$ величини X .

За допомогою функції розподілу $F(x)$ обчислити ймовірність того, що значення випадкової величини X потрапить у проміжок $[0; 1]$.

Розв'язання. Для визначення умов, що накладаються на параметри α і β використаємо властивість функції щільності (2.4)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Отже, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \alpha \int_0^{\infty} e^{-\beta x} dx = \frac{\alpha}{\beta} = 1$, а тому, $\alpha = \beta > 0$

Знайдемо функцію розподілу за формулою (2.6)

Якщо $x \leq 0$, то $F(x) = 0$,

а якщо $x > 0$, то $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \alpha \int_0^x e^{-\alpha t} dt = 1 - e^{-\alpha x}$

Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 1 - e^{-\alpha x}, & x > 0. \end{cases}$$

Побудуємо графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$ при $\alpha = 1$

```
f[x_] := If[x < 0, 0, E^-x];
Plot[f[x], {x, -1, 3}, Frame → True, FrameLabel → {"X", "P"},
GridLines → Automatic, PlotRange → {-0.01, 1.1},
PlotLabel → "Щільність розподілу f(x)", Exclusions → None,
Epilog → {Dashed, Line[{1, 0}, {1, f[1]}]}, Red,
PointSize[0.015], Point[{1, f[1]}]}
```

Щільність розподілу f(x)

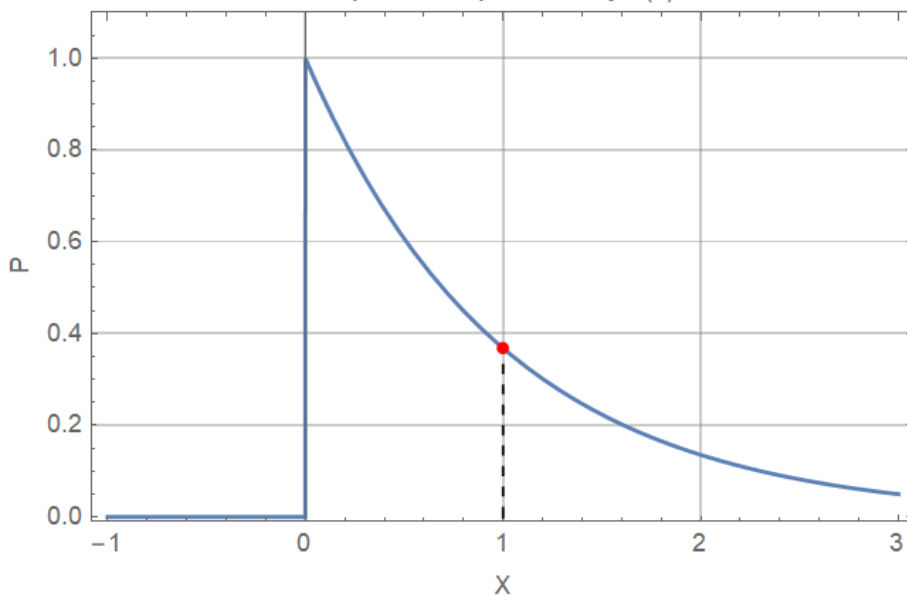


Рис.2.6. Графік густини (щільності) розподілу випадкової величини.

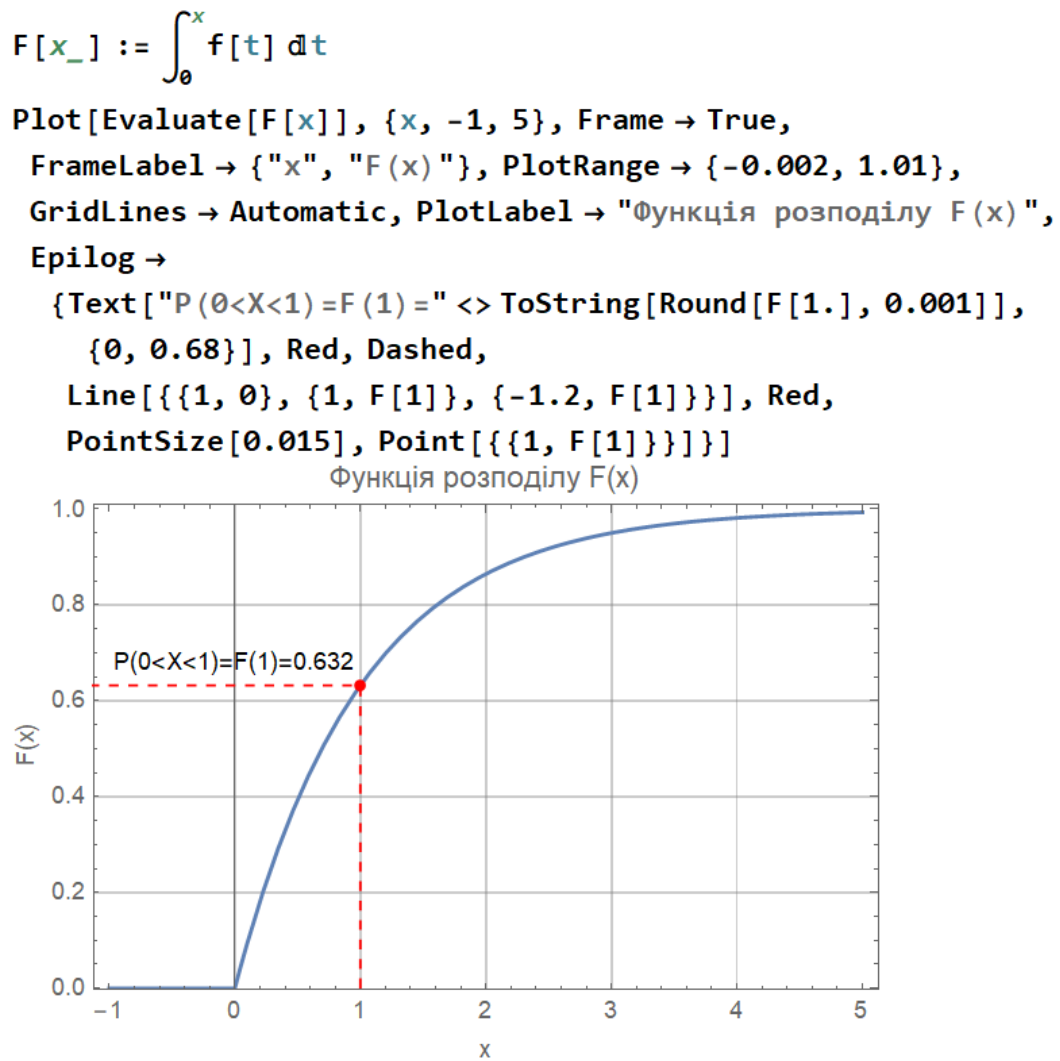


Рис.2.7. Графік функції розподілу випадкової величини.

Як видно з графіка функції розподілу $P(0 < X < 1) = 0.632$.

У загальному випадку, при довільному значенні α , отримаємо $P(0 < X < 1) = F(1) = 1 - e^{-\alpha}$.

Задача 2.3. Поїзди метро прибувають кожні 2 хвилини. Вважаючи, що час очікування X розподіляється рівномірно, знайти формули для щільності й функції розподілу, побудувати їх графіки та обчислити ймовірність очікування більше 30 секунд.

Розв'язання. Щільність рівномірного розподілу на інтервалі $x \in [0, 2]$ дорівнює $\frac{1}{2}$, а за межами цього інтервалу – 0.

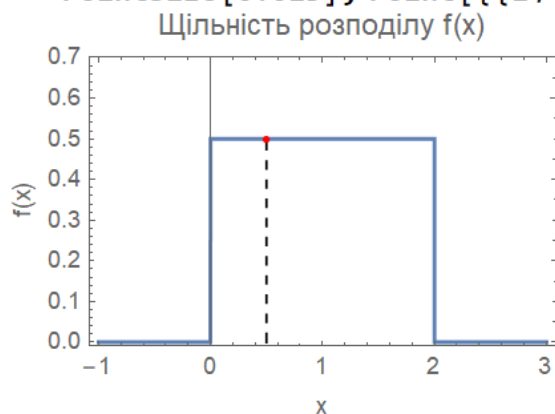
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0, 2]; \\ \frac{1}{2}, & x \in [0, 2]. \end{cases}$$

Тоді
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x}{2}, & 0 < x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

$$P\left(X > \frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{1}{2} < x < 2\right) = 1 - \frac{1}{4} = 3/4$$

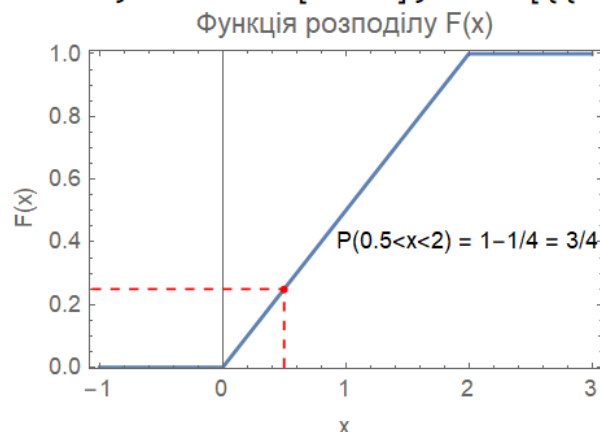
Зобразимо графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$

```
f[x_] := Which[x < 0, 0, x <= 2, 1/2, x > 2, 0];
Plot[f[x], {x, -1, 3}, Frame -> True, FrameLabel -> {"x", "f(x)"},
PlotRange -> {-0.01, 0.7},
PlotLabel -> "Щільність розподілу f(x)", Exclusions -> None,
Epilog -> {Dashed, Line[{1/2, 0}, {1/2, f[1]}], Red,
PointSize[0.015], Point[{1/2, f[1]}]}]
```



$$F[x_] := \int_0^x f[t] dt$$

```
Plot[Evaluate[F[x]], {x, -1, 3}, Frame -> True,
FrameLabel -> {"x", "F(x)"}, PlotRange -> {-0.002, 1.01},
PlotLabel -> "Функція розподілу F(x)",
Epilog -> {Text["P(0.5 < x < 2) = 1 - 1/4 = 3/4", {2, 0.4}],
Red, Dashed,
Line[{1/2, 0}, {1/2, F[1/2]}, {-1.2, F[1/2]}],
Red, PointSize[0.015], Point[{1/2, F[1/2]}]}]
```



Задача 2.4. Функція розподілу ймовірності випадкової величини X має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ ax + b, & -2 \leq x \leq 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

Знайти значення сталих a та b , накреслити графік $F(x)$. Знайти ймовірність $P(1 < X < 4)$.

Задача 2.5. Функція розподілу ймовірності випадкової величини X має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{(x+1)^2}{16}, & -1 \leq x \leq 3 \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу $f(x)$, накреслити графіки $F(x)$ і $f(x)$. Знайти ймовірність $P(0 < X < 2)$.

Задача 2.6. Задано щільність розподілу ймовірності випадкової величини X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{\sin(x)}{2}, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$, накреслити графіки $F(x)$ та $f(x)$. Знайти ймовірність $P(\pi/6 < X < \pi/2)$.

Задача 2.7. Задано функцію розподілу ймовірності випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sin(x), & 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 1, & x > \pi/2 \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$, накреслити графіки $F(x)$ та $f(x)$. Знайти ймовірність $P(\pi/6 < X < \pi/3)$.

3. Числові характеристики випадкових величин. Математичне сподівання, мода та медіана

Задання ДВВ за допомогою закону розподілу є повним, але незручним через його громіздкість. Тому на практиці частіше використовують числові характеристики, які хоча й не настільки повно, як закон розподілу, але стисло і в достатній мірі відображають основні властивості випадкової величини.

Основними і найбільш уживаними числовими характеристиками випадкової величини є математичне сподівання, мода, медіана, дисперсія, а також коефіцієнти асиметрії та ексцесу.

Математичне сподіванням дискретної випадкової величини X обчислюється як сума добутків можливих значень дискретної величини на їх ймовірності:

$$M(X) \equiv m_X = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \quad (3.1)$$

а математичне сподівання неперервної випадкової величини визначається наступним інтегралом

$$M(X) \equiv m_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad (3.2)$$

де $f(x)$ – щільність розподілу НВВ.

Математичне сподівання відображає середнє значення випадкової величини: при великій кількості випробувань середнє значення результатів поступово наближається до математичного сподівання:

$$\bar{X}|_{n \rightarrow \infty} \rightarrow M(X)$$

Математичне сподівання на числовій осі являє собою середнє значення, навколо якого зосереджуються всі можливі значення випадкової величини. Через це m_X часто називають центром розподілу ймовірностей випадкової величини.

Властивості математичного сподівання.

1. Математичне сподівання суми двох випадкових величин X і Y дорівнює сумі їхніх математичних сподівань:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y). \quad (3.3)$$

2. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин X і Y дорівнює добуткові їх математичних сподівань:

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y) . \quad (3.4)$$

3. Математичне сподівання сталої величини дорівнює цій сталій:

$$M(C) = C .$$

4. Сталій множник можна виносити за знак математичного сподівання: $M(C \cdot X) = M(C) \cdot M(X) = C \cdot M(X)$.

Крім математичного сподівання існують ще дві важливі характеристики випадкової величини – мода та медіана.

Модой MoX *дискретної випадкової величини* X називають таке її значення, яке може з'явитися з найбільшою ймовірністю;

Модой *неперервної випадкової величини* називають таке її значення, при якому щільність її розподілу має максимум .

Геометрично MoX – абсциса точки, де крива розподілу досягає свого максимуму. Розподіл може мати декілька мод. Якщо у кривій розподілу є два максимуми, то розподіл називають *двомодальним*; три максимуми – *тримодальним*, а більше – *полімодальним*. Якщо розподіл має мінімум, але не має максимуму, його називають *антимодальним*.

Медіаною випадкової величини називається таке її значення, для якого справедлива рівність $P(X < MeX) = P(X > MeX)$. Іншими словами, випадкова величина має однакову ймовірність приймати значення, як більші, так і менші за медіану. Геометрично MeX – це точка на осі абсцис, яка ділить площу під кривою розподілу на дві рівні частини. Тобто випадкова величина з однаковою ймовірністю може набувати значень як більших, так і менших за медіану. Медіану також позначають так: $MeX = x_{0.5}$. Якщо щільність одномодального розподілу (або багатокутник розподілу) випадкової величини X є симетричною відносно деякої прямої $x = a$, тоді математичне сподівання, мода і медіана збігаються і рівні між собою:

$$m_X = MoX = MeX = a .$$

4. Дисперсія випадкової величини. Властивості дисперсії

Математичне сподівання, хоча й характеризує центр групування випадкової величини, не відображає ступінь розсіювання значень цієї величини навколо центру. Наприклад, якщо розглянути дві випадкові величини $X1$ та $X2$, які мають різні ряди розподілу (як показано в таблиці), вони можуть мати однакове математичне сподівання, але різний рівень розсіювання значень навколо цього центру. Це означає, що для повного розуміння характеру величин недостатньо тільки математичного сподівання. Побудуємо графіки функцій розподілу випадкових величин $X1$ та $X2$.

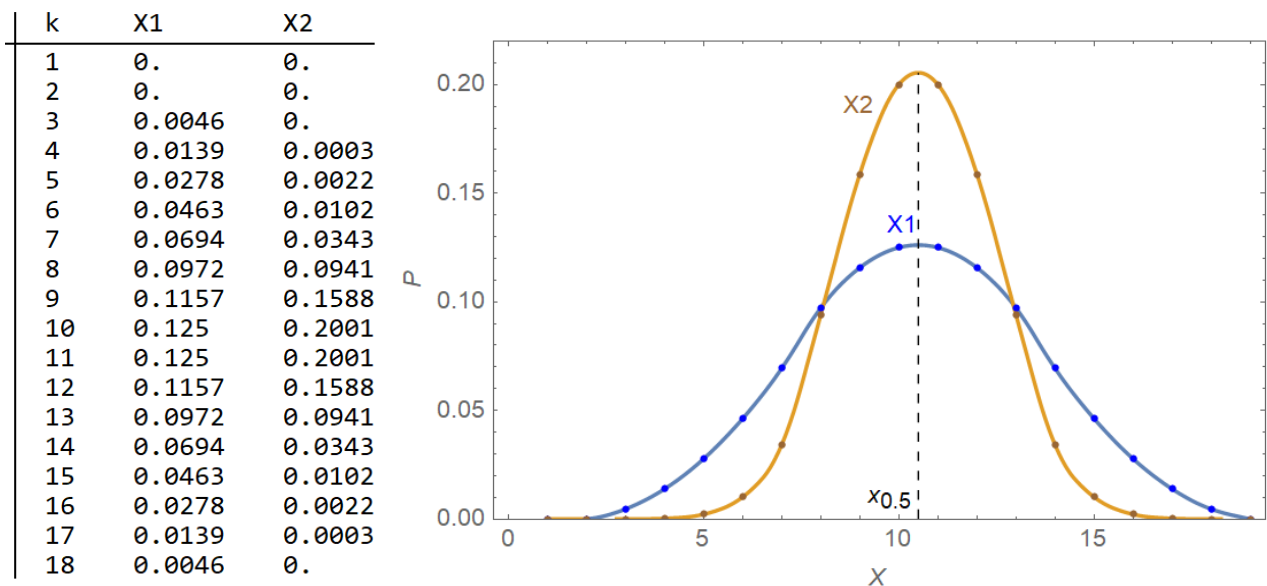


Рис. 4.1. Таблиця і графік розподілу випадкових величин $X1$ та $X2$.

Медіани обох розподілів збігаються: $MeX1 = MeX2 = x_{0,5} = 10.5$

Відшукаймо математичні сподівання випадкових величин $Y1$ та $Y2$:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{18} x_i \cdot P(x_i) \quad (4.1)$$

$$M(X1) = M(X2) = 10.5$$

$$MX1 = \sum_{k=1}^{18} X1[[k, 1]] X1[[k, 2]]$$

$$MX2 = \sum_{k=1}^{18} X2[[k, 1]] X2[[k, 2]]$$

$$10.5$$

$$10.5$$

Математичні сподівання збігаються з медіаною, оскільки розподіли X_1 та X_2 симетричні.

Хоча математичні сподівання величин X_1 і X_2 є однаковими, вони мають різну щільність групування можливих значень навколо середнього, що добре видно на графіку. Це свідчить про те, що для повнішої характеристики випадкових величин необхідно ввести міру, яка б оцінювала ступінь розсіяння їхніх значень відносно математичного сподівання. Для цього розглядають відхилення випадкової величини від її математичного сподівання, яке допомагає кількісно оцінити ступінь варіативності даних.

Відхиленням випадкової величини називають різницю $\Delta X = X - m_X$. Відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання m_X також є випадковою величиною, яку називають *центрованою випадковою величиною*, оскільки для симетричного розподілу максимум ймовірності знаходиться в центрі графіка, а математичне сподівання дорівнює нулеві. Справді, $M(X - m_X) = M(X) - m_X = m_X - m_X = 0$.

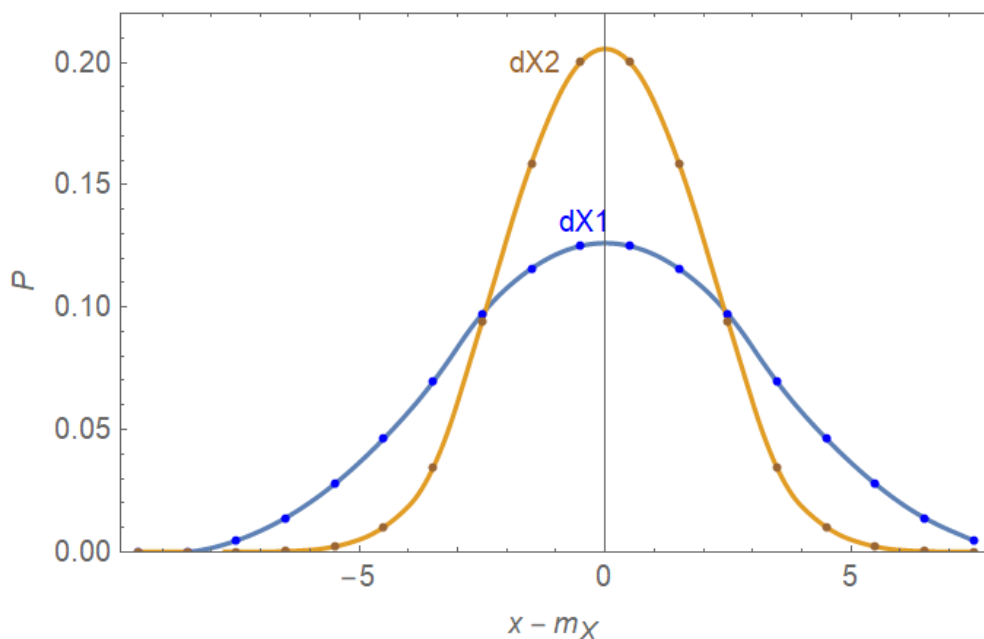


Рис. 4.2. Графік розподілу відхилень ΔX_1 і ΔX_2 випадкових величин X_1 та X_2 .

Отже, середнє значення відхилень дорівнює нулеві, оскільки відхилення значень x_i випадкової величини X від математичного сподівання m_X може бути як додатнім, так і від'ємним. Тому середнє значення відхилень не характеризує розсіяння випадкової величини.

Дійсно, розрахуємо середнє значення відхилень $\Delta X1$ і $\Delta X2$

```
dX1 = Table[{X1[[k, 1]] - MX1, X1[[k, 2]]}, {k, 1, 18}];
dX2 = Table[{X2[[k, 1]] - MX2, X2[[k, 2]]}, {k, 1, 18}];
```

$$MdX1 = \sum_{k=1}^{18} dX1[[k, 1]] dX1[[k, 2]]$$

$$MdX2 = \sum_{k=1}^{18} dX2[[k, 1]] dX2[[k, 2]]$$

$$-1.67921 \times 10^{-15}$$

$$-1.69091 \times 10^{-15}$$

Для оцінки розсіювання значень випадкової величини навколо її центру розподілу застосовують *дисперсію*. Вона визначається як середнє значення квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання. Дисперсія надає кількісну характеристику ступеня варіативності значень випадкової величини та є ключовим показником для опису її розподілу.

Дисперсією випадкової величини X називають математичне сподівання квадрату відхилення цієї величини. Існує декілька позначень дисперсії: $D(X)$, $\sigma^2(X)$ або σ_X^2 :

$$D(X) = \sigma^2(X) = M((X - m_X)^2). \quad (4.2)$$

Формули для розрахунку дисперсій дискретної і неперервної випадкових величин мають такий вигляд:

$$D(X) = \sigma_X^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - m_X)^2 p_i \quad (4.3)$$

$$D(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f(x) dx. \quad (4.4)$$

Очевидно, що дисперсія – величина невід’ємна: $D(X) > 0$. Доведемо, що

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X), \quad (4.5)$$

Дійсно, користуючись властивістю математичного сподівання:

$$\begin{aligned} D(X) &= M((X - M(x))^2) = M(X^2 - 2 X M(x) + M^2(X)) \\ &= M(X^2) - M^2(X) \end{aligned}$$

або, в компактніших позначеннях,

$$\sigma_X^2 = m_{X^2} - m_X^2. \quad (4.6)$$

Тоді формули для дисперсій дискретної і неперервної випадкових величин мають вигляд:

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - m_X^2 \quad (4.7)$$

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - m_X^2 \quad (4.8)$$

Як і математичне сподівання, дисперсія є розмірною величиною, але її одиниці вимірювання відповідають квадрату одиниць випадкової величини, що не завжди зручно для практичного використання. Тому для характеристики розсіювання значень випадкової величини часто використовують величину $\sigma_X = \sqrt{D(X)}$, яку називають *середнім квадратичним відхиленням*.

Середні квадратичні відхилення дискретної і неперервної випадкових величин визначають за такими формулами:

$$\sigma_X = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - m_X)^2 p_i}, \quad \sigma_X = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f(x) dx} \quad (4.9)$$

Одиниця вимірювання середнього квадратичного відхилення σ_X така ж, як і сама випадкова величина, і тому σ_X є більш зручною характеристикою розсіювання, в порівнянні з дисперсією. Це наочно демонструється на прикладі розрахунку дисперсії та середнього квадратичного відхилення випадкових величин X_1 та X_2 , розподіли яких зображено на рис. 4.1 та 4.2.

$$D(X_1) = \sigma_{X_1}^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - m_{X_1})^2 p_i = 8.75$$

$$D(X_2) = \sigma_{X_2}^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - m_{X_2})^2 p_i = 3.40$$

$$\sigma_{X_1} = \sqrt{\sigma_{X_1}^2} = 2.96$$

$$\sigma_{X_2} = \sqrt{\sigma_{X_2}^2} = 1.84$$

$$DX1 = \sum_{k=1}^{18} (dX1[[k, 1]])^2 dX1[[k, 2]];$$

$$DX2 = \sum_{k=1}^{18} (dX2[[k, 1]])^2 dX2[[k, 2]];$$

$$\sigma_{x1} = \sqrt{DX1}$$

$$\sigma_{x2} = \sqrt{DX2}$$

2.95804

1.84415

Середні квадратичні відхилення випадкових величин $X1$ та $X2$ відрізняються в 1.6 рази. Отже, дисперсія $D(X)$ та середнє квадратичне відхилення σ_X добре характеризують розсіювання випадкової величини.

Виходячи з визначення дисперсії та властивостей математичного сподівання, легко можна вивести властивості дисперсії випадкової величини.

1. Дисперсія суми двох випадкових величин дорівнює сумі їхніх дисперсій:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y). \quad (4.10)$$

Таке ж співвідношення вірне для будь-якої кількості взаємно незалежних випадкових величин.

2. Дисперсія сталої величини дорівнює нулю: $D(C) = 0$.
3. Дисперсія добутку сталої і випадкової величини X дорівнює добутку квадрата цієї сталої на дисперсію випадкової величини X :

$$D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X). \quad (4.11)$$

4. Якщо до випадкової величини додати сталу, то дисперсія залишиться незмінною:

$$D(C+X)=D(X). \quad (4.12)$$

5. Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їхніх дисперсій:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y). \quad (4.13)$$

Щоб характеристики випадкової величини були незалежними від одиниць вимірювання та центру розсіювання, її перетворюють у стандартний вигляд (стандартизують або нормують).

Нормованою випадковою величиною називається відношення відхилення випадкової величини до її середнього квадратичного відхилення.

$$X_{\sigma} = \frac{\bar{X}}{\sigma} = \frac{X - m_X}{\sigma} \quad (4.14)$$

Властивості нормованої випадкової величини:

1. Математичне сподівання $M(X_{\sigma}) = 0$;
2. Дисперсія нормованої випадкової величини $D(X_{\sigma}) = 1$.

Задача 4.1. Задано щільність розподілу ймовірності випадкової величини X :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2e^{-2x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Накреслити графік $f(x)$. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини.

Задача 4.2. Задано функцію розподілу ймовірності випадкової величини X :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 5 \\ (x - 5)^2, & 5 \leq x \leq 6 \\ 1, & x > 6 \end{cases}$$

Накреслити графік $f(x)$. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини.

Задача 4.3. У крузі радіуса r з центром у початку координат навмання вибирається точка A . Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини δ , що дорівнює відстані від цієї точки до початку координат. (Відповідь: $M(\delta) = 2r/3$, $D(\delta) = r^2/18$)

Задача 4.4. В середині сфери радіуса r з центром у початку координат навмання вибирається точка A . Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини δ , що дорівнює відстані від цієї точки до сфери. (Відповідь: $M(\delta) = r/4$, $D(\delta) = 3r^2/80$)

5. Моменти випадкової величини. Асиметрія та ексцес

Початковим моментом k -го порядку називають математичне сподівання k -го степеня випадкової величини:

$$\nu_k = M(X^k) . \quad (5.1)$$

Початкові моменти k -го порядку ДВВ і НВВ розраховують за такими формулами:

$$\nu_k = \sum_{i=1}^n x_i^k p_i \quad (5.2)$$

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx \quad (5.3)$$

Центральний момент k -го порядку визначається як математичне сподівання k -го степеня відхилення випадкової величини від її середнього значення (математичного сподівання):

$$\mu_k = M((X - m_X)^k) . \quad (5.4)$$

З (5.4) отримаємо наступні формули центральних моментів k -го порядку дискретної та неперервної випадкових величин:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^n (m_i - m_X)^k p_i \quad (5.5)$$

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^k f(x) dx \quad (5.6)$$

Початковий момент першого порядку, як показують формули (5.1-5.3), відповідає *математичному сподіванню*, тоді як центральний момент другого порядку визначає *дисперсію*. Слід зауважити, що центральний момент першого порядку завжди дорівнює нулю. Окрім моментів першого та другого порядків, важливу роль відіграють моменти третього та четвертого порядків. У випадку несиметричної кривої розподілу, центральні моменти непарних порядків (за винятком першого) будуть відрізнятися від нуля і можуть використовуватись для характеристики асиметрії. Зокрема, центральний момент третього порядку служить для вимірювання асиметрії розподілу.

Асиметрію (скошеність) розподілу випадкової величини описує безрозмірний *коефіцієнт асиметрії*:

$$A_S = \frac{\mu_3}{\sigma^3} , \quad (5.7)$$

де σ – середнє квадратичне відхилення. Знак коефіцієнта асиметрії

визначає додатну $A_S > 0$ (лівобічну) або від'ємну $A_S < 0$ (правобічну) асиметрію розподілу. Скошеність розподілу (або асиметрія) показує, як зсувається форма розподілу вліво або вправо від центру:

Додатня скошеність (права скошеність): у такому розподілі хвіст довший з правого боку (більші значення X).

Від'ємна скошеність (ліва скошеність): у цьому розподілі хвіст довший з лівого боку (менші значення X).

Отже, при правобічній асиметрії переважають варіанти, менші за m_X , а при лівобічній – більші за m_X .

Розглянемо дві випадкові величини X_3 та X_4 , які характеризуються асиметричними розподілами, що наведені в таблиці та зображено графічно на рис. 5.1.

k	X_3	X_4
1	0.	0.
2	0.	0.
3	0.0022	0.0099
4	0.0073	0.026
5	0.0157	0.0461
6	0.0284	0.0685
7	0.0464	0.0923
8	0.0709	0.1166
9	0.0927	0.1259
10	0.1104	0.1239
11	0.1223	0.1134
12	0.1262	0.0964
13	0.1188	0.0746
14	0.0958	0.0493
15	0.0727	0.0305
16	0.0501	0.017
17	0.029	0.0079
18	0.0114	0.0025

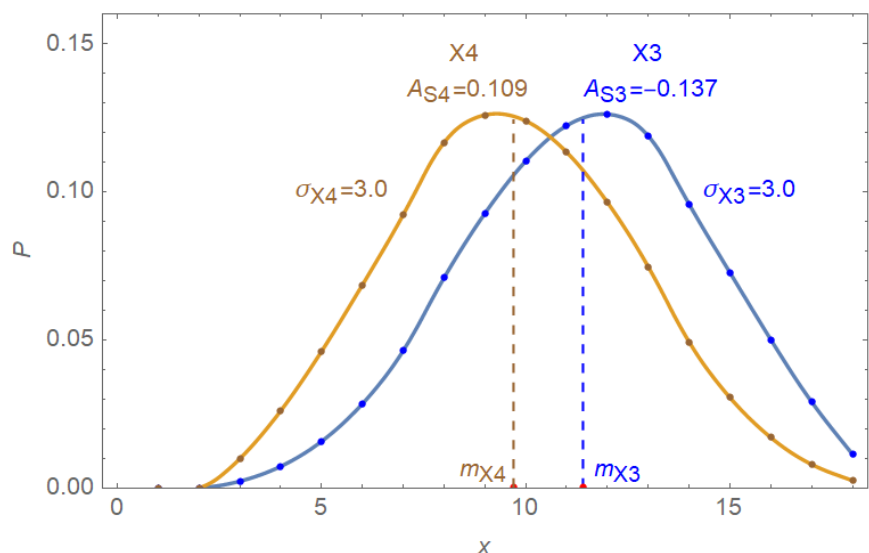


Рис. 5.1. Асиметричні розподіли випадкових величин X_3 та X_4 .

Ще однією характеристикою форми кривої розподілу є *коефіцієнт ексцесу* (*коефіцієнт крутості*), який розраховується за допомогою такої формули:

$$E_S = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 \quad (5.8)$$

За стандартне значення коефіцієнта ексцесу беруть ексцес нормального розподілу, який часто трапляється на практиці.

Для прикладу розглянемо три випадкові величини X_1 , X_2 та X_3 , криві розподілу яких характеризуються різними коефіцієнтами ексцесу (рис. 5.2). Як видно з графіків, випадкова величина X_1 характеризується великим відхиленням від середнього і її коефіцієнт

ексцесу від'ємний $E_{S1} = -0.42$, випадкова величина $X2$ характеризується нормальним розподілом ($E_{S2} = 0$), а коефіцієнт крутості випадкової величини $X3$ додатній $E_{S3} = 0.44$.

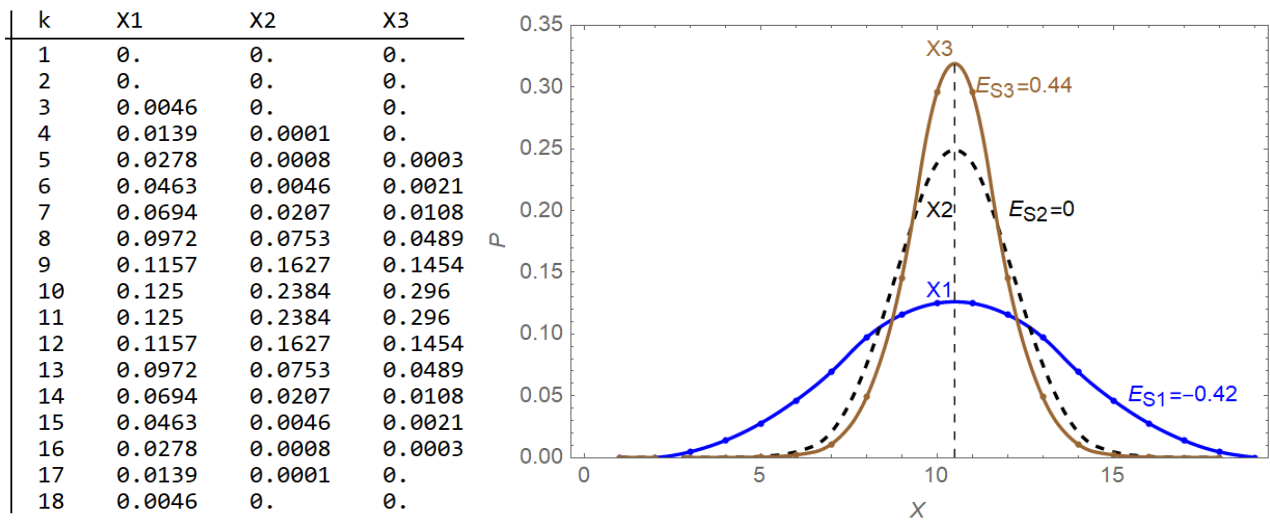


Рис. 5.2. Розподіли випадкових величин $X1$, $X2$ та $X3$ з різним коефіцієнтом ексцесу. Крива нормального розподілу зображена пунктиром.

Для розрахунку коефіцієнтів ексцесу, було розраховано математичне сподівання m_X , дисперсія σ_X^2 , середнє квадратичне відхилення σ_X та центральний момент 4-го порядку μ_4 кожної з випадкових величин $X1$, $X2$, $X3$.

$$\mu_{4X1} = \sum_{k=1}^{18} (X1[[k, 1]] - MX1)^4 X1[[k, 2]];$$

$$\mu_{4X2} = \sum_{k=1}^{18} (X2[[k, 1]] - MX2)^4 X2[[k, 2]];$$

$$\mu_{4X3} = \sum_{k=1}^{18} (X3[[k, 1]] - MX3)^4 X3[[k, 2]];$$

$$ES1 = \frac{\mu_{4X1}}{\sigma_{X1}^4} - 3; ES2 = \frac{\mu_{4X2}}{\sigma_{X2}^4} - 3; ES3 = \frac{\mu_{4X3}}{\sigma_{X3}^4} - 3;$$

Row[{"ES1=", Round[ES1, 0.01], " m_{X1}=", MX1, " D_{X1}=", DX1, " σ_{X1}=",
σ_{X1}, " μ_{4X1}=", μ_{4X1}}]

Row[{"ES2=", Round[ES2, 0.01], " m_{X2}=", MX2, " D_{X2}=", DX2, " σ_{X2}=", σ_{X2},
" μ_{4X2}=", μ_{4X2}}]

Row[{"ES3=", Round[ES3, 0.01], " m_{X3}=", MX3, " D_{X3}=", DX3, " σ_{X3}=", σ_{X3},
" μ_{4X3}=", μ_{4X3}}]

ES1=-0.42 m_{X1}=10.5 D_{X1}=8.75 σ_{X1}=2.95804 μ_{4X1}=197.313

ES2=-0.02 m_{X2}=10.5534 D_{X2}=2.54034 σ_{X2}=1.59384 μ_{4X2}=19.2419

ES3=0.44 m_{X3}=10.576 D_{X3}=1.7918 σ_{X3}=1.33858 μ_{4X3}=11.0543

6. Багатовимірні випадкові величини

6.1. Закон розподілу двовимірної випадкової величини

Крім одномірних випадкових величин, вивчаються величини, можливі значення яких визначаються двома, трьома, ... , n числами. Такі величини називаються відповідно двовимірними, трьохвимірними, ... , n -вимірними. Будемо позначати через (X, Y) двовимірну величину. Обидві величини X і Y розглядаються одночасно, утворюючи систему двох випадкових величин. Двовимірну випадкову величину (X, Y) геометрично можна зобразити як випадкову точку на площині Oxy , де координати цієї точки задаються величинами X та Y . Це рівносильно уявленню її як випадкового вектора, що спрямований із початку координат у точку (X, Y) . Такий підхід дозволяє наочно інтерпретувати значення двовимірної випадкової величини в термінах геометрії площини.

Наприклад, верстат-автомат штампує сталеві плитки. Якщо контролюють розміри – довжину X і ширину Y , то маємо *неперервну двовимірну випадкову величину*.

Двовимірну випадкову величину називають *дискретною*, якщо множина її значень є скінченною або зліченною. Це означає, що такі випадкові величини можуть приймати лише конкретні пари значень (x_i, y_j) , і кожній такій парі відповідає певна ймовірність. Ймовірність для кожної пари значень виражається через функцію ймовірностей, яка визначає розподіл двовимірної дискретної випадкової величини.

Законом розподілу дискретної двовимірної величини $(X$ і $Y)$ називають перелік всіх можливих значень цієї величини (тобто пар чисел) x_i, y_j і їх ймовірності $p(x_i, y_j)$ $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$. Закон розподілу подають у вигляді таблиці. Перший рядок таблиці містить всі можливі значення величини X , а перший стовпчик – всі можливі значення величини Y . Клітинки, що на перетині стовпчика x_i і рядка y_j , містять ймовірності $p(x_i, y_j)$ того, що двовимірна випадкова величина набуде значення (x_i, y_j) .

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\dots$	x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	$\dots$	$p(x_n, y_1)$
y_2	$p(x_1, y_2)$	$p(x_2, y_2)$	$\dots$	$p(x_n, y_2)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	$\dots$	$p(x_n, y_m)$

Оскільки події X , Y утворюють повну групу подій, то сума ймовірностей, розміщених в усіх клітках таблиці, дорівнює одиниці. Знаючи закон розподілу двовимірної випадкової величини, можна знайти закон розподілу кожної зі складових. Розглянемо на прикладі.

Задача 1.1. Знайти закон розподілу складових двовимірної випадкової величини, заданої законом розподілу:

$Y \backslash X$	x_1	x_2	x_3
y_1	0,3	0,1	0,2
y_2	0,18	0,16	0,06

Розв'язання:

$$X: P(x_1) = 0.3 + 0.18 = 0.48$$

$$P(x_2) = 0.1 + 0.16 = 0.26$$

$$P(x_3) = 0.2 + 0.06 = 0.26$$

Закон розподілу випадкової величини X має вигляд:

X	x_1	x_2	x_3
P	0,48	0,26	0,26

Перевіримо: $0,48+0,26+0,26=1$.

Аналогічно отримаємо закон розподілу випадкової величини Y

$$Y: P(y_1) = 0.3 + 0.1 + 0.2 = 0.6$$

$$P(y_2) = 0.18 + 0.16 + 0.06 = 0.4$$

Y	y_1	y_2
P	0,6	0,4

Означення. Двовимірну випадкову величину (X, Y) називають неперервною, якщо вона може приймати значення у всіх точках деякої області площини Oxy . Це рівнозначно існуванню функції $f(x, y)$, для якої функцію розподілу ймовірностей $F(x, y)$ можна подати у вигляді

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy \quad (1.1)$$

Функцію $f(x, y)$ називають *щільністю розподілу ймовірностей двовимірної випадкової величини* (X, Y) . Якщо функція $f(x, y)$ неперервна, то

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Властивості функції щільності розподілу ймовірностей:

1. $f(x, y) \geq 0$ при всіх можливих значеннях величин x, y .
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$ – умова нормування
3. Якщо D – будь-яка область у площині xOy , то

$$P((x, y) \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy$$

Знаючи щільність розподілу $f(x, y)$ двовимірної випадкової величини (X, Y) , можна знайти щільності розподілу $f_X(x)$ та $f_Y(y)$ для її компонентів X та Y . Такі функції називають маргінальними функціями щільності.

Маргінальна функція щільності – це функція щільності ймовірності однієї випадкової величини, отримана з багатовимірної функції щільності, коли значення інших випадкових величин не враховуються, тобто "усереднюються".

Іншими словами, це функція, що показує розподіл ймовірностей для однієї випадкової величини з багатовимірної випадкової системи, незалежно від інших змінних.

Аналогічно, маргінальними називають функції розподілу $F_X(x)$ та $F_Y(y)$.

Якщо маємо, функцією розподілу $F(x, y)$ двовимірної випадкової величини (X, Y) , то маргінальна функція розподілу для X – це функція

розподілу, яка описує ймовірність того, що випадкова величина X приймає певне значення, незалежно від значення Y . Це фактично отримується інтегруванням спільної функції розподілу за всіма можливими значеннями іншої змінної Y .

Справді, функція розподілу випадкової величини X

$$F_X(x) = F_X(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(X, Y)$$

Диференціюючи обидві частини рівності за x , отримаємо:

$$f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

Аналогічно $F_Y(y) = F_Y(+\infty, y) = \int_{-\infty}^y dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(X, Y)$$

$$f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

Теорема. Випадкові величини X та Y незалежні тоді і тільки тоді, коли функція розподілу їхньої спільної пари (X, Y) дорівнює добутку маргінальних функцій розподілу кожної з компонент:

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

Наслідок. Неперервні випадкові величини X і Y є незалежними тоді і тільки тоді, коли щільність розподілу ймовірностей їхньої спільної пари (X, Y) можна записати у вигляді добутку:

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Задача 1.2. Нехай спільна функція щільності ймовірності двох неперервних випадкових величин X і Y задана виразом:

$$f(x, y) = \begin{cases} k(x + y), & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

Знайти константу k . Знайти маргінальні функції щільності $f_X(x)$ та $f_Y(y)$. Визначити, чи є X і Y незалежними.

Розв'язання: З умови нормування $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$ отримаємо

$$\int_0^1 \int_0^1 k(x + y) dx dy = \int_0^1 k(1/2 + y) dy = k = 1$$

Отже константа $k = 1$.

$$f_X(x) = \int_0^1 (x + y) dy = x + 1/2$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 (x + y) dy = y + 1/2$$

Оскільки $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, то випадкові величини X і Y не є незалежними.

Задача 1.3. Нехай спільна функція щільності ймовірності двох неперервних випадкових величин X і Y задана виразом:

$$f(x, y) = \begin{cases} k x y, & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

Знайти константу k . Знайти маргінальні функції щільності $f_X(x)$ та $f_Y(y)$. Визначити, чи є X і Y незалежними.

Розв'язання: $k = 4$, $f_X(x) = 2x$, $f_Y(y) = 2y$, незалежні

Задача 1.4. Визначити щільність розподілу ймовірностей системи двох додатних випадкових величин (X, Y) за заданою функцією розподілу:

$$F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-5x})(1 - e^{-3y}), & x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

$$ff[x_, y_] := (1 - E^{-5 x}) (1 - E^{-3 y});$$

$$D[ff[x, y], x, y]$$

$$15 e^{-5 x - 3 y}$$

Задача 1.5. Задано функцію розподілу двовимірної випадкової величини: $F(x, y) = \begin{cases} \sin x \sin y, & 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2 \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases}$

Знайти ймовірність попадання випадкової точки (X, Y) у прямокутник, обмежений лініями

$$x = 0; x = \pi/4; y = \pi/6; y = \pi/3$$

$$F[x_, y_] := Sin[x] Sin[y]$$

$$F[\text{Pi} / 4, \text{Pi} / 3] - F[\text{Pi} / 4, \text{Pi} / 6] // \text{Simplify}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{3}}{2 \sqrt{2}}$$

$$f[x_, y_] = D[F[x, y], x, y]$$

$$\text{Integrate}[f[x, y], \{x, 0, \text{Pi} / 4\}, \{y, \text{Pi} / 6, \text{Pi} / 3\}] // \text{Simplify}$$

$$\text{Cos}[x] \text{Cos}[y]$$

$$\frac{-1 + \sqrt{3}}{2 \sqrt{2}}$$

Задача 1.5. Задано функцію розподілу двовимірної випадкової величини: $F(x, y) = \begin{cases} (1 - 2^{-x*y}), & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases}$

Знайти ймовірність того, що $0 \leq x \leq 1; 1 \leq y \leq 2$

$$\text{Розв'язання: } P = F(1, 2) - F(1, 1) = 1 - 2^{-2} - 1 + 2^{-1} = 1/4$$

6.2. Числові характеристики двовимірної випадкової величини

Математичне сподівання двовимірної випадкової величини (X, Y) визначає координати центру її розподілу. У випадку неперервних випадкових величин ці координати обчислюються за наступними формулами:

$$m_X = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y)dx dy \quad m_Y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y)dx dy \quad (2.1)$$

Дисперсії D_X та D_Y характеризують розсіювання випадкової величини (X, Y) уздовж координатних осей Ox та Oy , відповідно. Їх знаходять за формулами

$$D_X = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, y)dx dy - m_X^2 \quad (2.2)$$

$$D_Y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x, y)dx dy - m_Y^2. \quad (2.3)$$

Для опису двовимірної випадкової величини крім математичного сподівання, дисперсії та середніх квадратичних відхилень $\sigma_X = \sqrt{D_X}$, $\sigma_Y = \sqrt{D_Y}$ використовують також інші характеристики, а саме – *кореляційний момент (або коваріація)*

$$\text{cov}(X, Y) = K_{XY} = M((X - m_X)(Y - m_Y)).$$

Коваріація для неперервних випадкових величин X та Y

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)(y - m_Y)f(x, y)dx dy \quad (2.4)$$

Коефіцієнт кореляції

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (2.5)$$

Коефіцієнт кореляції є кількісною характеристикою взаємозалежності випадкових величин X та Y і часто використовується в статистиці. Якщо випадкові величини X та Y дискретні, то в формулах (1)–(5) знаки інтегралів замінюють знаками суми по усім можливим значенням випадкових величин.

Означення.

Дві випадкові величини X і Y називаються *корельованими*, якщо їх кореляційний момент або коефіцієнт кореляції $r_{XY} \neq 0$. У випадку $r_{XY} = 0$, випадкові величини X та Y називають *некорельованими*.

Розглянемо властивості коефіцієнта кореляції:

- 1) $|r_{XY}| \leq 1$
- 2) якщо X та Y незалежні, то $r_{XY} = 0$;
- 3) якщо між X та Y є лінійна залежність $Y = aX + b$, де a та b – постійні, то $|r_{XY}| = 1$. Коефіцієнт кореляції додатний у випадку коли зростання однієї випадкової величини приводить до зростання другої і навпаки – від’ємний у випадку коли одна змінна зростає, а інша внаслідок цього зменшується

Зауваження. Якщо момент кореляції або коефіцієнт кореляції не дорівнює нулеві, то випадкові величини X та Y – корельовані. Дві корельовані величини завжди є залежними. Однак обернене твердження не завжди справедливе, тобто залежність випадкових величин не означає їх кореляції, тобто їх коефіцієнт кореляції може бути рівним нулю або відрізнятися від нього.

Незалежність двох величин гарантує їх некорельованість, проте некорельованість не обов'язково означає незалежність. Для випадкових величин, що мають нормальний розподіл, некорельованість дійсно вказує на їх незалежність. Дисперсія суми залежних випадкових величин виражається через дисперсії кожної випадкової величини та коефіцієнт кореляції

$$\begin{aligned} D(X + Y) &= M((X + Y - M(X + Y))^2) = M((X + Y - M(X) - M(Y))^2) \\ &= M((X - M(X))^2 + 2(X - M(X))(Y - M(Y)) + (Y - M(Y))^2) \end{aligned}$$

Отже

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2K_{XY} \quad (2.6)$$

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y) - 2K_{XY} \quad (2.7)$$

Для якісної оцінки коефіцієнтів кореляції застосовуються різні шкали, найбільш часто – шкала Чеддока. В залежності від значень коефіцієнта кореляції зв'язок може мати одну з оцінок

0,1-0,3 – слабкий;
 0,3-0,5 – помітний;
 0,5-0,7 – помірний;
 0,7-0,9 – високий;
 0,9-1,0 – вельми високий.

Задача 2.1. Нехай спільна функція щільності ймовірності двох неперервних випадкових величин X і Y задана виразом:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

Визначити коефіцієнт кореляції випадкової величини.

Розв'язання: Розрахуємо математичне сподівання, дисперсію та коваріацію випадкової величини і на їх основі розрахуємо r_{XY}

$$m_X = \int_0^1 \int_0^1 x(x + y) dx dy = 7/12$$

$$m_Y = \int_0^1 \int_0^1 y(x + y) dx dy = 7/12$$

$$K_{XY} = \int_0^1 \int_0^1 (x - m_X)(y - m_Y)(x + y) dx dy = -1/144$$

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = -1/11$$

```
f[x_, y_] := x + y;
Mx = Integrate[x f[x, y], {x, 0, 1}, {y, 0, 1}];
My = Integrate[y f[x, y], {x, 0, 1}, {y, 0, 1}];
Dx = Integrate[(x - Mx)^2 f[x, y], {x, 0, 1}, {y, 0, 1}];
Dy = Integrate[(y - My)^2 f[x, y], {x, 0, 1}, {y, 0, 1}];
Kxy = Integrate[(x - Mx) (y - My) f[x, y], {x, 0, 1}, {y, 0, 1}];
Print[{Mx, My, Dx, Dy, Kxy}];
rxy = Kxy / Sqrt[Dx Dy]
{ 7/12, 7/12, 11/144, 11/144, -1/144 }
```

$$-\frac{1}{11}$$

Задача 2.2. Нехай спільна функція щільності ймовірності двох неперервних випадкових величин X і Y задана виразом:

$$f(x, y) = \begin{cases} 4 * x * y, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

Визначити коефіцієнт кореляції випадкової величини.

Розв'язання: Розрахунки показують, що $r_{XY} = 0$. Отже, випадкові величини X та Y некорельовані.

```
f[x_, y_] := 4 x y;
Mx = Integrate[x f[x, y], {x, 0, 1}, {y, 0, 1}];
My = Integrate[y f[x, y], {x, 0, 1}, {y, 0, 1}];
Dx = Integrate[(x - Mx)^2 f[x, y], {x, 0, 1}, {y, 0, 1}];
Dy = Integrate[(y - My)^2 f[x, y], {x, 0, 1}, {y, 0, 1}];
Kxy = Integrate[(x - Mx) (y - My) f[x, y], {x, 0, 1}, {y, 0, 1}];
Print[{Mx, My, Dx, Dy, Kxy}];
rxy = Kxy / Sqrt[Dx Dy]
{2/3, 2/3, 1/18, 1/18, 0}
```

0

```
fX = Integrate[ f[x, y], {y, 0, 1}]
fY = Integrate[ f[x, y], {x, 0, 1}]
```

2 x

2 y

Задача 2.3. На основі результату опитувань 30 студентів дослідити зв'язок між кількістю годин, проведених під час підготовки до іспиту (X), та оцінками студентів (Y) за курсом. Вхідні дані – масив 30 пар чисел (x, y) :

{{1,2},{1,3},{2,3},{2,4},{3,4},{3,5},{2,4},{4,5},{3,3},{1,2},{4,4},{2,5},{3,5},
{1,3},{2,2},{4,5},{3,4},{2,3},{1,2},{2,4},{3,5},{4,3},{1,4},{3,4},{2,2},{4,5},
{1,3},{3,5},{2,3},{4,4}}. Розрахувати коефіцієнт кореляції r_{XY} .

Розв'язання: Спочатку побудуємо таблицю розподілу двовимірної випадкової величини. Номер рядка вказує на значення випадкової величини X , а номер стовпчика – значення випадкової величини Y . У вибраній клітинці такої таблиці записуємо значення кількості

студентів, які надали таку відповідь. Поділивши всі елементи таблиці на кількість опитаних студентів отримаємо таблицю розподілу ймовірностей.

```
(*вхідні дані*)
data = {{1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4}, {3, 5}, {2, 4}, {4, 5}, {3, 3},
        {1, 2}, {4, 4}, {2, 5}, {3, 5}, {1, 3}, {2, 2}, {4, 5}, {3, 4}, {2, 3}, {1, 2},
        {2, 4}, {3, 5}, {4, 3}, {1, 4}, {3, 4}, {2, 2}, {4, 5}, {1, 3}, {3, 5}, {2, 3}, {4, 4}};

nStud = Length[data];
maxH = 4; maxO = 5; (*макс. годин, макс. оцінка*)
tableXY = Table[0, {maxH}, {maxO}];
Do[tableXY[[data[[i, 1]], data[[i, 2]]]]++, {i, 1, nStud}];
tableXY // TableForm
pXY = tableXY / nStud;

tableForm=


|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 3 | 3 | 1 | 0 |
| 0 | 2 | 3 | 3 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 3 | 4 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |


```

На основі таблиці розподілу розраховуємо числові характеристики дискретної двовимірної випадкової величини

```
mX = Sum[i * pXY[[i, j]], {i, 1, maxH}, {j, 1, maxO}];
mY = Sum[j * pXY[[i, j]], {i, 1, maxH}, {j, 1, maxO}];
DX = Sum[(i - mX) ^ 2 * pXY[[i, j]], {i, 1, maxH}, {j, 1, maxO}];
DY = Sum[(j - mY) ^ 2 * pXY[[i, j]], {i, 1, maxH}, {j, 1, maxO}];
covXY = Sum[(i - mX) * (j - mY) pXY[[i, j]], {i, 1, maxH}, {j, 1, maxO}];
rXY = covXY / Sqrt[DX DY];

{mX, mY, DX, DY, covXY, rXY // N}

{73/30, 11/3, 1001/900, 49/45, 61/90, 0.615885}
```

Отже, коефіцієнт кореляції між годинами навчання та оцінками студентів становить приблизно $r \approx 0.6159$. Це свідчить про помірну позитивну кореляцію між цими змінними, що означає, що в цілому, чим більше студент навчається, тим вищі його оцінки.

Такі ж значення числових характеристик можна отримати використовуючи внутрішню функцію **Mean** для розрахунку середнього. Крім цього в системі *Mathematica* є функції розрахунку дисперсії **Variance** та коефіцієнта кореляції **Covariance**, але вони враховують зміщення Бесселя, яке застосовується для вибірових даних, а в даному прикладі дослідження виконувалось на сукупності.

```

(*вхідні дані*)
data = {{1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4}, {3, 5}, {2, 4},
        {4, 5}, {3, 3}, {1, 2}, {4, 4}, {2, 5}, {3, 5}, {1, 3},
        {2, 2}, {4, 5}, {3, 4}, {2, 3}, {1, 2}, {2, 4}, {3, 5},
        {4, 3}, {1, 4}, {3, 4}, {2, 2}, {4, 5}, {1, 3}, {3, 5},
        {2, 3}, {4, 4}};

(*зразок некорельованих даних*)
data1 = Table[{RandomInteger[{1, 4}], RandomInteger[{2, 5}]}], 30];

(*зразок сильно корельованих даних-лінійна залежність*)
data2 = Table[{a = RandomInteger[{1, 4}], a + 1}], 30];

(*Розділення даних на X і Y*)
xValues = data[[All, 1]];
yValues = data[[All, 2]];

(*Обчислення середніх значень*)
meanX = Mean[xValues];
meanY = Mean[yValues];

(*Обчислення дисперсій*)
varX = Mean[(xValues - meanX)^2];
varY = Mean[(yValues - meanY)^2];

(*Обчислення коваріації*)
covXY = Mean[(xValues - meanX) (yValues - meanY)];

(*Обчислення коефіцієнта кореляції*)
correlationCoefficient = covXY / Sqrt[varX * varY];

(*Виведення результатів*)
{meanX, meanY, varX, varY, covXY, correlationCoefficient // N}

{73/30, 11/3, 1001/900, 49/45, 61/90, 0.615885}

```

Якщо замість вхідних даних взяти масив пар чисел згенерованих випадковим чином, отримаємо коефіцієнт кореляції близьким до нуля.

Задача 2.4. Задано функцію розподілу двовимірної випадкової

$$\text{величини: } F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-4x})(1 - e^{-5y}), & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу $f(x, y)$, перевірити умову нормування та розрахувати коефіцієнт кореляції r_{XY} .

```

F[x_, y_] := (1 - E^-4 x) (1 - E^-5 y)
f[x_, y_] := D[F[x, y], x, y]
Integrate[f[x, y], {x, 0, Infinity}, {y, 0, Infinity}]
fX[x_] := Integrate[f[x, y], {y, 0, Infinity}]
fY[y_] := Integrate[f[x, y], {x, 0, Infinity}]
If[f[x, y] == fX[x] fY[y], Print["X та Y незалежні"], Print["X та Y залежні"]];

mX = Integrate[x f[x, y], {x, 0, Infinity}, {y, 0, Infinity}];
mY = Integrate[y f[x, y], {x, 0, Infinity}, {y, 0, Infinity}];
DX = Integrate[(x - mX)^2 f[x, y], {x, 0, Infinity}, {y, 0, Infinity}];
DY = Integrate[(y - mY)^2 f[x, y], {x, 0, Infinity}, {y, 0, Infinity}];
covarXY = Integrate[(x - mX) (y - mY) f[x, y], {x, 0, Infinity}, {y, 0, Infinity}];
rXY = covarXY / Sqrt[DX DY]
1
X та Y незалежні
0

```

Задача 2.5. Задано щільність розподілу двовимірної випадкової величини: $f(x, y) = \begin{cases} a \cos(x - y), & 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \pi/2 \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases}$

Знайти a і r_{XY} .

```

f[x_, y_] := a Cos[x - y]
Integrate[f[x, y], {x, 0, Pi / 2}, {y, 0, Pi / 2}]
2 a

a = 1 / 2;
fX[x_] := Integrate[f[x, y], {y, 0, Pi / 2}]
fY[y_] := Integrate[f[x, y], {x, 0, Pi / 2}]
If[FullSimplify[f[x, y] == fX[x] fY[y]], Print["X та Y незалежні"],
  Print["X та Y залежні"], Print["X та Y залежні"]];
mX = Integrate[x f[x, y], {x, 0, Pi / 2}, {y, 0, Pi / 2}];
mY = Integrate[y f[x, y], {x, 0, Pi / 2}, {y, 0, Pi / 2}];
DX = Integrate[(x - mX)^2 f[x, y], {x, 0, Pi / 2}, {y, 0, Pi / 2}];
DY = Integrate[(y - mY)^2 f[x, y], {x, 0, Pi / 2}, {y, 0, Pi / 2}];
covarXY = Integrate[(x - mX) (y - mY) f[x, y], {x, 0, Pi / 2}, {y, 0, Pi / 2}];
{mX, mY, DX, DY}
rXY = covarXY / Sqrt[DX DY]
rXY // N
X та Y залежні
 $\left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{16} (-32 + 8\pi + \pi^2), \frac{1}{16} (-32 + 8\pi + \pi^2) \right\}$ 
 $\frac{(-4 + \pi)^2}{-32 + 8\pi + \pi^2}$ 
0.245429

```

Розділ 3. РОЗПОДІЛИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

1. Рівномірний розподіл

Рівномірний розподіл може спостерігатися як у дискретних, так і в неперервних випадкових величинах. ДВВ X має рівномірний розподіл, якщо всі можливі її значення мають однакову ймовірність. Якщо ця величина може приймати n значень, тоді ймовірність кожного з них дорівнює $1/n$. Відповідний ряд розподілу має вигляд

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
P	$1/n$	$1/n$	$1/n$	$\dots$	$1/n$

Розглянемо випадок, коли $x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_n = n$.

Багатокутник розподілу для рівномірного розподілу має вигляд відрізка, який паралельний осі абсцис із кінцями в точках $(1, 1/n)$ і $(n, 1/n)$. Прикладом ДВВ, яка має рівномірний розподіл, є кількість очок, які випадають при киданні грального кубика.

Математичне сподівання для дискретної рівномірно розподіленої випадкової величини

$$M(X) = \sum_{k=1}^n k p_k = \frac{1 + 2 + \dots + (n-1) + n}{n} = \frac{(n+1)n/2}{n} = \frac{n+1}{2}$$
$$m_x = M(X) = \frac{n+1}{2} \quad (1.1)$$

Дисперсія для дискретної рівномірно розподіленої випадкової величини

$$D(X) = \sum_{k=1}^n k^2 p_k - m_x^2 = \frac{(n^2-1)}{12} \quad (1.2)$$
$$\sigma_X = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{(n^2-1)}{12}}.$$

Розглянемо тепер неперервний рівномірний розподіл.

Прикладом неперервної випадкової величини з рівномірним розподілом може бути час прибуття автобуса, якщо автобус прибуває до зупинки в інтервалі, наприклад, між 10:00 та 10:15, і кожен момент часу в цьому інтервалі однаково ймовірний, час прибуття буде розподілений рівномірно в цьому інтервалі.

Щільність розподілу рівномірно розподіленої неперервної випадкової величини дорівнює константі c на відрізку $[a, b]$, а за межами відрізка вона дорівнює нулю, тобто

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a, x > b, \\ c, & a \leq x \leq b, \end{cases} \quad (1.3)$$

де стала c задовольняє умову нормування: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Звідки для рівномірного розподілу $c = 1/(b - a)$. Отже, диференціальна функція рівномірного розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a, x > b, \\ 1/(b - a), & a \leq x \leq b, \end{cases} \quad (1.4)$$

Графік функції $f(x)$ показано на рис. 3.1. Побудуймо інтегральну функцію $F(x)$ рівномірного розподілу:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad (1.5)$$

при $x \leq a$ $F(x) = 0$,

при $a < x \leq b$, $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$,

при $x > b$ $F(x) = 1$

Графік функції $F(x)$ показано на рис. 3.2.

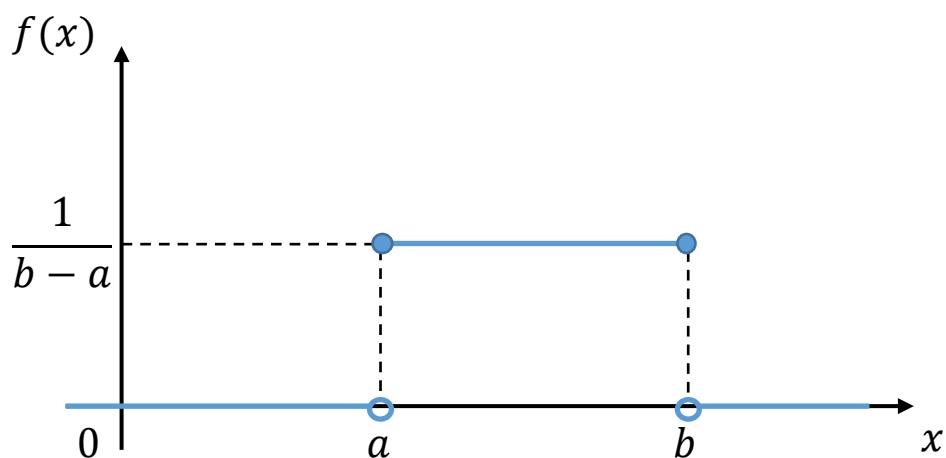


Рис. 3.1. Диференціальна функція рівномірного розподілу $f(x)$

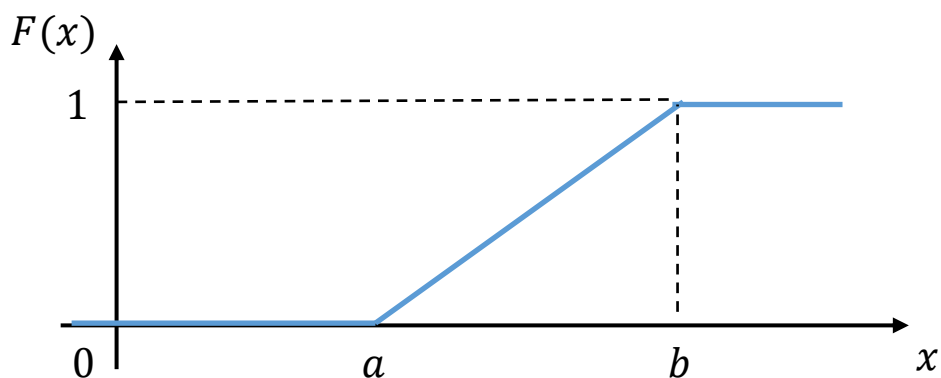


Рис. 3.2. Інтегральна функція рівномірного розподілу $F(x)$

Як бачимо, в точках a і b функція $F(x)$ неперервна, але не гладка, тому похідні $F'(a)$ і $F'(b)$ не існують.

Ймовірність того, що рівномірно розподілена випадкова величина потрапляє в інтервал $[c, d]$, який поміщається всередині інтервалу $[a, b]$ дорівнює відношенню розмірів цих інтервалів

$$P(c < X < d) = \frac{d-c}{b-a} \quad (1.6)$$

це збігається з геометричним означенням ймовірності: $p = \frac{\text{mes } g}{\text{mes } G}$.

Відшукаймо основні числові характеристики випадкової величини, що має рівномірний розподіл. Математичне сподівання

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = (a+b)/2 \quad (1.7)$$

Оскільки, рівномірний розподіл симетричний, медіана MeX збігається з математичним сподіванням $M(X)$:

$$MeX = (a+b)/2$$

Рівномірний розподіл не має максимуму, тобто відсутня мода.

Розрахуємо дисперсію та середнє квадратичне відхилення:

$$D(X) = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (1.8)$$

$$\sigma_X = \frac{\sqrt{3}(b-a)}{6} \quad (1.9)$$

Нескладно відшукати характеристики форми графіка розподілу – скошеність та ексцес. Скошеність $A_S = 0$ ($\mu_3 = 0$), а ексцес $E_S = -1.2$.

$$f[x_] := 1 / (b - a); F[x_] = \int_a^x f[t] dt;$$

$$MX = \int_a^b x f[x] dx // FullSimplify;$$

$$DX = \int_a^b (x - MX)^2 f[x] dx // FullSimplify;$$

$$\sigma X = FullSimplify[\sqrt{DX}, b > a]$$

$$\frac{-a + b}{2 \sqrt{3}}$$

$$\mu X3 = \int_a^b (x - MX)^3 f[x] dx // FullSimplify$$

$$\mu X4 = \int_a^b (x - MX)^4 f[x] dx // FullSimplify$$

$$0$$

$$\frac{1}{80} (a - b)^4$$

$$ES = \frac{\mu X4}{\sigma X^4} - 3 // FullSimplify$$

$$-\frac{6}{5}$$

Задача 1.1. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення $M(X)$, $D(X)$, $S(X)$, якщо цілочислова випадкова величина X має рівномірний закон розподілу і можливі значення її значення лежать в діапазоні $1 \dots 50$.

Розв'язок.

$$M(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{50+1}{2} = 25.5$$

$$D(X) = \frac{n^2 - 1}{12} = \frac{2500 - 1}{12} \approx 208.25$$

$$\sigma_X = \sqrt{D(X)} \approx 14.43$$

Задача 1.2. Поїзда в метро прибувають на станцію кожні 10 хвилин. Визначити ймовірність того, що час очікування поїзда не буде більшим за 4 хвилини.

Розв'язок. За умовою задачі маємо два інтервали $[a, b] = 10$, $[c, d] = 4$. Згідно формули (1.6), шукана ймовірність рівна частці цих величин

$$P(c < X < d) = \frac{d - c}{b - a} = 0.4$$

Задача 1.3. Випадкова величина X має рівномірний розподіл з математичним сподіванням $m_X = 3$ та дисперсією $D(X) = 4/3$. Знайти інтервал можливих значень цієї випадкової величини, щільність $f(x)$ та функцію ймовірностей $F(x)$, побудувати їх графіки.
(Відповідь: $a = 1, b = 5$)

Задача 1.4. Ціна поділки шкали вольтметра дорівнює 0,2 В. Покази приладу округлюються до найближчої цілої поділки. Знайти ймовірність того, що при вимірюванні напруги буде зроблена похибка:
а) менша 0,04 В; б) більша 0,05 В. (Відповідь: а) 0,4; б) 0,5)

2. Біномний розподіл

Біномним називається розподіл ймовірностей для кількості m появ події в n незалежних випробуваннях, де ймовірність виникнення події в кожному випробуванні є сталою та дорівнює p . Значення випадкової величини X представляє собою кількість появ події в n випробуваннях, тобто $X = m$, де $0 \leq m \leq n$. Така схема випробувань називається схемою Бернуллі і ймовірність значення $X = m$ визначається за формулою Бернуллі. Отже, *біномний закон розподілу* має вигляд

$$P(X = m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}, \quad (2.1)$$

де сталі n і p – *параметри розподілу*, $1 - p = q$. Біномний розподіл описує лише дискретну випадкову величину. Його можна задати рядом розподілу:

X	0	1	2	...	k	...	n
P	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$C_n^n p^n q^0$

Інтегральна функція біномного розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & m \leq 0, \\ \sum_{k=0}^m P_n(k), & 0 < m \leq n, \\ 1, & m > n, \end{cases} \quad (2.2)$$

Відшукаймо числові характеристики біномного закону розподілу. Математичне сподівання можна було б розрахувати за загальною формулою для дискретних випадкових величин $m_X = \sum_{i=1}^n x_i p_i$, але існує простіший спосіб. Випадкова величина X – кількість появ події A в n випробуваннях – є сумою n незалежних випадкових величин X_i , які є результатом випробовування Бернуллі, тобто

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_i^n X_i \quad (2.3)$$

де кожний з доданків X_i приймає одне з значень $\{0, 1\}$, у залежності від появи події A . Розподіл випадкової величини X_i називають *розподілом Бернуллі*. Ряд цього розподілу має вигляд

X_i	0	1
P	q	p

Математичне сподівання випадкової величини X_i

$$M(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p \quad (2.4)$$

За властивістю математичного сподівання суми незалежних випадкових величин

$$M(X) = M(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n M(X_i) = n \cdot p \quad (2.5)$$

Розрахуємо дисперсію випадкової величини X_i (розподілу Бернуллі)

$$\begin{aligned} D(X_i) &= \sum_{i=1}^2 (x_i - m_X)^2 p_i = (0 - p)^2 q + (1 - p)^2 p = \\ &= p^2(1 - p) + (1 - p)^2 p = (1 - p)p = p q \end{aligned} \quad (2.6)$$

За властивістю дисперсії суми незалежних випадкових величин

$$D(X) = \sum_{i=1}^n D(X_i) = n(1 - p)p = n p q \quad (2.7)$$

В системі Mathematica величини $M(X)$ та $D(X)$ для біномного закону можна отримати так:

```
n = .; p = .;|
Mean[BinomialDistribution[n, p]]
Variance[BinomialDistribution[n, p]]

n p

n (1 - p) p
```

Якщо $n \rightarrow \infty$, то біномний розподіл наближається до нормального (див. рис.7.1 розділ 1)

Найбільшого значення ймовірність досягає тоді, коли $m = m_0$, де m_0 задовольняє умову: $np - q \leq m_0 \leq np + p$. Пригадаймо: m_0 – це найімовірніша кількість появ події в n випробуваннях, тобто мода біномного розподілу.

Задача 2.1. Побудувати таблицю біномного розподілу з параметрами $n = 5$ і $p = 0.8$ та розрахувати математичне сподівання і дисперсію, використовуючи означення цих величин.

Розв'язок. Розрахунки виконаємо в системі *Mathematica*. Спочатку розрахуємо ймовірності p_k для $k = 0, \dots, 5$. Використаємо формули для розрахунку $M(X)$ та $D(X)$ з означення цих величин і отриманий результат порівняємо з результатом розрахунку за формулами (2.5) і (2.7).

$p = 0.8; q = 0.2; n = 5; X = \text{Range}[n + 1] - 1$

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$P = \text{Table}[\text{Binomial}[n, k] p^k q^{n-k}, \{k, 0, n\}]$

$\{0.00032, 0.0064, 0.0512, 0.2048, 0.4096, 0.32768\}$

$$MX = \sum_{i=1}^{n+1} X[[i]] P[[i]]$$

4.

$$DX = \sum_{i=1}^{n+1} (X[[i]] - MX)^2 P[[i]]$$

0.8

Отриманий результат збігається з

$$M(X) = n \cdot p = 5 \cdot 0.8 = 4$$

$$D(X) = n \cdot p \cdot q = 5 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 0.8$$

Задача 2.2. Два ювелірні заводи виробляють золоті обручки. Перший завод виготовляє 95% обручок без дефекту, другий – 90%. В магазин поступає від першого заводу 30 обручок, а від другого – 70. Молода пара перед весіллям купляє пару обручок. Побудувати закон розподілу, обчислити математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення.

Розв'язок. Імовірність події А – куплена обручка виявилася якісною визначимо за формулою повної імовірності

$$P(A) = \frac{30}{100} 0.95 + \frac{70}{100} 0.9 = 0.915$$

$$n = 2, p = 0.915, q = 0.085$$

$$P(0) = q^2 = 0.085^2 \approx 0.007$$

$$P(1) = C_2^1 p q \approx 0.155$$

$$P(2) = p^2 \approx 0.837$$

$X = k$	0	1	2
p_k	0.007	0.155	0.837

$$M(X) = n \cdot p = 2 \cdot 0.915 = 1.830$$

$$D(X) = n \cdot p \cdot q = 2 \cdot 0.915 \cdot 0.085 = 0.1577$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \approx 0.4$$

3. Геометричний розподіл

Дослідимо ймовірність того, що в серії випробувань подія A вперше відбудеться в m -му випробуванні, тобто після того, як подія $\bar{A}$ сталася $m-1$ разів. Випадковою величиною X є кількість випробувань, після яких вперше з'явилася подія A . Очевидно, X може набувати значень $1, 2, \dots$

Побудуємо ряд розподілу цієї величини. За теоремою множення ймовірностей ймовірність того, що випадкова величина набула значення m ,

$$P(X = m) = P(m, p) = (1 - p)^{m-1}p \quad (3.1)$$

Отже, ряд розподілу випадкової величини залежить лише від одного параметра p і має вигляд ($1 - p = q$)

X	1	2	3	...	m	...
P	p	$q p$	$q^2 p$	...	$q^{m-1} p$	...

Цей розподіл називається *геометричним розподілом випадкової величини*. Прикладом є кількість спроб до першого успішного влучення в ціль (при постійній ймовірності влучення). Використовуючи формулу суми членів нескінченної спадної геометричної прогресії, легко перевірити, що загальна сума ймовірностей дорівнює 1.

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = p(1 + q + q^2 + \dots + q^k + \dots) = \frac{p}{1 - q} = 1$$

Можна довести, що математичне сподівання й дисперсія випадкової величини, яка має геометричний розподіл, визначаються формулами:

$$M(X) = \frac{1}{p}, \quad (3.2)$$

$$D(X) = \frac{1-p}{p^2} \quad (3.3)$$

Кількість випробувань вважається нескінченною, але якщо вона досить велика, ці формули надають точні наближення.

Система *Mathematica* дозволяє отримати формули (3.2) та (3.3) виходячи з означення математичного сподівання та дисперсії.

$$p = .; q = 1 - p;$$

$$MX = \sum_{k=1}^{\infty} k p q^{k-1}$$

$$DX = \sum_{k=1}^{\infty} (k - MX)^2 p q^{k-1} // FullSimplify$$

$$\frac{1}{p}$$

$$p$$

$$\frac{1 - p}{p^2}$$

Хоча геометричний розподіл безмежний, але ймовірності p_k прямують до нуля тим швидше чим більша ймовірність p . Для прикладу побудуємо таблицю та багатокутник геометричного розподілу до $k = 12$ при $p = 0.3$.

```
p = 0.3; q = 1 - p; n = 12;
X = Range[n];
P = Table[qk p, {k, 0, n - 1}];
A = Table[{X[[k]], Round[P[[k]], 0.001]}, {k, 1, n}];
TableForm[A, TableHeadings -> {None, {"X", "P"}}, TableDirections -> Row]
ListPlot[A, Joined -> True, Epilog -> {Blue, PointSize[0.018], Point[A]},
Frame -> True, FrameLabel -> {"X", "P"}, GridLines -> Automatic]
```

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	0.3	0.21	0.147	0.103	0.072	0.05	0.035	0.025	0.017	0.012	0.008	0.006

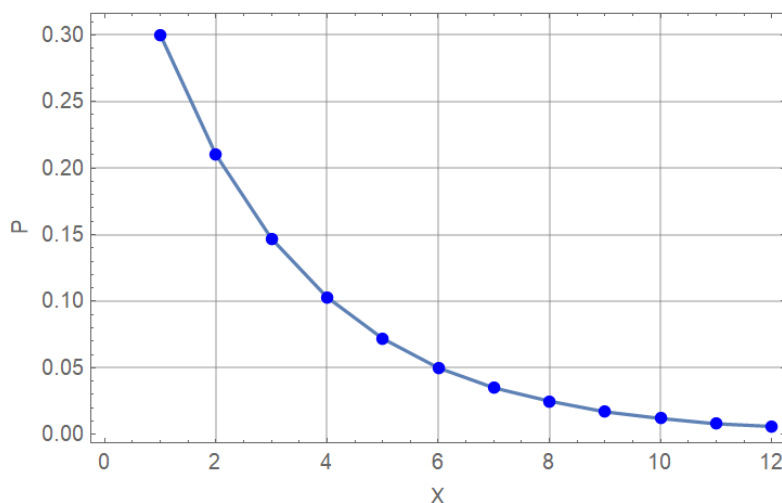


Рис. 3.1. Багатокутник геометричного розподілу

Побудуємо графік інтегральної функції розподілу

```
F = Table[{m, Sum[P[[k]], {k, 1, m}]}, {m, 1, n}];
ListPlot[F, Frame → True, Joined → True, PlotStyle → Dashed,
FrameLabel → {"m", "F(m) "}, Epilog → {Red, PointSize[0.018], Point[F]},
GridLines → Automatic]
```

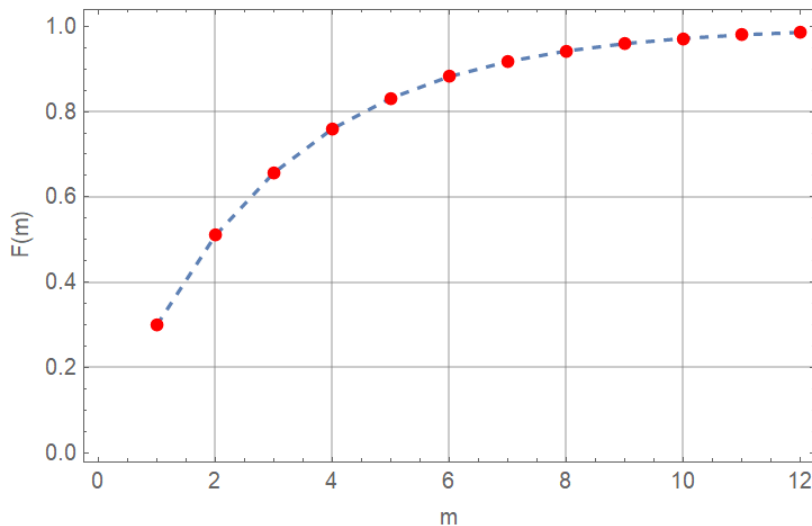
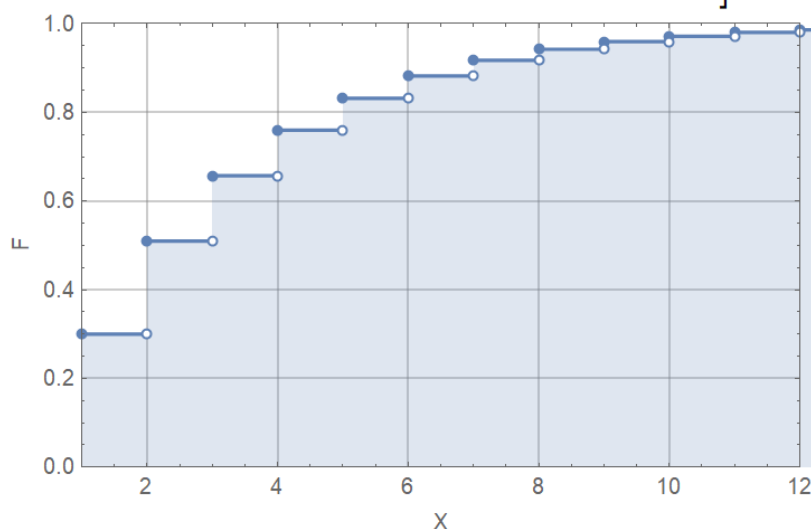


Рис. 3.2. Інтегральна функція геометричного розподілу.

Для дискретної випадкової величини інтегральну функцію розподілу прийнято зображати горизонтальними лініями.

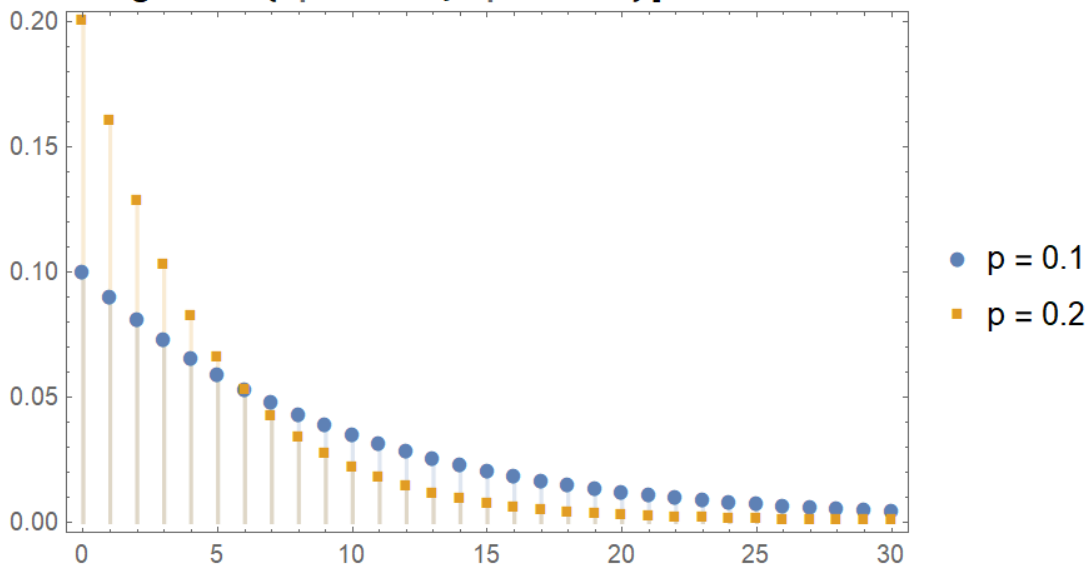
```
DiscretePlot[Sum[P[[k]], {k, 1, m}], {m, 1, n}, PlotRange → {{1, n}, {0, 1}},
Frame → True, ExtentSize → Right, ExtentMarkers → {"Filled", "Empty"},
FrameLabel → {"X", "F"}, GridLines → Automatic]
```



В системі *Matematica* у геометричному розподілі випадкової величини, який викликається функцією **GeometricDistribution** враховується не кількість усіх спроб, а кількість неуспішних спроб до першого успіху, тобто випадкова величина приймає цілі значення починаючи від 0.

DiscretePlot[

```
Table[PDF[GeometricDistribution[p], k], {p, {0.1, 0.2}}] // Evaluate,
{k, 0, 30}, PlotMarkers → Automatic, Frame → True,
PlotLegends → {"p = 0.1", "p = 0.2"}]
```



Задача 3.1. Студент опрацював 10 з 25 білетів і хоче скласти іспит. Нехай випадкова величина X позначає кількість спроб, необхідних для успішного складання іспиту. Побудуйте ряд розподілу випадкової величини X . Визначте ймовірність того, що студент буде відрахованим за академічну заборгованість, враховуючи, що іспит можна перескладати двічі, а вибір кожного білета є рівноймовірним..

Розв'язок. $p = \frac{2}{5}, q = \frac{3}{5}, P(X = k) = p q^{k-1}$

X	1	2	3	...	m	...
P	2/5	6/25	18/125	...	$q^{m-1}p$	...

$$P(X > 3) = 1 - 2/5 - 6/25 - 18/125 = \frac{125 - 50 - 30 - 18}{125} = \frac{27}{125} = 0,216.$$

Студента відраховують з ймовірністю 21.6%

Задача 3.2. Гральний кубик підкидається до першого випадання п'ятірки. Випадкова величина X – кількість підкидань кубика.

Побудувати ряд розподілу випадкової величини X . Встановити, яка ймовірність того, що прийдеться підкидати кубик більше ніж 2 рази.

Розв'язок. $p = \frac{1}{6}, q = \frac{5}{6}, P(X = k) = p q^{k-1}$

X	1	2	3	...	m	...
P	p	$p q$	$p q^2$	...	$p q^{m-1}$	...

$$P(X > 2) = 1 - 1/6 - 5/36 = \frac{36-6-5}{36} = \frac{25}{36} = 0,694.$$

Задача 3.3. Використовуючи систему *Mathematica*, розрахувати коефіцієнт асиметрії (скошеність) та ексцес для геометричного розподілу

Розв'язок.

$$\begin{aligned} MX &= \sum_{k=1}^{\infty} k p (1-p)^{k-1}; \\ DX &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p (1-p)^{k-1} - MX^2; \\ \sigma_X &= \sqrt{DX}; \\ \mu_3 &= \sum_{k=1}^{\infty} (k - MX)^3 p (1-p)^{k-1} // \text{FullSimplify}; \\ As &= \text{FullSimplify}\left[\frac{\mu_3}{\sigma_X^3}, p > 0\right] \\ &= \frac{2-p}{\sqrt{1-p}} \end{aligned}$$

Отже коефіцієнт асиметрії (скошеність) геометричного розподілу визначається з формули: $A_s = \frac{2-p}{\sqrt{q}}$.

На основі MX та DX продовжимо розрахунки для визначення ексцесу

$$\begin{aligned} \mu_4 &= \sum_{k=1}^{\infty} (k - MX)^4 p (1-p)^{k-1} // \text{FullSimplify}; \\ Ex &= \frac{\mu_4}{\sigma_X^4} - 3 // \text{FullSimplify} \\ &= 5 + \frac{1}{1-p} - p \end{aligned}$$

Отриманий вираз можна звести до такого вигляду: $E_s = 6 + \frac{p^2}{q}$.

4. Від'ємний біноміальний розподіл (розподіл Паскаля)

Від'ємний біноміальний розподіл в теорії ймовірностей – розподіл дискретної випадкової величини, що дорівнює кількості невдач в послідовності випробувань Бернуллі з ймовірністю успіху p , проведених до r -го успіху.

Нехай p – ймовірність успіху (подія A). Випробування повторюються до тих пір, поки подія A (успіх) не з'явиться r разів. Випадкова величина $X = k$ – кількість невдач до появи успіху r разів, включаючи і останнє випробування, яке у цьому розподілі завжди успішне.

Для виведення загальної формули від'ємного біноміального розподілу розглянемо дві незалежні події:

V : в $(r + k - 1)$ випробуваннях подія A відбулась рівно $(r - 1)$ раз;

W : в $(r + k)$ -му випробуванні подія A відбулась r -й раз.

Очевидно, що подія $X = k$ матиме місце в результаті сумісної появи подій V і W . Отже,

$$P(X = k) = C_{k+r-1}^k p^{r-1} q^k p = C_{k+r-1}^k p^r q^k. \quad (4.1)$$

Формула (4.1) описує ймовірність наступної події: k невдач, r успіхів, причому останнє випробування – успіх. Розподіл, що описується цією формулою, часто називають *розподілом Паскаля*. Розрахуємо в системі *Mathematica* основні числові характеристики цього розподілу: математичне сподівання та дисперсію.

$p = .; q = 1 - p; r = .;$

$\text{Binomial}[r + k - 1, k] p^r q^k;$

$$MX = \sum_{k=0}^{\infty} k \text{Binomial}[r + k - 1, k] p^r q^k$$

$$DX = \sum_{k=0}^{\infty} (k - MX)^2 \text{Binomial}[r + k - 1, k] p^r q^k$$

$$= \frac{(-1 + p) r}{p}$$

$$= \frac{r - p r}{p^2}$$

$$M(X) = \frac{qr}{p}, D(X) = \frac{qr}{p^2} \quad (4.2)$$

Для прикладу розподілу Паскаля розглянемо задачу:

Задача 4.1. Студент здає іспит, на якому викладач задає запитання, вибраних випадковим чином з усього матеріалу дисципліни, до тих пір, поки не отримає 5 правильних відповідей. Побудуйте таблицю розподілу ймовірності кількості неправильних відповідей студента на екзамені, якщо готуючись до нього студент вивчив лише 60% матеріалу дисципліни. Побудуйте багатокутник розподілу та інтегральну функцію розподілу випадкової величини. Знайдіть моду, математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини. Визначте, яка ймовірність того, що при здачі екзамену студент помилився менше ніж 4 рази.

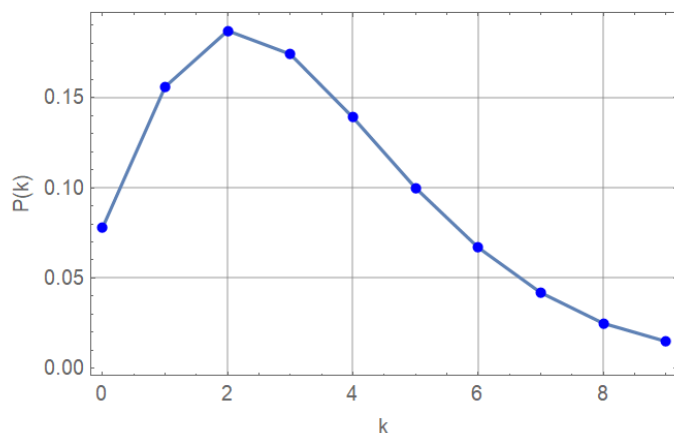
Побудуємо таблицю перших десяти значень випадкової величини при $p = 0.6$ і $r = 5$. На основі цієї таблиці побудуємо багатокутник розподілу

```

p = 0.6; q = 1 - p; r = 5; n = 10;
X = Range[n + 1] - 1;
P = Table[Binomial[r + k - 1, k] pr qk, {k, 0, n - 1}];
A = Table[{X[[k]], Round[P[[k]], 0.001]}, {k, 1, n}];
TableForm[A, TableHeadings -> {Automatic, {"X", "P"}}, TableDirections -> Row]
ListPlot[A, Joined -> True, Epilog -> {Blue, PointSize[0.018], Point[A]},
Frame -> True, FrameLabel -> {"k", "P(k)"}, GridLines -> Automatic]

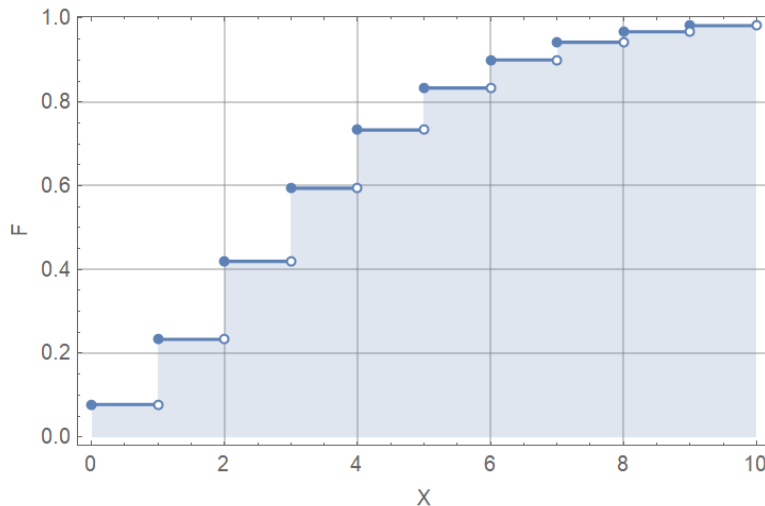
```

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	0.078	0.156	0.187	0.174	0.139	0.1	0.067	0.042	0.025	0.015



Побудуємо інтегральну функція розподілу Паскаля.

```
DiscretePlot[ $\sum_{k=1}^{m+1} P[[k]]$ , {m, 0, n - 1}, Frame → True, ExtentSize → Right,
ExtentMarkers → {"Filled", "Empty"}, FrameLabel → {"X", "F"},
GridLines → Automatic]
```



З графіка видно, що мода $MoX=2$. За формулами (4.2) розрахуємо: $M(X) = \frac{0.4 \cdot 5}{0.6} \approx 3.33$, $D(X) = 5.56$. З інтегральної функції розподілу визначаємо, що ймовірність того, що кількість неправильних відповідей буде менше 4 дорівнює 60%.

Розглянемо приклади інших ситуацій, де може виникати від'ємний біноміальний розподіл:

Виробництво деталей: Потрібно виготовити n успішних деталей. Виробництво зупиняється після досягнення цього показника. Від'ємний біноміальний розподіл дозволяє передбачити, скільки неуспішних спроб знадобиться (кількість браку) для досягнення n успішних деталей.

Розподіл подій: У випадках, коли розглядаються події, що відбуваються з певною ймовірністю успіху p , і необхідно визначити, скільки неуспішних спроб знадобиться для досягнення певної кількості успіхів n .

Вибірка у статистиці: В статистичних дослідженнях деколи роблять вибірку доки не досягнуть певної кількості успішних спроб.

Від'ємний біноміальний розподіл (*розподіл Паскаля*) використовується для моделювання таких ситуацій, де немає фіксованої кількості спроб n , і ми цікавимося кількістю спроб, необхідних для досягнення певної кількості успіхів.

5. Розподіл Пуассона

Розподіл Пуассона описує дискретну випадкову величину та використовується для моделювання найпростішого потоку подій – послідовності подій, що відбуваються зі сталою інтенсивністю в довільні моменти часу. Інтенсивність ν — це середня кількість подій за одиницю часу. Потік має три основні властивості: *стаціонарність* (залежність тільки від тривалості інтервалу), *ординарність* (ймовірність більше однієї події на малому інтервалі близька до нуля), і *відсутність післядії* (події в різних інтервалах незалежні). Потік, що відповідає цим властивостям, називається *пуассонівським*.

Можна довести: ймовірність того, що за сталої інтенсивності ν за проміжок часу t подія наступить m разів, визначається формулою:

$$P_t(m) = \frac{(\nu t)^m}{m!} e^{-\nu t} = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad (5.1)$$

Величина $\lambda = \nu t$ – це середня кількість появ події за час t .

Ця формула – *закон розподілу Пуассона*. Ряд розподілу випадкової величини, що характеризується розподілом Пуассона, виглядає так:

X	0	1	2	...	m	...
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2} e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$	...

Оскільки, $e^{\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!}$, то зрозуміло, що ряд імовірностей збігається:

$$p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_m + \dots = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = 1$$

Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини з розподілом Пуасона однакові і дорівнюють параметрові розподілу λ :

$$M(X) = D(X) = \lambda \quad (5.2)$$

Побудуємо в системі *Mathematica* таблицю, багатокутник та інтегральну функцію розподілу Пуассона, що характеризується параметром $\lambda = 1.5$

$\lambda = 1.5$; $n = 10$;

$X = \text{Range}[n + 1] - 1$;

$P = \text{Table}\left[\frac{\lambda^k}{k!} E^{-\lambda}, \{k, 0, n - 1\}\right]$;

$A = \text{Table}[\{X[[k]], \text{Round}[P[[k]], 0.001]\}, \{k, 1, n\}]$;

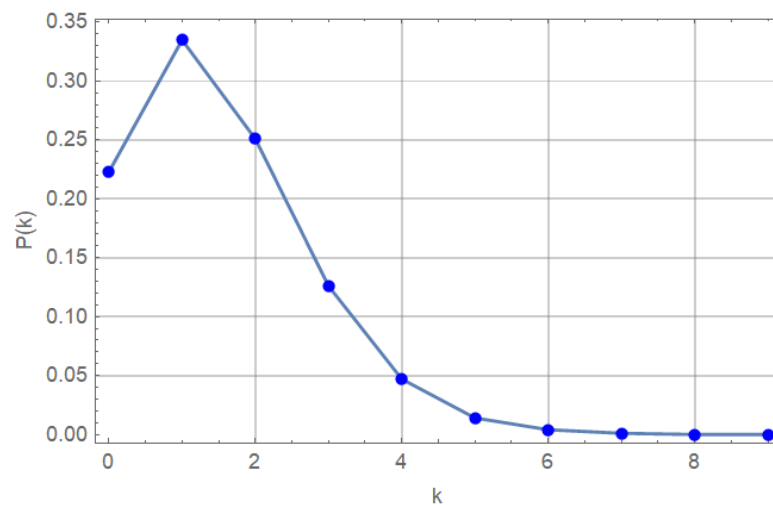
$\text{TableForm}[A, \text{TableHeadings} \rightarrow \{\text{Automatic}, \{"X", "P"\}\},$
 $\text{TableDirections} \rightarrow \text{Row}]$

$\text{ListPlot}[A, \text{Joined} \rightarrow \text{True}, \text{Epilog} \rightarrow \{\text{Blue}, \text{PointSize}[0.018], \text{Point}[A]\},$

$\text{Frame} \rightarrow \text{True}, \text{FrameLabel} \rightarrow \{"k", "P(k)" \}, \text{GridLines} \rightarrow \text{Automatic}]$

eForm=

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	0.223	0.335	0.251	0.126	0.047	0.014	0.004	0.001	0.	0.

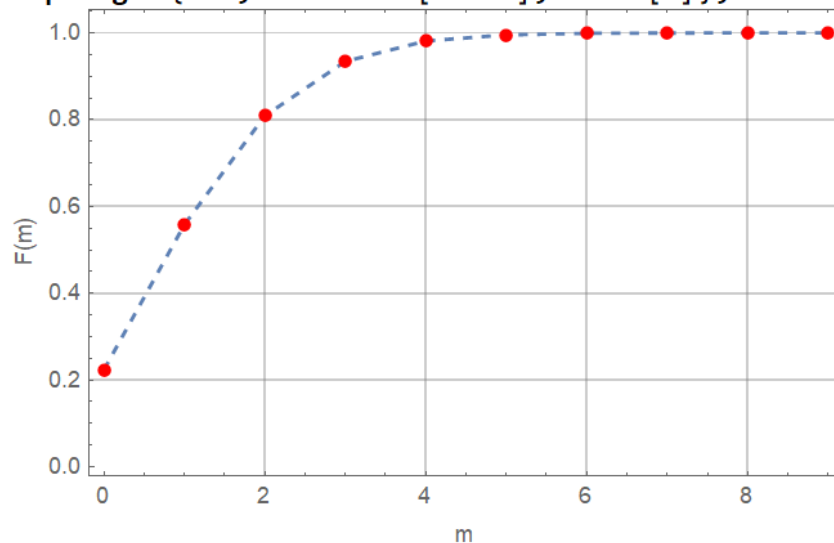


$F = \text{Table}\left[\left\{m, \sum_{k=1}^{m+1} P[[k]]\right\}, \{m, 0, n - 1\}\right]$;

$\text{ListPlot}[F, \text{Frame} \rightarrow \text{True}, \text{Joined} \rightarrow \text{True}, \text{PlotStyle} \rightarrow \text{Dashed},$

$\text{FrameLabel} \rightarrow \{"m", "F(m)" \},$

$\text{Epilog} \rightarrow \{\text{Red}, \text{PointSize}[0.018], \text{Point}[F]\}, \text{GridLines} \rightarrow \text{Automatic}]$

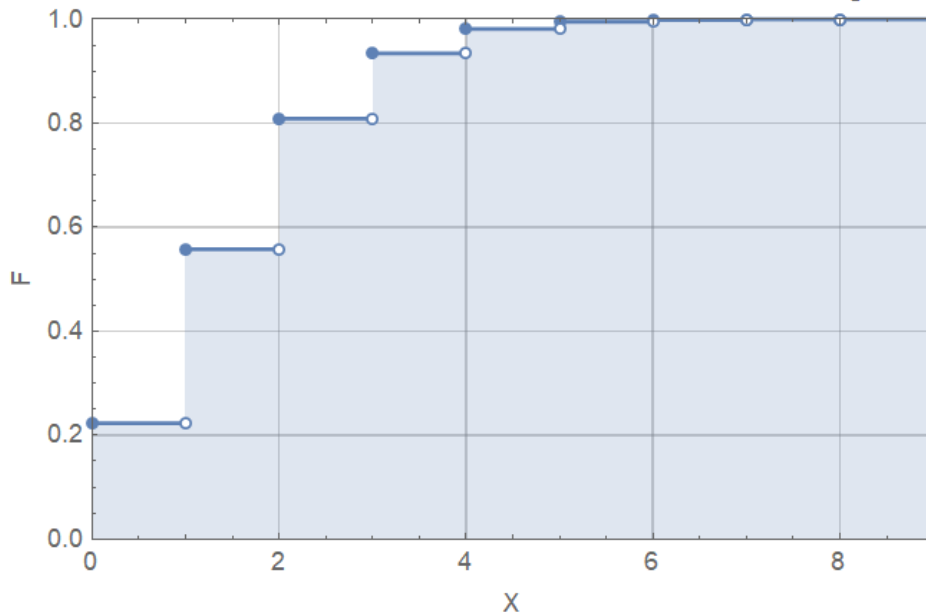


DiscretePlot $\left[\sum_{k=1}^{m+1} P[[k]], \{m, 0, n-1\}, \right.$

PlotRange $\rightarrow \{\{0, n-1\}, \{0, 1\}\}, \text{Frame} \rightarrow \text{True},$

ExtentSize $\rightarrow \text{Right}, \text{ExtentMarkers} \rightarrow \{\text{"Filled"}, \text{"Empty"}\},$

FrameLabel $\rightarrow \{\text{"X"}, \text{"F"}\}, \text{GridLines} \rightarrow \text{Automatic} \left. \right]$



Асиметрія закону розподілу Пуассона $As = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, а ексцес $Es = \frac{1}{\lambda} - 3$.

Випадкові величини, що підкоряються розподілу Пуассона, часто зустрічаються в практичних застосуваннях. Прикладами можуть бути: кількість альфа-частинок під час радіоактивного розпаду або кількість електронів, що випромінюються розжареним металом, пошкоджень товарів під час транспортування, прихід покупців у магазин, помилки в тексті, затримки потягів на певній ділянці шляху, дефекти у виробках та інші схожі випадки.

Задача 5.1. Підприємство випускає продукцію з 1% браку. На склад поступила партія 100 шт виробів. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X , що характеризує кількість бракованих виробів у партії. Розрахувати ймовірність, того що в даній партії більше ніж 2 бракованих вироби.

Розв'язок. $P(k) = a^k e^{-a} / k!$, де $a = n \cdot p = 100 \cdot 0.01 = 1$

$P(0) = e^{-1} \approx 0,368$, $P(1) = e^{-1} \approx 0,368$, $P(2) = e^{-1}/2 \approx 0,184$,

$P(3) = e^{-1}/6 \approx 0,061$, $P(4) \approx 0,015$, $P(5) \approx 0,003$.

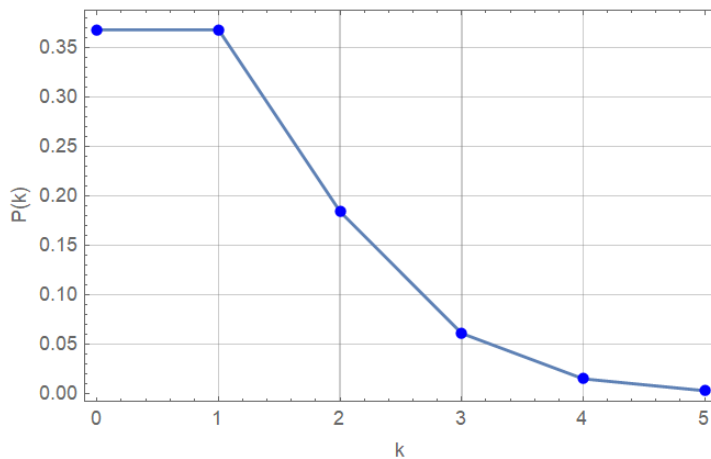
$P(k > 2) = 1 - P(0) - P(1) - P(2) = 1 - 0,92 = 0,08$.

Побудуємо таблицю та графіки розподілу випадкової величини X .

```
a = 1; n = 6; X = Range[n + 1] - 1;
P = Table[ $\frac{a^k}{k!} e^{-a}$ , {k, 0, n - 1}];
A = Table[{X[[k]], Round[P[[k]], 0.001]}, {k, 1, n}];
TableForm[A, TableHeadings -> {Automatic, {"X", "P"}}, TableDirections -> Row]
ListPlot[A, Joined -> True, Epilog -> {Blue, PointSize[0.018], Point[A]},
Frame -> True, FrameLabel -> {"k", "P(k)"}, GridLines -> Automatic]
```

bleForm=

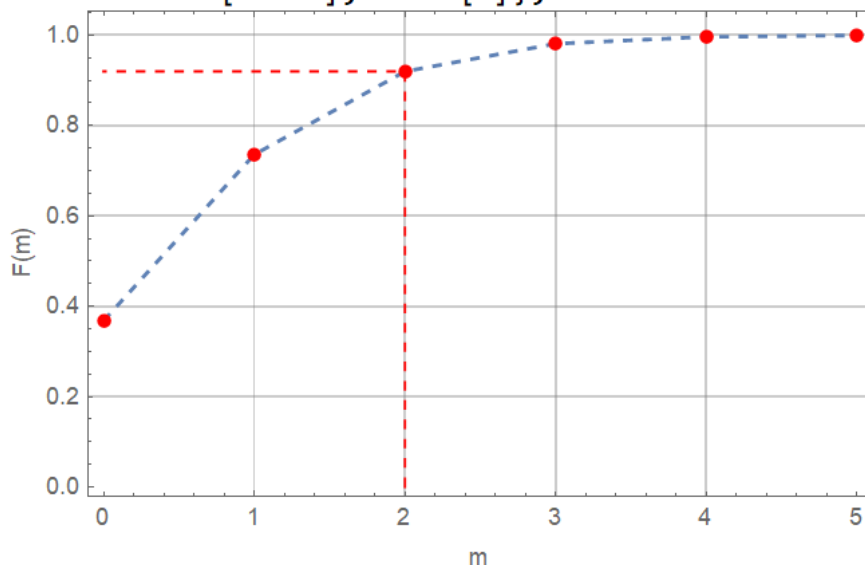
	1	2	3	4	5	6
X	0	1	2	3	4	5
P	0.368	0.368	0.184	0.061	0.015	0.003



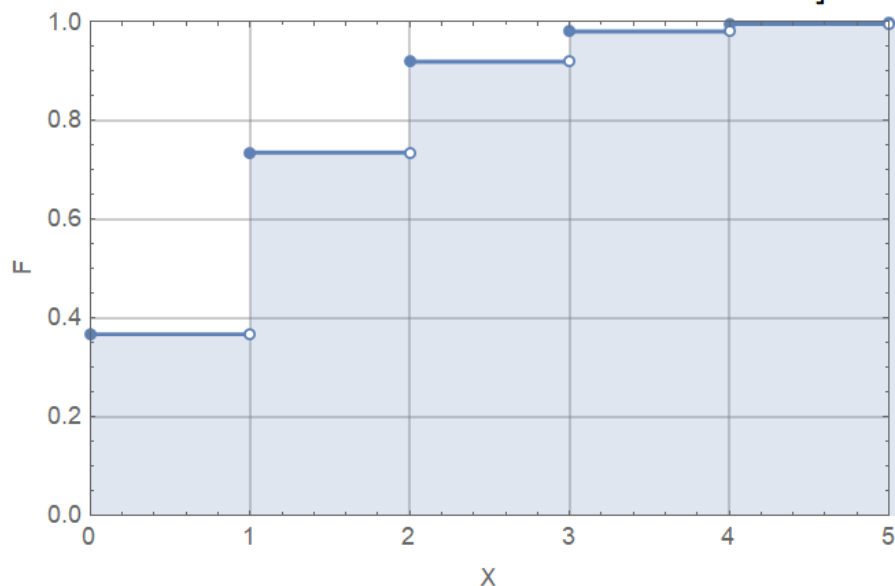
```
F = Table[{m,  $\sum_{k=1}^{m+1} P[[k]]$ }, {m, 0, n - 1}];
```

```
F2 = F[[3, 2]];
```

```
ListPlot[F, Frame -> True, Joined -> True, PlotStyle -> Dashed,
FrameLabel -> {"m", "F(m)"},
Epilog -> {Red, Dashed, Line[{2, 0}, {2, F2}, {0, F2}]},
PointSize[0.018], Point[F]}, GridLines -> Automatic]
```



```
DiscretePlot[ $\sum_{k=1}^{m+1} P[[k]]$ , {m, 0, n - 1},
PlotRange -> {{0, n - 1}, {0, 1}}, Frame -> True,
ExtentSize -> Right, ExtentMarkers -> {"Filled", "Empty"},
FrameLabel -> {"X", "F"}, GridLines -> Automatic]
```



Задача 5.2. Прибуття відвідувачів у банк підпорядковується закону Пуассона. Припустимо, що в середньому один відвідувач заходить у банк кожні три хвилини. Яка ймовірність того, що протягом однієї хвилини в банк увійде один відвідувач? не менше трьох відвідувачів?

Розв'язок.

$$\nu = \frac{1}{3}; P_t(m) = \frac{(\nu t)^m}{m!} e^{-\nu t};$$

$$t = 1; m = 1; P_1(1) \approx 0.2396,$$

$$P_1(m \geq 3) = 1 - P_1(0) - P_1(1) - P_1(2) \approx 0.005.$$

6. Показниковий (експоненційний) розподіл

Розподіл Пуассона дозволяє визначити ймовірність дискретної випадкової величини X , що дорівнювала кількості появи події протягом фіксованого часового інтервалу при заданій інтенсивності. Тепер розглянемо іншу випадкову величину T – час між двома подіями в даному потоці подій. Зрозуміло, що T – неперервна випадкова величина. Якщо величина ν – інтенсивність потоку подій (частота подій), то величина $\bar{T} = 1/\nu$ – середній час між двома подіями.

Побудуємо інтегральну функцію розподілу неперервної випадкової величини T . За означенням $F(t) = P(T < t)$, але ми відшукаємо ймовірність протилежної події, тобто ймовірність того, що випадкова величина T прийме значення, більше від певного значення t , тобто в проміжку часу $(0, t)$ не наступить жодна з подій потоку ($m=0$ в формулі (5.1)):

$$P(T > t) = P(X = 0) = \frac{(\nu \cdot t)^0}{0!} e^{-\nu t} = e^{-\nu t} \quad (6.1)$$

Перейдемо до протилежної події:

$$P(T < t) = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\nu t} \quad (6.2)$$

Остання ймовірність за означенням дорівнює інтегральній функції розподілу випадкової величини T .

$$F(t) = 1 - e^{-\nu t} \quad (6.3)$$

Тепер можна знайти щільність розподілу випадкової величини T

$$f(t) = F'(t) = \nu e^{-\nu t} \quad (6.4)$$

Розподіл, що описується функцією розподілу (6.3) або щільністю розподілу (6.4), називається *показниковим або експоненційним розподілом*. Розрахуємо математичне сподівання $M(T)$, дисперсію $D(T)$ та $\sigma(T)$.

```

f[t_] := v E^-v t; F[t_] := 1 - E^-v t;
MT = FullSimplify[ $\int_0^\infty t f[t] dt$ , v > 0];
DT = FullSimplify[ $\int_0^\infty (t - MT)^2 f[t] dt$ , v > 0];
σT = FullSimplify[ $\sqrt{DT}$ , v > 0];
{MT, DT, σT}
{ $\frac{1}{v}$ ,  $\frac{1}{v^2}$ ,  $\frac{1}{v}$ }

```

$$M(T) = \int_0^\infty t f(t) dt = v \int_0^\infty t e^{-vt} dt = \frac{1}{v} \quad (6.5)$$

$$D(T) = v \int_0^\infty (t - \frac{1}{v})^2 e^{-vt} dt = \frac{1}{v^2} \quad (6.6)$$

$$\sigma(T) = \frac{1}{v} \quad (6.7)$$

Отже, математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення дорівнюють оберненій величині до інтенсивності потоку v .

Ймовірність того, що випадкова величина, розподілена за показниковим законом, потрапить в інтервал (a, b) , обчислюється за допомогою властивості функції розподілу

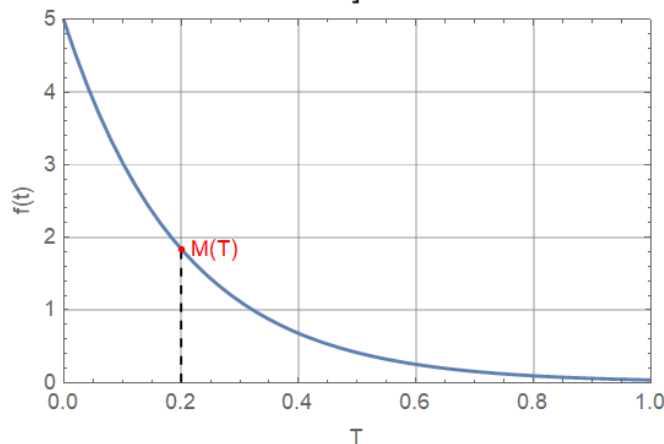
$$P(a < T < b) = e^{-va} - e^{-vb} \quad (6.8)$$

Побудуємо графіки густини (щільності) та інтегральної функції показникового розподілу, який характеризується параметром $v = 5$

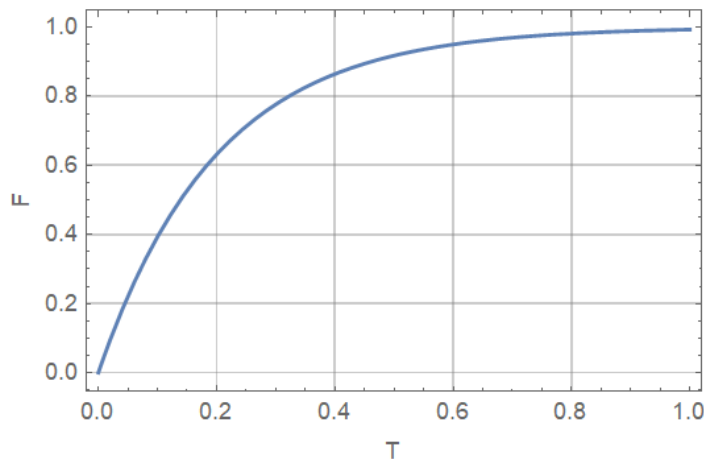
```

v = 5;
Plot[f[t], {t, 0, 5/v}, Frame -> True, FrameLabel -> {"T", "f(t)"},
PlotRange -> {{0, 5/v}, {0, v}},
Epilog -> {Dashed, Line[{MT, 0}, {MT, f[MT]}]}, Red,
Point[{MT, f[MT]}], Text["M(T)", {1.3 MT, f[MT]}]},
GridLines -> Automatic]

```



```
Plot[F[t], {t, 0, 1}, Frame → True, FrameLabel → {"T", "F"},
GridLines → Automatic]
```



Основною сферою застосування показникового розподілу є обчислення середнього часу безвідмовної роботи складних технічних систем. У випадках, коли пристрій складається з великої кількості елементів, кожен з них може вийти з ладу в будь-який момент, що призводить до зміни надійності системи з часом відповідно до показникового закону. Для дослідження надійності таких систем використовують поняття *середнього часу безвідмовної роботи системи* T та *функції надійності* $R(t) = P(T > t)$, яка описує закон зміни надійності в часі. Параметр ν називають інтенсивністю відмов. Вважаючи, що випадкова величина T (час безвідмовної роботи системи) розподілена за показниковим законом, маємо

$$R(t) = P(T > t) = e^{-\nu t} = e^{-t/\bar{T}}, \quad \bar{T} = M(T) = 1/\nu \quad (6.9)$$

Розглянемо послідовне і паралельне з'єднання блоків складної системи, середній час безвідмовної роботи кожного з яких дорівнює $\bar{T}_i$. Нагадаємо, що у випадку послідовного з'єднання безвідмовна робота системи забезпечується безвідмовною роботою кожного блоку, тому надійність системи визначається добутком надійності кожного блоку:

$$R_{\text{посл}}(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t) = e^{-t \sum_{i=1}^n 1/\bar{T}_i} = e^{-t/\bar{T}_{\text{посл}}} \quad (6.10)$$

Отже, при послідовному з'єднанні блоків функція надійності всієї системи підлягає показниковому закону розподілу. Середній час безвідмовної роботи системи можна визначити за формулою:

$$\frac{1}{\bar{T}_{\text{посл}}} = \sum_{i=1}^n 1/\bar{T}_i \quad (6.11)$$

При паралельному з'єднанні, коли для безвідмовної роботи системи достатньо працездатності хоча б одного з дублюючих блоків, закон зміни функції надійності пристрою відрізняється від показникового. Через це неможливо сформулювати загальну формулу для середнього часу безвідмовної роботи системи з n паралельних блоків. Однак середній час безвідмовної роботи для двох паралельно з'єднаних елементів можна розрахувати за формулою:

$$\bar{T}_{\text{пар}} = \bar{T}_1 + \bar{T}_2 - 1/(\frac{1}{\bar{T}_1} + \frac{1}{\bar{T}_2}) \quad (6.12)$$

Задача 6.1. У середньому комп'ютер зазнає однієї відмови кожні дві години. Яка ймовірність того, що протягом однієї години не станеться жодної відмови?

Розв'язання. З умови задачі витікає, що $\nu = 0,5$ (одна відмова за дві години), $t = 1$, $\lambda = \nu \cdot t = 0,5$, $k = 0$ (жодної відмови). Отже, за формулою (5.1) маємо $P(0) = \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} \approx e^{-0.5} = 0.607$

Задача 6.2. Обчислити ймовірність того, що випадкова величина, розподілена за експоненціальним законом, перевищить своє математичне сподівання.

Розв'язок. З формули (6.8) отримаємо $P(1/\nu < T < \infty) = e^{-1} = 1/e$

Задача 6.3. Протягом 100 годин роботи системи було зафіксовано 5 відмов. Необхідно скласти функцію надійності системи, визначити ймовірність її безвідмовної роботи протягом 50 годин, а також обчислити час безвідмовної роботи, який гарантується з ймовірністю 99,0%.

Розв'язок: Знаходимо інтенсивність потоку подій $\nu = \frac{5}{100} = 0,05$

Функція надійності $R(t) = P(T > t) = e^{-0,05t}$ ймовірність безвідмовної роботи системи упродовж 50 годин

$$P(T > 50) = e^{-0,05 \cdot 50} \approx 0,082$$

$$0.99 = e^{-0,05t}, \quad t = -\frac{\ln(0.99)}{0.05} \approx 0.2 \text{ год}$$

Задача 6.4. Пристрій містить 15 елементів з середнім часом безвідмовної роботи 1000 годин та 20 елементів з середнім часом безвідмовної роботи 2000 годин. Для функціонування пристрою потрібна безвідмовна робота всіх його елементів. Необхідно обчислити середній час безвідмовної роботи пристрою.

Розв'язок: За формулою $\frac{1}{\bar{T}_{\text{посл}}} = \sum_{i=1}^n 1/\bar{T}_i$ знаходимо

$$\frac{1}{\bar{T}_{\text{посл}}} = \frac{15}{1000} + \frac{20}{2000} = \frac{50}{2000} = \frac{1}{40}$$

Отже, середній час безвідмовної роботи складе 40 годин.

7. Гіпергеометричний розподіл

Нехай є скінченна сукупність, яка складається з N елементів. Припустимо, що n із них мають потрібну нам властивість ($n \leq N$). Випадковим чином із загальної сукупності вибирається група з m елементів ($m \leq N$). Нехай X – випадкова величина, що дорівнює кількості вибраних елементів, які мають потрібну властивість. Тоді функція ймовірностей Y має вигляд:

$$P(A = k) = \frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m} \quad (7.1)$$

$$\max(0, m + n - N) \leq k \leq \min(n, m)$$

Розподіл, що описується формулою (7.1), називається *гіпергеометричним розподілом*. Цей розподіл використовується на практиці, зокрема, в статистичному контролі якості продукції та в задачах, пов'язаних з вибірковими дослідженнями. В даній моделі випробування є залежними, оскільки після кожного вибору елемент вибірки не повертається назад. Якщо вибраний об'єкт має задану властивість, то його кількість у генеральній сукупності зменшується на один. Доведено, що числові характеристики гіпергеометричного розподілу мають такі значення

$$M(X) = \frac{m \cdot n}{N}, \quad D(X) = \frac{m \cdot n}{N} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \left(\frac{N-m}{N-1}\right) \quad (7.2)$$

Розрахуємо математичне сподівання $M(X)$ та дисперсію $D(X)$ гіпергеометричного розподілу з параметрами

$$N = 100, n = 20, m = 10$$

```

NN = 100; n = 20; m = 10;
X = Range[n + 1] - 1;
P = Table[ $\frac{\text{Binomial}[n, k] \text{Binomial}[NN - n, m - k]}{\text{Binomial}[NN, m]}$ ,
  {k, Max[0, m + n - NN], Min[n, m]}];
MX =  $\sum_{k=0}^{\text{Length}[P]-1} k P[[k + 1]]$ 
DX =  $\sum_{k=0}^{\text{Length}[P]-1} (k - MX)^2 P[[k + 1]]$ 
2
16
11

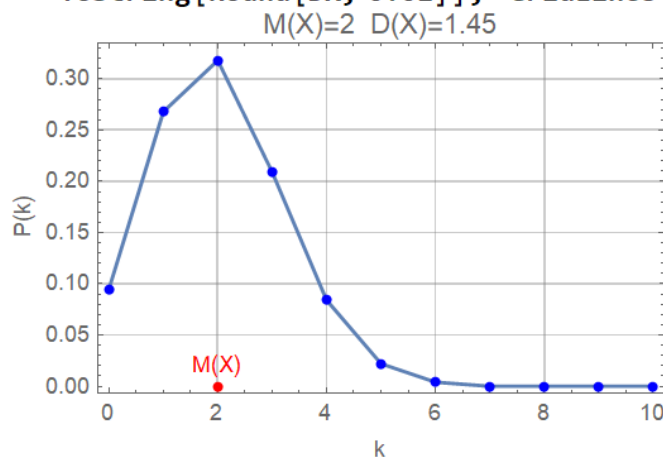
```

Побудуємо таблицю, багатокутник та інтегральну функцію розподілу

```
A = Table[{X[[k]], Round[P[[k]], 0.001]}, {k, 1, Length[P]}];
TableForm[A, TableHeadings -> {Automatic, {"X", "P"}},
TableDirections -> Row]
```

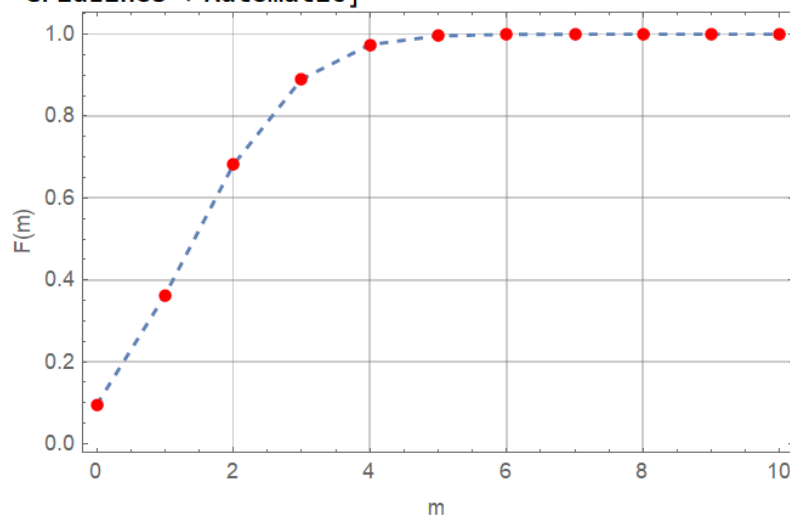
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0.095	0.268	0.318	0.209	0.084	0.022	0.004	0.	0.	0.	0.

```
ListPlot[A, Joined -> True,
Epilog -> {Blue, PointSize[0.018], Point[A], Red, Point[{MX, 0}],
Text["M(X)", {MX, 0.02}]}, Frame -> True, FrameLabel -> {"k", "P(k)"},
PlotLabel -> "M(X) = " <> ToString[MX] <> " D(X) = " <>
ToString[Round[DX, 0.01]], GridLines -> Automatic]
```

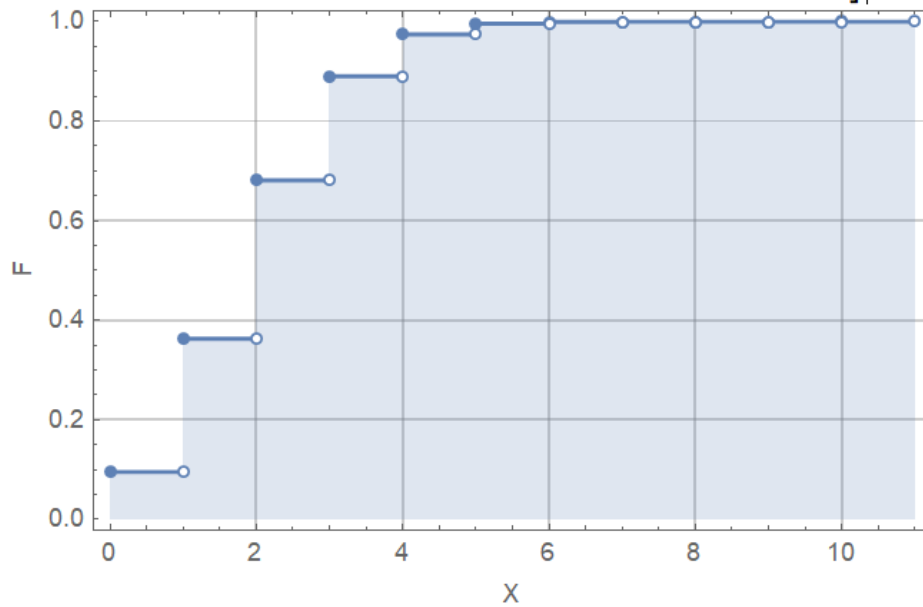


```
F = Table[{i, Sum[P[[k]], {k, 1, i+1}]}, {i, 0, Length[P] - 1}];
```

```
ListPlot[F, Frame -> True, Joined -> True, PlotStyle -> Dashed,
FrameLabel -> {"m", "F(m)"}, Epilog -> {Red, PointSize[0.018], Point[F]},
GridLines -> Automatic]
```



```
DiscretePlot[ $\sum_{k=1}^{m+1} P[[k]]$ , {m, 0, Length[P] - 1}, Frame → True,
  ExtentSize → Right, ExtentMarkers → {"Filled", "Empty"},
  FrameLabel → {"X", "F"}, GridLines → Automatic]
```



8. Нормальний закон розподілу

Нормальний розподіл – це розподіл неперервної випадкової величини X , густина ймовірності якого має вигляд

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (8.1)$$

a і σ – параметри розподілу, $\sigma > 0$, $a - \infty < x < \infty$

Скориставшись значенням інтеграла Ейлера-Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi} \quad (8.2)$$

можна показати, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_N(x) dx = 1 \quad (8.3)$$

Знайдемо математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X .

$$M(X) = a \quad (8.4)$$

$$D(X) = \sigma^2 \quad (8.5)$$

Отже, параметри нормального розподілу a і σ є його математичним сподіванням та середнім квадратичним відхиленням.

```
Plot[Evaluate[Table[PDF[NormalDistribution[a, σ], x], {σ, {2/3, 1, 2}}, {a, {0, 5}}],
{x, -6, 10}, Frame → True, PlotRange → {-0.005, 0.65}, PlotStyle → {Automatic, Dashed},
FrameTicks → {{-5, -3, -1, 0, 1, 3, 5, 7, 9}, Automatic}, GridLines → Automatic,
PlotLabel → "Густина нормального розподілу", FrameLabel → {"X", "f(x)"},
PlotLegends → {"σ=2/3, a=0", "σ=2/3, a=5", "σ=1, a=0", "σ=1, a=5",
"σ=2, a=0", "σ=2, a=5"}]
```

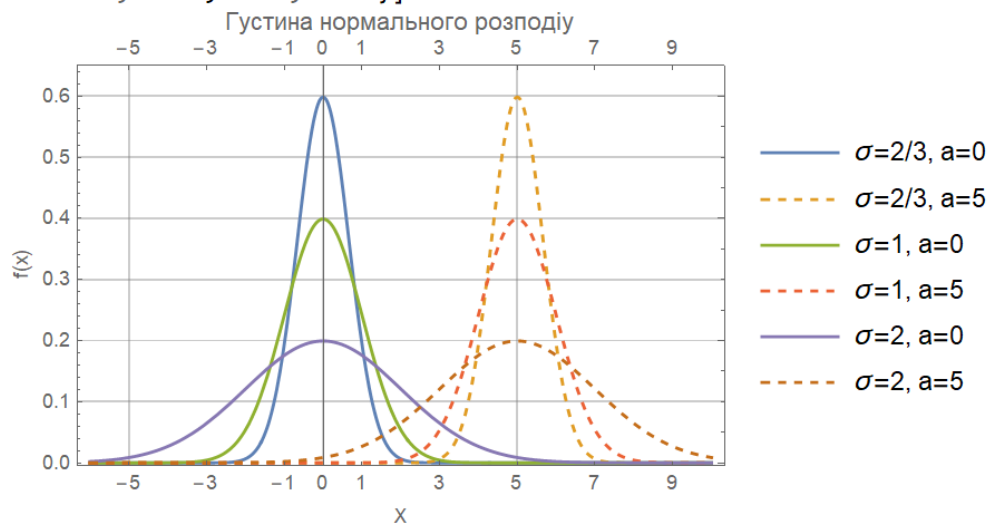


Рис.8.1 Густина нормального розподілу при $\sigma = \frac{2}{3}; 1; 2$ та $a = 0; 5$.

Оскільки крива нормального розподілу симетрична відносно прямої $x = a$, точка $x = a$ медіаною. У цій точці функція щільності $f(x)$ досягає свого найбільшого значення, тому $x = a$ – також є модою випадкової величини. Таким чином, для нормального розподілу три величини: $M(X)$ – математичне сподівання, $Mo(X)$ – мода та $Me(X)$ – медіана збігаються. Точку $x = a$ називають центром розподілу ймовірностей або центром розсіювання випадкової величини.

Якщо в формулі (8.1) $a = 0$ і $\sigma = 1$, то розподіл називають *стандартним нормальним розподілом*. Значення функції щільності ймовірності стандартного нормального розподілу табульовано (див. додаток 1).

Четвертий центральний момент нормального розподілу

$$\mu_4 = M((x - a)^4) = 3\sigma^4, \quad (8.6)$$

тому ексцес (коефіцієнт крутості) нормального розподілу

$$E_S = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = 0.$$

Ймовірність того, що випадкова величина при нормальному розподілі потрапить у проміжок (α, β) визначають за формулою

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) \quad (8.8)$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа (інтеграл ймовірностей), що визначається формулою

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt. \quad (8.9)$$

Значення функції Лапласа табульовано (додаток 2).

На практиці за одиницю вимірювання відхилення часто вибирають середнє квадратичне відхилення σ . Зміна параметра a не змінює форми кривої (не змінює характеру розсіювання випадкової величини). Ця зміна лише визначає величину зсуву кривої розподілу ліворуч або праворуч. Тому без втрати загальності можна вважати, що $a = 0$ (крива розподілу симетрична щодо осі Oy). Тоді можна розрахувати ймовірності потрапляння випадкової величини в різні інтервали:

$$\begin{aligned} P(-\sigma < X < \sigma) &= 2\Phi(1) \approx 0,683 \\ P(-2\sigma < X < 2\sigma) &= 2\Phi(2) \approx 0,954 \\ P(-3\sigma < X < 3\sigma) &= 2\Phi(3) \approx 0,997 \end{aligned}$$

```

f[x_, σ_] := PDF[NormalDistribution[0, σ], x]
Manipulate[Plot[f[x, σ], {x, -3 σ, 3 σ}, Filling → Axis, PlotRange → All,
  PlotLabel → "Густина нормального розподілу σ=" <> ToString[σ],
  AxesLabel → {"x", "f(x)"},
  Epilog → {Dashed, Line[{{-2 σ, 0}, {-2 σ, f[-2 σ, σ]}]},
    Line[{{-σ, 0}, {-σ, f[-σ, σ]}]}, Line[{{σ, 0}, {σ, f[σ, σ]}]},
    Line[{{2 σ, 0}, {2 σ, f[2 σ, σ]}]}, Red, PointSize[0.015],
    Point[{{-3 σ, f[-3 σ, σ]}, {-2 σ, f[-2 σ, σ]}, {-σ, f[-σ, σ]}, {σ, f[σ, σ]},
      {2 σ, f[2 σ, σ]}, {3 σ, f[3 σ, σ]}]},
    Text["P(-σ<X<σ)=0.683 \n P(-2σ<X<2σ)=0.954 \n P(-3σ<X<3σ)=0.997",
      {-2 σ, 1 / (3 σ)}]},
  Ticks → {{{-3 σ, "-3σ"}, {-2 σ, "-2σ"}, {-σ, "-σ"}, 0, {σ, "σ"}, {2 σ, "2σ"},
    {3 σ, "3σ"}}, Automatic], {{σ, 1}, 0.1, 10, 0.1}]

```

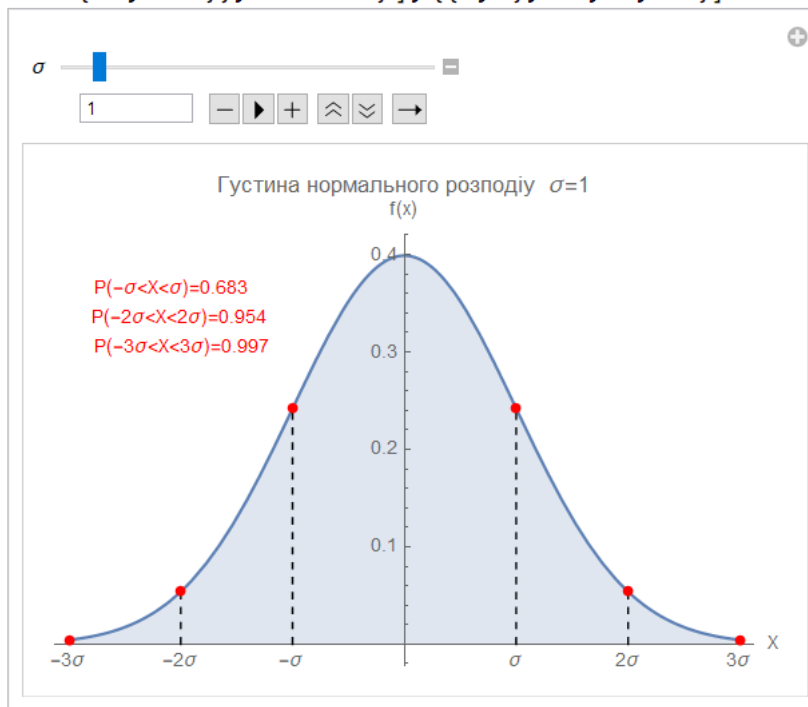


Рис. 8.2 Ймовірність відхилення неперервної випадкової величини при нормальному розподілі. Правило 3σ .

Як видно, ймовірність відхилення нормально розподіленої випадкової величини від її математичного сподівання більше ніж на 3σ не перевищує 0,3%. Це правило, відоме як правило *трьох сигм*, дозволяє оцінити середнє квадратичне відхилення. Для цього потрібно взяти найбільше та найменше значення з ряду спостережень, знайти їхню різницю та поділити на шість. Отримане число слугуватиме грубою оцінкою, якщо ознака підлягає нормальному розподілу.

Для побудови деяких статистичних моделей використовуються закони розподілу, що пов'язані з нормальним і по суті є розподілами деяких функцій від нормально розподілених випадкових величин

Задача 8.1. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом.

а) $a = 30, \sigma = 10$. Знайти $P(10 < X < 30)$.

б) $a = 15, \varepsilon = 3, P(|X - a| < \varepsilon) = 0.8664$. Знайти σ .

в) $a = 10, \sigma = 5, P(|X - a| < \varepsilon) = 0.9544$. Знайти ε .

г) $a = 8, \sigma = 4, \alpha = 8, P(\alpha < X < \beta) = 0.4772$. Знайти β .

д) $a = 6, \sigma = 2, \beta = 5, P(\alpha < X < \beta) = 0.2880$. Знайти α .

Розв'язок.

а) $z = \frac{X-a}{\sigma}, z_1 = -2, z_2 = 0$. З таблиці значень функції Лапласа знаходимо $\Phi(2) = 0.47725$, отже $P(10 < X < 30) = 0.47725$.

б) $\Phi(z) = \frac{0.8664}{2} = 0.4332$. З таблиці значень функції Лапласа знаходимо $z = 1.5$. Отже $\frac{X-a}{\sigma} = \frac{\varepsilon}{\sigma} = 1.5, \sigma = \frac{3}{1.5} = 2$

в) $\Phi(z) = \frac{0.9544}{2} = 0.4772$. З таблиці значень функції Лапласа знаходимо $z = 2$. Отже $\frac{X-a}{\sigma} = \frac{\varepsilon}{\sigma} = 2, \varepsilon = 2 \cdot 5 = 10$.

г) $z = \frac{X-a}{\sigma}, z_1 = 0$. З таблиці значень функції Лапласа знаходимо $\Phi(z_2 = 2) = 0.47725$. Величину β знаходимо з виразу $z_2 = \frac{\beta-a}{\sigma}$.
 $\beta = \sigma z_2 + a = 8 + 8 = 16$.

д) $z = \frac{X-a}{\sigma}, z_2 = \frac{5-6}{2} = -0.5$. З таблиці значень функції Лапласа знаходимо $\Phi(z_2 = -0.5) = -0.1915$. $\Phi(z_2) - \Phi(z_1) = 0.2880$. Знайдемо z_1 з таблиці $\Phi(z_1) = -0.1915 - 0.2880 = -0.4795$. Отже $z_1 = -1.055$. Величину α знаходимо з виразу $\alpha = \sigma z_1 + a = -2 \cdot 1.055 + 6 = 3.89$.

Задача 8.2. Верстат-автомат виготовляє деталі, довжину яких можна вважати випадковою величиною з нормальним законом розподілу.

Параметри розподілу $m_x = 10, \sigma^2 = \frac{1}{200}$. Знайти ймовірність браку, якщо допустимі розміри деталей мають бути в межах 10 ± 0.05

Розв'язок. $\sigma = \frac{\sqrt{2}}{20}, z = \frac{\delta}{\sigma} = \frac{0.05 \cdot 20}{\sqrt{2}} = 0.7. \Phi(0.7) = 0.25804$.

$P(|X - 10| > 0.05) = 1 - 2 \cdot 0.25804 = 0.4839$.

Задача 8.3. Для нормально розподіленої випадкової величини X з $M(X) = 20600$ і $\sigma = 450$ знайти таку точку x , що $P(X < x) = 0.025$.

Розв'язок. Враховуючи симетрію розподілу і непарність функції Лапласа $\Phi(z)$ знайдемо, спочатку таке значення z , при якому $\Phi(z) = 0.5 - 0.025 = 0.475$. З таблиці знаходимо $z=1.96$. Отже, $P = 0.025$ при $z = -1.96$. Тепер перейдемо від стандартного нормального розподілу до досліджуваного

$$x = M(x) - 1.96\sigma = 20600 - 882 = 19718$$

Значення $z = -1.96$ можна отримати у системі *Mathematica*:

```
Quantile[NormalDistribution[0, 1], 0.025]
```

```
-1.95996
```

```
]
```

9. Т-розподіл Стюдента

Розподіл Стюдента, або t -розподіл, — це неперервний ймовірнісний розподіл, який застосовується для оцінки параметрів нормально розподіленої сукупності, коли розмір вибірки малий, а дисперсія сукупності невідома.

Визначення: Якщо $X_1, X_2, \dots, X_n$ — вибірка з нормально розподіленої сукупності з математичним очікуванням μ і невідомою дисперсією $D = \sigma^2$, то t -розподілом із $\nu = n - 1$ ступенями свободи називається розподіл величини:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \quad (9.1)$$

де $\bar{X}$ — середнє вибірки, μ — середнє нормально розподіленої сукупності, $S_{\bar{X}}$ — стандартна помилка середнього або стандартне відхилення вибіркового середнього, S — вибіркове стандартне відхилення або стандартне відхилення вибірки, σ — стандартне відхилення сукупності, n — обсяг вибірки. Середнє вибірки та стандартне відхилення вибірки розраховують за формулами

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}, \quad (9.2)$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (9.3)$$

$$S_{\bar{X}} = S/\sqrt{n} \quad (9.4)$$

З (9.4) слідує, що чим більше n тим менша варіативність випадкової величини — вибіркового середнього, тобто вибіркові середні ближчі до середнього сукупності. Але закон «три сигма», сформульований для нормального розподілу, для стандартного відхилення вибіркового середнього $S_{\bar{X}}$ при малих n не працює, бо t -розподіл при малих n відрізняється від нормального. Отже, для визначення довірчих інтервалів з заданим рівнем довіри необхідно користуватися розподілом Стюдента, який має різний вигляд для різних значень n , і лише при великих n збігається з нормальним. Розрахунок довірчих інтервалів при розрахунку похибок описаний в останньому розділі.

Щільність t -розподілу має наступний загальний аналітичний вигляд для довільного ступеня свободи ν :

$$f(x, \nu) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad (9.5)$$

При $\nu = 1, 2, 3$ формула (9.5) спрощується до наступних виразів

$$\nu = 1 \quad (n = 2): \quad f(x, 1) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

$$\nu = 2 \quad (n = 3): \quad f(x, 2) = \frac{1}{(2+x^2)^{3/2}}$$

$$\nu = 3: (n = 4): \quad f(x, 3) = \frac{6\sqrt{3}}{\pi(3+x^2)^2}$$

Вигляд графіка щільності t -розподілу при різних ступенях свободи ν наведено на рис. 9.1

$$f1[x_] := \frac{1}{\pi (1 + x^2)}$$

$$f2[x_] := \frac{1}{(2 + x^2)^{3/2}}$$

$$f3[x_] := \frac{6 \sqrt{3}}{\pi (3 + x^2)^2}$$

$$f[x_] := \frac{1}{\sqrt{2 \pi}} E^{-x^2/2}$$

$$fv[x_, \nu_] := \text{PDF}[\text{StudentTDistribution}[\nu], x]$$

$$\text{Plot}[\{f1[x], f2[x], fv[x, 9], f[x]\}, \{x, -3.5, 3.5\}, \text{PlotLegends} \rightarrow \text{"Expressions"}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All}]$$

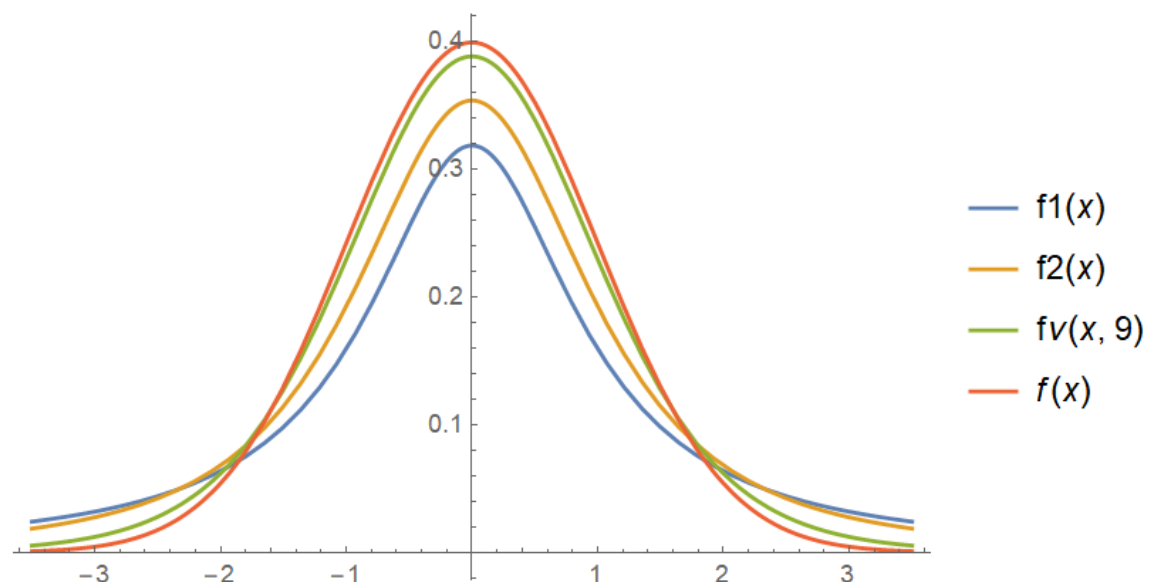


Рис. 9.1 Графік щільності t -розподілу Стюдента $f1(x)$, $f2(x)$, $f9(x)$ при $\nu=1, 2, 9$ та стандартного нормального розподілу $f(x)$.

З рис.9.1 видно, що при малих n розподіл Стюдента має гострий верх та важкі хвости.

Розрахуємо крутизну розподілу Стюдента при різних значеннях ступенів вільності

$$m2[v_] := \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_v[x, v] dx;$$

$$m4[v_] := \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f_v[x, v] dx;$$

$$Es[v_] := \frac{m4[v]}{(m2[v])^2} - 3;$$

Table[Es[v], {v, 5, 16}]

$$\left\{6, 3, 2, \frac{3}{2}, \frac{6}{5}, 1, \frac{6}{7}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{6}{11}, \frac{1}{2}\right\}$$

З ростом v крутизна розподілу спадає по мірі того як він наближається до нормального, для якого крутизна рівна нулю.

Загальна формула крутизни розподілу Стюдента

$$E_s = \frac{6}{v-4} \quad (9.6)$$

Для розподілів Стюдента з $v < 5$ неможливо розрахувати момент четвертого порядку через розбіжність інтегралів.

10. Імовірнісна твірна функція. Послідовність незалежних випробувань із різними імовірностями

Серед дискретних випадкових величин особливу роль у теорії ймовірностей відіграють ті, які приймають лише цілі невід'ємні значення: $X=0, 1, 2, 3, \dots$, тобто так звані *цілочислові випадкові величини*. Для вивчення законів їхнього розподілу застосовують імовірнісну твірну функцію.

Імовірнісною твірною функцією називають наступний збіжний степеневий ряд:

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k p_k = p_0 + xp_1 + x^2 p_2 + \dots + x^m p_m + \dots \quad (10.1)$$

Тут $p_k = P(X = k)$ – ймовірність того, що випадкова величина X набуде цілих значень $0, 1, 2, 3, \dots$

Властивості твірної функції:

1. При $x=1$ виконується рівність $A(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Тобто отримуємо умову нормування випадкової величини.

2. Ймовірність $P(k)$ визначається через твірну функцію

$$p_k = \frac{1}{k!} A^{(k)}(0), \text{ де } A^{(k)}(0) - k\text{-та похідна від твірної функції при } x=0.$$

3. Похідна від твірної функції при $x=1$ дорівнює *математичному сподіванню*

$$A'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p_k = M(X) \quad (10.2)$$

4. Дисперсія цілочислової випадкової величини визначається виразом

$$D(X) = A''(1) + A'(1) - (A'(1))^2 = A''(1) + M(X) - (M(X))^2 \quad (10.3)$$

$$\begin{aligned} \text{Дійсно, } A''(1) &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k - \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \\ &= D(X) + M^2(X) - M(X). \end{aligned}$$

Імовірнісну твірну функцію часто використовують на практиці, при обчисленні дисперсії коли задана імовірнісна твірна функція або можна її визначити. Розглянемо варіант, коли маємо n несумісних подій, які виконуються при незалежних випробуваннях з різними ймовірностями $p_1, p_2, \dots, p_n$. Тоді твірна функція визначається із співвідношення

$$A(x) = \prod_{k=1}^n (q_k + p_k x), \quad (10.4)$$

де $q_k = 1 - p_k$ – ймовірність несприятливої події.

Задача 10.1. Чотири постачальники незалежно один від одного поставляють товар в магазин. Ймовірність поставки товару становить 0,9 для першого постачальника; для другого – 0,85; для третього – 0,8 і 0,75 для четвертого. Яка ймовірність того, що товар буде поставлено трьома постачальниками з чотирьох? Яка ймовірність, що не більше двох постачальників поставлять товар до магазину?

Розв'язання: Імовірності кожної з подій різні та утворюють незалежні випробування. Для відшукування відповіді на обидва запитання побудуємо твірну функцію. Для неї вхідні дані приймуть значення

$$p_1 = 0.9; q_1 = 0.1$$

$$p_2 = 0.85; q_2 = 0.15$$

$$p_3 = 0.8; q_3 = 0.2$$

$$p_4 = 0.75; q_4 = 0.25$$

Твірна функція матиме вигляд

$$A(x) = (0.1 + 0.9x)(0.15 + 0.85x)(0.2 + 0.8x)(0.25 + 0.75x) = \\ = 0.00075 + 0.01625x + 0.12425x^2 + 0.39975x^3 + 0.459x^4$$

За властивостями твірної функції коефіцієнти при степенях аргументів є ймовірностями виконання події (поставка товару постачальниками) рівно стільки раз – який степінь аргументу. На основі цього, ймовірність події $P(A)$, що товар поставлять три постачальники входить в твірну функцію при x^3 і становить $P(A) = 0,39975$.

$$\text{Ймовірність події } P(B) \text{ можна розписати як суму ймовірностей } P(B) = \\ P(0) + P(1) + P(2) = 0.00075 + 0.01625 + 0.12425 = 0.14125$$

$$M(X) = A'(1) = 3.3$$

Дисперсію розрахуємо за формулою (9.3)

$$D(X) = 0.565$$

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = 0.752$$

Такі розрахунки легко виконати у системі *Mathematica* перетворивши твірну функцію у многочлен за допомогою функції **Expand**

$$A[x_] = (0.1 + 0.9 x) (0.15 + 0.85 x) (0.2 + 0.8 x) (0.25 + 0.75 x);$$

$$\text{Expand}[A[x]]$$

$$0.00075 + 0.01625 x + 0.12425 x^2 + 0.39975 x^3 + 0.459 x^4$$

$$P = \text{Table}\left[\frac{1}{k!} D[A[x], \{x, k\}] /. x \rightarrow 0, \{k, 0, 4\}\right]$$

$$\{0.00075, 0.01625, 0.12425, 0.39975, 0.459\}$$

$$PA = P[[4]]$$

$$0.39975$$

$$PB = P[[1]] + P[[2]] + P[[3]]$$

$$0.14125$$

$$Mx = D[A[x], x] /. x \rightarrow 1$$

$$3.3$$

$$F = \text{Table}[D[A[x], \{x, k\}] /. x \rightarrow 1, \{k, 0, 4\}]$$

$$\{1., 3.3, 8.155, 13.4145, 11.016\}$$

$$Dx = F[[3]] + Mx - Mx^2$$

$$0.565$$

$$\sigma = \sqrt{Dx}$$

$$0.751665$$

Задача 10.2. Три стрільці незалежно один від одного стріляють по мішені. Ймовірність влучення в мішень першого стрільця 0.7, другого – 0.8, а третього – 0.9. Яка ймовірність, що у мішень влучать тільки двоє стрільців? Яка ймовірність тільки одного влучення? Яке математичне сподівання кількості влучень, дисперсія та середнє квадратичне відхилення?

Розв'язання: Твірна функція матиме вигляд

$$A(x) = (0.1 + 0.9x)(0.2 + 0.8x)(0.3 + 0.7x) = 0.006 + 0.092x + 0.398x^2 + 0.504x^3$$

Отже, ймовірність того, що тільки двоє влучать у мішень дорівнює $P(2)=0,398$. Ймовірність одного влучення $P(1) = 0,092$. Числові характеристики розподілу кількості влучень

$$M(X) = 2.4, D(X) = 0.46, \sigma = 0.68$$

```
n = 3; A[x_] = (0.3 + 0.7 x) (0.2 + 0.8 x) (0.1 + 0.9 x) ;
```

```
Expand[A[x]]
```

```
0.006 + 0.092 x + 0.398 x^2 + 0.504 x^3
```

```
P = Table[ $\frac{1}{k!}$  D[A[x], {x, k}] /. x -> 0, {k, 0, n}]
```

```
{0.006, 0.092, 0.398, 0.504}
```

```
PA = P[[2]] (*ймовірність одного влучення*)
```

```
0.092
```

```
Mx = D[A[x], x] /. x -> 1 (*математичне сподівання*)
```

```
2.4
```

```
(*похідні від твірної функції k-го порядку*)
```

```
F = Table[D[A[x], {x, k}] /. x -> 1, {k, 0, 4}]
```

```
{1., 2.4, 3.82, 3.024, 0.}
```

```
Dx = F[[3]] + Mx - Mx^2
```

```
 $\sigma = \sqrt{Dx}$ 
```

```
0.46
```

```
0.678233
```

Розділ 4. ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ, ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ

Теорія ймовірностей вивчає закономірності, що виникають при масових випадкових подіях. Ці закономірності проявляються, коли багато випадкових явищ відбуваються за однакових умов, і характеристики цих явищ стають стійкими. Це означає, що середній результат, такий як частота події або середнє значення випадкової величини, перестає бути випадковим і може бути передбаченим з великою точністю. Така стійкість середніх величин і є основою «закону великих чисел», який говорить, що за великої кількості експериментів середній результат стає практично передбачуваним.

Закон великих чисел об'єднує низку математичних теорем, кожна з яких показує, що середні характеристики багатьох випадкових експериментів наближаються до певних сталих величин за певних умов. Це встановлює зв'язок між теоретичними аспектами ймовірностей і реальними закономірностями при масових спостереженнях.

Центральна гранична теорема є другою важливою групою граничних теорем. Вона визначає умови, за яких виникає нормальний розподіл випадкової величини. Згідно з цією теоремою, нормальний розподіл з'являється, коли підсумовуються багато незалежних випадкових величин з однаковим, або подібним впливом на загальне розсіювання суми. Різні версії закону великих чисел і центральної граничної теореми відрізняються умовами, які застосовуються до випадкових величин та їхніх сум.

1. Нерівність Чебишева

Перша нерівність Чебишева: для довільної випадкової величини X , яка набуває невід'ємні значення та має скінченне математичне сподівання

$$P(X \geq 1) \leq M(X) \quad (1.1)$$

Якщо X – дискретна випадкова величина, то

$$P(X \geq 1) = \sum_i p_i \leq \sum_i x_i p_i = M(X) \quad (1.2)$$

Якщо X – неперервна випадкова величина, то

$$P(X \geq 1) = \int_1^{\infty} f(x)dx \leq \int_1^{\infty} x f(x)dx \leq \int_0^{\infty} x f(x)dx = M(X). \quad (1.3)$$

У загальному вигляді можна отримати нерівність, яку називають *нерівністю Маркова*

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{M(X)}{\alpha}. \quad (1.4)$$

Ця нерівність корисна в багатьох випадках, коли потрібно оцінити ймовірність великих значень невід'ємної випадкової величини, навіть коли невідомо багато деталей про її розподіл.

Друга нерівність Чебишева: ймовірність того, що відхилення випадкової величини X від його математичного сподівання за абсолютною величиною менше додатного числа ε задовольняє таку нерівність:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \quad (1.5)$$

Інший вигляд другої нерівності Чебишева

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Ця нерівність справедлива для будь-якої випадкової величини і корисна для оцінки ймовірності її відхилень, особливо тоді, коли точний розподіл випадкової величини невідомий.

Задача 1.1 Випадкова величина X має такі числові характеристики $M(X) = 1$ та $\sigma = 0,2$. Скориставшись нерівністю Чебишева, оцінити ймовірності таких подій:

1). $A = \{0.5 < X < 1.5\}$.

2). $B = \{0.75 < X < 1.35\}$..

3). $C = \{X > 2\}$

Розв'язання: Використовуючи формулу (1.5), одержимо:

$$P(A) = P(0.5 < X < 1.5) = P(|X - 1| < 0.5) \geq 1 - \left(\frac{0.2}{0.5}\right)^2 = 0.84$$

Отже, $P(A) \geq 0,84$.

Використаємо те, що звуження інтервалу не може призвести до збільшення ймовірності:

$$P(B) =$$

$$= P(0.75 < X < 1.35) \geq P(|X - 1| < 0.25) \geq 1 - \left(\frac{0.2}{0.25}\right)^2 = 0.36$$

Отже, $P(B) \geq 0,36$.

$$P(C) = P(X < 2) = P(X - 1 < 1) > P(|X - 1| < 1)$$

Скористаємося властивістю ймовірності протилежної події

$$P(X < 2) \geq 1 - P(|X - 1| \geq 1) \geq 1 - \left(\frac{0.2}{1}\right)^2 = 0.96$$

Отже, $P(C) \geq 0.96$

Задача 1.2 Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що $|X - M(X)| \leq 3$, якщо $D(X) = 0,0025$. Оцінити ймовірність тієї самої події, якщо відомо, що X має нормальний розподіл.

Задача 1.3 Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що $|X - M(X)| > 0.1$, якщо $\sigma(X) = 0,4$. Оцінити ймовірність тієї самої події, якщо відомо, що X має нормальний розподіл.

2. Закон великих чисел Чебишева

Теорема Чебишева. Якщо $X_1, X_2, \dots, X_n$, попарно незалежні випадкові величини, причому дисперсії їх рівномірно обмежені, тобто $D(X_1) \leq C, D(X_2) \leq C, \dots, D(X_n) \leq C$, де $C = \text{const}$, то для довільного $\varepsilon > 0$ є така рівність:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X} - M(\bar{X})| < \varepsilon) = 1 \quad (2.1)$$

де

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

Суть теореми Чебишева (закону великих чисел) полягає в тому, що середнє арифметичне досить великої кількості незалежних випадкових величин (з рівномірно обмеженими дисперсіями) перестає бути випадковою величиною. Це пояснюється тим, що при вимірюванні або експерименті за істинне значення беруть середнє значення цих величин. Середнє арифметичне великої кількості незалежних випадкових величин втрачає випадковий характер і набуває стійкості. На основі теореми Чебишева базується вибірковий метод, що використовується у статистиці. Метод полягає в тому, що на підставі вивчення певної ознаки для досить великої випадкової вибірки об'єктів роблять висновки про генеральну сукупність та надійність цих висновків.

3. Теорема Бернуллі та Пуассона

Важливим частковим випадком теореми Чебишева є теорема Бернуллі.

Теорема Бернуллі. Нехай m – число появ події A в n незалежних випробуваннях, а p – ймовірність появи події в кожному випробуванні. Тоді з ймовірністю, близькою до одиниці, можна стверджувати, що при достатньо великому n , частота події A не дуже відрізнятиметься від ймовірності p .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1 \quad (3.1)$$

Правильність теореми Бернуллі випливає з нерівності Чебишева, застосованої до випадкової величини $X = m/n$:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \quad (3.2)$$

Дійсно, якщо розглянути випадкову величину $X = m/n$, то її математичне сподівання $M(X) = p$, а дисперсія $D(X) = \frac{npq}{n^2} = pq/n$.

Можна інакше отримати (3.2)

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = P(|m - np| < n\varepsilon) \geq 1 - \frac{npq}{(n\varepsilon)^2} = 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

Задача 3.1. Ймовірність того, що автомат, який продає квитки, безпомилково працює при опусканні монети, дорівнює 0,96. Використовуючи теорему Бернуллі, потрібно визначити, скільки випробувань правильної роботи автомату слід зробити, щоб із ймовірністю не меншою за 0,99 можна було стверджувати, що відхилення частоти правильної роботи автомату від ймовірності правильної роботи в абсолютному вираженні не перевищить 0,03.

Розв'язок. Використаємо теорему Бернуллі: $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$

з умовою $\varepsilon > 0.03$, $p = 0.96$.

Отже, $q = 0.04$.

Вимога задачі $P \geq 0.99$ справджуватиметься, коли $1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \geq 0.99$
або при $\frac{pq}{n\varepsilon^2} \leq 0.01$ звідси $n \geq \frac{pq}{0.01 \varepsilon^2} = \frac{0.96 \cdot 0.04 \cdot 100}{0.0009} = 4267$

Отже, при $n \geq 4267$ ймовірність $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right)$ буде більша за 0,99

Другим, більш загальним, окремим випадком теореми Чебишева, є теорема Пуассона.

Теорема Пуассона. При збільшенні n – кількості незалежних випробувань ймовірність того, що $\frac{m}{n}$ – частота появ деякої події A не надто відрізняється від середньої ймовірності появи події A в окремих випробуваннях та прямує до 1, якщо $n \rightarrow \infty$. Тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$

де

$$\bar{p} = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n}$$

Крім описаних у теоремах законів великих чисел, існує ще одне цікаве явище: коли велика кількість випадкових доданків, кожен з яких незначно впливає на загальну суму, розподіл кожного з доданків не має істотного впливу на сумарний результат.

4. Центральна гранична теорема

Центральні граничні теореми використовують при розв'язанні таких задач:

1. Прогнозування поведінки сум випадкових величин: Визначення умов, за яких сума багатьох випадкових величин майже дорівнює постійній величині, тобто практично перестає бути випадковою, що дозволяє прогнозувати її поведінку з високою ймовірністю.
2. Оцінка ймовірності появ подій: Прогнозування кількості появ певної випадкової події при великій кількості незалежних випробувань, що дозволяє робити висновки про частоту подій.
3. Наближення розподілу сум до нормального: Визначення умов, за яких сума великої кількості випадкових величин розподіляється за нормальним законом, незалежно від форми розподілу кожної окремої випадкової величини, якщо вони мають однаковий розподіл і скінченні моменти.

Центральні граничні теореми є важливими інструментами в теорії ймовірностей та статистиці, оскільки вони дозволяють переходити від аналізу окремих випадкових величин до оцінок їх сум, що є особливо корисним у багатьох практичних задачах.

Центральна гранична теорема.

Нехай X_i незалежні однаково розподілені випадкові величини з математичним сподіванням $M(X_i) = a$ і дисперсією $D(X_i) = \sigma^2$. Тоді при великому n розподіл суми $X_1 + X_2 + \dots + X_n = X$ близький до нормального розподілу з числовими характеристиками

$$M(X) = \sum M(X_i) = n a, \quad (4.1)$$

$$D(X) = \sum D(X_i) = n \sigma^2 \quad (4.2)$$

а ймовірність $P(\alpha < X < \beta)$ визначається формулою

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) \quad (4.3)$$

У цій формулі $\sigma = \sigma_{X_i}$ – середнє квадратичне відхилення кожної випадкової величини X_i . Для випадкової величини $X = \sum X_i$ середнє

квадратичне відхилення $\sigma_X = \sqrt{D(X)} = \sigma\sqrt{n}$. Тобто формулу (4.3) можна отримати з інтегральної теореми Муавра – Лапласа (формула 7.14) підставивши $\sigma\sqrt{n}$ замість $\sigma_X = \sqrt{n p q}$.

Отже,

$$P(|x - np| \leq \Delta) = P(np - \Delta \leq x \leq np + \Delta) = 2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma\sqrt{n}}\right) \quad (4.4)$$

де, $\Delta = \varepsilon n$

Із останньої рівності випливає, що ймовірність p події можна оцінити, використовуючи експериментальні результати. Справді, якщо в кожному випробуванні подія A відбувається з ймовірністю p , і в серії з n незалежних випробувань досліджувана подія A відбувається k разів, то статистична частота появи події A дорівнює $\frac{k}{n}$. Ця частота є випадковою величиною X , яка є сумою незалежних випадкових величин X_i , які набувають двох можливих значень $\{1/n, 0\}$.

Значення $\frac{1}{n}$ з ймовірністю p , коли подія A відбувається у i -му випробуванні та значення “0” з ймовірністю $q = 1 - p$, коли подія A не відбувається в цьому випробуванні. Розрахуємо математичне сподівання випадкової величини X_i :

$$M(X_i) = 0 * (1 - p) + \frac{1}{n} * p = \frac{p}{n},$$

а з означення дисперсії

$$D(X_i) = 0 * (1 - p) + \frac{1}{n^2} * p - \left(\frac{p}{n}\right)^2 = \frac{p(1-p)}{n^2}.$$

Отже, $\sigma = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{n}$. Тоді при доволі великих значеннях n ($n \geq 30$), підставивши це значення σ в (4.4) отримаємо рівність, яка збігається з формулою (7.13):

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) \quad (4.5)$$

З (4.5) можна розрахувати необхідну кількість випробувань щоб знайдена частота успіху відрізнялась від ймовірності p не більше заданого значення ε з необхідною достовірністю $P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right)$. Отже, задачу 7.8 на формулу Муавра – Лапласа можна розглядати з

точки зору суми випадкових величин. Розглянемо такі міркування на наступному прикладі.

Задача 4.1. При виробництві напівпровідникових приладів брак становить 1%. Скільки приладів потрібно відібрати для перевірки якості, щоб з ймовірністю 0,95 можна було стверджувати, що результат браку у випадковій вибірці відрізняється від 1% не більше ніж на 0,5%?

Розв'язок. Кількість бракованих приладів є випадковою величиною $X_1 + X_2 + \dots + X_n = X$, де X_i незалежні однаково розподілені випадкові величини; X_i – випадкова величина, яка може набувати значення або 0, або 1 з ймовірністю $p = 0,01$ і $q = 0,99$ відповідно. Якщо n – доволі велике число, то за центральною граничною теоремою розподіл випадкової величини X близький до нормального, причому

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right)$$

$p = 0.01$, $\varepsilon = 0.005$, n – невідома кількість приладів.

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - 0.01\right| \leq 0.005\right) = 2\Phi\left(0.005 \sqrt{\frac{n}{0.01(1-0.01)}}\right) = 0.95$$

$$\Phi\left(0.005 \sqrt{\frac{n}{0.01(1-0.01)}}\right) = \frac{0.95}{2} = 0.475, \quad 0.005 \sqrt{\frac{n}{0.01(1-0.01)}} = 1.96$$

$$n \geq 1522$$

Отже, у вибірці що містить більше ніж 1522 приладів, знайдене значення частоти браку k/n буде відрізнятися від точного значення ймовірності браку не більше ніж на 0,5% з надійністю 95%.

Задача 4.2. Ймовірність того, що деталь не є стандартною дорівнює 0,1. Необхідно знайти ймовірність того, що серед 400 виготовлених деталей відносна частота появи нестандартної деталі відхиляється від ймовірності 0,1 не більше, ніж на 0,03

Розділ 5. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Математична статистика – це сучасна галузь математики, яка займається статистичним аналізом експериментальних даних і спостережень, а також розробкою моделей, що включають ймовірнісні поняття. Основна мета досліджень у цій сфері – отримання нових знань про великі групи явищ або об'єктів, які називають генеральною сукупністю. *Генеральна сукупність* – це повна група об'єктів дослідження, а *вибірка* – її частина, відібрана випадковим чином для дослідження певних властивостей цієї сукупності.

Основна вимога, що висувається до вибірки – вона повинна бути *репрезентативною*, тобто правильно відображати ті властивості генеральної сукупності, що вивчаються.

Однією із задач математичної статистики є визначення невідомих параметрів розподілу генеральної сукупності за відомою вибіркою. Наприклад, якщо нормальний розподіл, то він потребує визначення двох параметрів: математичного сподівання та дисперсії. Для експоненційного (показникового) розподілу достатньо одного параметра: інтенсивності, або середнього часу між подіями. Оскільки елементи вибірки є випадковими величинами, то випадковим буде й значення параметра, визначене за допомогою цієї вибірки. Зокрема, якщо ми маємо кілька вибірок того самого об'єму з однієї й тієї ж генеральної сукупності, то кожна з них дасть своє значення параметра, що цікавить нас. Тому за вибіркою ми не можемо точно визначити значення параметрів генеральної сукупності, а можемо лише з певною точністю оцінити їх.

Задачу про оцінку можна розділити на дві частини. По-перше, необхідно визначити, яку величину, обчислену на основі вибірки, слід вважати наближеним значенням параметра генеральної сукупності (тобто провести *точкову оцінку*). По-друге, необхідно визначити інтервал, в межах якого з заданою ймовірністю знаходиться оцінка параметра (*інтервальна оцінка*).

1. Вибірковий метод

Розглянемо деякі з методів відбору, застосування яких дозволяє сподіватися на репрезентативний результат.

1. *Простий випадковий відбір* – це метод, при якому з усієї генеральної сукупності, без поділу на частини, випадково відбирається заздалегідь визначена кількість об'єктів для дослідження. Цей відбір може бути повторним (коли об'єкти можуть потрапляти до вибірки більше одного разу) або безповторним (коли кожен об'єкт вибирається тільки один раз). У разі повторної вибірки взятий елемент після обстеження знову повертають у набір. У разі формування безповторної вибірки відібрані елементи не повертають у набір.

2. *Механічний відбір* – це метод, при якому генеральну сукупність спочатку поділяють на частини, кількість яких відповідає обсягу запланованої вибірки. Потім з кожної частини вибирають по одному об'єкту. На практиці це часто реалізується шляхом відбору кожного десятого, двадцятого або іншого елемента, залежно від розміру сукупності та вибірки. Однак слід зауважити, що цикл такого відбору може збігтися з якимось виробничим циклом, а це приведе до спотворення правдивої інформації про генеральну сукупність.

3. *Типовий відбір* – це метод, при якому об'єкти для дослідження вибираються з генеральної сукупності, розділеної на окремі типові частини, причому кількість відібраних об'єктів з кожної частини повинна відповідати пропорціям цих частин. Такий підхід застосовується, коли досліджувана характеристика суттєво відрізняється в різних типових частинах. Наприклад, якщо деталі виготовляються на однакових верстатах різними токарями, серед яких є досвідчені майстри і кілька учнів, то при дослідженні якості всіх виготовлених деталей сукупність слід розділити на дві частини: деталі, виготовлені професіоналами, та деталі, виготовлені учнями. Кількість об'єктів у вибірці з кожної частини повинна бути пропорційною обсягам цих груп.

4. *Серійний відбір* – це метод, при якому об'єкти для дослідження відбираються цілими серіями, і кожна серія піддається суцільному аналізу. Такий підхід застосовується, коли досліджувана ознака є відносно однорідною у межах серій, тобто не демонструє значних варіацій між різними серіями. Цей спосіб дозволяє спростити процес

відбору, зберігаючи репрезентативність вибірки в умовах мінімальних відмінностей між групами.

Перед початком дослідження довільної генеральної сукупності на певну кількісну чи якісну ознаку здебільшого немає інформації про те, якому закону розподілу ця ознака підкоряється. Причому мова іде не лише про числові характеристики випадкової величини, а й (навіть більшою мірою) про вигляд функції розподілу (рівномірний, нормальний, показниковий чи якийсь інший). З цією метою над системою й проводяться вимірювання значень певної випадкової величини, яка кількісно чи якісно описує ту ознаку, на предмет якої проводиться дослідження.

Результати певної кількості експериментів (вибірки) групуються певним чином, опрацьовуються і на основі отриманих результатів будуються емпіричні (статистичні) графіки – інтегральна функція розподілу (кумулята), полігон чи гістограма частот.

За результатами опрацьованих статистичних даних підбирається апроксимуюча функція, що претендує на роль теоретичної для цієї сукупності. Іншими словами, висувається гіпотеза, що функція певного вигляду є теоретичною інтегральною функцією розподілу чи функцією розподілу густини ймовірностей досліджуваної сукупності.

Оскільки кожний результат вимірювання є випадковою величиною, а кількість результатів скінченна, то між емпіричними функціями та їх апроксимаціями існують певні розбіжності. Тому наступним етапом статистичних досліджень є підтвердження або спростування висунутої гіпотези. Переважно через недостатність статистичного матеріалу або тому, що тип функції розподілу відомий з інших джерел, питання про визначення функції розподілу навіть не висувається. В таких випадках ставиться задача з визначення оціночних значень числових характеристик досліджуваних ознак. Зі вказаною задачею тісно пов'язана й задача оцінки їх точності.

2. Числові характеристики вибірки

У теорії ймовірностей розглядались числові характеристики випадкових величин (математичне сподівання, дисперсія, середньо квадратичне відхилення та моменти різного порядку. Аналогічні поняття використовуються і у математичній статистиці. Користуючись аналогіями, для числових характеристик статистичних розподілів будемо використовувати ті самі позначення, що й для їх аналогів серед числових характеристик випадкових величин, доповнюючи їх зірочкою (*). Це означатиме, що відповідна величина є числовою характеристикою статистичного розподілу вибірки.

Допустимо, що з генеральної сукупності відібрано для дослідження на якусь кількісну ознаку n об'єктів. Нехай величина, що досліджується, дискретна і в результаті вимірювання набула n_1 разів значення x_1 , n_2 разів – x_2 , ..., n_k разів значення x_k . Виміряні значення $x_1, x_2, \dots, x_k$ називають *варіантами*, а кількості спостережень $n_1, n_2, \dots, n_k$, при яких ці варіанти мали місце – *частотами цих варіант*. Величини $w_i = \frac{n_i}{n}$ – називаються *відносними частотами*, де $n = \sum_{i=1}^k n_k$ – об'єм вибірки.

Сукупність варіант x_i і відповідних їм частот n_i або відносних частот w_i називається *статистичним розподілом вибірки*.

За даними статистичного розподілу вибірки будується *емпірична функція розподілу*.

Статистичною чи емпіричною функцією розподілу вибірки називається функція $F^*(x)$, що визначає для кожного значення x відносну частоту події $X < x$, тобто

$$F^*(x) = \frac{\sum_{x_i < x} n_i}{n} = \sum_{x_i < x} w_i \quad (2.1)$$

Цю функцію інколи називають *кумулятою*. Кумулята $F^*(x)$ володіє аналогічними властивостями, що їх мала інтегральна функція розподілу випадкової величини:

- 1) $0 \leq F^*(x) \leq 1$;
- 2) $F^*(x)$ неспадна функція;
- 3) $F^*(x) = 0$, якщо x менше за найменшу варіанту;
- 4) $F^*(x) = 1$, якщо x більше за найбільшу варіанту;

На основі отриманих розрахунків $F^*(x)$ будується графік інтегральної емпіричної функції розподілу. Ця емпірична функція використовується для оцінки функції розподілу генеральної сукупності, яка в математичній статистиці називається *теоретичною функцією розподілу*.

Якщо кількість вимірів дуже велика (особливо якщо випадкова величина є неперервною), то утворити статистичний ряд складно або практично неможливо. В цьому випадку результати вимірів збираються у певні групи, як правило, однакової довжини.

Якщо x_i – середина i -ої частини, n_i – число варіант, що потрапили в i -у частину, то $\bar{x}$ і S^2 обчислюються за формулами

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i x_i \quad S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i (x_i - \bar{x})^2 \quad (2.2)$$

Приклад. Із генеральної сукупності зроблено вибірку обсягом $n = 32$. Отримано такі випадкові величини:

{2.2, 7.1, 7.3, 3.9, 5.9, 7.5, 5.6, 4.7, 7.9, 3.1, 6.1, 7.7, 6.4, 6.0, 6.9, 4.7, 6.4, 6.9, 6.7, 7.9, 4.1, 6.7, 6.0, 9.1, 5.5, 6.5, 3.5, 4.9, 7.1, 4.9, 8.9, 5.7}.

Скласти інтервальний ряд і побудувати гістограму. За допомогою умовних моментів розподілу знайти $\bar{x}$, S^2

Розв'язання. Для побудови інтервального ряду розбиваємо область реалізацій на 7 інтервалів з однаковими довжинами інтервалів:

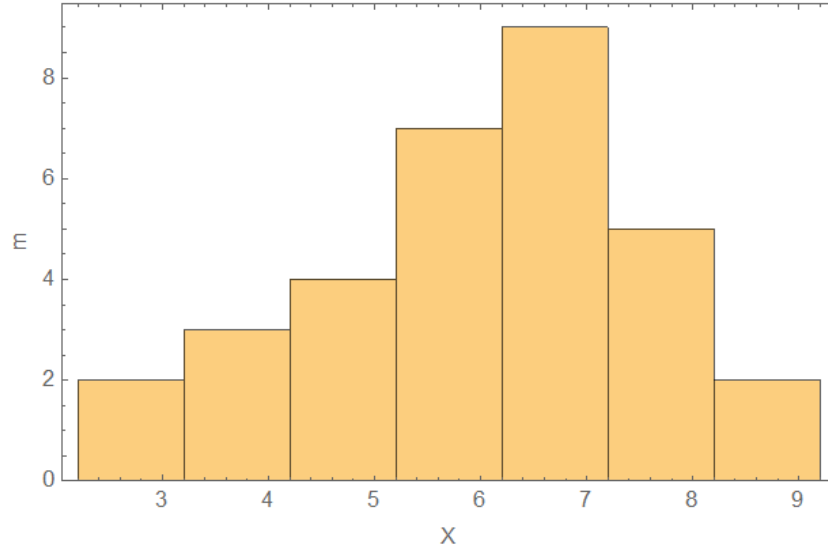
$$h = \Delta x = \frac{\max(x_i) - \min(x_i)}{7}; \quad h = \Delta x = \frac{9.2 - 2.2}{7} = 1$$

Частоти для кожного інтервалу визначаємо шляхом віднесення кожного значення до відповідного інтервалу. Якщо значення потрапляє на межу між інтервалами, то воно враховується в нижній інтервал.

Інтервал	2,2–3,2	3,2–4,2	4,2–5,2	5,2–6,2	6,2–7,2	7,2–8,2	8,2–9,2
Частота	2	3	4	7	9	5	2

На основі знайденого ряду будуюмо гістограму. У системі Wolfram Mathematica існує функція **Histogram**, яка автоматично числові дані розбиває на інтервали заданої довжини, підраховує частоти кожного інтервалу і будує гістограму.

```
X = {2.2, 7.1, 7.3, 3.9, 5.9, 7.5, 5.6, 4.7, 7.9, 3.1,
      6.1, 7.7, 6.4, 6.0, 6.9, 4.7, 6.4, 6.9, 6.7, 7.9, 4.1,
      6.7, 6.0, 9.1, 5.5, 6.5, 3.5, 4.9, 7.1, 4.9, 8.9, 5.7};
h = 1;
Histogram[X, {Min[X], Max[X] + h, h}, Frame → True,
PlotRange → All, FrameLabel → {"X", "m"}]
```



На підставі побудованої гістограми можна висунути гіпотезу про нормальний закон розподілу в сукупності і розрахувати *умовні моменти*. Моменти розподілу, при обчисленні яких за вихідну величину приймаються відхилення від довільно взятої величини c , тобто від так званого умовного початку відліку, називають *умовними моментами*.

Для обчислення умовних моментів розподілу складемо таблицю, до якої занесемо середини інтервалів x_i , їхні частоти n_i і нові змінні $u_i = \frac{x_i - c}{h}$. Візьмемо $c = x_5$. Бажано вибрати значення c поближче до математичного сподівання, тоді числа в таблиці будуть меншими, але кінцевий результат розрахунку математичного сподівання $\bar{x}$ та дисперсії S^2 генеральної сукупності від цього вибору не залежить. У наступні стовпці таблиці занесемо обчислені значення величин $n_i u_i$ та $n_i u_i^2$, а в останньому рядку таблиці їхні суми.

x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$
2,7	2	-4	-8	32
3,7	3	-3	-9	27
4,7	4	-2	-8	16
5,7	7	-1	-7	7

6,7	9	0	0	0
7,7	5	1	5	5
8,7	2	2	4	8
Сума	32		-23	95

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i u_i = \frac{-23}{32} = -0.719$$

$$\overline{u^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i u_i^2 = \frac{95}{32} = 2.97$$

$$S^2 = h^2 (\overline{u^2} - (\bar{u})^2) = 2.97 - 0.719^2 = 2.452$$

$$\bar{x} = h \bar{u} + c = -0.719 + 6.7 = 5.981$$

Таку таблицю можна створити автоматично з масиву X , вказавши межі та довжину інтервалу

```
(*Масив гістограм*) hist = HistogramList[X, {Min[X], Max[X] + h, h}];
(*Межі інтервалів*) armin = Most[hist[[1]]];
armax = Rest[hist[[1]]];
avr = (armin + armax) / 2; c = avr[[5]];
ui = (avr - c) / h;
ni = hist[[2]]; (*Кількість елементів у кожному інтервалі*)
niui = ni ui; niui2 = ni ui^2;
(*Створення таблиці*) tbl = Transpose[{armin, armax, avr, ni, ui, niui, niui2}];
tblWithHead =
  Prepend[tbl, {"Min", "Max", "Middle", "ni", "ui", "ni*ui", "ni*ui^2"}];
tRow = Total[tbl]; tRow[[1]] = ""; tRow[[2]] = ""; tRow[[3]] = "Suma";
Grid[Append[tblWithHead, tRow], Frame -> All]
us = tRow[[6]] / tRow[[4]]; u2s = tRow[[7]] / tRow[[4]];
s2 = h^2 (u2s - us^2); xs = h us + c;
Framed[Row[{"ū=", us, " ū²=", u2s, " S²=", s2, " x̄=", xs, " S=", Sqrt[s2]}]]
```

Min	Max	Middle	ni	ui	ni*ui	ni*ui²
2.2	3.2	2.7	2	-4.	-8.	32.
3.2	4.2	3.7	3	-3.	-9.	27.
4.2	5.2	4.7	4	-2.	-8.	16.
5.2	6.2	5.7	7	-1.	-7.	7.
6.2	7.2	6.7	9	0.	0.	0.
7.2	8.2	7.7	5	1.	5.	5.
8.2	9.2	8.7	2	2.	4.	8.
		Suma	32	-7.	-23.	95.

$\bar{u} = -0.71875$ $\overline{u^2} = 2.96875$ $S^2 = 2.45215$ $\bar{x} = 5.98125$ $S = 1.56593$

3. Статистичні оцінки параметрів розподілу ймовірності.

Метод моментів

Метод моментів є одним з основних методів статистичної оцінки параметрів розподілу ймовірності. Він ґрунтується на порівнянні теоретичних моментів (наприклад, математичного сподівання, дисперсії) з відповідними емпіричними моментами, отриманими з вибірки. При цьому ми припускаємо, що емпірична вибірка описується вибраним теоретичним розподілом. Основна ідея полягає в тому, що якщо ми знаємо теоретичні моменти розподілу (наприклад, математичне сподівання чи дисперсію), то можемо прирівняти їх до емпіричних моментів, отриманих з вибірки, і отримати оцінки для невідомих параметрів теоретичного розподілу, що описує випадкову величину. Різні теоретичні розподіли можуть мати різну кількість параметрів, наприклад нормальний розподіл повністю визначається двома параметрами (математичне сподівання та дисперсія), які визначаються з вибірки.

За оцінку величини математичного сподівання генеральної сукупності $M(X) = m_X$ зазвичай беруть середнє арифметичне (вибіркове середнє) значень вибірки

$$\bar{X}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (3.1)$$

Оскільки вибіркове середнє $\bar{X}_B$ є сумою випадкових величин, то воно також буде випадковою величиною (на відміну від $M(X)$, яке розраховане на генеральній сукупності і є постійною величиною). Дослідимо числові характеристики закону розподілу вибіркового середнього, його математичне сподівання й дисперсію.

Математичне сподівання $\bar{X}_B$

$$M(\bar{X}_B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_X = \frac{n \cdot m_X}{n} = m_X \quad (3.2)$$

Дисперсія вибіркового середнього, згідно з властивостями дисперсії, буде

$$D(\bar{X}_B) = \frac{\sigma^2}{n} \quad (3.3)$$

Виберемо як оцінку дисперсії генеральної сукупності вибіркиму дисперсію

$$D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_B)^2,$$

але враховуючи (3.3) часто в математичній статистиці розглядається виправлена дисперсія

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B$$

Отже при малій вибірці для визначення дисперсії генеральної сукупності за результатами вибірки необхідно додавати поправку, що враховує дисперсію випадкової величини – вибіркового середнього. Це робиться за такою формулою

$$D(X) = \frac{\sum_{i=1}^n (X - \bar{X})^2}{n-1} \quad (3.4)$$

У знаменнику величина n – обсяг вибірки зменшений на одиницю. Ця поправка називається *поправкою Бесселя*, яка компенсує неточність оцінки дисперсії вибіркового середнього для малих вибірок. Ця неточність пов'язана з тим, що при обчисленні середнього значення ми використовуємо всі n значень у вибірці. Щойно ми зафіксували середнє, одне з цих значень більше не є незалежним, оскільки його можна вивести з середнього значення і всіх інших $n-1$ значень. Іншими словами, як тільки $n-1$ значень відомі, останнє значення вже визначене, щоб зберегти середнє незмінним. Величину $\nu = n - 1$ називають кількістю ступенів свободи. Це рівноцінно вибірці $n - 1$ незалежних елементів, тому у формулі (3.4) саме такий знаменник, що дозволяє отримати незміщену оцінку дисперсії генеральної сукупності. При обсязі вибірки $n > 50$ таку поправку не виконують, оскільки вона майже не впливає на кінцеве значення отриманої дисперсії. Формула (3.4) використовується у фізиці для визначення середньоквадратичної похибки вимірювань

$$\Delta X = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X - \bar{X})^2}{n-1}} \quad (3.5)$$

Визначення похибок експерименту детально розглянемо в наступному параграфі.

4. Методика статистичної обробки експериментальних даних

Через недосконалість вимірювальних приладів, методів вимірювання та наших органів чуття, а також інших факторів, під час вимірювань неминуче виникають похибки.

Абсолютна похибка Δx визначається як різниця між вимірним значенням і справжнім значенням фізичної величини:

$$\Delta x = x_{\text{вимір}} - x_{\text{іст.}} \quad (4.1)$$

Відносна похибка вимірювання — це похибка вимірювання, виражена як відношення абсолютної похибки до результату вимірювання.

$$\delta = \frac{\Delta x}{x_{\text{вимір}}} \cdot 100\% \quad (4.2)$$

Істинне значення фізичної величини отримати неможливо, а повністю уникнути похибок принципово не можна. Однак за допомогою серії вимірювань та аналізу їх результатів можна знайти наближене значення вимірюваної величини й визначити діапазон, в якому вона знаходиться. Це і є метою обробки експериментальних результатів.

Основні види похибок вимірювань:

Грубі похибки (промахи) виникають внаслідок недбалості або неуважності експериментатора. Наприклад, можна випадково взяти відлік не за правильною методикою або неправильно прочитати значення на шкалі приладу. Такі похибки можна легко уникнути шляхом підвищення уважності та ретельності під час вимірювань.

Випадкові похибки виникають через безліч чинників, які можуть по-різному впливати на кожен окремий дослід і не піддаються передбаченню. Ці похибки спричинені неминучими неточностями при спостереженні показників приладів, змінами умов експерименту або обмеженнями чутливості вимірювальних приладів. Величина випадкових похибок може бути різною навіть у вимірюваннях, виконаних однаковою чиною. Оскільки вони неминучі, важливо вміти їх оцінювати за допомогою методів математичної статистики, оскільки вони підкоряються певним статистичним закономірностям.

Систематичні похибки зумовлені, перш за все, похибками вимірювальних приладів та недосконалістю методів вимірювання. Окрім того, при зчитуванні результатів часто виникає похибка округлення, що пов'язано з ціною поділки шкали приладу та його точністю. Систематичні похибки не можна усунути шляхом повторних вимірювань, їх коригують або через внесення поправок, або вдосконаленням методики проведення експерименту.

Випадкові похибки підпорядковуються статистичним законам, які вивчаються теорією ймовірностей. Наприклад, при багаторазовому повторенні вимірювань результати зазвичай розташовуються навколо певного середнього значення. Проте визначення закону розподілу похибок потребує значних витрат часу та ресурсів. Тому на практиці для опису похибок зазвичай використовують певні характеристики, оцінювання яких вимагає менших затрат.

Характеристики похибок вимірювань поділяються на *точкові* та *інтервальні*.

Точкові похибки характеризуються одним числом, яке описує певне відхилення вимірюваного значення від істинного. Це число може бути, наприклад, середнім квадратичним (стандартним) відхиленням, яке показує, наскільки сильно результати вимірювань розкидані навколо середнього значення. Ця характеристика дає загальне уявлення про розподіл похибок, але не показує, в яких межах може перебувати похибка з певною ймовірністю.

Інтервальні похибки задаються межами, всередині яких похибка знаходиться з певною ймовірністю. Ці межі формують так званий *довірчий інтервал*, і ймовірність того, що справжнє значення похибки знаходиться всередині цього інтервалу, називають *довірчою ймовірністю* (зазвичай це 95% або 99%). Деколи замість довірчої ймовірності вживають термін *рівень значимості* (α), який пов'язаний з довірчою ймовірністю γ співвідношенням $\gamma = (1 - \alpha) * 100\%$. Через те, що інтервальні похибки обмежують інтервал значень на числовій осі, вони отримали назву інтервальних. Такий підхід дозволяє краще оцінити можливий діапазон відхилень і є зручним для більш точного прогнозування похибок у складних вимірюваннях.

Припустимо, що після проведення n вимірювань фізичної величини x отримано значення $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Найкращим

наближенням до вимірюваного значення є середнє арифметичне всіх результатів:

$$\bar{X} = \langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}. \quad (4.2)$$

Для оцінки точності цього результату використовується *стандартне відхилення вибірки*, або *середня квадратична похибка*, яка обчислюється за формулою

$$\sigma = S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}{(n-1)}}, \quad (4.3)$$

Яка отримується з (3.4) Причому у знаменнику $(n - 1)$ замість n це *поправка Бесселя*, яка враховує те, що відхилення рахують не від істинного значення, а від середнього арифметичного, що розраховане на невеликій кількості експериментальних даних.

Визначивши σ , доцільно перевірити наявність у групі спостережень грубих похибок, пам'ятаючи, що при нормальному законі розподілу жодна випадкова похибка з ймовірністю, практично рівною 1, не може вийти за межі $\pm 3\sigma$. Спостереження, які містять грубі похибки, виключають із групи, а обчислення $\bar{X}$ і σ повторюють заново.

Оскільки кількість спостережень у групі, на основі результатів яких виконано обчислення середнього арифметичного, обмежена, то, повторивши знову серію спостережень цієї ж величини, ми отримали б нове значення середнього арифметичного. Повторивши багаторазово спостереження та обчислюючи щоразу їх середнє арифметичне значення, яке приймається за результат спостережень (вимірювань), ми виявимо розсіювання середнього арифметичного значення. Характеристикою цього розсіювання є *середня квадратична похибка вибіркового середнього*:

$$\sigma_X = S_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}} = \frac{S}{\sqrt{n}} \quad (4.4)$$

Величина σ_X характеризує можливе відхилення середнього арифметичного від справжнього значення. Як видно з (4.3) та (4.4) величини σ та σ_X для випадкової похибки зменшуються при збільшенні кількості вимірів. Однак необхідно врахувати, що коли $S_{\langle x \rangle}$ стане меншим за сумарну систематичну похибку, подальше

збільшення n не призведе до підвищення точності результату. В такому випадку точність вимірювань буде визначатися систематичними похибками. Тому на практиці число n невелике – від 3 до 10. Точність кінцевого результату при $n > 10$ вже не зростатиме через наявність невинуватених похибок.

Із скінченного числа вимірювань неможливо точно знайти істинне (або теоретичне середнє) значення вимірюваної величини x . Завдання вимірювання – оцінити величину x , тобто вказати інтервал значень, до якого із заданою ймовірністю довіри α (іноді використовують іншу назву α – коефіцієнт надійності) потрапляє вимірювана величина x .

Позначимо через β_1 і β_2 межі інтервалу, що визначаються таким чином:

$$\beta_1 = \langle x \rangle - \Delta x_{\text{вип}}$$

$$\beta_2 = \langle x \rangle + \Delta x_{\text{вип}}$$

$$\Delta x_{\text{вип}} = \Delta x_{\text{випадкове}} - \text{напівширина інтервалу довіри}$$

При нормальному законі розподілу густини ймовірностей результатів спостережень та невеликій кількості вимірювань середнє арифметичне підпорядковується розподілу Стюдента з тим самим середнім значенням. Особливістю цього розподілу є те, що довірчий інтервал зі зменшенням кількості спостережень розширюється порівняно з нормальним розподілом за тієї ж довірчої ймовірності. У формулі для оцінки довірчих меж випадкової похибки це відображається введенням коефіцієнта Стюдента – $t_{\alpha, \nu}$, де α – рівень значимості, $\nu = n - 1$ – кількість ступенів вільності.

Наприклад, для нормального закону розподілу довірчий інтервал 0,95 (рівень значимості 0,05) забезпечується при $2\sigma_x$, а у розподілі Стюдента при обсязі вибірки $n = 3$ ($\nu = 2$) коефіцієнт Стюдента $t_{0,05,2} = 4,302$. Зі збільшенням n коефіцієнт Стюдента зменшується і при $n > 30$ наближається до того значення, що і в нормальному розподілі $t \approx 2$.

Отже, напівширина інтервалу довіри визначається так

$$\Delta x_{\text{вип}} = t_{\alpha, \nu} \cdot S_{\langle x \rangle}.$$

Запис $\beta_1 \leq x \leq \beta_2$ означає, що шукана величина x буде знаходитись з ймовірністю α (наприклад, $\alpha=0,95$ або 95%) в інтервалі значень від β_1 до β_2 . Ширина цього інтервалу $2\Delta x_{\text{вип}}$.

Кінцева формула запису результату при проведенні прямих вимірювань за умови переважання випадкових похибок над систематичними має вигляд

$$x = \langle x \rangle \pm t_{\alpha, \nu} \cdot S_{\langle x \rangle}. \quad (4.5)$$

Значення коефіцієнтів Стюдента $t_{\alpha, \nu}$ беруть з таблиць. В системі Wolfram Mathematica можна розрахувати числові значення коефіцієнтів для довільного значення $\nu = n - 1$ та рівня значимості α , використовуючи функції **StudentTDistribution** та **Quantile**.

?? StudentTDistribution

StudentTDistribution[ν] represents a Student t distribution with ν degrees of freedom.
StudentTDistribution[μ, σ, ν] represents a Student t distribution
with location parameter μ , scale parameter σ , and ν degrees of freedom. >>

?? Quantile

Quantile[*list*, q] gives the q^{th} quantile of *list*.
Quantile[*list*, { $q_1, q_2, \dots$ }] gives a list of quantiles $q_1, q_2, \dots$.
Quantile[*list*, q , {{ a, b }, { c, d }}] uses the quantile definition specified by parameters a, b, c, d .
Quantile[*dist*, q] gives a quantile of the symbolic distribution *dist*. >>

Квантиль p -го порядку (p -го рівня) випадкової величини X є таке її значення x_p , для якого значення p -ї частини сукупності менше або рівне x_p , тобто $p(X \leq x_p) = p(-\infty \leq X \leq x_p) = F(x_p) = 1 - \alpha$

Квантиль $x_{0.5} = \text{Me}X$, Квантиль $x_{0.25}$ відповідає першому квантилю (Q1). Це означає, що 25% значень в наборі даних менші або дорівнюють цьому значенню, а 75% — більші.

Отже, враховуючи симетричність щільності t -розподілу, для довірчого інтервалу $p = 1 - \alpha$ розраховується коефіцієнт Стюдента за допомогою квантиля $x_{1-\alpha/2}$, тобто $t_{2,0.05}$ розраховують за допомогою квантиля $x_{0.975}$ (p -а частина сукупності отримується після відсікання лівого та правого хвостів щільності розподілу величиною $\alpha/2=0.025$)

```
Quantile[StudentTDistribution[2], 0.975]
```

```
4.30265
```

```
Solve[Integrate[PDF[StudentTDistribution[2], x], {x, -Infinity, t}] == 0.975]
```

```
{{t -> 4.30265}}
```

```

(*Визначення рівнів значущості*)
alpha = {0.10, 0.05, 0.01, 0.001};
(*Ступені свободи  $\nu=n-1$ , де n - к-сть експ.точок*)
nmax = 10;
(*Створення таблиці критичних значень t*)
tCriticalValues =
  Table[{n, Quantile[StudentTDistribution[n], 1 - alpha[[1]] / 2],
    Quantile[StudentTDistribution[n], 1 - alpha[[2]] / 2],
    Quantile[StudentTDistribution[n], 1 - alpha[[3]] / 2],
    Quantile[StudentTDistribution[n], 1 - alpha[[4]] / 2]}, {n, 1, nmax}];
(*Додавання заголовків до таблиці*)
tWithHeader = Prepend[tCriticalValues,
  {" $\nu$ ", "t(0.1) 90%", "t(0.05) 95%", "t(0.01) 99%", "t(0.001) 99.9%"}];
(*Відображення таблиці*)
Grid[tWithHeader, Frame  $\rightarrow$  All]

```

ν	t(0.1) 90%	t(0.05) 95%	t(0.01) 99%	t(0.001) 99.9%
1	6.31375	12.7062	63.6567	636.619
2	2.91999	4.30265	9.92484	31.5991
3	2.35336	3.18245	5.84091	12.924
4	2.13185	2.77645	4.60409	8.6103
5	2.01505	2.57058	4.03214	6.86883
6	1.94318	2.44691	3.70743	5.95882
7	1.89458	2.36462	3.49948	5.40788
8	1.85955	2.306	3.35539	5.04131
9	1.83311	2.26216	3.24984	4.78091
10	1.81246	2.22814	3.16927	4.58689

Список літератури

1. Ясинський В.К. Вибрані лекції теорії ймовірностей для інженерних і природничих спеціальностей. – Чернівці: Прут, 2001. – 270 с.
2. Валь О.Д., Королюк С.Л., Мельничук С.В. Теорія ймовірностей ... від найпростішого. – Чернівці: Книги XXI, 2004. – 160 с.
3. Лавренчук В.П., Готинчан Т.І., Дронь В.С., Кондур О.С. Вища математика, частина 2. – Чернівці: Рута, 2000. – 208 с.
4. Васильків І. М. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики : навч. посібник. – Львів : ЛНУ імені Івана Франка, 2020. – 184 с.
5. Огірко О. І., Галайко Н. В. Теорія ймовірностей та математична статистика. Львів: ЛьвДУВС, 2017. –292 с.
6. Ярхо Т. О. Теорія ймовірностей для професійно – математичної підготовки бакалаврів технічного профілю. Харків: ХНАДУ, 2017. – 84 с.
7. Жильцов О. Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах. Київ: Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. –336с.
8. Барковська Н. В., Лопатін О. К. Теорія імовірностей та математична статистика. Київ: Центр учбової літератури, 2010. –424 с.
9. Кушлик-Дивульська О. І., Поліщук Н. В., Орел Б. П., Штабальок П. І. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб./– К: НТУУ «КПІ», 2014. – 212 с.
10. Ясній О. П., Валяшек Б. В., Крива Н. Р. Теорія ймовірностей та математична статистика / Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни. Тернопіль: Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, – 2020. –76 с.
11. Wolfram cloud. Integrated Access to Computational Intelligence. – Режим доступу: <https://www.wolframcloud.com/>
12. Exploring the Tails of the Normal Distribution. – Режим доступу: <https://demonstrations.wolfram.com/ExploringTheTailsOfTheNormalDistribution/>
13. Теоретичні основи теорії ймовірностей та комбінаторики. – Режим доступу: <https://poznayka.org/s123143t2.html>
14. Завдання теорії ймовірностей. Основні поняття. – Режим доступу: <https://yukhym.com/uk/vipadkovi-podiji/osnovni-ponyattya-teoriji-jmovirnostej.html>

15. Теорія ймовірності. Львівський нац. унів. ім. І. Франко – Режим доступу: <https://studfile.net/preview/9891665/#9891665>
16. Тичинська Л.М., Черепашук А. А. Теорія ймовірностей – Режим доступу:
https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/fitki/4tichinska_teoriya_jmovirnostej/z.htm
17. Теорія ймовірностей та математична статистика – Режим доступу:
<https://ppt-online.org/706888>

Додаток 1. Таблиця значень функції Гауса

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
0,00	0,39894	0,25	0,38667	0,5	0,35207	0,75	0,30114	1	0,24197
0,01	0,39892	0,26	0,38568	0,51	0,35029	0,76	0,29887	1,01	0,23955
0,02	0,39886	0,27	0,38466	0,52	0,34849	0,77	0,29659	1,02	0,23713
0,03	0,39876	0,28	0,38361	0,53	0,34667	0,78	0,2943	1,03	0,23471
0,04	0,39862	0,29	0,38251	0,54	0,34482	0,79	0,292	1,04	0,2323
0,05	0,39844	0,3	0,38139	0,55	0,34494	0,8	0,28969	1,05	0,22988
0,06	0,39822	0,31	0,38023	0,56	0,34105	0,81	0,28737	1,06	0,22747
0,07	0,39797	0,32	0,37903	0,57	0,33912	0,82	0,28504	1,07	0,22506
0,08	0,39767	0,33	0,3778	0,58	0,33718	0,83	0,28269	1,08	0,22265
0,09	0,39733	0,34	0,37654	0,59	0,33521	0,84	0,28034	1,09	0,22025
0,10	0,39695	0,35	0,37524	0,6	0,33322	0,85	0,27798	1,1	0,21785
0,11	0,39654	0,36	0,37391	0,61	0,33121	0,86	0,27562	1,11	0,21546
0,12	0,39608	0,37	0,37255	0,62	0,32918	0,87	0,27324	1,12	0,21307
0,13	0,39559	0,38	0,37115	0,63	0,32713	0,88	0,27086	1,13	0,21069
0,14	0,39505	0,39	0,36973	0,64	0,32506	0,89	0,26848	1,14	0,20831
0,15	0,39448	0,4	0,36827	0,65	0,32297	0,9	0,26609	1,15	0,20594
0,16	0,39387	0,41	0,36678	0,66	0,32086	0,91	0,26369	1,16	0,20357
0,17	0,39322	0,42	0,36526	0,67	0,31874	0,92	0,26129	1,17	0,20121
0,18	0,39253	0,43	0,36371	0,68	0,31659	0,93	0,25888	1,18	0,19886
0,19	0,39181	0,44	0,36213	0,69	0,31443	0,94	0,25647	1,19	0,19652
0,20	0,39104	0,45	0,36053	0,7	0,31225	0,95	0,25647	1,2	0,19419
0,21	0,39024	0,46	0,35889	0,71	0,31006	0,96	0,25164	1,21	0,19186
0,22	0,38940	0,47	0,35723	0,72	0,30785	0,97	0,24923	1,22	0,18954
0,23	0,38853	0,48	0,35553	0,73	0,30563	0,98	0,24681	1,23	0,18724
0,24	0,38762	0,49	0,35381	0,74	0,30339	0,99	0,24439	1,24	0,18494
0,25	0,38667	0,5	0,35207	0,75	0,30114	1	0,24197	1,25	0,18265

Продовження таблиці значень функції Гауса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
1,25	0,18265	1,5	0,12952	1,75	0,08628	2	0,05399	2,25	0,03174
1,26	0,18637	1,51	0,12758	1,76	0,08478	2,01	0,05292	2,26	0,03103
1,27	0,1781	1,52	0,12566	1,77	0,08329	2,02	0,05186	2,27	0,03034
1,28	0,17585	1,53	0,12376	1,78	0,08183	2,03	0,05082	2,28	0,02965
1,29	0,1736	1,54	0,12188	1,79	0,08038	2,04	0,0498	2,29	0,02898
1,3	0,17137	1,55	0,12001	1,8	0,07895	2,05	0,04879	2,3	0,02833
1,31	0,16915	1,56	0,11816	1,81	0,07754	2,06	0,0478	2,31	0,02768
1,32	0,16694	1,57	0,11632	1,82	0,07614	2,07	0,04682	2,32	0,02705
1,33	0,16474	1,58	0,1145	1,83	0,07477	2,08	0,04586	2,33	0,02643
1,34	0,16256	1,59	0,1127	1,84	0,07341	2,09	0,04491	2,34	0,02582
1,35	0,16038	1,6	0,11092	1,85	0,07206	2,1	0,04398	2,35	0,02522
1,36	0,15822	1,61	0,10915	1,86	0,07074	2,11	0,04307	2,36	0,02463
1,37	0,15608	1,62	0,10741	1,87	0,06943	2,12	0,04217	2,37	0,02406
1,38	0,15395	1,63	0,10567	1,88	0,06814	2,13	0,04128	2,38	0,02349
1,39	0,15183	1,64	0,10396	1,89	0,06687	2,14	0,04041	2,39	0,02294
1,4	0,14973	1,65	0,10226	1,9	0,06562	2,15	0,03955	2,4	0,02239
1,41	0,14764	1,66	0,10059	1,91	0,06438	2,16	0,03871	2,41	0,02186
1,42	0,14556	1,67	0,09893	1,92	0,06316	2,17	0,03788	2,42	0,02134
1,43	0,1435	1,68	0,09728	1,93	0,06195	2,18	0,03706	2,43	0,02083
1,44	0,14146	1,69	0,09566	1,94	0,06077	2,19	0,03626	2,44	0,02033
1,45	0,13943	1,7	0,09405	1,95	0,05959	2,2	0,03547	2,45	0,01984
1,46	0,13742	1,71	0,09246	1,96	0,05844	2,21	0,0347	2,46	0,01936
1,47	0,13542	1,72	0,09089	1,97	0,0573	2,22	0,03394	2,47	0,01888
1,48	0,13344	1,73	0,08933	1,98	0,05618	2,23	0,03319	2,48	0,01842
1,49	0,13147	1,74	0,0878	1,99	0,05508	2,24	0,03246	2,49	0,01797
1,5	0,12952	1,75	0,08628	2	0,05399	2,25	0,0317	2,5	0,0175

Продовження таблиці значень функції Гауса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
2,5	0,0175	2,75	0,0091	3	0,0044	3,25	0,002	3,5	0,0009
2,51	0,0171	2,76	0,0089	3,01	0,0043	3,26	0,002	3,51	0,0008
2,52	0,0167	2,77	0,0086	3,02	0,0042	3,27	0,0019	3,52	0,0008
2,53	0,0163	2,78	0,0084	3,03	0,0041	3,28	0,0018	3,53	0,0008
2,54	0,0159	2,79	0,0081	3,04	0,0039	3,29	0,0018	3,54	0,0008
2,55	0,0155	2,8	0,0079	3,05	0,0038	3,3	0,0017	3,55	0,0007
2,56	0,0151	2,81	0,0077	3,06	0,0037	3,31	0,0017	3,56	0,0007
2,57	0,0147	2,82	0,0075	3,07	0,0036	3,32	0,0016	3,57	0,0007
2,58	0,0143	2,83	0,0073	3,08	0,0035	3,33	0,0016	3,58	0,0007
2,59	0,0139	2,84	0,0071	3,09	0,0034	3,34	0,0015	3,59	0,0006
2,6	0,0136	2,85	0,0069	3,1	0,0033	3,35	0,0015	3,6	0,0006
2,61	0,0132	2,86	0,0067	3,11	0,0032	3,36	0,0014	3,61	0,0006
2,62	0,0129	2,87	0,0065	3,12	0,0031	3,37	0,0014	3,62	0,0006
2,63	0,0126	2,88	0,0063	3,13	0,003	3,38	0,0013	3,63	0,0006
2,64	0,0122	2,89	0,0061	3,14	0,0029	3,39	0,0013	3,64	0,0005
2,67	0,0113	2,9	0,006	3,15	0,0028	3,4	0,0012	3,65	0,0005
2,68	0,011	2,91	0,0058	3,16	0,0027	3,41	0,0012	3,66	0,0005
2,69	0,0107	2,92	0,0056	3,17	0,0026	3,42	0,0012	3,67	0,0005
2,65	0,0119	2,93	0,0055	3,18	0,0025	3,43	0,0011	3,68	0,0005
2,66	0,0116	2,94	0,0053	3,19	0,0025	3,44	0,0011	3,69	0,0004
2,7	0,0104	2,95	0,0051	3,2	0,0024	3,45	0,001	3,7	0,0004
2,71	0,0101	2,96	0,005	3,21	0,0023	3,46	0,001	3,71	0,0004
2,72	0,0099	2,97	0,0049	3,22	0,0022	3,47	0,001	3,72	0,0004
2,73	0,0096	2,98	0,0047	3,23	0,0022	3,48	0,0009	3,73	0,0004
2,74	0,0094	2,99	0,0046	3,24	0,0021	3,49	0,0009	3,74	0,0004
2,75	0,0091	3	0,0044	3,25	0,002	3,5	0,0009	3,75	0,0004

Продовження таблиці значень функції Гауса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
3,75	0,0004	3,8	0,0003	3,85	0,0002	3,9	0,0002	3,95	0,0002
3,76	0,0003	3,81	0,0003	3,86	0,0002	3,91	0,0002	3,96	0,0002
3,77	0,0003	3,82	0,0003	3,87	0,0002	3,92	0,0002	3,97	0,0002
3,78	0,0003	3,83	0,0003	3,88	0,0002	3,93	0,0002	3,98	0,0001
3,79	0,0003	3,84	0,0003	3,89	0,0002	3,94	0,0002	3,99	0,0001

Додаток 2. Таблиця значень функції Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,01	0,00399	0,31	0,12172	0,61	0,22907	0,91	0,31859	1,21	0,38686
0,02	0,00798	0,32	0,12552	0,62	0,23237	0,92	0,32121	1,22	0,38877
0,03	0,01197	0,33	0,1293	0,63	0,23565	0,93	0,32381	1,23	0,39065
0,04	0,01595	0,34	0,13307	0,64	0,23891	0,94	0,32639	1,24	0,39251
0,05	0,01994	0,35	0,13683	0,65	0,24215	0,95	0,32894	1,25	0,39435
0,06	0,02392	0,36	0,14058	0,66	0,24537	0,96	0,33147	1,26	0,39617
0,07	0,0279	0,37	0,14431	0,67	0,24857	0,97	0,33398	1,27	0,39796
0,08	0,03188	0,38	0,14803	0,68	0,25175	0,98	0,33646	1,28	0,39973
0,09	0,03586	0,39	0,15173	0,69	0,2549	0,99	0,33891	1,29	0,40147
0,1	0,03983	0,4	0,15542	0,7	0,25804	1	0,34134	1,3	0,4032
0,11	0,0438	0,41	0,1591	0,71	0,26115	1,01	0,34375	1,31	0,4049
0,12	0,04776	0,42	0,16276	0,72	0,26424	1,02	0,34614	1,32	0,40658
0,13	0,05172	0,43	0,1664	0,73	0,2673	1,03	0,34849	1,33	0,40824
0,14	0,05567	0,44	0,17003	0,74	0,27035	1,04	0,35083	1,34	0,40988
0,15	0,05962	0,45	0,17364	0,75	0,27337	1,05	0,35314	1,35	0,41149
0,16	0,06356	0,46	0,17724	0,76	0,27637	1,06	0,35543	1,36	0,41309
0,17	0,06749	0,47	0,18082	0,77	0,27935	1,07	0,35769	1,37	0,41466
0,18	0,07142	0,48	0,18439	0,78	0,2823	1,08	0,35993	1,38	0,41621
0,19	0,07535	0,49	0,18793	0,79	0,28524	1,09	0,36214	1,39	0,41774
0,2	0,07926	0,5	0,19146	0,8	0,28814	1,1	0,36433	1,4	0,41924
0,21	0,08317	0,51	0,19497	0,81	0,29103	1,11	0,3665	1,41	0,42073
0,22	0,08706	0,52	0,19847	0,82	0,29389	1,12	0,36864	1,42	0,4222
0,23	0,09095	0,53	0,20194	0,83	0,29673	1,13	0,37076	1,43	0,42364
0,24	0,09483	0,54	0,2054	0,84	0,29955	1,14	0,37286	1,44	0,42507
0,25	0,09871	0,55	0,20884	0,85	0,30234	1,15	0,37493	1,45	0,42647
0,26	0,10257	0,56	0,21226	0,86	0,30511	1,16	0,37698	1,46	0,42785
0,27	0,10642	0,57	0,21566	0,87	0,30785	1,17	0,379	1,47	0,42922
0,28	0,11026	0,58	0,21904	0,88	0,31057	1,18	0,381	1,48	0,43056
0,29	0,11409	0,59	0,2224	0,89	0,31327	1,19	0,38298	1,49	0,43189
0,3	0,11791	0,6	0,22575	0,9	0,31594	1,2	0,38493	1,5	0,43319

Продовження таблиці значень функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,51	0,43448	1,81	0,46485	2,22	0,48679	2,82	0,49760	4,05	0,49997
1,52	0,43574	1,82	0,46562	2,24	0,48745	2,84	0,49774	4,1	0,49998
1,53	0,43699	1,83	0,46638	2,26	0,48809	2,86	0,49788	4,15	0,49998
1,54	0,43822	1,84	0,46712	2,28	0,4887	2,88	0,49801	4,2	0,49999
1,55	0,43943	1,85	0,46784	2,3	0,48928	2,9	0,49813	4,25	0,49999
1,56	0,44062	1,86	0,46856	2,32	0,48983	2,92	0,49825	4,3	0,49999
1,57	0,44179	1,87	0,46926	2,34	0,49036	2,94	0,49836	4,35	0,49999
1,58	0,44295	1,88	0,46995	2,36	0,49086	2,96	0,49846	4,4	0,49999
1,59	0,44408	1,89	0,47062	2,38	0,49134	2,98	0,49856	4,45	0,5
1,6	0,4452	1,9	0,47128	2,4	0,4918	3	0,49865	4,5	0,5
1,61	0,4463	1,91	0,47193	2,42	0,49224	3,05	0,49886	4,55	0,5
1,62	0,44738	1,92	0,47257	2,44	0,49266	3,1	0,49903	4,6	0,5
1,63	0,44845	1,93	0,4732	2,46	0,49305	3,15	0,49918	4,65	0,5
1,64	0,4495	1,94	0,47381	2,48	0,49343	3,2	0,49931	4,7	0,5
1,65	0,45053	1,95	0,47441	2,5	0,49379	3,25	0,49942	4,75	0,5
1,66	0,45154	1,96	0,475	2,52	0,49413	3,3	0,49952	4,8	0,5
1,67	0,45254	1,97	0,47558	2,54	0,49446	3,35	0,4996	4,85	0,5
1,68	0,45352	1,98	0,47615	2,56	0,49477	3,4	0,49966	4,9	0,5
1,69	0,45449	1,99	0,4767	2,58	0,49506	3,45	0,49972	4,95	0,5
1,7	0,45543	2	0,47725	2,6	0,49534	3,5	0,49977	5	0,5
1,71	0,45637	2,02	0,47831	2,62	0,4956	3,55	0,49981		
1,72	0,45728	2,04	0,47932	2,64	0,49585	3,6	0,49984		
1,73	0,45818	2,06	0,4803	2,66	0,49609	3,65	0,49987		
1,74	0,45907	2,08	0,48124	2,68	0,49632	3,7	0,49989		
1,75	0,45994	2,1	0,48214	2,7	0,49653	3,75	0,49991		
1,76	0,4608	2,12	0,483	2,72	0,49674	3,8	0,49993		
1,77	0,46164	2,14	0,48382	2,74	0,49693	3,85	0,49994		
1,78	0,46246	2,16	0,48461	2,76	0,49711	3,9	0,49995		
1,79	0,46327	2,18	0,48537	2,78	0,49728	3,95	0,49996		
1,8	0,46407	2,2	0,4861	2,8	0,49744	4	0,49997		

Додаток 3. Програма розрахунку значень функції Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

$$\text{pdf} = \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}};$$

```
area1[x_, y_] := NIntegrate[pdf, {z, x, y}]
```

```
plot[x_, y_] :=
```

```
If[x == y, Plot[t, {z, 1, 4.}, PlotStyle -> Directive[Blue, Thickness[0.007]], Filling -> {1 -> {0, Yellow}}],  
Plot[pdf, {z, x, y}, PlotStyle -> Directive[Blue, Thickness[0.007]], Filling -> {1 -> {0, Yellow}}]]
```

```
Manipulate[
```

```
Show[Plot[pdf, {z, -5, 5}, PlotRange -> {All, {-0.005, 0.42}}, Frame -> True,
```

```
PlotStyle -> Directive[Blue, Thickness[0.007]], FillingStyle -> Yellow,
```

```
FrameStyle -> Directive[Black, FontSize -> 14], FrameTicksStyle -> 12,
```

```
FrameLabel -> {Style["x", 14, Italic], "\phi(x)"},
```

```
Epilog -> {Red, PointSize[0.012], Point[{z1, 0}, {z2, 0}], Text["x1", {z1, 0.02}], Text["x2", {z2, 0.02}]},
```

```
PlotLabel ->
```

```
Style[Framed[Row[{ "\phi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \setminus n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(", z2, ") - \Phi(", z1, ") = ",
```

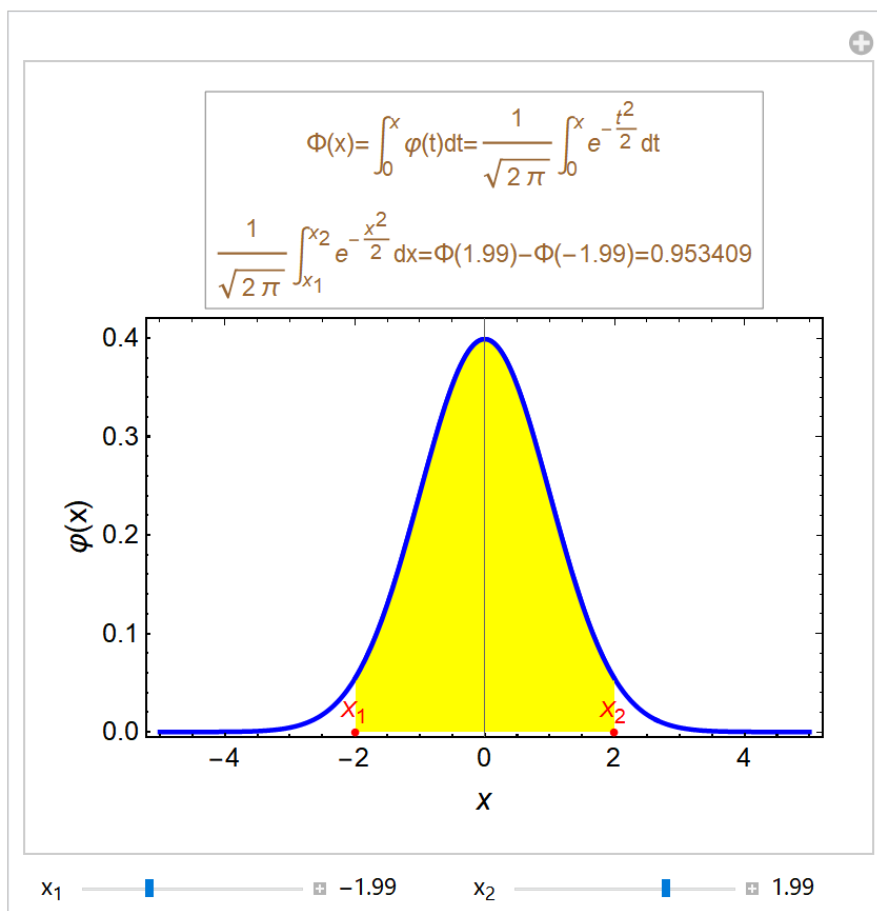
```
area1[z1, z2] }], FrameStyle -> {Gray, Thickness[0.01] }], 11, Brown]], plot[z1, z2]],
```

```
ImageSize -> {350, Automatic} ],
```

```
Row[{Control@{{z1, -5, "x1"}, -5, 5, 0.002, ImageSize -> Small, Appearance -> "Labeled"}, Spacer[20],
```

```
Control@{{z2, 5, "x2"}, -5, 5, 0.002, ImageSize -> Small, Appearance -> "Labeled"}]],
```

```
ControlPlacement -> Bottom, SaveDefinitions -> True]
```



Додаток 4. Основні типи розподілів

Тип розподілу	Випадкова величина	Функція ймовірності/щільності	Основні параметри
Рівномірний	Дискр./Непер.	Дискретний: $P(X = x) = \frac{1}{n}$, для всіх x Неперервний: $f(x) = \frac{1}{b-a}$, $x \in [a, b]$	Інтервал $[a, b]$
Біноміальний	Дискр.	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	n — кількість випробувань p — ймовірність успіху
Пуассонівський	Дискр.	$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$	λ — середнє число подій на інтервал
Геометричний	Дискр.	$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$	p — ймовірність успіху
Нормальний	Непер.	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ — математичне сподівання σ — стандартне відхилення
Експоненційний	Непер.	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$	λ — параметр швидкості
Стюдента (t-розподіл)	Непер.	$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$ ↓	ν — число ступенів свободи