Міністерство освіти і науки України

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

Г.М. Перун, Л.М. Мельничук

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ: КОРОТКИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ. ЧАСТИНА 1

Навчальний посібник

Чернівці
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича
2025

УДК 517(076)
М 340

Друкується за ухвалою вченої ради факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (Протокол № 11 від 23 квітня 2025 року)

Рецензенти:

Малик Ігор Володимирович, доктор фіз.-мат. наук, професор, завідуючий кафедрою математичних проблем управління і кібернетики Навчально-наукового інституту фізико-технічних та комп'ютерних наук Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича;

Іваночко Михайло Миколайович, кандидат фіз.-мат.наук, доцент кафедри термоелектрики та медичної фізики Навчально-наукового інституту фізико-технічних та комп'ютерних наук Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

Перун Г.М., Мельничук Л.М.

М 340 Математичний аналіз: короткий конспект лекцій і завдання для самостійної роботи. Частина 1 : навч. посіб. / Г.М. Перун, Л.М. Мельничук. Чернівці : Чернівец. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2025. 171 с.

У навчальному посібнику наводяться основні теоретичні відомості, розв'язування типових прикладів, а також підібрані варіанти для самостійних робіт з тем математичного аналізу для спеціальностей "Фізика та астрономія" і "Прикладна фізика".

Для студентів вищих навчальних закладів, яким викладають навчальну дисципліну "Математичний аналіз", а також розділи вищої математики, що містять математичний аналіз.

УДК 517(076)
©Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 2025

©Перун Г.М., Мельничук Л.М., 2025

ПЕРЕДМОВА

”Те, що сьогодні доведено,
колись існувало тільки в уяві”
Вільям Блейк (англійський
поет, художник, гравер)

Навчальний посібник ”Математичний аналіз: короткий конспект лекцій і завдання для самостійних робіт. Частина 1” розрахований для студентів нефахових факультетів, які слухають дисципліну ”Математичний аналіз”, а також для тих, кому викладають розділи вищої математики, у складі яких є математичний аналіз.

У посібнику є теоретичні відомості з таких п’яти тем: ”Числові послідовності”, ”Деякі важливі поняття про функцію”, ”Невизначений інтеграл”, ”Визначений інтеграл і його застосування”, ”Невласні інтеграли”. Окремі теореми та властивості математичних об’єктів, які викладають студентам, наведено з доведеннями. До кожної теми питання теорії ілюструються детально розв’язаними прикладами, а також є підбір рівноцінних завдань для самостійного розв’язування студентами як тренувальних вправ, так і варіантів підсумкових контрольних робіт.

Фундаментальні поняття, які висвітлені в навчальному посібнику, почерпнуті з **[1]: ”Григорій Михайлович Фіхтенгольц. Курс диференціального та інтегрального числення. Переклад небайдужих до математики і України: Сергій Зінов’єв (2022.02.24–2023.03.17)”.**

Тема 1. Числові послідовності

1. Означення числової послідовності. Приклади числових послідовностей

Якщо функція розглядається тільки при *цілих* і *додатних значеннях аргумента*, то вона називається *функцією натурального аргумента*. Множина її значень утворює числову послідовність: кожному натуральному числу (цілому додатному) відповідає число x_n – член послідовності, що має номер n. Це означає, що

$$x_n = f(n). \tag{1}$$

Означення 1. *Числовою послідовністю називається множина значень функції $f(n)$, визначеної на множині натуральних чисел.*

Член x_n – загальний член послідовності.

Послідовність з загальним членом x_n *містить нескінченну множину* чисел і позначається $\{x_n\}$ або $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Послідовність вважається заданою, якщо *відомо спосіб обчислення будь-якого її члена* за його *відомим номером.*

Приклад 1. За загальним членом послідовності $x_n = n$ записати 5 перших її членів.

Розв'язання. Покладаючи $n = 1, 2, 3, 4, 5$, отримаємо $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$; $x_5 = 5$.

У загальному випадку цю послідовність можемо записати так

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots$$

Приклад 2. Записати 4 перших членів послідовності

$$x_n = \frac{n}{n+2}.$$

Розв'язання. Покладемо по черзі $n = 1, 2, 3, 4$ і отримаємо

$$x_1 = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}; \quad x_2 = \frac{2}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad x_3 = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5};$$

$$x_4 = \frac{4}{4+2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Приклад 3. За відомими членами послідовності

$$\frac{6}{7},\ \frac{9}{10},\ \frac{14}{15},\ \frac{21}{22},\ \frac{30}{31},\ \dots$$

записати її загальний член.

Розв'язання. Число $\frac{6}{7}$ відповідає $n = 1$, а $\frac{9}{10}$ відповідає $n = 2$. Бачимо $6 = 1^2 + 5$; $9 = 2^2 + 5$; $14 = 3^2 + 5$; $21 = 4^2 + 5$ і т.д., а відповідно $7 = 1^2 + 6$; $10 = 2^2 + 6$; $15 = 3^2 + 6$; $22 = 4^2 + 6$ і т.д. Отже, можемо записати, що

$$x_n = \frac{n^2 + 5}{n^2 + 6}.$$

2. Обмежені та необмежені числові послідовності

Означення 2. *Числова послідовність $\{x_n\}$ називається обмеженою зверху, якщо існує таке число $M \in \mathbb{R}$ (дійсне число M), що виконується нерівність $x_n \le M$ для всіх номерів $n \in \mathbb{N}$.*

Введено поняття *квантора*. Значок $\forall$ означає "для всіх", або "для будь-якого". Значок $\exists$ означає "існує" або "знайдеться".

Означення 3. Числова послідовність називається обмеженою знизу, якщо $\exists\ m \in \mathbb{R}$, що виконується нерівність $x_n \ge m$ для $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Означення 4. Послідовність називається обмеженою, якщо всі її члени підпорядковані нерівності

$$|x_n| \le A, \text{ де } A = \max\{|m|, |M|\}, \tag{2}$$

або вона є обмеженою і знизу і зверху, тобто

$$m \le x_n \le M \text{ для } \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Приклад 4. Послідовність із загальним членом

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

є обмеженою.

Розв'язання. Покладемо $n = 1$, тоді $x_1 = 0$; $n = 2$, тоді $x_2 = \dfrac{1+(-1)^2}{2} = 1$; $n = 3$, тоді $x_3 = \dfrac{1+(-1)^3}{2} = \dfrac{1-1}{2} = 0$; $n = 4$, тоді $x_4 = \dfrac{1+(-1)^4}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1$, і т.д.

Маємо послідовність: 0, 1, 0, 1, 0, ... – вона обмежена.

Означення 5. Послідовність x_n називається необмеженою, якщо для довільного як завгодно великого числа $B > 0$ знайдеться номер N, що $|x_n| \geq B$ для $\forall\, n \geq N$ (або для $\forall\, B > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$, що $|x_n| \geq B$ для $\forall\ n \geq N$).

3. Нескінченно малі та нескінченно великі числові послідовності. Властивості нескінченно малих та нескінченно великих послідовностей

Означення 6. *Послідовність y_n (іноді позначають α_n) називається нескінченно малою, якщо для довільного наперед заданого як завгодно малого $\varepsilon > 0$ та достатньо великих номерів $N \in \mathbb{N}$*

$$|y_n| < \varepsilon \text{ для всіх } n \geq N. \tag{3}$$

Жодне число, крім нуля, не може бути зараховано до нескінченно малих величин.

Приклад 5. Показати, що послідовність

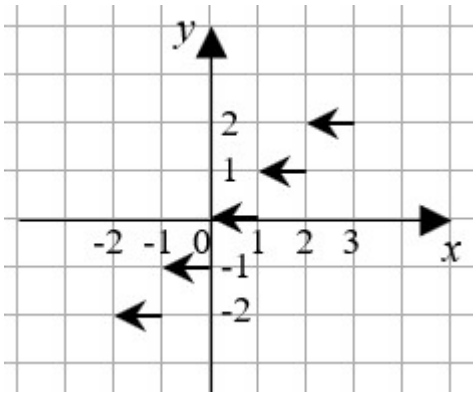
$$x_n = \frac{1}{n}$$

є нескінченно малою.

Розв'язання. З нерівності (3) маємо $\left|\dfrac{1}{n}\right| < \varepsilon$, $\dfrac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow 1 < n\varepsilon \Rightarrow n > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

За N візьмемо цілу частину величини $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

Нагадаємо функцію $y = [x]$ – ціла частина x. Вона означає, що $\forall\ x$ ставиться у відповідність *найбільше зліва* до нього ціле число. Її графік виглядає так



Основні властивості нескінченно малих послідовностей

Теорема 1. *Нехай α_n і β_n – дві нескінченно малі послідовності, то їх сумою є нескінченно мала послідовність з членами*

$$\gamma_n = \alpha_n + \beta_n.$$

Доведення. Виберемо довільне $\varepsilon > 0$. Згідно з означенням нескінченно малої послідовності, для $\forall\ \dfrac{\varepsilon}{2}$ знайдеться такий номер N_1, що для всіх $n > N_1$ виконується нерівність

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогічно і для β_n. Для $\forall\ \dfrac{\varepsilon}{2}\ \exists\ N_2$, що для всіх номерів $n > N_2$ буде

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Виберемо $N = \max\{N_1, N_2\}$, тоді при $n > N$ одночасно виконуються обидві нерівності так, що $|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Отже, $\{\alpha_n + \beta_n\}$ справді є нескінченно малою послідовністю. $\square$

Зауваження 1. *Нерівність* $|\alpha_n+\beta_n| \le |\alpha_n|+|\beta_n|$ *називається нерівністю трикутника (з геометрії знаємо, що сума двох сторін трикутника більша, ніж його третя сторона).*

Зауваження 2. *У математичній літературі нескінченно малі послідовності, функції позначають грецькими буквами.*

Теорема 2. *Кожна нескінченно мала послідовність є обмеженою.*

Доведення. Нехай α_n – нескінченно мала послідовність. Доведемо, що вона обмежена. Для α_n маємо, що для $\forall\ \varepsilon > 0$ знайдеться $(\exists)\ N$ такий, що для $n \ge N$

$$|\alpha_n| < \varepsilon.$$

Розглянемо $\max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_n|, \varepsilon\} = A$. Тоді

$$|\alpha_n| \le A \text{ для } \forall\ n \in N,$$

а отже послідовність є обмеженою. □

Теорема 3. *Добуток обмеженої послідовності на нескінченно малу є нескінченно малою послідовністю.*

Доведення. Нехай x_n – обмежена, тобто $\exists\ A > 0$, що

$$|x_n| \le A \text{ для } \forall\ n \in N.$$

Виберемо як завгодно мале $\varepsilon > 0$. Для числа $\dfrac{\varepsilon}{A}$ $(A \ne 0)$ знайдеться номер N, що для послідовності $\{\alpha_n\}$ – нескінченно малої виконується нерівність

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{A} \quad \text{для} \quad n > N.$$

Розглянемо $|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < \dfrac{A\varepsilon}{A} = \varepsilon$ для $n > N$, що і доводить твердження. □

Зауваження 3. *Скінченна сума нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.*

Зауваження 4. *Різницею двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно мала послідовність.*

Означення 7. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається нескінченно великою, якщо для довільного наперед заданого числа* $M > 0$ *можна вказати таке натуральне число* N*, що для всіх номерів, більших ніж* N*, виконується нерівність*

$$|x_n| > M.$$

Якщо послідовність необмежена, то вона не завжди нескінченно велика.

Або, якщо вона, починаючи з деякого номера, стає і залишається при всіх наступних номерах більшою за абсолютною величиною, ніж наперед задане додатне число M*.*

При цьому знак x_n *– не важливий, а вимагається, щоб абсолютна величина* x_n*, тобто* $|x_n|$ *могла бути "зроблена" більшою, ніж наперед задане додатне число.*

4. Означення границі числової послідовності. Збіжні послідовності. Геометричний зміст збіжної послідовності

Означення 8. *Число* a *називається границею числової послідовності* $\{x_n\}$*, якщо для* $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon)$*, що для всіх* $n > N(\varepsilon)$ *виконується нерівність*

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{4}$$

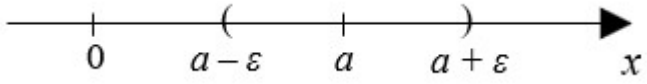
Позначається $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$*.*

Якщо існує скінченна границя, то послідовність є збіжною, інакше – вона називається розбіжною.

Дамо геометричне тлумачення збіжності.

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, тоді, згідно з означенням границі послідовності, для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon)$, що $|x_n - a| < \varepsilon$ для $\forall\ n > N$. Як відомо, нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ еквівалентна такій нерівності $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ для $\forall\ n > N$, або $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, тоді всі

члени $\{x_n\}$, збіжної до a, з номерами $n > N$, тобто з членами $x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots$ лежать в інтервалі $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.



Будемо називати інтервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, де $\varepsilon > 0$, *ε-околом точки a*.

Отже, якщо послідовність збігається до a, то геометрично це означає, що ε-околу точки a належать всі члени даної послідовності, починаючи з деякого номера, а поза ним (околом) може знаходитись лише скінченна кількість членів послідовності.

Приклад 1. Довести, що $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ з загальним членом $x_n = \dfrac{4n}{2n+1}$ має границею число 2.

Розв'язання. Оберемо довільно $\varepsilon > 0$ і покажемо, що існує число $N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N$ справджується нерівність

$$\left|\frac{4n}{2n+1} - 2\right| < \varepsilon. \tag{5}$$

Зведемо до спільного знаменника

$$\left|2 - \frac{4n}{2n+1}\right| = \left|\frac{2}{2n+1}\right| = \frac{2}{2n+1}$$

і нерівність (5) набуде вигляду

$$\frac{2}{2n+1} < \varepsilon. \tag{6}$$

З останньої нерівності виразимо n через ε. Розглянемо обернену до нерівності (6)

$$\frac{2n+1}{2} > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{або} \quad n + \frac{1}{2} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}.$$

Отже, якщо *номер n більший, ніж* $\dfrac{1}{\varepsilon} - \dfrac{1}{2}$, то (5) виконується. За N візьмемо цілу частину числа

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\right]. \tag{7}$$

Зауваження. *Припускається, що* $\left[\dfrac{1}{\varepsilon} - \dfrac{1}{2}\right] > 0$, *інакше N не буде натуральним. Якщо виявиться від'ємним або нулем, то потрібно взяти $N = 1$.*

Розглянемо тепер конкретно: нехай $\varepsilon = \dfrac{1}{50}$, тоді з (7) випливає, що

$$N = \left[\frac{1}{1/50} - \frac{1}{2}\right] = \left[50 - \frac{1}{2}\right] = 49,$$

оскільки *найбільше ціле число в числі* $49\dfrac{1}{2}$ *є* 49. Отже, для всіх номерів n, більших, ніж 49 при $\varepsilon = \dfrac{1}{50}$ виконується нерівність (5). Починаючи з 50-го члена, всі члени послідовності будуть знаходитись в інтервалі $\left(2 - \dfrac{1}{50}, 2 + \dfrac{1}{50}\right)$.

Переконаємось, що при $n < 49$ нерівність не виконується. Нехай $n = 47$.

Із загального члена $x_n = \dfrac{4n}{2n+1}$ знайдемо

$$x_{47} = \frac{4 \cdot 47}{2 \cdot 47 + 1} = \frac{188}{95}$$

і ліва частина нерівності (5) стає $\left|2 - \dfrac{188}{95}\right| = \dfrac{2}{95}$. Згідно з (5) має бути, що $\dfrac{2}{95}$ менше, ніж $\varepsilon = \dfrac{1}{50}$, але число $\dfrac{2}{95}$ не менше, ніж $\dfrac{1}{50}\left(\dfrac{2}{100}\right)$, а значить нерівність (5) не виконується.

Нехай тепер $n = 50$, тоді $x_n = \dfrac{4 \cdot 50}{2 \cdot 50 + 1} = \dfrac{200}{101}$, $\left|2 - \dfrac{200}{101}\right| = \dfrac{2}{101}$, а $\dfrac{2}{101} < \dfrac{1}{50}$ – нерівність (5) виконується.

5. Властивості збіжних та розбіжних послідовностей

Властивість 1. *Границя числової послідовності єдина, якщо вона існує.*

Доведення (від супротивного). Нехай існують два граничні значення

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{і} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = b,$$

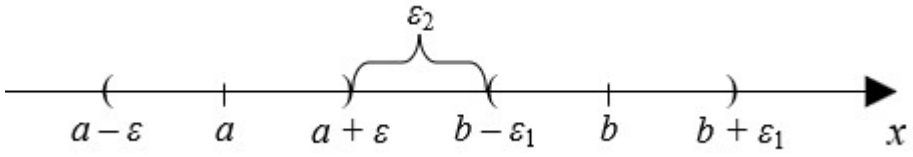
причому $a \neq b$ і нехай $a < b$.

За означенням границі: для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N_1$, що для $\forall\ n > N_1$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$ або подвійна нерівність

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Аналогічно для b: $b - \varepsilon_1 < x_n < b + \varepsilon_1$, оскільки для $\varepsilon_1 > 0\ \exists N_2$, що $n > N_2$ виконується $|x_n - b| < \varepsilon_1$.

Виберемо ε і ε_1 настільки малими, щоб околи точок a і b не перетиналися,



тобто $a + \varepsilon < b - \varepsilon_1$ $(a < b)$.

Покладемо $N = \max\{N_1, N_2\}$, отримаємо, що

$$b - \varepsilon_1 < x_n < a + \varepsilon$$

для $n > N$. Але це суперечить тому, що $a + \varepsilon < b - \varepsilon_1$. Отже, припущення про існування 2-ох границь не правильне.

Властивість 2. *Якщо* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, *причому* $a > p$ $(a < q)$, *то всі члени послідовності, починаючи з деякого, також будуть більшими* p *(меншими* q*).*

Властивість 3. *Нехай* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, *причому* $x_n \geq y_n$, *тоді* $a \geq b$.

Властивість 4. *Нехай для членів двох послідовностей виконується рівність* $x_n = y_n$, *причому* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, *то їх границі також рівні, тобто* $a = b$.

Властивість 5. *Якщо для елементів трьох послідовностей виконуються нерівності*

$$x_n \leq y_n \leq z_n,$$

причому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, *то і* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Цю властивість називають **лемою про двох поліцейських**: *той, хто посередині, завжди прямує туди, куди прямують ті, що по краях.*

Властивість 6. *Якщо послідовність має скінченну границю, то вона обмежена.*

Розглянемо дії над збіжними послідовностями.

Теорема 4. *Якщо послідовності* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *та* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *є збіжними, то послідовність* $\{x_n \pm y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *також збіжна і*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Теорема 5. *Якщо* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *та* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *збіжні, то послідовність* $\{x_n \cdot y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *також збіжна і*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right).$$

Наслідок. *Сталий множник можемо виносити за знак границі.*

Теорема 6. *Якщо* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *та* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *збіжні, то і* $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *збіжна за умови, що* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$ *і*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Розглянемо тепер деякі теореми про розбіжні послідовності до $\pm\infty$.

1. Якщо послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ має границю $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\pm\infty$, то кажуть, що послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ розбігається до $\pm$ нескінченності $(\pm\infty)$.

2. Якщо послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ обмежена, а $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ – розбігається до $+\infty$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=+\infty$, то

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=+\infty$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=-\infty$.

3. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=+\infty$, то

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=+\infty$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=+\infty$.

4. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$; $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=-\infty$, то

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=+\infty$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=-\infty$.

5. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ $(a\neq 0)$; $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=+\infty$, де $a\in\mathbb{R}$ і не є одним з символів $\pm\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\begin{cases}+\infty, \text{ якщо } a>0,\\ -\infty, \text{ якщо } a<0.\end{cases}$$

6. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ $(a\neq 0)$; $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$ і $y_n>0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\begin{cases}+\infty, \text{ якщо } a>0,\\ -\infty, \text{ якщо } a<0.\end{cases}$$

Деякі часто вживані властивості границь числових послідовностей:

1. Якщо $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ має скінченну границю, то для $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\lim_{n\to\infty}(x_n^{\alpha}) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^{\alpha}.$$

2. Якщо $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ має скінченну границю, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{x_n} = \sqrt[m]{\lim_{n\to\infty} x_n}.$$

3. Якщо $a > 0$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$ і всі значення $x_n > 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \log_a x_n = \log_a \lim_{n\to\infty} x_n.$$

4. Якщо $a > 0$ і $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = a^{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$.

6. Означення монотонної (зростаючої та спадної) послідовності. Теорема про границю монотонної послідовності

Розглянемо числову послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Означення 9. *$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається монотонно зростаючою (спадною), якщо $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n < x_{n+1} < ...$ ($x_1 > x_2 > x_3 > ... > x_n > ...$).*

Означення 10. *$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається неспадною (незростаючою), якщо $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq ... \leq x_n \leq ...$ ($x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq ... \geq x_n \geq ...$).*

Теорема 7. *Якщо послідовність монотонно зростаюча і обмежена зверху, то вона має границю і*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}.$$

Якщо ж послідовність необмежена зверху, то її границя дорівнює $+\infty$.

Аналогічно, якщо монотонно спадна послідовність обмежена знизу, то вона має скінченну границю.

Доведення. Проведемо його для зростаючої послідовності.

Введемо нове поняття. Якщо послідовність (правильно і для множини) обмежена зверху, тобто має скінченну верхню межу M, то одночасно вона має і нескінченну множину верхніх меж. З усіх верхніх меж особливий інтерес представляє найменша, її будемо називати *точною верхньою межею*. Аналогічно, якщо множина обмежена знизу, то найбільшу з усіх нижніх меж назвемо *точною нижньою межею*. Позначається $\sup\{\cdot\}$ та $\inf\{\cdot\}$ від латинських слів supremum – найвищий, infimum – найнижчий. Якщо всі числа x_n деякої послідовності задовольняють нерівність $x_n \leq M$, то і $\sup\{x_n\} \leq M$.

Нехай x_n обмежена зверху, тоді для $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ існує точна верхня межа

$$a = \sup\{x_n\}.$$

Покажемо, що число a є границею числової послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. З властивостей точної верхньої межі маємо по-перше:

$$x_n \leq a.$$

По-друге: для $\forall\ \varepsilon > 0$ існує таке значення x_N змінної x_n, що

$$x_N > a - \varepsilon.$$

Оскільки $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно зростаюча, то для $n > N$ і $x_n \geq x_N$, а отже, тим більше для нього буде виконуватись нерівність

$$x_n > a - \varepsilon.$$

Отже, для значень номера n виконуються нерівності $0 \leq a - x_n < \varepsilon$, так що $|x_n - a| < \varepsilon$, а звідси випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Аналогічно доводиться, коли послідовність є спадною. $\square$

Приклад 1. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Бачимо, що точними межами будуть, відповідно, числа 0 та 1

$$\sup\{x_n\} = 1, \quad \inf\{x_n\} = 0.$$

7. Лема про вкладені відрізки

Нехай монотонно зростаюча послідовність із загальним членом x_n та монотонно спадна – з y_n такі, що

$$x_n < y_n. \tag{8}$$

Якщо їх різниця прямує до нуля, то обидві послідовності мають спільну границю число C, тобто

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = C.$$

Існує інша форма твердження, в якій воно частіше застосовується.

Домовимось, що проміжок $[a', b']$ міститься в $[a, b]$ або вкладений у нього, якщо точки першого проміжка належать другому, або

$$a \le a' < b' \le b.$$

Геометрично зрозуміло таке вкладення.

По-іншому сформулюємо так: нехай є нескінченна послідовність вкладених один в одного проміжків $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ..., так що кожен наступний міститься в попередньому, причому їх довжини прямують до нуля зі зростанням n

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Тоді послідовності кінців a_n і b_n проміжків (з різних боків) прямують до спільної границі

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = C.$$

Зауваження. *Тут послідовності a_n і b_n відіграють роль послідовностей x_n і y_n.*

Приклад 2. Довести, що границею послідовності при $c > 0$, утвореної $x_1 = \sqrt{c}$, $x_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}}$, $x_3 = \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c}}}$, ..., $x_n = \sqrt{c + \sqrt{c + ... + \sqrt{c}}}$, ... є число, яке виражається через $c > 0$.

Бачимо, що $x_{n+1} = \sqrt{c + x_n}$ і послідовність монотонно зростає. У той же час вона обмежена зверху, наприклад числом $\sqrt{c} + 1$. Справді, $x_1 = \sqrt{c} < \sqrt{c} + 1$, а отже і для наступних значень отримаємо

$$x_{n+1} < \sqrt{c + \sqrt{c} + 1} < \sqrt{c + 2\sqrt{c} + 1} = \sqrt{\left(\sqrt{c} + 1\right)^2} = \sqrt{c} + 1.$$

За основною теоремою $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ має скінченну границю a.

Розглянемо $x_{n+1}^2 = c + x_n$ і перейдемо до границі:

$$a^2 = c + a. \tag{9}$$

Це квадратне рівняння відносно a: $a^2 - a - c = 0$, яке має корені різних знаків, але нас цікавить додатний корінь, тому

$$a = \frac{\sqrt{4c + 1} + 1}{2}.$$

Зауваження. *Якщо $c = 2$, то знаходимо, що $a = 2$.*

8. Число Ейлера

Доведемо, що числова послідовність із загальним членом $\left\{x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ є монотонно зростаючою, обмеженою зверху, а значить, має границю.

Для доведення цих фактів скористаємось біномом Ньютона

$$(x + a)^n = C_n^0 x^n a^0 + C_n^1 x^{n-1} a^1 + ... + C_n^k x^{n-k} a^k + ... + C_n^n x^0 a^n,$$

де $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – біноміальні коефіцієнти, причому $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^1 = n$.

Розглянемо

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + ... +$$

$$+ \frac{n(n-1)...(n-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n} \cdot \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times$$

$$\times \left(1 - \frac{2}{n}\right) + ... + \frac{1}{n!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \qquad (10)$$

Якщо від x_n перейти до x_{n+1}, то з'явиться $(n+2)$-ий член (був $(n+1)$ член в розкладі), який є додатним. Тому будь-який множник в дужках вигляду $\left(1 - \frac{s}{n}\right)$ заміниться більшим $\left(1 - \frac{s}{n+1}\right)$, звідки маємо, що

$$x_{n+1} > x_n,$$

тобто послідовність є зростаючою. Покажемо, що вона є обмеженою зверху. З формули (10) бачимо, що вирази в дужках оцінимо зверху одиницею, будемо мати

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} = y_n.$$

А тепер замінимо кожен множник в знаменниках дробів, починаючи з третього, числом 2, отримаємо

$$y_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Відомо, що геометрична прогресія з першим членом $\frac{1}{2}$ і знаменником $\frac{1}{2}$ має суму, меншу за 1, тому $y_n < 3$, а значить і $x_n < 3$ тим більше. Звідси випливає, що послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ має скінченну границю

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \qquad (11)$$

Тут e – відоме *число Ейлера*.

Питання для самоконтролю

1. Дайте означення числової послідовності. Наведіть приклади.

2. Якими способами можна задати числову послідовність?

3. Яка числова послідовність називається обмеженою? Обмеженою зверху? Обмеженою знизу? Наведіть приклади.

4. Яка числова послідовність називається необмеженою? Наведіть приклади.

5. Дайте означення і наведіть приклади нескінченно малих числових послідовностей.

6. Доведіть теорему про суму нескінченно малих числових послідовностей.

7. Доведіть теорему про обмеженість нескінченно малої числової послідовності.

8. Доведіть теорему про добуток нескінченно малої числової послідовності на обмежену.

9. Дайте означення нескінченно великих числових послідовностей. Наведіть приклади.

10. Сформулюйте означення границі числової послідовності. Як вона позначається?

11. Коли числова послідовність називається збіжною чи розбіжною?

12. Сформулюйте властивості збіжних і розбіжних послідовностей.

13. Дайте означення монотонної (зростаючої та спадної) числової послідовності.

14. Доведіть теорему про існування границі у монотонної числової послідовності.

15. Як визначається число Ейлера?

Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Обчислити перші чотири члени числової послідовності $\{x_n\}$.

1.1. $x_n = (-1)^n \frac{3n+2}{n^2+1}$; **1.2.** $x_n = (-1)^{n-1} \frac{n+3}{2n-1}$;

1.3. $x_n = (-1)^{3n+1} \frac{n}{3n+1}$; **1.4.** $x_n = (-1)^{5n-1} \frac{n^2+3}{2n^2-3}$;

1.5. $x_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{2-3n^2}$; **1.6.** $x_n = (-1)^n \frac{2n^2}{3n-1}$;

1.7. $x_n = (-1)^{2-n} \frac{5n-4}{n^2+4}$; **1.8.** $x_n = (-1)^{n+1} \frac{n^3+2}{3n+1}$;

1.9. $x_n = (-1)^n \frac{n^3+2n}{2n^2-1}$; **1.10.** $x_n = (-1)^{n-1} \frac{2n+5}{n^3+2}$;

1.11. $x_n = (-1)^{n+3} \frac{7n-3}{2n+2}$; **1.12.** $x_n = (-1)^{n^2} \frac{n^2}{n^2+2}$;

1.13. $x_n = (-1)^{n+4} \frac{4n^2-2}{n^3}$; **1.14.** $x_n = (-1)^{n^2+1} \frac{n-1}{4n+3}$;

1.15. $x_n = (-1)^n \frac{5n^2+2n+1}{n+3}$; **1.16.** $x_n = (-1)^{n^2+2} \frac{n^2+2}{2n^2+2}$;

1.17. $x_n = (-1)^{n-2} \frac{6-n}{n^2+4}$; **1.18.** $x_n = (-1)^{3n+1} \frac{n^3}{3n+1}$;

1.19. $x_n = (-1)^{n^2} \frac{1}{n^3+2n+1}$; **1.20.** $x_n = (-1)^{n+3} \frac{n+5}{5n^2+1}$;

1.21. $x_n = (-1)^{5n} \frac{1-n^2}{3n+4}$; **1.22.** $x_n = (-1)^{3n+2} \frac{n}{3n+2}$;

1.23. $x_n = (-1)^{n^2-1} \frac{2n+3}{3n^2-n+1}$; **1.24.** $x_n = (-1)^{1-n} \frac{3n^2}{2n+4}$;

1.25. $x_n = (-1)^n \frac{1}{n^2+n+1}$; **1.26.** $x_n = (-1)^{n^2+n} \frac{2n^2+n+1}{n^3}$;

1.27. $x_n = (-1)^{2-n} \frac{1}{n^3+n+3}$; **1.28.** $x_n = (-1)^{n+1} \frac{1-n^2}{n^3+2}$;

1.29. $x_n = (-1)^{n+2} \frac{3n-2}{3n+2}$; **1.30.** $x_n = (-1)^{n^4} \frac{n}{n^3+1}$.

Задача 2. Знайти границі числових послідовностей.

2.1.

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n+2n^2}{5n^2+5}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+6)^3-(n+1)^3}{(2n+3)^2+(n+4)^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3})$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+7n-1}{2n^2+3n-1}\right)^{-n}$.

2.2.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-n^3}{3n^3+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-3)^3-(n+5)^3}{(3n-1)^3+(2n+3)^3}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n(n^5+9)}-\sqrt{(n^4-1)(n^2+5)}}{n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{n+4}$.

2.3.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+n^2-3}{3n^2-6n+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+10)^2+(3n+1)^2}{(n+6)^3-(n+1)^3}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n(n+5)}-n)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}$.

2.4.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n^2}{n^3+n+2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3+(3n+2)^3}{(2n+3)^3-(n-7)^3}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1})$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+21n-7}{2n^2+18n+9}\right)^{2n+1}$.

2.5.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3+3n+3}{n^2+2n+5}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+7)^3-(n+2)^3}{(3n+2)^2+(4n+1)^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n^3+1)(n^2+3)}-\sqrt{(n^4+2)n}}{2\sqrt{n}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{10n-3}{10n-1}\right)^{5n}$.

2.6.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4-n+n^4}{5-n^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3-(2n+3)^3}{(2n+1)^2+(2n+3)^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n^2+1)(n^2+2)}-\sqrt{(n^2-1)(n^2-2)})$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-5n}{3n^2-5n+7}\right)^{1+n}$.

2.7.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-3n^4}{3n^3+2n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-(n-1)^3}{(n+1)^4-n^4}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n^5+1)(n^2-1)}-n\sqrt{(n^4+1)n}}{2\sqrt{n}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{-n^2}$.

2.8.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+4}{n^2+2n+4}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3-(n+1)^3}{(n+3)^2+(n+1)^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2-\sqrt{n^4+1})$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7-n^2}{2n-n^2}\right)^{n^2}$.

2.9.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+5n^2+2}{n^3-1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3-(n+2)^3}{(n+1)^3+(2n+1)^3}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n-1})$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n}{n^2+1}\right)^{2n}$.

2.10.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+n+3}{2n^4+3n-1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2-(n-1)^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3(\sqrt[3]{n^2(n^6+4)}-\sqrt[3]{n^8-1})$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7n^2+18n-15}{7n^2+11n+15}\right)^{2+n}$.

2.11.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^5+n^2}{6n^5+6}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(n\sqrt{n}-\sqrt{n(n+1)(n+2)})$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n+1}$.

2.12.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4}{4n^2-n+11}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3+(n-2)^3}{n^4+2n^2-1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n^2+5)(n^4+2)}-\sqrt{n^6-3n^3+5}}{n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+n+1}{n^3+2}\right)^{2n^2}$.

2.13.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n^2-5n+4}{2n^2+n-1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3-3n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+2}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-4})$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{13n+3}{13n-10}\right)^{n-3}$.

2.14.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+3}{11-4n^4}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3+1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-2})$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+2n+3}{2n^2+2n+1}\right)^{3n^2-7}$.

2.15.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-6n^3}{2n+3n^3+4}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+5)^3-(n+1)^3}{(2n-3)^2+(n+4)^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3})$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+7n+1}{2n^2+2n-1}\right)^{n}$.

2.16.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-n+n^5}{n^2+8}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-3)^3-(n+4)^3}{(3n+1)^3+(2n+3)^3}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n(n^5+1)}-\sqrt{(n^4-1)(n^2+5)}}{n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n+4}\right)^{n-4}$.

2.17.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4+7n^3-3}{8n^3+2n+6}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3-(n-1)^3}{(n-9)^2+(3n+1)^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n(n+2)}-n)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-1}{2n^2+1}\right)^{n^2-1}$.

2.18.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2n}{1+n^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n+1)^3+(3n+2)^3}{(2n-3)^3-(n-1)^3}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3}(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-1})$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+7}{2n^2+9}\right)^{2n+1}$.

2.19.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n^2+n+4}{1-3n-2n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+3)^3-(n+2)^3}{(2n+1)^2+(4n+1)^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3(n^2+3)}-\sqrt{(n^4+1)n}}{\sqrt{n}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{10n+3}{10n+1}\right)^{5n+2}$.

2.20.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3-7n+5}{2n^2+n-11}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+2)^3-(2n-3)^3}{(2n+1)^2+(2n-3)^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2(n^2+2)}-\sqrt{(n^2-3)(n^2-2)})$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-2n}{3n^2-5n+2}\right)^{2+n}$.

2.21.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2-8}{2n^3+4n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-(n+1)^3}{(n-1)^4-n^4}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{(n^5+1)(n^2+1)}-n\sqrt{(n^3+1)n^2}}{\sqrt{n}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{1-n^2}$.

2.22.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n^2+1}{11n+4}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3+(n-1)^3}{n^3+1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^4+5}-\sqrt{n^4-3})$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-n-1}{2n^2+2n+4}\right)^{n^2-7}$.

2.23.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n^2+2n+3}{7-n+2n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-2)^3}{(n+2)^2-(n-2)^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} n^3(\sqrt{n^6+4}-\sqrt{n^6-1})$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-2n+1}{3n^2+3n-1}\right)^{n+2}$.

2.24.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n^4+8n}{1-2n^2+4n^4}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n+2)^3}{(n+3)^2+(2n+2)^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(n\sqrt{n+1}-\sqrt{n(n+3)(n+2)})$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-4}{2n+1}\right)^{n+3}$.

2.25.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-2n-n^2}{3n^3+2n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+3)^3+(n-3)^3}{2n^4+4n^2-8}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2(n^4+1)}-\sqrt{n^6+n^3+3}}{n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+3n+1}{n^3+3}\right)^{2n^2-1}$.

2.26.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n-8n^3}{n^4+12n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3+(n-1)^3}{n^3-2n+7}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+2}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-4})$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+3}{3n-6}\right)^{n+3}$.

2.27.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^3-7n^2}{6n^2+4n+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3+(n-3)^3}{3n^3+n+1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^3+3}-\sqrt{n^3-3})$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+4n+3}{2n^2+n}\right)^{n^2-5}$.

2.28.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7+3n+n^2}{4n^2-3n+9}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)^3-(n+1)^3}{(2n-3)^2+(n-1)^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4})$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4n+7}{n^2+2n-1}\right)^{4n}$.

2.29.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4-n^5}{5+n+n^5}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-(n+1)^3}{(3n+3)^2+(n-1)^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2-\sqrt{n^4-4})$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7-3n^2}{2n-3n^2}\right)^{5+n}$.

2.30.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9n^2-n+8}{2n-3n^2+5}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)^3+(n+1)^3}{2n^3-5n-3}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3}(\sqrt{n^3+5}-\sqrt{n^3-3})$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{n^2+3n-2}\right)^{n-1}$.

Тема 2. Основні поняття про функцію. Диференціальне числення функції однієї змінної

1. Границя функції

Розглянемо функцію $y = f(x)$, яка задана на X, і точку a, яка може і не належати цій множині, але в довільному її околі міститься нескінченно багато точок множини X.

Означення 1. *Число b називається границею функції $y = f(x)$ в точці $x = a$ або при $x \to a$, якщо для довільної послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ тих значень аргументів, що $x_n \to a$ при $n \to \infty$ ($x_n \neq a$), відповідна послідовність значень функції $f(x_n) \to b$ і записують*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Це означення границі функції на "мові послідовностей".

Означення 2. *Число b називається границею функції $f(x)$ при $x \to a$, якщо для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$, що для $\forall\ x$, для яких справджується нерівність $0 < |x - a| < \delta$, виконується нерівність*

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Це означення границі функції на мові "$\varepsilon - \delta$".

Означення 3. *Число b називається границею функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, якщо для $\forall\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, що $x_n \to +\infty$ (нескінченно велика), $f(x_n) \to b$ або $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$.*

Означення 4. *Функція $f(x)$ при $x \to \pm\infty$ має границю $\pm\infty$, якщо для $\forall$ числа $E > 0$ знайдеться таке число $\Delta > 0$, що для $\forall x$, для яких $|x| > \Delta$, виконується нерівність*

$$|f(x)| > E.$$

Теорема. *Нехай $f(x)$ і $g(x)$ – задані на множині X функції, які в точці a мають скінченні границі $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$,*

тоді будуть визначені границі функцій $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ *і* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *в точці* $x = a$, *причому*

1) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x) = b \pm c;$

2) $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = b \cdot c;$

3) $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right) = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{b}{c}$, $c \neq 0$.

Доведення цих фактів варто провести на "мові послідовностей": вибрати довільну послідовність значень аргументів $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, яка прямує до a, але $x_n \neq a$. Тоді згідно з умовою $f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} b$, $g(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} c$, а далі скористатися відомими теоремами про границю суми, різниці, добутку, частки збіжних послідовностей.

Іноді доводиться розглядати границі, коли $x \to a$ або тільки зліва, або тільки справа від точки $x = a$. Тоді мова іде про однобічні границі.

Означення 5. *Число* b *називається лівобічною границею функції* $y = f(x)$ *в точці* $x = a$, *якщо для* $\forall$ *як завгодно малого* $\varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, *що для всіх* x, *для яких* $0 < a - x < \delta$ *виконується нерівність*

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Означення 6. *Число* b *називається правобічною границею функції* $y = f(x)$ *в точці* $x = a$, *якщо для* $\forall$ *як завгодно малого* $\varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, *що для всіх* x, *для яких* $0 < x - a < \delta$ *виконується нерівність*

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

2. Нескінченно малі функції

Означення 7. *Функція* $y = f(x)$ *називається нескінченно малою в точці* a, *якщо* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Приклад 1. Функція $\varphi(x) = (x-a)^m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, є нескінченно малою в точці $x = a$, справді

$$\lim_{x \to a}(x-a)^m = 0.$$

Дві нескінченно малі в точці $x = a$ функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ можна порівнювати між собою. Кажуть, що *нескінченно мала* $\alpha(x)$ *має вищий порядок малості в точці* $x = a$, *ніж* $\beta(x)$, якщо $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ і позначають $\alpha(x) = o(\beta(x))$ (читається і пишеться "о маленьке" від виразу, який стоїть в дужках після "о маленького").

Дві нескінченно малі функції мають *однаковий порядок малості*, якщо $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = b \neq 0$. Дві нескінченно малі функції є *еквівалентними* $(\alpha(x) \sim \beta(x))$ при $x \to a$, якщо

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Якщо $\alpha(x) \sim \beta(x)$, то записують $\alpha(x) = O(\beta(x))$, де $O(\beta(x))$ – "O велике".

Приклад 2. Нехай $\alpha(x) = x^2 + 3x$; $\beta(x) = 5x^2 + 6x$, $x \to 0$.

Розглянемо $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 3x}{5x^2 + 6x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(x+3)}{x(5x+6)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$. Тут бачимо, що $x^2 + 3x \to 0$ при $x \to 0$ і $5x^2 + 6x \to 0$ при $x \to 0$. Отже, вони нескінченно малі при $x \to 0$.

Оскільки границя частки дорівнює $\dfrac{1}{2}$, то величини мають однаковий порядок малості при $x \to 0$.

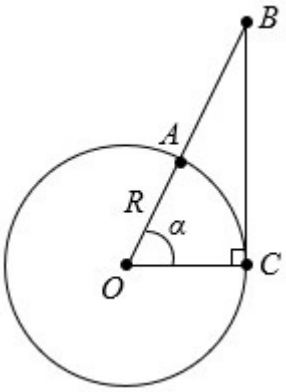
3. Перша чудова границя

Розглянемо функції $\sin x$ та x. Вони є нескінченно малими в точці $x = 0$. Доведемо, що ці функції є еквівалентними нескінченно

малими в точці $x = 0$, тобто

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{1}$$

Доведення. Розглянемо коло радіуса R з центром в точці O і трикутник OBC.



Нехай $OA = R$. Очевидними є нерівності: площа $\triangle AOC <$ площа сектора $AOC <$ площа $\triangle OBC \Rightarrow \frac{1}{2}R^2 \sin\alpha < \frac{1}{2}R^2\alpha < \frac{1}{2}R^2\mathrm{tg}\alpha \Rightarrow \sin\alpha < \alpha < \mathrm{tg}\alpha$.

Розглянемо нерівність $\sin\alpha < \alpha$ або $\frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1$. Перейдемо до границі при $x \to 0$ і отримаємо $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \le 1$. Тепер розглянемо $\alpha < \mathrm{tg}\alpha$ або $\alpha < \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Поділимо на $\sin\alpha$, отримаємо $\frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}$ або $\frac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha$.

Перейшовши до границі при $\alpha \to 0$, отримаємо

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} \ge 1.$$

Отже, $1 \le \lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} \le 1$, тому залишається тільки, що

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1.$$

Зауваження. *При доведенні даного випадку ми скористались граничним переходом в нерівності і він здійснюється аналогічно, як і для послідовності. Якщо $f(x) \le g(x)$ при $x \to a$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) \le \lim\limits_{x\to a} g(x)$. Відмітимо, що раніше вже отримали значення 2-ої чудової границі*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e; \quad \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{2}$$

4. Нескінченно великі функції

Функція $A(x)$ називається нескінченно великою в точці $x = a$, якщо $\lim\limits_{x\to a} A(x) = \infty$. Можна говорити про прямування $A(x)$ до $\pm\infty$, а також про нескінченно великі зліва і справа, тобто $\lim\limits_{x\to a+0} A(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to a-0} A(x) = -\infty$.

Аналогічно, як і для нескінченно малих величин, можна порівнювати нескінченно великі в деякій точці функції.

Нехай $A(x)$ і $B(x)$ нескінченно великі в точці $x = a$, тобто $\lim\limits_{x\to a} A(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to a} B(x) = \infty$.

Якщо $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{A(x)}{B(x)} = \infty$, то величина $A(x)$ має вищий порядок більшості, ніж $B(x)$.

Величини $A(x)$ і $B(x)$ мають однаковий порядок більшості, якщо $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{A(x)}{B(x)} = b \neq 0$, і вони будуть еквівалентними в точці $x = a$, якщо $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{A(x)}{B(x)} = 1$.

Приклад 3. Нехай $A(x) = 3x^2 + 4x + 1$; $B(x) = 5x^4 + 6x + 200$.

Якщо $x \to \infty$, то $A(x) \to \infty$ і $B(x) \to \infty$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{A(x)}{B(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 + 4x + 1}{5x^4 + 6x + 200} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(3 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^4\left(5 + \frac{6}{x} + \frac{200}{x^4}\right)} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow B(x)$ має вищий порядок більшості, ніж $A(x)$.

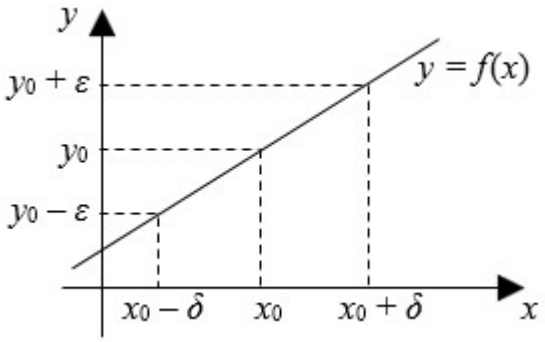
5. Неперервність функції в точці

Означення 8. *Функція $f(x)$ називається неперервною в точці $x = x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ (граничне значення дорівнює значенню функції в точці). З означення випливає, що функція має бути: 1) визначеною в точці x_0; 2) має існувати скінченна границя при $x \to x_0$; 3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Означення 9. *Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall\ x$, для яких виконується $0 < |x - x_0| < \delta$, для відповідних значень функції виконується нерівність:*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Графічно це виглядає так ($y_0 = f(x_0)$):



Означення 10. *Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо нескінченно малому приросту аргумента $\Delta x \neq 0$ відповідатиме нескінченно малий приріст функції $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Функція $y = f(x)$ неперервна, якщо з $\Delta x \to 0$ випливає, що $\Delta y \to 0$.*

Означення 11. *Функція називається неперервною зліва (справа), якщо* $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$ $\left(\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0) \right)$.

Правильним є твердження: для того, щоб функція $y = f(x)$ була неперервною в точці x_0, необхідно і достатньо, щоб $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$. Якщо функція задана на деякій множині X і є неперервною у кожній точці цієї множини, то кажуть, що функція $y = f(x)$ неперервна на всій множині X.

Приклад 4. З'ясувати, чи є неперервною

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

в точці $x = 0$.

Розв'язування. Знайдемо $f(0-0) = \lim\limits_{x\to 0-0}(-1) = -1$; $f(0+0) = \lim\limits_{x\to 0+0} 1 = 1$. Бачимо, що однобічні границі є різними, тобто $f(0-0) \neq f(0+0)$, а отже, функція не має границі в точці $x = 0$ і не є неперервною в точці $x = 0$.

6. Арифметичні дії над неперервними функціями

Нехай $f(x)$ та $g(x)$ неперервні в точці $x = 0$, тобто $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$, то

$$\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0).$$

Теорема 1. *Сума скінченного числа функцій, неперервних в точці a, є функція, неперервна в точці a.*

Теорема 2. *Добуток скінченного числа неперервних функцій в точці a є функція, неперервна в цій точці.*

Теорема 3. *Відношення двох функцій, неперервних в точці a, є функція, неперервна в цій точці, якщо значення функції, яка стоїть у знаменнику, відмінне від 0 в точці a.*

Приклад 5. $f(x) = x^n = x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$ – добуток n неперервних функцій. Тут неперервність випливає з неперервності функції $y = x$.

Очевидно, що і $f(x) = C \cdot x^n$, де $C = const$, неперервна.

Приклад 6. $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ – неперервна на всій осі.

Приклад 7. $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени, неперервна в кожній точці області визначення.

7. Класифікація точок розриву

Якщо $f(x)$ не є неперервною в точці x_0, то кажуть, що вона *має розрив у цій точці*. Щоб класифікувати точки розриву, по-

трібно порівняти $f(x_0)$, $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ та $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

1) Якщо $\exists$ скінченні границі зліва і справа від точки x_0, але вони не рівні між собою, то кажуть, що x_0 є *точкою розриву I роду* (функція робить стрибок $h=f(x_0+0)-f(x_0-0)$).

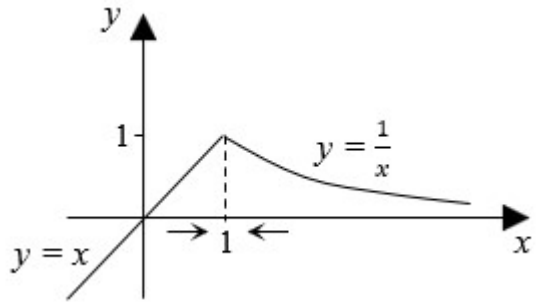
2) Якщо хоча б одна з різносторонніх границь не існує або $\pm\infty$, то *розрив II-го роду* в x_0.

3) Якщо $\exists$ границя зліва і границя справа та вони рівні між собою і не дорівнюють $f(x_0)$ (або $f(x_0)$ не існує), то в точці x_0 маємо *усувний розрив*.

Приклад 8. Дослідити функцію на неперервність в точці $x=1$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\geq 1,\\ x, & x<1.\end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо



$f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0} x=1;$

$f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{x}=1$

і $f(1)=1$, тому $f(x)$ неперервна в $x_0=1$.

Приклад 9. Довести, що в $x_0=0$ функція $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ має усувний розрив.

Розв'язання. Оскільки

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

але $f(0)$ не існує, тому $x_0=0$ – точка усувного розриву.

Довизначена функція

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$$

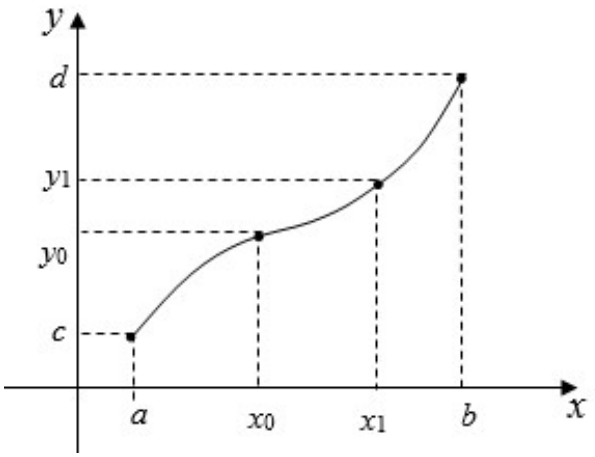
є неперервною в точці $x_0 = 0$.

Приклад 10. Для функції $f(x) = \dfrac{1}{x}$ маємо $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x} = +\infty \Rightarrow$ розрив II-го роду в точці 0, $f(0)$ – не існує.

8. Теореми про неперервні функції

Теорема 1. *(про неперервність монотонної функції). Якщо множина значень монотонно зростаючої функції $y = f(x)$, яких вона набуває, коли $x \in X$, міститься в множині Y і суцільно її заповнює, то функція $y = f(x)$ є неперервною.*

Доведення.



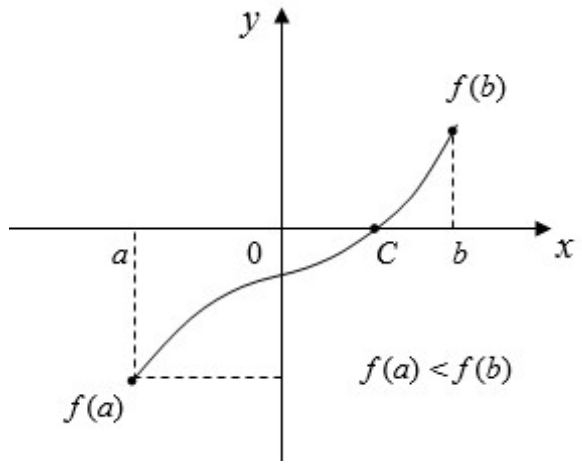
Візьмемо довільну точку x_0, $x_0 \in X = [a, b]$, $x_0 \neq b$. Оскільки x_0 не співпадає з b, то йому відповідає значення функції $y_0 = f(x_0)$ і $y_0 \neq d$. Виберемо $\varepsilon > 0$ достатньо малим, щоб $y_1 = y_0 + \varepsilon < d$. На $[a, b]$ існує точка x_1 така, що $x_1 > x_0$ і якій відповідає значення $y_1 = f(x_1)$. Нехай $x_1 = x_0 + \delta$, $y_1 = y_0 + \varepsilon$ ($\delta > 0, \varepsilon > 0$), тоді $x_1 - x_0 = \delta$, $y_1 - y_0 = \varepsilon$. Якщо δ буде достатньо мале число, то йому відповідатиме мале ε: $f(x_1) - f(x_0) = \varepsilon$, а значить, згідно з означенням 10 пункту 5, функція $f(x)$ є неперервною в довільній точці x_0. $\square$

Теорема 2. *(Перша теорема Больцано–Коші). Якщо функція $y = f(x)$ задана і неперервна на $[a, b]$ ($y = f(x) \in C[a, b]$), крім того, $f(a) < 0$, а $f(b) > 0$ (набуває різних знаків на кінцях відрізка). Тоді існує точка $c \in [a, b]$, у якій функція дорівнюватиме нулеві.*

Доведення. Поділимо $[a, b]$ навпіл. Отримаємо два відрізки:

$\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$ і $\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$. З цих двох відрізків виберемо той, на кінцях якого функція набуває різних знаків (див. рисунок далі). Позначимо $\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right] = [a_1, b_1]$. Цей процес продовжуватимемо далі.

Якщо трапиться так, що в результаті поділу $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = 0$, то теорема доведена.



Далі продовжимо за тим же принципом. Ділимо $[a_1, b_1]$, отримаємо $[a_2, b_2]$, якщо не виконується зауваження, то ділимо далі і на n-ному кроці дістанемо довжину відрізка $|b_n - a_n| \to 0$, $n \to \infty$.

Скористаємось лемою про вкладені відрізки, адже в результаті поділу ми отримали відрізки, які вкладаються один в один. Послідовність лівих кінців $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ є монотонно зростаючою, послідовність правих кінців $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ є монотонно спадною. А значить, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$. Крім того, $f(b_n) > 0$, а $f(a_n) < 0$. Перейшовши до границі неперервної функції, отримаємо одночасно

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c) \geq 0 \quad i \quad \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c) \leq 0.$$

Отже, справді, $f(c) = 0$. $\square$

Зауваження. *Умова неперервності функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ дуже суттєва: функція, яка має розрив хоч в одній точці, може перейти з від'ємного значення в додатне і не перетворюючись в нуль.*

Теорема 3. *(Друга теорема Больцано–Коші). Нехай $y = f(x)$*

визначена і неперервна на деякому відрізку $[a, b]$ *і* $f(a) = A$, $f(b) = B$, *тоді, яке б не було* $C \in (A, B)$, $\exists c \in (a, b)$, *що* $f(c) = C$.

Теорема 4. *(про неперервність оберненої функції). Нехай* $y = f(x)$ *неперервна і монотонно зростає (монотонно спадає) на деякому проміжку* $[a, b]$. *Тоді для* $y \in [c, d]$, *де* $c = f(a)$, *а* $d = f(b)$, *існує обернена однозначна функція* $x = g(y)$, *яка є неперервною і монотонно зростає (спадає).*

Роз'яснення: якщо кожному $x \in X$ ставиться за правилом f значення $y \in Y$, то кажуть, що задана функція $y = f(x)$. При цьому кожному x ставиться єдине значення y. Якщо різним x буде ставитись у відповідність різні y, то отримаємо однозначне відображення множини X на Y і навпаки. Тобто можна говорити про певне правило f^{-1}, яке кожному y ставитиме у відповідність єдине значення x. Таке правило будемо називати функцією, оберненою до даної.

Теорема 5. *(Перша теорема Вейєрштрасса). Якщо* $f(x)$ *визначена і неперервна на* $[a, b]$, *тоді існують числа* m *і* M, *що* $m \le f(x) \le M$ *для* $\forall x \in [a, b]$.

Теорема 6. *(Друга теорема Вейєрштрасса). Якщо функція визначена і неперервна на* $[a, b]$, *то на цьому відрізку вона досягає своєї точної нижньої і верхньої граней (меж), тобто* $m_1 \le f(x) \le M_1$, *де* $m_1 = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $M_1 = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Зауваження. *Усі теореми містять формулювання, що* $f(x)$ *є визначеною, а значить, набуває скінченних значень на* $[a, b]$. *(Якщо* $\pm\infty$ *або не існує значень в точці, то функція не визначена).*

Щоб сформулювати наступну теорему введено поняття рівномірної неперервності функції.

Нехай $f(x)$ визначена і неперервна на X. Поставимо питання: чи при заданому ε існує таке δ, яке "годилося" б для всіх точок

$x_0 \in X$?

Означення 1. *Якщо для* $\forall \varepsilon > 0$ *знайдеться* $\delta > 0$*, що з того, що* $|x - x_0| < \delta$*, випливає* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$*, де б не знаходились точки* x_0 *і* x *в межах проміжка* X*, то* $f(x)$ *рівномірно неперервна на* X*. У цьому випадку число* δ *залежить тільки від* ε *і може бути вказаним до вибору* x_0*;* δ *– годиться для всіх* x_0 *одночасно.*

Приклад 1. (ілюструє, що неперервність функції у всіх точках проміжка не означає рівномірну неперервність на цьому проміжку).

Розв'язання. Нехай $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, причому $x \in \left(0; \dfrac{2}{\pi}\right]$. Бачимо, що в кожній точці проміжка функція є неперервною. Покладемо $x_0 = \dfrac{2}{(2n+1)\pi}$, $x = \dfrac{1}{n\pi}$, де $n \in \mathbb{N}$. Тоді $f(x_0) = \sin\left(\dfrac{2}{(2n+1)\pi}\right)^{-1} = \sin\dfrac{(2n+1)\pi}{2} = (-1)^{n-1}$, $f(x) = \sin\dfrac{1}{\frac{1}{n\pi}} = \sin n\pi = 0$. Розглянемо $|f(x) - f(x_0)| = |0 + (-1)^{n-1}| = 1$, не дивлячись на те, що $|x - x_0| = \left|\dfrac{1}{n\pi} - \dfrac{2}{(2n+1)\pi}\right| = \dfrac{2n+1-2n}{n(2n+1)\pi} = \dfrac{1}{n(2n+1)\pi}$. Бачимо, що $\dfrac{1}{n(2n+1)\pi} \to 0$ при $n \to \infty$ і може бути як завгодно малим. Але при $\varepsilon = 1$ не можемо знайти δ, яке б "годилось" для всіх точок x_0 з $\left(0; \dfrac{2}{\pi}\right]$, хоча таке δ існує для кожного окремого значення x з огляду на неперервність функції на $\left(0; \dfrac{2}{\pi}\right]$.

Означення 1. *Різниця між точною верхньою і нижньою гранями неперервної на* $[a, b]$ *функції називається коливанням функції на відрізку* ($K = M_1 - m_1$).

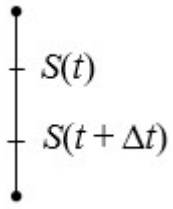
Теорема 7. *(теорема Кантора про рівномірну неперервність функції). Якщо* $f(x)$ *визначена і неперервна на замкнутому про-*

міжку $[a, b]$, *то вона рівномірно неперервна на цьому проміжку.*

Наслідок. *Нехай* $f(x)$ *визначена і неперервна на* $[a, b]$. *Тоді по заданому* $\varepsilon > 0$ *знайдеться таке* $\delta > 0$, *що якщо проміжок довільно розбити на частинні проміжки, з довжинами* $< \delta$, *то в кожному з них коливання функції буде менше* ε.

9. Похідна функції

1) *Задача про миттєву швидкість.* Розглянемо падіння тіла під дією сили тяжіння без врахування сили опору. Нехай $S(t) = g\dfrac{t^2}{2}$. Потрібно знайти швидкість тіла в момент часу t.

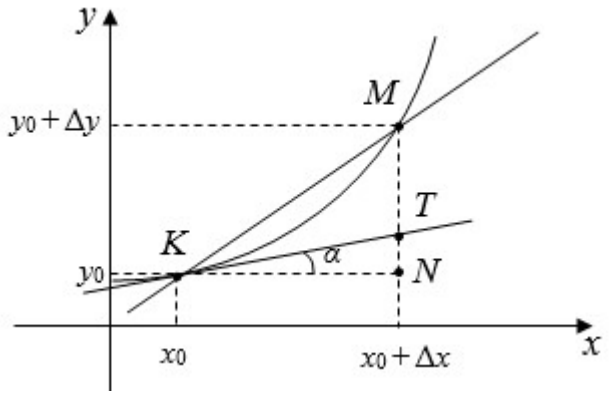


Відомо, що $v_{\text{сер.}} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{g}{2}\left[\dfrac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t}\right] = \dfrac{g}{2}\left[\dfrac{t^2 + 2\Delta t \cdot t + \Delta t^2 - t^2}{\Delta t}\right] = \dfrac{g}{2}\left[\dfrac{2\Delta t \cdot t + \Delta t^2}{\Delta t}\right] = gt + g\dfrac{\Delta t}{2}.$

$$v_{\text{мит.}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(gt + g\frac{\Delta t}{2} \right) = \lim_{\Delta t \to 0} gt + \lim_{\Delta t \to 0} g\frac{\Delta t}{2} = gt.$$

Отже, $v(t) = S'(t) = gt$.

2) *Задача про дотичну до заданої кривої.*



Нехай задано графік функції $y = f(x)$. Потрібно провести дотичну до графіка функції в точці x_0 і знайти кут α між дотичною KT і додатним напрямком осі Ox ($\operatorname{tg}\alpha$). Для побудови дотичної в точці $K\,(x_0, y_0)$ проведемо січну KM

(має дві спільні точки з графіком $f(x)$). Граничне положення січної KM при $M \to K$ буде дотичною до графіка функції в точці K. Знайдемо кут α. З $\triangle KMN$: $\operatorname{tg}\widehat{MKN} = \dfrac{MN}{KN}$, а $\operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{M\to K} \operatorname{tg}\widehat{MKN}$. З іншого боку бачимо, що $\operatorname{tg}\alpha = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0)$. Приходимо до поняття похідної функції в точці.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, визначену на деякій множині X. Покладемо $x = x_0$, надамо приросту $\Delta x \neq 0$ так, що $x_0 + \Delta x \in X$.

Означення. *Похідною $y' = f'(x_0)$ функції $y = f(x)$ в точці x_0 називаємо скінченну границю відношення приросту функції до приросту її аргумента за умови, що приріст аргумента прямує до нуля:*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{3}$$

Похідні позначаються y' або $f'(x_0)$; $\dfrac{dy}{dx}$ або $\dfrac{df(x_0)}{dx}$, $\mathcal{D}y$ або $\mathcal{D}f(x_0)$.

Таблиця похідних основних елементарних функцій

1) $y = C$; $y' = 0$; $C \in \mathbb{R}$;
2) $y = x^\alpha$; $y' = \alpha x^{\alpha-1}$;
3) $y = \sin x$; $y' = \cos x$;
4) $y = \cos x$; $y' = -\sin x$;
5) $y = a^x$; $y' = a^x \ln a$; $\left((e^x)' = e^x\right)$;
6) $y = \operatorname{tg} x$; $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
7) $y = \operatorname{ctg} x$; $y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
8) $y = \arcsin x$; $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$;
9) $y = \arccos x$; $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$;

10) $y = \operatorname{arctg} x$; $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

11) $y = \operatorname{arcctg} x$; $y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

12) $y = \log_a x$; $y' = \dfrac{1}{x}\log_a e = \dfrac{1}{x \ln a}$; $\left(y = \ln x; y' = \dfrac{1}{x}\right)$.

Покажемо, що 1) $(\sin x)' = \cos x$, використовуючи означення і відомі границі

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2} \cdot 2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot 1 =$$

$$= \cos x.$$

2) $(a^x)' = a^x \ln a$ – ?

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Основні правила диференціювання

1) $(Cf(x))' = C \cdot f'(x)$ – з-під знаку похідної можна виносити сталу.

2) Нехай $u = u(x)$, $v = v(x)$, тоді $(u \pm v)' = u' \pm v'$ – похідна суми і різниці дорівнює сумі і різниці похідних.

3) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ – похідна добутку.

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ – похідна частки, $v \neq 0$.

Зауваження 1. *Якщо маємо добуток n множників, кожен з яких має похідну, то*

$$(u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n)' = u_1' \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n + u_1 \cdot u_2' \cdot \ldots \cdot u_n + \ldots + u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n'.$$

Доведемо правило 4. Розглянемо

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} \right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot v(x+\Delta x)\cdot v(x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x+\Delta x) + u(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x \cdot v(x+\Delta x)\cdot v(x)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{v(x)\,(u(x+\Delta x) - u(x))}{\Delta x} - \frac{u(x)\,(v(x+\Delta x) - v(x))}{\Delta x} \right) \times$$

$$\times \frac{1}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)} = \left(v(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} - \right.$$

$$\left. - u(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)} =$$

$$= \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Проілюструємо це правило.

3) $(\mathrm{tg}x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

Теорема (про похідну оберненої функції). *Нехай $y = f(x)$ визначена на $[a, b]$, неперервна, монотонно зростає і має похідну $f'(x_0)$ в кожній точці $x_0 \in (a, b)$. Тоді функція має обернену функцію $x = g(y)$, яка в кожній точці y_0 має похідну $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.*

Доведення. Умови теореми гарантують існування оберненої функції (див. пункт 8, теорема 4). Якщо будемо шукати $g'(y_0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$. Функція $f(x)$ є неперервною, а отже, якщо $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$.

Обчислимо похідні деяких обернених функцій, наприклад,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \ \square$$

Випишемо похідну складеної функції, якщо відомо похідні функцій, що утворюють складену.

Теорема (про похідну складеної функції). *Нехай*

1) $u = \varphi(x)$ має в деякій точці x_0 похідну $u'_x = \varphi'(x_0)$;

2) функція $y = f(u)$ має похідну в точці $u_0 = \varphi(x_0)$ і вона відповідає $y'_u = f'(u)$. Тоді складена функція $y = f(\varphi(x))$ в точці x_0 має похідну, яка дорівнює добутку похідних функцій $f(u)$ та $\varphi(x)$

$$[f(\varphi(x_0))]' = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0), \tag{4}$$

або коротше

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \tag{5}$$

Таблиця похідних для складених функцій від $u = u(x)$

1) $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$;

2) $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$; $\left((e^u)' = e^u \cdot u'\right)$;

3) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

4) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

5) $(\mathrm{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;

6) $(\mathrm{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;

7) $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

8) $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

9) $(\mathrm{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

10) $(\mathrm{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

11) $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u} \log_a e \cdot u'$; $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$.

Приклад 1. $y = \sin ax$, y' - ?

Розв'язання. Нехай $u = ax$, тоді $y = \sin u$. З формули 3) маємо

$$y' = (\sin u)' = \cos u \cdot u' = \cos ax \cdot (ax)' = a \cos ax.$$

Приклад 2. $y = \ln \sin x$, y' - ?

Розв'язання. Нехай $u = \sin x$, тоді $y = \ln u$. З формули 11)

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x') = \frac{\cos x}{\sin x} = \text{ctg}x.$$

Приклад 3. $y = e^{x^2}$, y' - ?

Розв'язання. Нехай $u = x^2$, тоді $y = e^u$. З формули 2)

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x^2} \cdot \left(x^2\right)' = 2x \cdot e^{x^2}.$$

Приклад 4. $y = \cos^3 4x$; y' – ?

Розв'язання. Візьмемо $u = \cos 4x$, тоді $y = u^3$. З 1) можемо знайти, що

$$y' = \left(u^3\right)' = 3u^2 \cdot u' = 3\cos^2 4x \cdot (\cos 4x)' =$$

$$= 3\cos^2 4x \cdot (-4\sin 4x) = -12\cos^2 4x \cdot \sin 4x.$$

Приклад 5. $y = \sqrt{\text{tg}\frac{x}{2}}$.

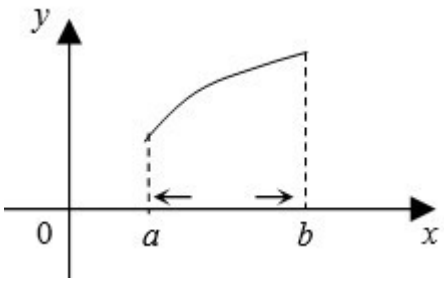
Розв'язання. Нехай $\text{tg}\frac{x}{2} = u$, тоді $y = u^{\frac{1}{2}}$. Згідно з 1)

$$y' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot u' = \frac{1}{2} \cdot \left(\text{tg}\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\text{tg}\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\text{tg}\frac{x}{2}}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}x\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\text{tg}\frac{x}{2}}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\sqrt{\text{tg}\frac{x}{2}}}, \text{ де } \sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

Геометричний зміст похідної функції в точці. Із задачі про дотичну до графіка функції в точці випливає, що похідна $y = f(x)$ в точці x_0 дорівнює $\text{tg}\alpha$, де α – кут між дотичною до графіка функції в точці x_0 та додатним напрямком осі OX, тобто $f'(x_0)$ – кутовий коефіцієнт дотичної.

Односторонні похідні. Нехай $y = f(x)$ визначена на $[a, b]$. Нехай її графік має вигляд



Означення похідної, яке ми давали раніше передбачало, що x_0 – внутрішня точка з $[a, b]$. Виявляється, що в точці $x = a$ можна дати означення правосторонньої похідної, а в точці $x = b$ – лівосторонньої похідної:

$$f'(a+0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x};$$

$$f'(b-0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(b) - f(b-\Delta x)}{\Delta x}.$$

Може трапитись, що і для внутрішньої точки існують тільки односторонні похідні.

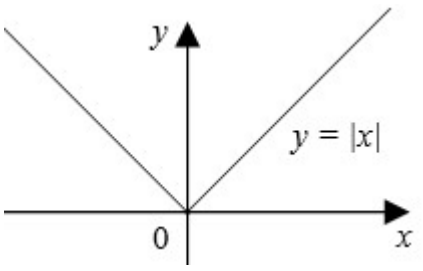
Приклад. Знайти односторонні похідні функції $y = |x|$ в точці $x = 0$.

Розв'язання. Розглянемо $x = 0$ і приріст функції $\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = f(\Delta x) = |\Delta x|$.

1) Якщо $\Delta x > 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \ (\Delta y = \Delta x).$$

2) Якщо $\Delta x < 0$, то $\Delta y = -\Delta x$ і $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -1$.



Висновок: функція $y = |x|$ не має похідної в точці $x = 0$, оскільки лівостороння похідна дорівнює (-1), а правостороння дорівнює 1, вони не рівні. Функція не є гладкою в точці $x = 0$.

10. Диференціал функції

Розглянемо $y = f(x)$, $x \in X$ і нехай на цій множині функція є визначеною, неперервною, в кожній точці має похідну. Нас буде цікавити питання, коли приріст Δy можна подати у вигляді

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \tag{6}$$

де A – деяка стала, $o(\Delta x)$ – величина вищого порядку малості, ніж Δx. Якщо $A \neq 0$, то з формули (6) випливає, що Δy та Δx мають однаковий порядок малості.

Означення. *Якщо в точці x приріст функції зображається формулою (6), то функція називається диференційовною в точці x.*

Правильним є твердження.

Твердження. *Для того, щоб $y = f(x)$ була диференційовною в точці x_0 необхідно і достатньо, щоб в цій точці $y = f(x)$ мала скінченну похідну.*

Доведення. Необхідність. Нехай $y = f(x)$ є диференційовною в точці x_0. Доведемо, що в цій точці вона має скінченну похідну. Перепишемо (6) у вигляді ($: \Delta x$)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

і перейдемо до границі

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right) = A,$$

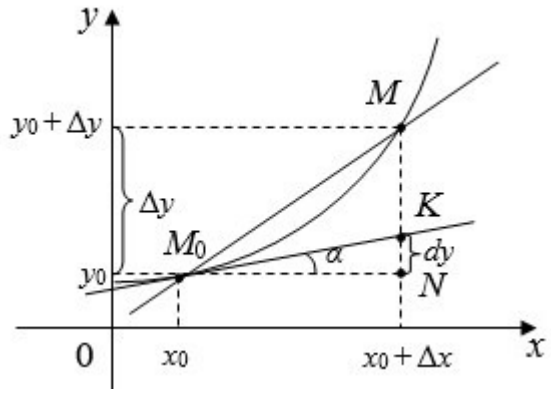
отже, $f'(x_0) = A$, тобто $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$.

Достатність. Нехай існує скінченна похідна в точці x_0, тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Тоді $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$ (α – нескінченна мала), $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$, а отже, функція є диференційовною. $\square$

Означення. *Головна (лінійна відносно Δx) частина приросту функції (формула (6)) називається диференціалом функції і позначається*

$$dy = f'(x)\Delta x. \tag{7}$$

З геометричної точки зору поняття диференціала розглянемо з рисунка.



Нехай задано графік функції $y = f(x)$. Точці x_0 надамо приріст $\Delta x > 0$. Проведемо січну M_0M, M_0K – дотична до графіка функції в точці (x_0, y_0). З ΔM_0KN: $KN = \Delta x \cdot \mathrm{tg}\alpha$ (бо $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{KN}{MN}$), тобто, з викладеного раніше, $KN = f'(x_0) \cdot \Delta x = dy$. Отже, *$dy$ з геометричної точки зору визначає приріст ординати дотичної*, а сам приріст функції Δy є відрізок MN.

Знайдемо диференціал незалежної змінної x. Для цього розглянемо $y = x$, $dy = x' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x = dx$. Отже, приріст аргумента Δx, що фігурує в (7), є dx і тому перепишемо (7)

$$dy = f'(x)dx. \tag{8}$$

Висновок. Диференціал функції – це похідна цієї функції в точці x, помножена на диференціал незалежної змінної. З (8) маємо

$$\frac{dy}{dx} = f'(x). \tag{9}$$

Бачимо, що похідна дорівнює частці диференціалів (позначення похідної за Лейбніцом).

Формула (8) дозволяє записати таблицю диференціалів основних елементарних функцій.

Таблиця диференціалів основних елементарних функцій

1) $dC = 0 \cdot dx$, $C = \mathrm{const}$;
2) $d\left(x^\alpha\right) = \alpha x^{\alpha-1}dx$;
3) $d\left(a^x\right) = a^x \ln a dx$; $de^x = e^x dx$;
4) $d\left(\log_a x\right) = \dfrac{1}{x \ln a}dx$;
5) $d(\sin x) = \cos x dx$;

6) $d(\cos x) = -\sin x dx$;

7) $d(\mathrm{tg}x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} dx$;

8) $d(\mathrm{ctg}x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} dx$;

9) $d(\arcsin x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

10) $d(\arccos x) = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

11) $d(\mathrm{arctg}x) = \dfrac{dx}{1+x^2}$;

12) $d(\mathrm{arcctg}x) = -\dfrac{dx}{1+x^2}$.

З формули (8) встановимо і правила диференціювання

1) $d(Cf(x)) = Cdf(x)$;

2) $d(u \pm v) = du \pm dv$;

3) $d(u \cdot v) = v \cdot du - u \cdot dv$;

4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$.

Інваріантність форми першого диференціала – це незмінність його форми (8) незалежно від того, чи функція y є складеною чи елементарною, тобто для функції $y = f(u)$, а $u = u(x)$

$$y' = f'(u) \cdot u'(x),$$

$$dy = f'(u) \cdot u'(x)dx = f'(u)du.$$

Отже, форма диференціала не змінюється відносно заміни змінних.

11. Похідні і диференціали вищих порядків

У процесі обчислення похідних ми бачили, що похідна, в свою чергу, є функцією від x. Тому природно виникає питання про похідну від похідної функції, тобто $f''(x)$ і т.д.

Зрозумілим прикладом є існування $v(t) = S'(t)$ і $a(t) = v'(t) = S''(t)$. У загальному випадку можемо ставити питання про похі-

дну від другої похідної і так далі, тобто приходимо до поняття похідної n-го порядку.

Обчислимо n-і похідні деяких елементарних функцій

1) $y = x^\alpha$; $y' = \alpha x^{\alpha-1}$; $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$; ...; $y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))x^{\alpha-n}$, $\alpha - n \neq -1$;

2) $y = a^x$; $y' = a^x \ln a$; $y'' = a^x(\ln a)^2$; ...; $y^{(n)} = a^x \ln^n a$;

3) $y = e^x$; $y' = e^x$; ...; $y^{(n)} = e^x$;

4) $y = \ln x$; $y' = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$; $y'' = -\dfrac{1}{x^2} = -x^{-2}$; ...; ...; $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}$;

5) $y = \sin x$; $y' = \cos x$; $y'' = -\sin x$; $y''' = -\cos x$; ...; $y^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

Формула Лейбніца (формула для n-ої похідної добутку двох функцій)

Розглянемо: $(uv)' = u'v + uv'$;

$$(uv)'' = ((uv)')' = (u'v + uv')' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' =$$

$$= u''v + 2u'v' + uv'';$$

$$(uv)''' = ((uv)'')' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' =$$

$$= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

Можемо продовжити процес і далі, за методом математичної індукції отримаємо формулу

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}, \tag{10}$$

тут $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – біноміальні коефіцієнти.

Приклад 1. Знайти $y^{(n)}$, якщо $y = e^{ax}\sin bx$.

Розв'язання. Скористаємось формулою Лейбніца і раніше знайденими похідними:

$$y^{(n)} = e^{ax}\cdot a^n\cdot\sin bx + n\cdot e^{ax}\cdot a^{n-1}\cdot b\cdot\cos bx - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot e^{ax}\cdot a^{n-2}\cdot b^2\cdot\sin bx -$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot e^{ax}\cdot a^{n-3}\cdot b^3\cdot\cos bx + \ldots + e^{ax}\cdot\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right).$$

Справді, $C_n^1 = \dfrac{n!}{1!(n-1!)} = n$; $C_n^2 = \dfrac{n!}{2!(n-2!)} = \dfrac{n(n-1)}{2!}$;

$C_n^3 = \dfrac{n!}{3!(n-3!)} = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}$ і т.д.

Диференціали вищих порядків

Можна говорити про диференціали 2, 3 і т.д. порядків:

$$d^2y = d(dy), \quad d^3y = d\left(d^2y\right), \ \ldots, \ d^ny = d\left(d^{n-1}y\right).$$

Для диференціалів вищих порядків легко записується формула Лейбніца, яка аналогічна формулі (10). Для диференціала другого порядку *не має властивості інваріантності, тобто він змінюватиме свій вигляд залежно від того, чи є $f(x)$ складеною чи елементарною.*

Справді, якщо

1) $y = f(x)$ функція аргумента x, то знаємо, що $dy = f'(x)dx$, тоді $d^2y = d\left(f'(x)dx\right) = \left(f'(x)dx\right)'dx = f''(x)(dx)^2$ (dx – якийсь символ незалежний від x, який при диференціюванні по x будемо розглядати як сталу);

2) $y = f(u)$, $u = u(x)$, то $dy = f'_u\cdot u'_x dx$, а відповідно $d^2y = d\left(f'_y\cdot u'_x dx\right)$.

Оскільки доводиться брати похідну добутку, з'являються два доданки, тому диференціал другого порядку не є інваріантним, як і всі інші диференціали вищих порядків.

Отже,

$$d^ny = y^{(n)}(dx)^n = y^{(n)}dx^n. \tag{11}$$

Звідки $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Формулу Лейбніца можемо застосовувати до диференціалів

$$d^n(uv) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i d^{(n-i)} u d^i v, \ (d^0 u = u; \ d^0 v = v). \qquad (12)$$

Сам Лейбніц вивів свою формулу саме в такому вигляді.

Похідна неявно заданої функції $F(x, y) = 0$. Диференціюємо рівняння $F(x, y) = 0$ по x, пам'ятаючи, що y є функцією від x, отримуємо рівняння, яке містить x, y, y'. Розв'яжемо його відносно y' і знайдемо похідну функції, заданої неявно.

Приклад 1. Знайти похідну неявно заданої функції $\ln(x+y) = x^2$ або $\ln(x + y) - x^2 = 0$.

Розв'язання. Знайдемо похідну по x

$$\frac{1}{x+y}(1+y') - 2x = 0 \ \Rightarrow \ 1 + y' = 2x(x+y) \ \Rightarrow \ y' = 2x(x+y) - 1.$$

Похідна функції, яка задана параметрично. Нехай функція $y = y(x)$ задана параметрично, а саме

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in (\alpha, \beta).$$

Нас буде цікавити $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, $y''(x)$.

Знайдемо $dx = x'(t)dt$; $dy = y'(t)dt$, тоді

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)dt}{x'(t)dt} = \frac{y'_t}{x'_t}, \qquad (13)$$

$$y''(x) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)\frac{dt}{dx} = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - x''_{tt} \cdot y'_t}{(x'_t)^3}.$$

Приклад 2. Знайти похідну параметрично заданої функції $x = \sqrt{t}$, $y = \sqrt[3]{t}$, $t \in (\alpha, \beta)$.

Розв'язання.

$$dy = \frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt, \quad dx = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt}{\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{t}}{t^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3}t^{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}t^{-\frac{1}{6}} = \frac{2}{3\sqrt[6]{t}}.$$

Похідна степенево-показникової функції. Під степенево-показниковою функцією розуміємо функцію вигляду $y(x) = u(x)^{v(x)}$, $u(x) > 0$.

Приклад 3. Знайти похідну функції $y(x) = x^{\sin x}$.

Розв'язання. Бачимо, що $u(x) = x$, $v(x) = \sin x$. За умови, що $x > 0$, можемо прологарифмувати ліву і праву частини

$$\ln y = \ln x^{\sin x} = \sin x \ln x.$$

Отже, задача звелась до знаходження похідних складеної функції $\ln y(x)$ та добутку $(\sin x \cdot \ln x)$. Маємо

$$(\ln y)' = (\sin x \cdot \ln x)',$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}.$$

Звідси

$$y' = \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right) \cdot y = \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right) \cdot x^{\sin x}.$$

Перенесемо такі дії на загальний випадок: $\ln y = v(x) \cdot \ln u(x)$, знайдемо похідні зліва і справа: $\dfrac{y'}{y} = v' \ln u + v(x) \cdot \dfrac{u'(x)}{u(x)}$, домножимо на y

$$y' = \left(v' \ln u + \frac{vu'}{u}\right) u^v. \tag{14}$$

Приклад 4. Знайти похідну функції $y = (x+1)(2x+1)(3x+1)$.

Розв'язання. Прологарифмуємо ліву та праву частини

$$\ln y = \ln(x+1) + \ln(2x+1) + \ln(3x+1),$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{2x+1} + \frac{3}{3x+1},$$
$$y' = (2x+1)(3x+1) + 2(x+1)(3x+1) + 3(x+1)(2x+1).$$

12. Теорема про диференційовні функції

Теорема 1 (Ферма). *Нехай $y = f(x)$ визначена всюди в деякому околі точки x_0. Якщо $f(x)$ в точці x_0 диференційовна і досягає локального екстремуму, то $f'(x_0) = 0$.*

Доведення. Проведемо його для max. Нехай $\max\limits_{(a,b)} f(x) = f(x_0)$, тобто x_0 – точка max на (a, b). Якщо в цій точці існує похідна, то вона дорівнює

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

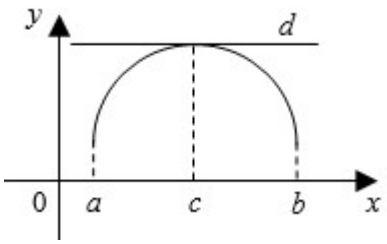
Існування границі при $\Delta x \to 0$ означає, що границя не залежить від того, як $\Delta x \to 0$ (справа чи зліва). Розглянемо при $x > x_0$ вираз $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, тому границя при $x \to x_0 + 0$ буде $f'(x_0) \leq 0$. Якщо $x < x_0$, то $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ і границя при $x \to x_0 - 0$ буде $f'(x_0) \geq 0$. Порівнявши їх, маємо $f'(x_0) = 0$.

Теорема доведена. □

З геометричної точки зору теорема твердить, що за умов теореми всередині $[a, b]$ існує точка x_0, в якій дотична буде паралельною осі OX.

Теорема Ролля. *Нехай $y = f(x)$ 1) визначена і неперервна на $[a, b]$; 2) має скінченну похідну для $x \in (a, b)$, крім того, 3) $f(a) = f(b)$. Тоді існує точка $c \in (a, b)$, що $f'(c) = 0$.*

Доведення. З другої теореми Вейєрштрасса випливає, що на $[a, b]$ функція $y = f(x)$ досягає точної верхньої і точної нижньої меж (граней): $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$; $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, тобто значення функції знаходитимуться між значеннями m і M.



1) Якщо $m = M \Rightarrow f(x) = c = m$, тобто $f'(x) = m' = 0$. У цьому випадку функція зберігає стале значення.

2) Якщо $m < M$ і $f(a) = f(b)$, то вони обидва не можуть досягатись на кінцях відрізка і хоч одне з них досягається в деякій точці c між a і b. За теоремою Ферма похідна $f'(c)$ перетворюється в нуль. $\square$

З геометричної точки зору теорема Ролля свідчить про таке: якщо на кінцях відрізка в точках a і b значення функції є рівними, то знайдеться точка (в теоремі c), в якій дотична до $f(x)$ паралельна осі OX.

Теорема Лагранжа (теорема про скінченні прирости). *Нехай $y = f(x)$ 1) визначена і неперервна на $[a, b]$; 2) має скінченну похідну на (a, b), тоді існує точка $c \in (a, b)$ така, що*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{15}$$

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію, визначену на $[a, b]$

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Вона задовольняє умови теореми Ролля, справді,

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0;$$

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0.$$

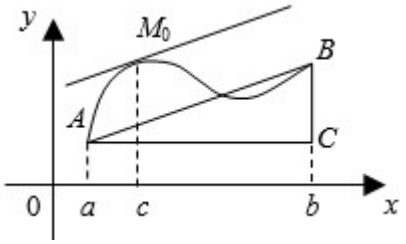
Отже, $F(x)$ набуває рівних значень на кінцях відрізка. Застосуємо до $F(x)$ теорему Ролля і можемо стверджувати, що на (a, b) існує точка c, що $F'(c) = 0$. Отже,

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

звідки

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c).\ \square$$

Розглянемо геометричний зміст цієї теореми.



$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{BC}{AC}$ – кутовий коефіцієнт січної AB, а $f'(c)$ – кутовий коефіцієнт дотичної до $f(x)$ в $x=c$. На дузі AB завжди знайдеться хоч одна точка M, в якій дотична паралельна хорді AB.

Доведена формула

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \text{ або } f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

називається *формулою Лагранжа або формулою скінченних приростів*. Вона є правильною і при $a>b$.

Теорема Коші. Нехай 1) функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на замкнутому проміжку $[a,b]$;

2) існують скінченні похідні $f'(x)$ та $g'(x)$ на відкритому проміжку (a,b);

3) $g'(x)\neq 0$ на (a,b).

Тоді між a і b знайдеться таке c, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доведення. Оскільки $g'(x)\neq 0$ на (a,b), то це означає, що $g'(x)>0$ або $g'(x)<0$. Нехай $g'(x)>0$, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}>0$, а з цього випливає, що $g(x)$ є монотонно зростаючою на (a,b), тобто більшому x відповідає більше значення функції. Утворимо допоміжну функцію

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)],$$

яка є визначеною і неперервною на (a,b). Вона має похідну $F'(x) = f'(x) - 0 - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x) - 0$, крім того, $F(a) = F(b) = 0$. Тоді, згідно з теоремою Ролля, для $F(x)$ знайдеться на (a,b) така точка c, що $F'(c) = 0$ або $f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c) = 0 \Rightarrow \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. $\square$

13. Правило Лопіталя

При знаходженні границі числової послідовності та границі функції часто доводиться розкривати невизначеності:

$$\frac{\infty}{\infty};\ 1^{\infty};\ \infty - \infty;\ \frac{0}{0};\ 0 \cdot \infty.$$

Правило Лопіталя допомогає розкривати невизначеності за допомогою похідних функцій.

Теорема. *Нехай $y = f(x)$ та $y = g(x)$ визначені і неперервні в околі точки $x = a$, крім того, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Тоді, якщо існують похідні $f'(x)$ та $g'(x)$ в околі точки $x = a$, причому $g'(x) \neq 0$, а також існує скінченна $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то справджується формула*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{16}$$

Формула (16) є правилом Лопіталя.

Зауваження. *Правило Лопіталя дозволяє розкривати невизначеності вигляду $\dfrac{0}{0}$. Інші невизначеності зводяться до $\dfrac{0}{0}$. Наприклад, $\dfrac{\infty}{\infty} = \dfrac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \dfrac{0}{0}$; $0 \cdot \infty = 0 \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{\infty}} = \dfrac{0}{0}$; 1^{∞} – логарифмуванням; $\infty - \infty = \dfrac{1}{\frac{1}{\infty}} - \dfrac{1}{\frac{1}{\infty}} = \dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0}$.*

Приклад 1. Обчислити границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}.$$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x^2}-1\right)'}{(\cos x-1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(2x\cdot e^{x^2}\right)'}{(-\sin x)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}-2x\cdot 2x\cdot e^{x^2}}{-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}}{-\cos x}+\lim_{x\to 0}\frac{4x^2e^{x^2}}{\cos x}=-2+0=-2.$$

Приклад 2. Знайти границю

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}^2 x-\frac{1}{x^2}\right).$$

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}^2 x-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\cdot x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x+\sin x)(x\cos x-\sin x)}{x\cdot x\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos x+\sin x}{x}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2 x}\right)=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x\sin^2 x)'}=2\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin^2 x+x\cdot 2\sin x\cdot\cos x}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin^2 x+x\cdot 2\sin x\cos x}=2\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x\sin x}{x\sin x}}{\frac{\sin^2 x}{x\sin x}+\frac{2x\sin x\cos x}{x\sin x}}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{\frac{\sin x}{x}+2\cos x}\right)=2\left(-\frac{1}{1+2}\right)=2\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{3}.$$

Формула Тейлора

1. Розглянемо многочлен (поліном)

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \tag{17}$$

степеня n за степенями x ($a_n \neq 0$). Тут $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – дійсні числа. Поставимо мету зобразити даний многочлен у вигляді

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \ldots + A_n(x - x_0)^n. \tag{18}$$

З формули (18) бачимо, що $P_n(x_0) = A_0$ (решта члени зануляються), $P_n'(x_0) = A_1$; $P_n''(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot A_2$; $P_n'''(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot A_3$; ...; $P_n^{(n)}(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot A_n$, звідки маємо формули для коефіцієнтів розкладу (18)

$$A_0 = P_n(x_0);\ A_1 = P_n'(x_0);\ A_2 = \frac{P_n''(x_0)}{1 \cdot 2};\ \ldots;$$

$$A_n = \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}. \tag{19}$$

Отже, многочлен (17) можна зобразити за формулою Тейлора (18), причому коефіцієнти розкладу обчислюються за формулами (19).

Висновок. Многочлен вигляду (17) за степенями x можна розкласти за степенями $(x - x_0)$, де x_0 – фіксоване значення (конкретна точка), а коефіцієнти розкладу обчислюються за формулами (19).

2. Розглянемо тепер не многочлен за степенями x, а функцію $y = f(x)$, $x \in X$, яка визначена на множині X, неперервна, має похідні до порядку $(n+1)$ включно. За цих умов для функції $f(x)$ правильною є формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x), \tag{20}$$

де x_0 є точка з X, а $r_n(x)$ – залишковий член.

Бачимо, що формула (20) дозволяє виразити значення функції f в довільній точці x через задані значення функції і її похідної в деякій фіксованій точці x_0, причому з'являється додатковий доданок $r_n(x)$.

Залишковий член може записуватись у вигляді

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{21}$$

що називається у формі Лагранжа, де $c \in (x_0, x)$. Оскільки $x - x_0 = \Delta x$ є досить малою величиною, то $r_n(x)$ – нескінченно мала вищого порядку малості, ніж $x - x_0$.

Залишковий член вигляду

$$r_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right) \tag{22}$$

називається у формі Пеано.

Зауваження. *Якщо у формулі (20) покласти $x_0 = 0$, то отримаємо формулу Маклорена*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r_n(x). \tag{23}$$

Розклад основних елементарних функцій за формулою Маклорена

Розглянемо деякі їх розклади за формулою Маклорена:

1) $f(x) = e^x$, оскільки $f(0) = 1$; $f^{(k)}(x) = e^x$; $f^{(k)}(0) = 1$, $k = 1, 2, \ldots$, тому

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x);$$

2) $f(x) = \sin x$; $f(0) = \sin 0 = 0$; $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$, то $f^{(2m)}(0) = \sin m\pi = 0$; $f^{(2m-1)}(0) = \sin\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{m-1}$,

$m = 1, 2, \ldots$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + r_{2m}(x);$$

3) $f(x) = \cos x$; $f(0) = 1$; $f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$, тому $f^{(2m)}(0) = (-1)^m$; $f^{(2m-1)}(0) = 0$, $m = 1, 2, \ldots$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m\frac{x^{2m}}{2m!} + r_{2m+1}(x);$$

4) $f(x) = (1+x)^m$; $f(0) = 1$; $f^{(k)}(x) = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-k+1)(1+x)^{m-k}$, а тому $f^{(k)}(0) = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-k+1)$, $k = 1, 2, \ldots$,

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \ldots +$$

$$+\frac{m(m-1) \cdot \ldots \cdot (m-(n-1))}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}x^n + r_n(x);$$

5) $f(x) = \ln(1+x)$; $f(0) = 0$; $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$, тому $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ $(0! = 1)$, $k = 1, 2, \ldots$,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + r_n(x);$$

6) $f(x) = \mathrm{arctg}x$; $f(0) = 0$; $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; $f'(0) = 1$; $f^{(2m)}(0) = 0$; $f^{(2m-1)}(0) = (-1)^{m-1}(2m-2)!$

$$\mathrm{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{2m-1} + r_{2m}(x).$$

14. Дослідження функцій за допомогою похідних

Теорема 1. *Нехай $y = f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a, b]$, має скінченну похідну на інтервалі (a, b). Для того,*

щоб функція $f(x)$ дорівнювала константі (сталій), необхідно і досить, щоб $f'(x)$ дорівнювала нулеві.

Доведення. Виберемо на (a, b) довільні точки x_0 та x_1 так, щоб $[x_0, x_1] \subset (a, b)$. Умова теореми дозволяє скористатись теоремою Лагранжа: існує точка c на (x_0, x_1), що

$$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{або} \quad f(x_1) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0).$$

Оскільки $f'(c) = 0$, то $f(x_1) = f(x_0)$. Така рівність буде виконуватись на всьому інтервалі (a, b), а отже $f(x) = const$. $\square$

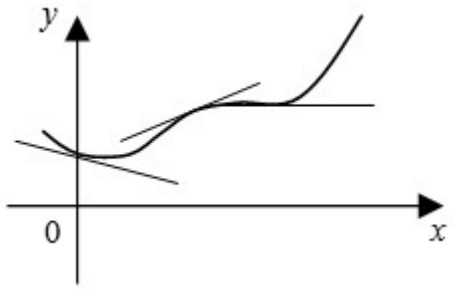
Наслідок. *Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ задані і неперервні на відрізку $[a, b]$, мають скінченні похідні $f'(x)$ та $g'(x)$ на інтервалі (a, b), $f'(x) = g'(x)$, то*

$$f(x) = g(x) + c.$$

I. Умова монотонності функції

Теорема 2. *Нехай $y = f(x)$ визначена і неперервна на $[a, b]$, має скінченну похідну на (a, b). Тоді для того, щоб функція була монотонно зростаючою (спадною), достатньо, щоб $f'(x) > 0$ $(\uparrow)$ $(f'(x) < 0$ $(\downarrow))$.*

Геометрична інтерпретація: $f'(x_0)$ – кутовий коефіцієнт k дотичної; якщо $k > 0$, то кут між дотичною і віссю OX гострий; якщо $k < 0$, то він тупий; в точках, де похідна дорівнює нулеві, дотична паралельна осі OX.



II. Необхідні умови екстремуму функції в точці

Означення. *Функція $f(x)$ досягає в деякій точці x_0 локального максимуму (мінімуму), якщо існує такий δ-окіл точки x_0, що для всіх x з цього околу $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ виконується нерівність*

$$f(x_0) \geq f(x), \tag{24}$$

$$(f(x_0) \leq f(x)). \tag{25}$$

По-іншому: точка x_0 надає максимуму (мінімуму) функції $f(x)$, якщо $f(x_0)$ виявиться найбільшим (найменшим) зі значень, яких набуває функція в деякому (хоча б малому) околі точки x_0.

Якщо існує окіл, в межах якого при $x \neq x_0$ виконується строга нерівність

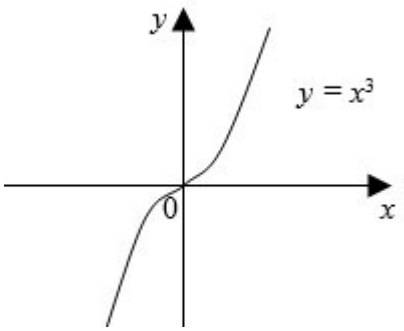
$$f(x_0) > f(x) \quad (f(x_0) < f(x)), \tag{26}$$

то в точці x_0 досягається строгий (власний) максимум (мінімум).

Слова максимум (max) та мінімум (min) об'єднують в термін екстремум.

Необхідною умовою екстремуму функції в точці x_0 є рівність похідної в цій точці нулеві $f'(x_0) = 0$. Умова є тільки необхідною, але не достатньою. Розглянемо приклад.

Приклад 1. $y = x^3$. Знайти точки підозрілі на екстремум.



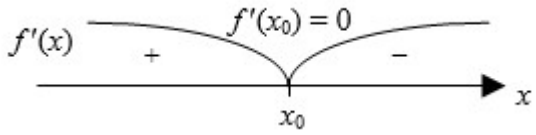
Розв'язок. Знайдемо $y' = 3x^2$. При $x = 0$, $y'(0) = 0$. Побудувавши графік функції $y = x^3$, бачимо, що $x = 0$ не є екстремальною точкою для цієї функції.

З наведеного прикладу випливає, що якщо похідна функції в деякій точці дорівнює нулеві, не можна стверджувати, що в цій точці функція має екстремум.

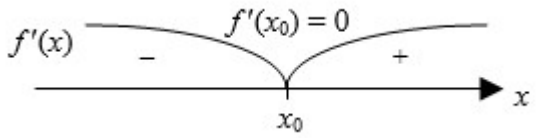
III. Достатні умови екстремуму функції в точці. Розглянемо $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, і в деякій точці x_0 маємо $f'(x_0) = 0$.

Якщо при переході через цю точку, рухаючись зліва направо, похідна змінює свій знак, то точка x_0 буде екстремальною; якщо похідна знаку не змінює, то екстремуму в цій точці немає. Зокрема,

1) якщо, рухаючись зліва направо, похідна $f'(x)$ (в точці x_0 $f'(x_0) = 0$) змінює знак з "+" на "−" при переході через точку x_0, то f в точці x_0 досягає максимуму і $f_{\max} = f(x_0)$.



2) якщо ж, рухаючись зліва направо, похідна $f'(x)$ змінює знак з "−" на "+" в точці x_0, то в цій точці x_0 функція $f(x)$ досягає мінімуму і $f_{\min} = f(x_0)$.



Достатні умови екстремуму можемо переписати для $f(x)$, враховуючи другі похідні функції.

Отже, якщо $f'(x_0) = 0$ і існує $f''(x_0)$, то x_0 є точкою мінімуму, якщо $f''(x_0) > 0$. Якщо ж $f''(x_0) < 0$, то x_0 є точкою максимуму.

Означення. *Точки, в яких перша похідна дорівнює нулеві, називають стаціонарними точками. Але поряд з цими точками потрібно розглядати точки, в яких похідна не існує. В цих точках функція також може досягати екстремуму, якщо вона визначена.*

Якщо 1) при переході через точку, підозрілу на екстремум, похідна f' змінює знак, то дана точка є екстремальною;

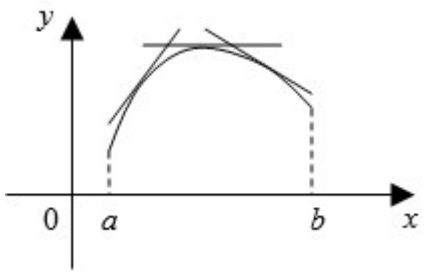
2) якщо у стаціонарній точці друга похідна $y'' > 0$, то в цій точці функція досягає мінімуму;

3) якщо в стаціонарній точці $y'' < 0$, то в цій точці функція має максимум;

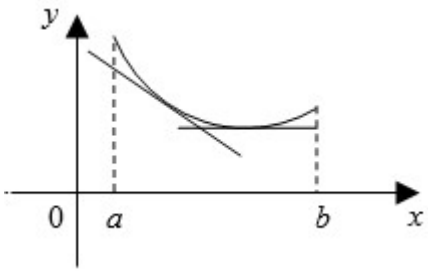
4) якщо перша похідна в точці x_0 не існує, то і другої похідної не існує в цій точці.

IV. Випуклість графіка функції

Означення. *Графік функції $y = f(x)$ має на інтервалі (a, b) вгнутість (опуклість) (випуклість, яка напрямлена вгору (вниз)), якщо графік цієї функції на вказаному інтервалі знаходиться не вище (не нижче) будь-якої його дотичної, проведеної в точці даного інтервала.*



вгнутість



опуклість

Теорема 3. *Якщо функція $y = f(x)$ має скінченну другу похідну на (a, b) і якщо $y'' > 0$ для $\forall\ x \in (a, b)$, то графік функції опуклий (випуклий вниз); якщо $y'' < 0$ для $\forall\ x \in (a, b)$, то вгнутий (випуклий вгору).*

Приклад 3. Дослідити напрямки випуклості графіка функції $y = x^3$ за допомогою другої похідної.

Розв'язання. Візьмемо $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$. Бачимо, що $y'' > 0$ для $x > 0$, а отже, графік опуклий (випуклістю вниз); при $x < 0$ $y'' < 0$, тому графік функції вгнутий (випуклістю вгору), а в точці $x = 0$ бачимо, що $y'' = 0$. Ця точка є точкою перегину графіка функції.

Означення. *Точка $M\,(c, f(c))$ графіка функції $y = f(x)$ називається точкою перегину графіка функції, якщо існує окіл точки c, що в ній відділяється опукла частина графіка від вгнутої.*

V. Необхідна умова існування перегину графіка функції

Теорема 4. *Якщо графік функції* $y = f(x)$ *має перегин в точці* $M(c, f(c))$ *і якщо в деякому околі точки* c *функція має другу неперервну похідну, то* $f''(c) = 0$.

VI. Достатні умови існування перегину графіка функції в точці $M(c, f(c))$

Теорема 5. *Нехай функція* $y = f(x)$ *має другу похідну* $y''(x)$ *в деякому околі точки* c, *а в самій точці похідна перетворюється в нуль. Тоді, якщо в межах деякого околу точки* c *друга похідна* $f''(x)$ *змінює знак, то точка* M *буде точкою перегину графіка функції.*

Теорема 6. *Нехай* $f(x)$ *має неперервні похідні до* n*-го порядку в околі точки* x_0, *причому* $f'(x_0) = f''(x_0) = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, *а* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. *Тоді, якщо* n *– парне і* $f^{(n)}(x_0) > 0$, *то* x_0 *є точкою мінімуму. Якщо* $f^{(n)}(x_0) < 0$ *для* n *непарних, то* x_0 *є точкою максимуму. При непарних* n *в точці* x_0 *буде перегин графіка функції.*

VII. Асимптоти графіка функції

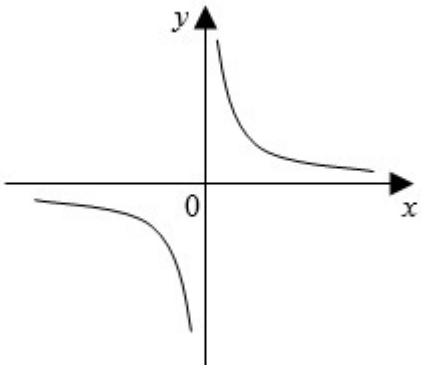
Означення. *Пряма* $x = a$ *називається вертикальною асимптотою для графіка функції* $y = f(x)$, *якщо*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty. \tag{27}$$

Вертикальні асимптоти існують у точках розриву II-го роду.

Приклад 3. Визначити асимптоти графіка функції $y = \dfrac{1}{x}$.

Розв'язання. Бачимо, що $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$. Отже, $x = 0$ – вертикальна асимптота графіка функції.



Означення. *Пряма* $y = kx + b$ *називається похилою асимптотою до графіка функції* $y = f(x)$, *якщо при* $x \to \pm\infty$ $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \alpha(x) = 0$.

Теорема 7. *Для того, щоб графік функції* $y = f(x)$ *мав похилу асимптоту* $y = kx + b$ *при* $x \to \pm\infty$ *необхідно і достатньо, щоб існували такі скінченні границі*

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \tag{28}$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx\right). \tag{29}$$

Загальна схема дослідження графіка функції

1) Знайти область визначення функції $f(x) - D(f)$ і область значень функції – $E(f)$;

2) Парність, непарність, періодичність функції;

3) Шукаємо інтервали монотонності за допомогою y' та екстремуми;

4) З допомогою y'' встановлюємо опуклість або вгнутість графіка функції та точки перегину;

5) Асимптоти;

6) Точки перетину з осями;

7) Будуємо графік функції.

Зауваження. *Для побудови графіка функції зручно записувати інформацію про* y' *та* y'' *в таблицю.*

Приклад 4. Провести дослідження функції та побудувати її графік

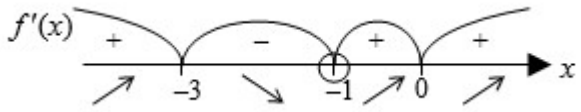
$$y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$$

Розв'язання. 1. Бачимо, що в $x = -1$ знаменник перетворюється в нуль. Тому $D(f)$: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

2. $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{2((-x)+1)^2} = -\dfrac{x^3}{2(1-x)^2} \neq -f(x)$, тому ні парна ні непарна і $D(f)$ не є симетрична відносно $x = 0$. Неперіодична.

3. Знайдемо $y' = \left(\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}\right)' = \dfrac{3x^2(x+1)^2 - 2(x+1)x^3}{2(x+1)^4} = \dfrac{3x^4 + 6x^3 + 3x^2 - 2x^4 - 2x^3}{2(x+1)^4} = \dfrac{x^4 + 4x^3 + 3x^2}{2(x+1)^4} = \dfrac{x^4 + 4x^3 + 3x^2}{2(x+1)^4} = \dfrac{x^2\left(x^2 + 4x + 3\right)}{2(x+1)^4} = \dfrac{x^2(x+3)(x+1)}{2(x+1)^4} = \dfrac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}.$

Прирівняємо y' до нуля: $x^2(x+3) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0$; $x_3 = -3$ – точки можливого екстремуму. Визначимо знак похідної на проміжках, на які розбили $D(f)$ дані точки (метод інтервалів)

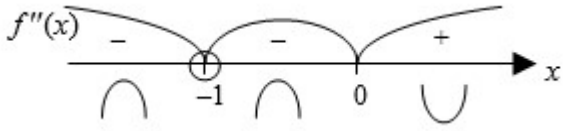


Отже, $x = -3$ – точка max; точок min не існує. Функція зростає на $(-\infty; -3) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$ і спадає на $(-3; -1)$.

4. Знайдемо $y'' = \left(\dfrac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}\right)' = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(3x^2+6x)(x+1)^3 - (x^3+3x^2)3(x+1)^2}{(x+1)^6}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(3x^2+6x)(x^3+3x^2+3x+1) - 3(x^3+3x^2)(x^2+2x+1)}{(x+1)^6}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3x^5+9x^4+9x^3+3x^2+6x^4+18x^3+18x^2+6x-3x^5-6x^4-3x^3-9x^4}{(x+1)^6}\right.$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{6x^3+12x^2+6x}{(x+1)^6}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{6x(x^2+2x+1)}{(x+1)^6} = \frac{1}{2}\cdot\frac{6x(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{1}{2}\cdot\frac{6x}{(x+1)^4} = \frac{3x}{(x+1)^4}.$$

Прирівняємо до нуля: $y''=0 \Rightarrow 3x=0 \Rightarrow x=0$. Отже, $x=0$ – точка можливого перегину.



Бачимо, що при переході через $x=0$ $f''(x)$ змінила знак з "$-$" на "$+$". Отже, в цій точці перегин, опуклість графіка змінюється.

Побудуємо таблицю

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;-1)$	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty)$
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\nearrow$	0	$\nearrow$
y'	$+$	0	$-$	$+$	0	$+$
y''	$\cap$		$\cap$	$\cap$	0	$\cup$

$$f(-3)=\frac{(-3)^3}{2(-3+1)^2}=\frac{-27}{8}=-3\frac{3}{8}.$$

5. Асимптоти:

1) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}=-\infty \Rightarrow x=-1$ – вертикальна астмптота;

2) $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{2(x+1)^2\cdot x}=\dfrac{1}{2}$;

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2(x+1)^2}-\frac{1}{2}x\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x(x+1)^2}{(x+1)^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3-2x^2-x}{x^2+2x+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(-2-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{1}{2}(-2)=-1.$$

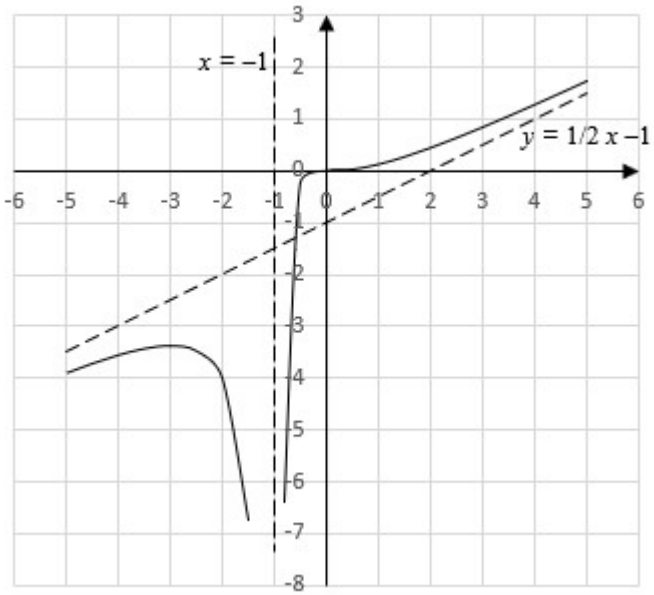
Отже, $y = \frac{1}{2}x - 1$ – похила асимптота.

6. Точки перетину з осями координат: якщо $x = 0$, то $y = 0$, бо $\frac{0^3}{2(0+1)^2} = 0$.

7. Ескіз графіка

$$f(1) = \frac{1^3}{2(1+1)^2} = \frac{1}{8};$$

$$f(2) = \frac{2^3}{2(2+1)^2} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}.$$



Питання для самоконтролю

1. Дайте означення границі функції на "мові послідовностей".

2. Дайте означення границі функції на "мові $\varepsilon - \delta$".

3. Сформулюйте і доведіть теорему про границю суми, різниці, добутку, частки функцій.

4. Яка функція називається нескінченно малою? Розкрийте поняття про вищий та однаковий порядок малості двох функцій.

5. Доведіть першу чудову границю.

6. Сформулюйте поняття та властивості нескінченно великих функцій.

7. Які означення неперервності функції в точці ви знаєте? Сформулюйте їх.

8. Дайте означення неперервності функції в точці зліва і справа.

9. Сформулюйте теореми про неперервність суми, добутку, частки неперервних функцій.

10. Проведіть класифікацію точок розриву функції.

11. Наведіть властивості неперервних на відрізку функцій.

12. Дайте означення рівномірно неперервної на відрізку функції та сформулюйте теорему Кантора про рівномірну неперервність функції.

13. Дайте означення похідної функції в точці.

14. Відтворіть задачі геометрії та фізики, які ілюструють геометричний та фізичний зміст похідної.

15. Доведіть формули з таблиці похідних.

16. Доведіть основні правила диференціювання.

17. Сформулюйте теореми про похідну оберненої, складеної функцій.

18. Що таке односторонні похідні?

19. Поясніть поняття диференційовності функції. Покажіть зв'язок диференційовності з існуванням похідної функції.

20. Дайте означення диференціала функції. Розкрийте його геометричний зміст.

21. Що таке друга похідна функції? Похідна n-го порядку? Знайти похідні n-го порядку основних елементарних функцій.

22. Дайте означення диференціала n-го порядку.

23. Сформулюйте і доведіть теореми про диференційовні функції: Ферма. Ролля, Лагранжа, Коші.

24. Опишіть правило Лопіталя та його застосування для знаходження границь.

25. Запишіть формулу Тейлора.

26. Встановіть розклад основних елементарних функцій в ряд Маклорена.

27. Сформулюйте необхідні та достатні умови монотонності функції.

28. Сформулюйте необхідні та достатні умови локального екстремуму функції.

29. Дайте означення опуклості і вгнутості графіка функції. Як визначити напрямок випуклості?

30. Що таке точка перегину графіка функції та як її знайти?

31. Описати поняття і методи знаходження вертикальної та похилої асимптот графіка функції.

32. Повторіть загальну схему дослідження графіка функції методами диференціального числення.

Завдання для самостійної роботи

Задача 3. Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталя.

3.1.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-2x+3x^2}{6x^2+5x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^2+3x+2)^2}{x^3+2x^2-x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos\,x}{5x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{sin\,5x}{tg3x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x$.

3.2.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{3x^3+x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{x^2-x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsin\,3x}{5x}$; д) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\pi-x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x$.

3.3.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-cos\,2x}}{|x|}$; д) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2^x-16}{sin\,\pi x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.

3.4.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+4x^2+5x+2}{x^3-3x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{arctg2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{x^2-\pi^2}{sin\,x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

3.5.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x-5}{5x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos\,x-cos^3\,x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg3x}{tgx}$; е) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(ln(x+1)-ln\,x)$.

3.6.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+2x^2+5x^4}{x^4-12x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{x+x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2ctg2x}{sin\,3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1+cos\,3x}{sin^2\,7x}$; е) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)(ln(x+3)-ln\,x)$.

3.7.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos\,5x}{1-cos\,2x}$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{sin\,7\pi x}{sin\,8\pi x}$; е) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-5)(ln(x-4)-ln\,x)$.

3.8.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+1}{3x^2+x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+5x^2+7x+3}{x^3+4x^2+5x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin^2 x - tg^2 x}{(x-\pi)^4}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{x/(3x-3)}$.

3.9.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{2x\,tg2x}$; д) $\lim\limits_{\boldsymbol{x\to 1}}\frac{\boldsymbol{1-x^2}}{\boldsymbol{\sin \pi x}}$; е) $\lim\limits_{\boldsymbol{x\to 2}}(3x-5)^{\boldsymbol{1/(x-2)}}$.

3.10.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4-3x^3+4}{2x^4+x^2+9}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}5x\,ctg3x$; д) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{tg\pi x}{x+2}$; е) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{2/(x-3)}$.

3.11.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+x-2}{2x^3+6x}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+4x+3}{x^3-9x}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}$; д) $\lim\limits_{x\to 11}\frac{\sin x+\sin 11}{x-11}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+6}{x}\right)^{3x}$.

3.12.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+6}{x^2+4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-3x-2}{x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin 4x}{5x}$; д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln tgx}{\cos 2x}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2-x}{x}\right)^{\frac{1}{\ln(2-x)}}$.

3.13.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^8-4x^4}{4-8x^2+2x^8}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{2\sin x}$; д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin 2x}{\pi-4x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$.

3.14.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^6+4x}{x^6-x^5}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^3-x^2-x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$; д) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x}\right)^{3x+4}$.

3.15.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x^2+x}{2-4x^2-2x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x^2}-2}{x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{10x^2}{1-\cos x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x+\sin 4x}{5x}$; е) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}$.

3.16.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{10x^2+5x+6}{5x^2-x+7}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+4x+1}{x^2+3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{8+x}-3}{x-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xtgx}{1-\cos x}$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(9-2x^2)}{2\pi x}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{1/(2x-2)}$.

3.17.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^4+6x^3-4}{2x^4-x^2+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{2x^2+x-10}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{5+x^2}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^2}{1-\cos 4x}$; д) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\cos x-\cos 3}{x-3}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$.

3.18.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+5x-3}{3x^2-7x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^2-x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{2x+7}+5}{3-\sqrt{x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^5 x}{4x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{tg^2\pi x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$.

3.19.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x-2}{2x^4+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{8x^2}{\sin^2 5x}$; д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin 2x}{(\pi-4x)^2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{x-1}$.

3.20.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-4x-7}{x^2+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x^2-4x-1}{x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin x}{\arcsin x}$; д) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{x^2-\pi^2}{\sin x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{3x}$.

3.21.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5+x+3x^2}{4x^7-x^3+5}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x^2+2x+3)^2}{x^3+2x^2-x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{4x}-x}{x^2-16}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2 5x}{\sin^2 x}$; д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\pi-4x)^2}{1-\sin 2x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3tg^2 x)^{ctg^2 x}$.

3.22.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^4+3x^2-7}{2x^4+5x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{7x^2+8x+1}{x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{\sqrt{x}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x\sin x}$; д) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{tg^2\pi x}{1+\cos\pi x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

3.23.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x+4}{4+x-2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3-\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{x^2+1}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}xctg3x$; д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ctg3x}{tg2x}$; е) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{6tgx\cdot\lg x}$.

3.24.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+2}{4x^3+2x^2-5}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2-5x-7}{x^2+x}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{1+2x}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{7x\cdot\sin 3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot tgx$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x}\right)^{3x+4}$.

3.25.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^5+7x+1}{5x^5-x^2+2}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{3x^2-x-14}{x^2+8x+12}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{7+x}-\sqrt{7-x}}{3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to0} ctg5x\sin7x$; д) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{\cos 5x-\cos 3x}$; е) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3/\cos x}$.

3.26.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{40x^3+x}{5x^3-x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^3-3x-2}{(x^2-x-2)^2}$; в) $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0} x\cdot ctg3x$; д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln tgx}{\cos 2x}$; е) $\lim\limits_{x\to0}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{1/x}$.

3.27.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-4x^3}{2x-x^2+8x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to5}\frac{5x^2-24x-5}{x-5}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin^2(x-1)}{3x^2-6x+3}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 4x-\cos^2 4x}{3x\cdot\sin 6x}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$;

е) $\lim\limits_{x\to0}\left(2-e^{\sin x}\right)^{ctg\pi x}$.

3.28.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-2x}{5x^3+3x^2+x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to5}\frac{3x^2-14x-5}{x^2+7x+10}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7}\cdot x}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 2x-1}{3x\cdot\sin x}$; д) $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$; е) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(ctgx)^{1/(x-\frac{\pi}{2})}$.

3.29.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-2x^2+4x}{2x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\frac{2x^2-5x-3}{x^2-x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{4+x}-3}{x-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot tg3x}{1-\cos 6x}$; д) $\lim\limits_{x\to3}\frac{e^x-e^3}{x-3}$; е) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{\cos 2}{\cos x}\right)^{1/(x-2)}$.

3.30.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^2}{3x^5+4x^2-x}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{3x^2-8x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 2x}{5x}$; д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{(x+1)/2}$.

Задача 4. Дослідити на неперервність функцію. Побудувати графік.

4.1.

$$f(x)=\begin{cases} x+4, & \textit{якщо} \quad x<-1,\\ x^2+2, & \textit{якщо} \quad -1\le x<1,\\ 2x, & \textit{якщо} \quad x\ge 1; \end{cases}$$

4.2.

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & якщо \quad x\le -1,\\ x^2+1, & якщо \quad -1<x\le 1,\\ -x+3, & якщо \quad x>1; \end{cases}$$

4.3.

$$f(x)=\begin{cases} -x, & якщо \quad x\le 0,\\ -(x-1)^2, & якщо \quad 0<x<2,\\ x-3, & якщо \quad x\ge 2; \end{cases}$$

4.4.

$$f(x)=\begin{cases} cos\,x\,, & якщо \quad x\le 0,\\ x^2+1, & якщо \quad 0<x\le 1,\\ x, & якщо \quad x\ge 1; \end{cases}$$

4.5.

$$f(x)=\begin{cases} -x, & якщо \quad x\le 0,\\ x^2, & якщо \quad 0<x\le 2,\\ x+1, & якщо \quad x>2; \end{cases}$$

4.6.

$$f(x)=\begin{cases} -x, & якщо \quad x\le 0,\\ sin\,x\,, & якщо \quad 0<x<1,\\ x-2, & якщо \quad x>\pi; \end{cases}$$

4.7.

$$f(x)=\begin{cases} -(x+1), & якщо \quad x\le -1,\\ (x+1)^2, & якщо \quad -1<x\le 0,\\ x, & якщо \quad x>0; \end{cases}$$

4.8.

$$f(x)=\begin{cases} -x^2, & якщо \quad x\le 0,\\ tgx, & якщо \quad 0<x\le \dfrac{\pi}{4},\\ 2, & якщо \quad x>\dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$$

4.9.

$$f(x)=\begin{cases} -2x, & якщо \quad x\le 0,\\ x^2+1, & якщо \quad 0<x\le 1,\\ 2, & якщо \quad x>1; \end{cases}$$

4.10.

$$f(x)=\begin{cases} -2x, & якщо \quad x\le 0,\\ \sqrt{x}, & якщо \quad 0<x<4,\\ 1, & якщо \quad x\ge 4; \end{cases}$$

4.11.

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & якщо \quad x<0, \\ (x+1)^2, & якщо \quad 0\le x<2, \\ -x+4, & якщо \quad x\ge 2; \end{cases}$$

4.12.

$$f(x)=\begin{cases} -2(x+1), & якщо \quad x\le -1, \\ (x+1)^3, & якщо \quad -1\le x<0, \\ x, & якщо \quad x\ge 0; \end{cases}$$

4.13.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & якщо \quad x\le 1, \\ 2x, & якщо \quad 1\le x\le 3, \\ x+2, & якщо \quad x>3; \end{cases}$$

4.14.

$$f(x)=\begin{cases} x-3, & якщо \quad x<0, \\ x+1, & якщо \quad 0\le x\le 4, \\ 3-x, & якщо \quad x>4; \end{cases}$$

4.15.

$$f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & якщо \quad x\le 0, \\ 0, & якщо \quad 0<x\le 2, \\ x-2, & якщо \quad x>2; \end{cases}$$

4.16.

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2, & якщо \quad x\le 0, \\ x, & якщо \quad 0<x\le 1, \\ 2+x, & якщо \quad x>1; \end{cases}$$

4.17.

$$f(x)=\begin{cases} sin\, x\,, & якщо \quad x<0, \\ x, & якщо \quad 0\le x\le 2, \\ 0, & якщо \quad x>2; \end{cases}$$

4.18.

$$f(x)=\begin{cases} x+3, & якщо \quad x\le 0, \\ 1, & якщо \quad 0<x\le 2, \\ x^2-2, & якщо \quad x>2; \end{cases}$$

4.19.

$$f(x)=\begin{cases} -x+1, & якщо \quad x<-1, \\ x^2+1, & якщо \quad -1<x\le 2, \\ 2x, & якщо \quad x>2; \end{cases}$$

4.20.

$$f(x)=\begin{cases}1, & якщо \quad x\le 0,\\ 2^x, & якщо \quad 0<x\le 2,\\ x+3, & якщо \quad x>2;\end{cases}$$

4.21.

$$f(x)=\begin{cases}cos\,x\,, & якщо \quad x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & якщо \quad \dfrac{\pi}{2}<x<\pi,\\ 2, & якщо \quad x\ge \pi;\end{cases}$$

4.22.

$$f(x)=\begin{cases}-x+2, & якщо \quad x\le -2,\\ x^2, & якщо \quad -2<x\le 1,\\ 2, & якщо \quad x>1;\end{cases}$$

4.23.

$$f(x)=\begin{cases}3x+4, & якщо \quad x\le -1,\\ x^2-2, & якщо \quad -1<x<2,\\ x, & якщо \quad x\ge 2;\end{cases}$$

4.24.

$$f(x)=\begin{cases}x, & якщо \quad x\le 1,\\ (x-2)^2, & якщо \quad 1<x<3,\\ -x+6, & якщо \quad x\ge 3;\end{cases}$$

4.25.

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & якщо \quad x<1,\\ x^2+2, & якщо \quad 1\le x\le 2,\\ -2x, & якщо \quad x>2;\end{cases}$$

4.26.

$$f(x)=\begin{cases}x^3, & якщо \quad x<-1,\\ x-1, & якщо \quad -1\le x\le 3,\\ -x+5, & якщо \quad x>3;\end{cases}$$

4.27.

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & якщо \quad x<0,\\ sin\,x\,, & якщо \quad 0\le x<\pi,\\ 3, & якщо \quad x\ge \pi;\end{cases}$$

4.28.

$$f(x)=\begin{cases}-1, & якщо \quad x<0,\\ cos\,x\,, & якщо \quad 0\le x<\pi,\\ 1-x, & якщо \quad x\ge \pi;\end{cases}$$

4.29.

$$f(x)=\begin{cases}3, & якщо \quad x<-1,\\ 1-x, & якщо \quad -1\le x\le 1,\\ ln\,x\,, & якщо \quad x\ge 1;\end{cases}$$

4.30.

$$f(x)=\begin{cases}-x, & якщо \quad x\le 0,\\ x^3, & якщо \quad 0<x\le 2,\\ x+4, & якщо \quad x>2.\end{cases}$$

Задача 5. Знайти похідні y′ даних функцій.

5.1.

а) $y=\sqrt{x}arctx$; б) $y=\frac{5\,sin\,x+1}{log_2 x}$; в) $y=(cos\,x)^7$.

г) $(y=arccos\,5\,x)^{ln\,x}$; д) $x^3+y^3-3axy=0$.

5.2.

а) $y=\sqrt[3]{x}\,ln(x)$; б) $y=\frac{arcsin\,x}{x}$; в) $y=(sin\,x)^7$.

г) $y=x^{sin\,x^3}$; д) $cos(xy)-3x=0$.

5.3.

а) $y=x^3\,arccos\,x$; б) $y=\frac{e^x+7}{\sqrt{x}}$; в) $y=log_2(tgx)$.

г) $y=(x^4+5)^{ctgx}$; д) $e^{xy}-x^2+y^3=0$.

5.4.

а) $y=2\,sin\,x\cdot 3^x$; б) $y=\frac{\sqrt{x}}{tgx}$; в) $y=arcsin(x^2)$.

г) $y=(arctg2x)^{sin\,x}$; д) $y^2=x\,sin\,y$.

3.5.

а) $y=3(x+2)\sqrt[4]{x}$; б) $y=\frac{sin\,x}{1+cos\,x}$; в) $y=ln(arctgx)$.

г) $y=(x+x^2)^x$; д) $xtgy-x^2+y^2=4$.

5.6.

а) $y=5^x\,ln(x)$; б) $y=\frac{ctgx}{e^x}$; в) $y=\sqrt[3]{arcsin\,x}$.

г) $y=(tg2x)^{sin\,x}$; д) $ln\,y+\frac{y}{x}=2$.

5.7.

а) $y=10^x ctgx$; б) $y=\frac{1+x^2}{\sqrt{x^5}}$; в) $y=cos(arctgx)$.

г) $y=(ln(x+7))^x$; д) $x\,sin\,2\,y-y\,cos\,2\,x=10$.

5.8.

а) $y = sin\,x \cdot arcsin\,x$; б) $y = \frac{2^x}{x^2}$; в) $y = \sqrt[3]{ln\,x}$.

г) $y = (x^2+1)^{cos\,x}$; д) $x - y = e^{x+y}$.

5.9.

а) $y = 5^x(10 - x^2)$; б) $y = \frac{e^x+4x}{cos\,x}$; в) $y = \sqrt[3]{arcsin\,x}$.

г) $y = (x+3)^{sin\sqrt{x}}$; д) $ln\frac{x}{y} - x + 2y = 0$.

5.10.

а) $y = log_2\,x \cdot \sqrt[4]{x}$; б) $y = \frac{arcsin\,x}{x}$; в) $y = (sin\,x + 2)^7$.

г) $y = (sin\,x)^{ln\,x}$; д) $y = x + x\,sin\,y$.

5.11.

а) $y = (x^{\frac{7}{4}} - 1)tgx$; б) $y = \frac{4x-4^x}{cos\,x}$; в) $y = log_3(\,e^x - 3x)$.

г) $y = (x+1)^{arctgx}$; д) $y^2 = x + arctgy$.

5.12.

а) $y = (x^2 + x)\,cos\,x$; б) $y = \frac{e^x}{ln\,x+\sqrt{x}}$; в) $y = arcsin(\,4^x)$.

г) $y = (x^8+1)^{tgx}$; д) $y + x = e^{x-y}$.

5.13.

а) $y = x^2tgx + 7x$; б) $y = \frac{arctgx}{arccos\,x}$; в)$y = log_2(\,2^x + 3x)$.

г) $y = x^{e^{arctgx}}$; д) $ye^x = ln\,x + \sqrt{y}$.

5.14.

а) $y = 5^x\,cos\,x$; б) $y = \frac{x^2-2x+3}{\sqrt{x}}$; в) $y = \sqrt[3]{arcsin\,x + 1}$.

г) $y = \left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt[3]{x}}$; д) $x^2y + arctg\frac{y}{x} = 0$.

5.15.

а)$y = 5^x(x^5 - x + 2)$; б)$y = \frac{ctgx}{sin\,x+cos\,x}$;

в) $y = (log\,x + x^2)^6$; г) $y = \quad (log_5\,(3x+2))^{arccos\,x}$;

д) $xy^2 - y^3 = 4x - 5$.

5.16.

а)$y = (\sqrt{x} + 5)(sin\,x + 1)$; б)$y = \frac{ln\,x}{5^x+x}$;

в) $y = tg(arcsin\,x)$. г) $y = x^{e^{sin\,x}}$; д) $x^3 + ln\,y = x^2e^y$.

5.17.

а) $y = \sqrt{x}arctx$; б) $y = \frac{5\sin x+1}{log_2 x}$; в) $y = (cos\, x)^7$.

г) $y = (sin\, x)^{5e^x}$; д) $e^y - e^x - 2^{\frac{y}{x}} - 1 = 0$.

5.18.

а) $y = \sqrt[3]{x}\, ln(x)$; б) $y = \frac{arcsin\, x}{x}$; в) $y = (sin\, x)^7$.

г) $y = x^{sin\, x^3}$; д) $e^y\, sin\, x = e^{-x}\, cos\, y$.

5.19.

а) $y = x^3\, arccos\, x$; б) $y = \frac{e^x+7}{\sqrt{x}}$; в) $y = log_2(tgx)$.

г) $y = (arcsin\, x)^{e^x}$; д) $e^x + e^y = 2^{xy} - xy$.

5.20.

а) $y = 2\, sin\, x \cdot 3^x$; б) $y = \frac{\sqrt{x}}{tgx}$; в) $y = arcsin(x^2)$.

г) $y = x^{2x}5^x$; д) $3x + sin\, y = 5y$.

5.21.

а) $y = 3(x+2)\sqrt[4]{x}$; б) $y = \frac{sin\, x}{1+cos\, x}$; в) $y = ln(arctgx)$.

г) $y = (tgx)^{\sqrt{x+3}}$; д) $xy = ctgy$.

5.22.

а) $y = 5^x\, ln(x)$; б) $y = \frac{ctgx}{e^x}$; в) $y = \sqrt[3]{arcsin\, x}$.

г) $y = (arccos\, x)^{\sqrt{cos\, x}}$; д) $ctg^2(x+y) = 5x$.

5.23.

а) $y = 10^x ctgx$; б) $y = \frac{1+x^2}{\sqrt{x^5}}$; в) $y = cos(arctgx)$.

г) $y = (ln\, x)^{3^x}$; д) $y^2 = \frac{x-y}{x+y}$.

5.24.

а) $y = sin\, x \cdot arcsin\, x$; б) $y = \frac{2^x}{x^2}$; в) $y = \sqrt[3]{ln\, x}$.

г) $y = x^{tgx}$; д) $15 = \frac{x}{y} - 3^{xy}$.

5.25.

а) $y = 5^x(10 - x^2)$; б) $y = \frac{e^x+4x}{cos\, x}$; в) $y = \sqrt[3]{arcsin\, x}$.

г) $y = (arcsin\, 2\, x)^{e^x}$; д) $x^4 + x^2y^2 + y = 4$.

5.26.

а) $y = log_2 x \cdot \sqrt[4]{x}$; б) $y = \frac{arcsin\, x}{x}$; в) $y = (sin\, x + 2)^7$.

г) $y = \left(sin\sqrt{x}\right)^{1/x}$; д) $sin\, y = xy^2 + 5$.

5.27.

а) $y = (x^{\frac{7}{4}} - 1)tgx$; б) $y = \frac{4x - 4^x}{cos\, x}$; в) $y = log_3(\, e^x - 3x)$.

г) $y = (cos(x + 2))^{ln\, x}$; д) $y^2 = x^3 + ln\frac{y}{x}$.

5.28.

а) $y = (x^2 + x)\, cos\, x$; б) $y = \frac{e^x}{ln\, x + \sqrt{x}}$; в) $y = arcsin(\, 4^x)$.

г) $y = (lg\, x)^{e^x + 4x}$; д) $ln\, y + x^3 = y\, cos\, x$.

5.29.

а) $y = x^2 tgx + 7x$; б) $y = \frac{arctgx}{arccos\, x}$; в) $y = log_2(\, 2^x + 3x)$.

г) $y = (x + 8)^{tg2x}$; д) $x^2 y + cos\, x = x^3$.

5.30.

а) $y = 5^x\, cos\, x$; б) $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{\sqrt{x}}$; в) $y = \sqrt[3]{arcsin\, x + 1}$.

г)$y = (x^3 + 1)^{sin\, x}$; д) $\frac{y}{x^2} + ln\, y = 5x$.

Задача 6. Знайти границю функції за правилом Лопіталя.

6.1. $\lim\limits_{x \to o} \frac{x - sin\, x}{x - tgx}$;

6.2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{sin^2\, 5x}$;

6.3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - sin\, x}$;

6.4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$;

6.5. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{ln\, x}{1 + 2\, lnsin\, x}$;

6.6. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{tgx} - 1}{2\, sin^2\, x - 1}$;

6.7. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x\, sin\, x - x}{3x^2 + x^5}$;

6.8. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sin\, x - x\, cos\, x}{x^2\, sin\, x}$;

6.9. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{ctgx - 1}{sin\, 4x}$;

6.10. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\pi - 2arctgx}{e^{\frac{3}{x}} - 1}$;

6.11. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{tgx - x}{x - sin\, x}$;

6.12. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1 - 4sin^2\frac{\pi x}{6}}{1 - x^2}$;

6.13. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{\pi}{x}}{ctg\frac{\pi x}{2}}$;

6.14. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^{1/x^2} - 1}{2arctgx^2 - \pi}$;

6.15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+xe^x)}{ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$;

6.16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos\,x^2}{x^2-sin\,x^2}$;

6.17. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3tg4x-12tgx}{3\,sin\,4x-12\,sin\,x}$;

6.18. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln\left(1+x^2\right)}{cos\,3x-e^{-x}}$;

6.19. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{tgx}-1}{tgx-x}$;

6.20. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{cos\left(e^{x^2}-1\right)-1}{cos\,x-1}$;

6.21. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{ln\,x}{1-x^3}$;

6.22. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{cosx\cdot ln(x-3)}{ln(e^x-e^3)}$;

6.23. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsin\,4x}{5-5e^{-3x}}$;

6.24. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{ctgx-1}{sin\,4x}$;

6.25. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{ln\,x}{x-1}$;

6.26. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-x}{2\,sin\,x+x}$;

6.27. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{lnsin\,x}{(\pi-2x)^2}$;

6.28. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-a^{sin\,x}}{x^3}$;

6.29. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-2\,sin\,x}{cos\,3x}$;

6.30. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{cos^2x}-2\,tg\,x}{1+cos\,4x}$.

Задача 7. Дослідити методами диференціального числення функцію і, використовуючи результати дослідження, побудувати її графік.

7.1. $y=x^2+\frac{16}{x}$;

7.2. $y=\frac{x^3}{3(x+1)^2}$;

7.3. $y=\frac{x^3}{3(x+1)^2}$;

7.4. $y=\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$;

7.5. $y=\frac{8-x^3}{x^2}$;

7.6. $y=\frac{x}{3}+\frac{2}{x}$;

7.7. $y=\frac{x^4}{x^3-8}$;

7.8. $y=\frac{4+x^2}{x}$;

7.9. $y=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$;

7.10. $y=\frac{(x+1)^2}{4(x-2)^2}$;

7.11. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^2$;

7.12. $y=\frac{x^3-4}{x^2}$;

7.13. $y=\frac{4x}{(x+1)^2}$;

7.14. $y=\frac{x^2+2x-7}{x^2+2x-3}$;

7.15. $y=\frac{8(x-1)}{(x+1)^2}$;

7.16. $y=\frac{4x}{x^2-4}$;

7.17. $y=\frac{3x^4+1}{x^3}$;

7.18. $y=\frac{x^2-4x+1}{x-4}$;

7.19. $y=\frac{(x-1)^2}{x^2}$;

7.20. $y=\frac{4x}{(x+1)^2}$;

7.21. $y=\frac{x^2-6x+9}{(x-1)^2}$;

7.22. $y = \frac{4}{3+2x-x^2}$; **7.23.** $y = \frac{12-3x^2}{x^2+12}$; **7.24.** $y = \frac{2x^3+1}{x^2}$;

7.25. $y = \frac{9+6x-3x^2}{x^2-2x+13}$; **7.26.** $y = \frac{x^2-x+1}{x-1}$; **7.27.** $y = \frac{12x}{9+x^2}$;

7.28. $y = \frac{x^3-32}{x^2}$; **7.29.** $y = \frac{x^3}{9-x^3}$; **7.30.** $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

Тема 3. Невизначений інтерал

1. Поняття невизначеного інтеграла. Властивості невизначеного інтеграла

Означення 1. *Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на множині X ($x \in X$), якщо $F(x)$ є диференційовною на цій множині і $F'(x) = f(x)$.*

Означення 2. *Сукупність всіх первісних для заданої функції $f(x)$ називається невизначеним інтегралом і позначається $\int f(x)dx$, тут $f(x)$ – підінтегральна функція, вираз $f(x)dx$ – підінтегральний вираз.*

Диференціал dx обов'язково присутній у підінтегральному виразі, він вказує за якою змінною ведеться інтегрування, наприклад, $\int kf(z)dz$, робимо висновок, що z – змінна інтегрування, а k – стала, її можна винести за знак інтеграла. Все, що залежить від змінної інтегрування, за знак інтеграла виносити не можна.

Теорема. *Якщо $F(x)$ і $G(x)$ – дві первісні для заданої функції $f(x)$, $x \in (a, b)$, то існує така стала C, що $F(x) - G(x) = C$ або $F(x) = G(x) + C$.*

Доведення. Утворимо допоміжну функцію

$$\varphi(x) = F(x) - G(x).$$

Знайдемо $\varphi'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Отже, $\varphi'(x) = 0$, $x \in [a; b]$, а тому $\varphi(x) = C$ на $(a; b)$. □

Зауваження. *Теорема дозволяє знаходити невизначений інтеграл для заданої функції. Достатньо знайти одну з її первісних і додати довільну константу C.*

Тобто, якщо $F(x)$ – первісна $f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Властивості невизначеного інтеграла

1) $d\int f(x)dx = f(x)dx$; (диференціал від інтеграла дорівнює підінтегральному виразу);

2) $\int dF(x) = F(x) + C$;

3) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ – сталу k виносимо за знак інтеграла;

4) $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ – інтеграл суми чи різниці функцій дорівнює сумі чи різниці інтегралів;

5) Якщо відомо, що $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Відмітимо, що при інтегруванні ситуація набагато складніша, ніж при диференціюванні. Можемо інтегрувати досить "просту" елементарну функцію, але первісна для неї в елементарних функціях не існує.

Прикладами таких інтегралів є: $\int e^{x^2}dx$; $\int \frac{\sin x}{x}dx$; $\int \frac{\cos x}{x}dx$; $\int \frac{dx}{\ln x}$; $\int \cos x^2 dx$; $\int \sin x^2 dx$.

Таблиця первісних основних елементарних функцій

1. $\int 0dx = C$;
2. $\int 1dx = x + C$;
3. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$;
4. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$;
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$;
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;

8. $\int e^x dx = e^x + C;$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C;$

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C;$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C; \end{cases}$

12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \mathrm{arctg}x + C, \\ -\mathrm{arcctg}x + C; \end{cases}$

13. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C;$

14. $\int \sqrt{1+x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C;$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C;$

11*. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$

12*. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a}\mathrm{arcctg}\frac{x}{a} + C; \end{cases}$

13*. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C;$

15*. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

Приклад 1. Знайти інтеграли

1) $\int \frac{x+1}{x^2}dx = \int \left(\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = \ln|x| - \frac{1}{x} + C;$

2) $\int \frac{3-2\mathrm{ctg}^2 x}{\cos^2 x} = \int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{2\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}{\cos^2 x}\right)dx = 3\int \frac{dx}{\cos^2 x} - 2\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}dx = 3\mathrm{tg}x + 2\mathrm{ctg}x + C;$

3) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) dx = \int \left(x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{3}{2}}\right) dx = \int x^{-\frac{2}{3}} dx - \int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} - \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = 3x^{\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{1}{2}} + C = 3\sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$

Розв'язуючи ці приклади, користувались таблицею первісних, але це вдається не завжди відразу. Іноді (дуже часто) потрібно застосувати якісь перетворення, щоб звести інтеграли до табличних. У цьому випадку застосовують або методи інтегрування, або виділяють класи інтегровних функцій, або поєднують і те, і те.

2. Методи інтегрування

Є два методи інтегрування: заміною змінних та частинами.

I. Метод заміни змінних (або підстановки)

Нехай потрібно знайти $\int f(x)dx$, який не є табличним. У багатьох випадках за нову змінну вибираємо функцію від x: $t = \omega(x)$, щоб підінтегральний вираз зображався у вигляді

$$f(x)dx = g(\underbrace{\omega(x)}_{t}) \cdot \underbrace{\omega'(x)dx}_{dt}, \tag{1}$$

де $g(t)$ – більш зручна для інтегрування функція, ніж $f(x)$. Тоді достатньо знайти $\int g(t)dt = G(t)+C$, а тоді з нього підстановкою $t = \omega(x)$ отримати шуканий інтеграл. Зазвичай пишуть

$$\int f(x)dx = \int g(t)dt, \tag{2}$$

розуміючи, що у функції від t, яка представлена інтегралом справа, проведена вказана заміна змінних.

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int \sin^3 x \cos x dx$.

Розв'язання. Оскільки підінтегральний вираз містить $d\sin x = \cos x dx$, то, покладаючи заміну $t = \sin x$, перетворимо його до

вигляду:

$$\sin^3 x \cos x dx = \underbrace{\sin^3 x}_{g(t)} d \underbrace{\sin x}_{t} = t^3 dt.$$

Інтеграл $I = \int t^3 dt$ є табличним і тому $I = \dfrac{t^4}{4} + C$. Повернемось до змінної x, підставивши замість t вираз $\sin x$

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

Важливо пам'ятати, що обираючи підстановку $t = \omega(x)$, яка спрощує підінтегральний вираз, у його складі має бути множник $\omega'(x)dx$, який є диференціалом dt. У прикладі вдалість підстановки $t = \sin x$ зумовлена саме тим, що підінтегральний вираз містить множник $\cos x dx = dt$.

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int \sin^3 x dx$.

Розв'язання. Приклад повчальний тим, що тут заміна $t = \sin x$ не підійде саме через відсутність згаданого множника. Якщо його спробувати виділити, записавши $\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x dx$, то прийдемо до $-\sin^2 x d(\cos x)$, а отже заміну потрібно робити $t = \cos x$, тоді $-\sin^2 x = \underbrace{\cos^2 x}_{t^2} - 1$ і підставимо в інтеграл

$$\int \sin^3 x dx = \int -\sin^2 x d(\cos x) = \int \left(\cos^2 x - 1\right) d(\cos x) =$$

$$= \int \cos^2 x d(\cos x) - \int d\cos x = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$$

або

$$\int \sin^3 x dx = \int -\sin^2 x d(\cos x) = \int \left(t^2 - 1\right) dt = \frac{t^3}{3} - t + C,\ t = \cos x.$$

Іноді в підінтегральний вираз $f(x)dx$ безпосередньо підставляють замість x функцію $x = \varphi(t)$ від нової змінної t і в результаті

отримуємо вираз

$$f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt = g(t)dt.$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$.

Розв'язання. Оскільки під коренем різниця квадратів, тому зробимо тригонометричну підстановку $x = a\sin t$, тоді $\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} = a\sqrt{1 - \sin^2 t} = a\cos t$, $dx = a\cos t dt$, отже, $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = a^2\int \cos^2 t dt =$ (знизимо степінь косинуса $\cos^2 t = \dfrac{1 + \cos 2t}{2}$) $= a^2\int\left(\dfrac{1 + \cos 2t}{2}\right)dt = a^2\int \dfrac{1}{2}dt + \dfrac{a^2}{2}\int \cos 2t dt = \dfrac{a^2}{2}t + \dfrac{a^2}{2\cdot 2}\int \cos 2t d(2t) = \dfrac{a^2 t}{2} + \dfrac{a^2}{4}\sin 2t + C = a^2\left(\dfrac{t}{2} + \dfrac{\sin 2t}{4}\right) + C.$

Повернемось до змінної x: $t = \arcsin\dfrac{x}{a}$; $\dfrac{a^2}{4}\sin 2t = \dfrac{1}{2}\underbrace{a\sin t}_{x}\times$

$\times\underbrace{a\cos t}_{\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2}.$

Остаточно маємо $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \dfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{2}{a} + C.$

Приклад 5. Знайти інтеграли

а) $I_1 = \int e^{x^2}\cdot x dx$; б) $I_2 = \int \dfrac{x dx}{1 + x^2}$.

Розв'язання. В обох випадках підстановка $t = x^2$, $dt = 2x dx$, $x dx = \dfrac{1}{2}dt$, тоді

$$I_1 = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C;$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}t + C = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x^2 + C.$$

Зверніть увагу: дістали інтеграли від $\int g\left(x^2\right)dx^2$ з поправкою на сталу.

Приклад 6. Знайти інтеграли:

а) $I_1 = \int \frac{\ln x}{x}dx$; б) $I_2 = \int \frac{dx}{x\ln x}$; в) $I_3 = \int \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

Розв'язання. Всі вони мають вигляд

$$\int g(\ln x)\cdot\frac{dx}{x} = \int g(\ln x)d(\ln x),$$

тому

$$I_1 = \int \ln x d\ln x = \Big|\ln x = t\Big| = \int tdt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C;$$

$$I_2 = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \Big|\ln x = t\Big| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C;$$

$$I_3 = \int \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \Big|\ln x = t\Big| = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\ln x} + C.$$

Приклад 7. Знайти інтеграли:

$I_1 = \int \frac{\cos x dx}{1+\sin^2 x}$; $I_2 = \int \mathrm{tg}x dx$; $I_3 = \int \mathrm{ctg}x dx$.

Розв'язання. Це інтеграли вигляду $\int g(\sin x)\cos x dx = \int g(\sin x)d(\sin x)$ та $\int g(\cos x)\sin x dx = -\int g(\cos x)d(\cos x)$.

Маємо

$$I_1 = \int \frac{d\sin x}{1+\sin^2 x} = \Big|\sin x = t\Big| = \int \frac{dt}{1+t^2} = \mathrm{arctg}t + C =$$
$$= \mathrm{arctg}\sin x + C;$$

$$I_2 = \int \mathrm{tg}x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \underbrace{-\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}}_{-\int \frac{dt}{t}} = -\ln|\cos x| + C;$$

$$I_3 = \int \mathrm{ctg}x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \Big|\sin x = t\Big| = \int \frac{dt}{t} =$$

$$= \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C.$$

II. Метод інтегрування частинами

Нехай $u = f(x)$, $v = g(x)$ – дві функції від x, що мають неперервні похідні $u' = f'(x)$ та $v' = g'(x)$. Тоді за правилом диференціювання добутку $d(uv) = udv + vdu$ або $udv = d(uv) - vdu$. Для виразу $d(uv)$ первісною є uv $\left(\int d(uv) = uv + C\right)$, тому

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{3}$$

Це формула інтегрування частинами. Вона зводить інтегрування виразу $udv = uv'dx$ до інтегрування виразу $vdu = vu'dx$.

При інтегруванні за цим правилом потрібно розбити підінтегральний вираз на два множники u та $dv = v'dx$, з яких перший диференціюється, а другий інтегрується. Це правило використовується вкрай рідше, ніж заміна змінних.

Розглянемо найбільш вживані підінтегральні вирази та опишемо методику їх інтегрування частинами:

1) $\int P_n(x) \cdot \begin{bmatrix} e^{\alpha x} \\ \sin\beta x \\ \cos\beta x \\ a^x \end{bmatrix} dx$, то за u обираємо $P_n(x)$, а решта виразу, тобто $\begin{bmatrix} e^{\alpha x} \\ \sin\beta x \\ \cos\beta x \\ a^x \end{bmatrix} dx = dv$. Тут многочлен $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ степеня n. Обираючи його за u та виконуючи інтегрування частинами n разів, його степінь буде знижуватись на одиницю при кожному застосуванні правила (3).

Приклад 8. Знайти інтеграли

Розв'язання.

1) $I = \int x \sin x dx = \left[\begin{array}{l} u = x \text{ (многочлен I-го степеня)} \\ dv = \sin x dx \\ du = dx \\ v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array}\right] = -x\cos x - \int -\cos x dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C.$

2) $I = \int \left(x^2 + 2x\right) e^x dx = \left[\begin{array}{l} u = x^2 + 2x \text{ (многочлен II-го степеня, інтегруємо 2 рази)} \\ dv = e^x dx \\ du = (2x+2)dx \text{ (став I-го степеня)} \\ v = \int e^x dx = e^x \end{array}\right] =$

$\left(x^2 + 2x\right) e^x - \int (2x+2)e^x dx = \left[\begin{array}{l} u = 2x+2 \\ dv = e^x dx \\ du = 2dx \\ v = e^x \end{array}\right] = \left(x^2 + 2x\right) e^x - 2(x+1)e^x + \int 2e^x dx = e^x\left(x^2 + 2x - 2(x+1) + 2\right) + C = e^x x^2 + C.$

2) $\int P_n(x) \left[\begin{array}{c} \text{arctg}x \\ \arcsin x \\ \ln x \\ \log_a x \end{array}\right] dx$, то приймаємо $u = \left[\begin{array}{c} \text{arctg}x \\ \arcsin x \\ \ln x \\ \log_a x \end{array}\right]$, а $dv = P_n(x)dx$.

Приклад 9. Знайти інтеграл $\int x^3 \ln x dx$.

Розв'язання. $I = \int x^3 \ln x dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = x^3 dx \\ du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{x^4}{4} \end{array}\right] = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + C.$

Цікавими є інтеграли вигляду

3) $I_1 = \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$ та $I_2 = \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$. У цьому випадку $u = \begin{bmatrix} \cos \beta x \\ \sin \beta x \end{bmatrix}$; $dv = e^{\alpha x} dx$, а отже $v = \int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$. Формулу інтегрування частинами застосуємо двічі. Розглянемо I_1. Покладемо

$$\begin{aligned} u &= \cos \beta x \\ du &= -\beta \sin \beta x dx \\ dv &= e^{\alpha x} dx \\ v &= \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \end{aligned}$$

Отже, $I_1 = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \cos \beta x - \int \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \cdot (-\beta) \sin \beta x dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{\beta}{\alpha} \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx =$

Застосуємо формулу (3) ще раз до цього інтеграла

$$= \begin{bmatrix} u = \sin \beta x \\ du = \beta \cos \beta x dx \\ v = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \sin \beta x - \right.$$

$$\left. - \int \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \beta \cos \beta x dx \right) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{\beta}{\alpha^2} e^{\alpha x} \sin \beta x -$$

$$- \frac{\beta^2}{\alpha^2} \underbrace{\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx}_{I_1}.$$

Отримали рівняння для невідомого I_1:

$$I_1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} I_1 = e^{\alpha x} \left(\frac{1}{\alpha} \cos \beta x + \frac{\beta}{\alpha^2} \sin \beta x \right)$$

$$\alpha^2 \cdot I_1 \left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) = e^{\alpha x} \left(\frac{1}{\alpha} \cos \beta x + \frac{\beta}{\alpha^2} \sin \beta x \right) \cdot \alpha^2$$

$$I_1 = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x\right).$$

4) Інтеграл, який виражається рекурентною формулою

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n},\ n = 1,2,3,\ldots$$

Застосуємо до нього формулу (3), поклавши $u = \dfrac{1}{(x^2+a^2)^n}$; $dv = dx$, тоді $du = -\dfrac{2n\cdot x dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$, $v = x$. Отримаємо $I_n = \dfrac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \Big|$ додамо і віднімемо a^2 $\Big| = \dfrac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\displaystyle\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - 2a^2n\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$ або $I_n = \dfrac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2a^2nI_{n+1}$, звідки

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{a^2}I_n. \tag{4}$$

Остання формула зводить інтеграл I_{n+1} до знаходження I_n з індексом на одиницю меншим ($n+1-n=1$). Знаючи, що $I_1 = \displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}$, можемо знайти, що $I_2 = \dfrac{1}{2a^2}\cdot\dfrac{x^2}{x^2+a^2} + \dfrac{1}{2a^3}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a}$ (у формулі (4) поклали $n=1$).

Так можна знайти I_n для довільного натурального показника.

3. Основні класи функцій, інтегровних у скінченному вигляді

I. Інтегрування дробово-раціональних функцій вигляду

$$f(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}. \tag{5}$$

Тут $Q_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m+1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m$, а $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ – многочлени, причому $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$.

Поставимо завдання знайти інтеграл

$$\int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}dx. \tag{6}$$

Якщо показник $m < n$, то дріб (5) є правильним. Якщо ж $m \geq n$, то дріб (5) є неправильним і шляхом ділення чисельника на знаменник можемо виділити цілу частину і правильний дріб.

Приклад 1. Знайти інтеграл

$$I = \int \frac{x^5}{(x-1)^2\,(x^2-1)}dx.$$

Розв'язання.

$$I = \int \frac{x^5}{(x-1)^2\,(x^2-1)}dx = \int \frac{x^5}{(x^2-2x+1)\,(x^2-1)}dx =$$

$$= \int \frac{x^5}{x^4-x^2-2x^3+2x+x^2-1}dx = \int \frac{x^5}{x^4-2x^3+2x-1}dx.$$

$$\begin{array}{l|l} x^5+0\cdot x^4+0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0 & x^4-2x^3+2x-1 \\ \hline -\;\; x^5-2x^4 \qquad\qquad +2x^2-x & x+2 \\ \hline 0+2x^4-2x^2+x+0 & \\ -\;\; 2x^4-4x^3+4x-2 & \\ \hline 0+4x^3-2x^2-3x+2 & \end{array}$$

$$I = \int \left(x+2+\frac{4x^3-2x^2-3x+2}{x^4-2x^3+2x+1}\right)dx.$$

Бачимо, що $\displaystyle\int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}dx = \int \left(\text{частка} + \frac{\text{остача}}{\text{дільник}}\right)dx.$

Отже, нехай $m < n$. З алгебри відомо, що кожен многочлен може бути розкладений на множники:

$$P_n(x) = a_0\,(x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(x-x_i)^{k_i}\cdot\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\times$$

$$\times \ldots \cdot \left(x^2 + p_s x + q_s\right)^{l_s}, \tag{7}$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_i$ – корені рівняння $P_n(x) = 0$ відповідної кратності, причому $k_1 + k_2 + \ldots + k_i + 2l_1 + \ldots + 2l_s = n$. Отже, формулу (6) можна переписати у вигляді

$$I = \int \frac{Q_m(x)}{a_0 \left(x - x_1\right)^{k_1} \cdot \left(x - x_2\right)^{k_2} \cdot \ldots \cdot \left(x - x_i\right)^{k_i} \cdot \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{l_1} \cdot \ldots \cdot \left(x^2 + p_s x + q_s\right)^{l_s}} dx. \tag{8}$$

Тепер правильну дробово-раціональну функцію (8) з розкладеним знаменником розкладемо на прості доданки – прості дроби.

Правило 1) Якщо многочлен $P_n(x)$ має множник $\left(x - x_0\right)^k$, то йому відповідають рівно k елементарних доданків – простих дробів вигляду

$$\frac{A_1}{x - x_0} + \frac{A_2}{\left(x - x_0\right)^2} + \ldots + \frac{A_k}{\left(x - x_0\right)^k}. \tag{9}$$

Правило 2) Якщо у знаменнику присутній множник $\left(x^2 + p_0 x + q_0\right)^k$, причому дискримінант $D = p_0^2 - 4q_0 < 0$, то йому відповідають рівно k елементарних доданків:

$$\frac{M_1 x + N_1}{x^2 + p_0 x + q_0} + \frac{M_2 x + N_2}{\left(x^2 + p_0 x + q_0\right)^2} + \ldots + \frac{M_k x + N_k}{\left(x^2 + p_0 x + q_0\right)^k}. \tag{10}$$

У цих розкладах $A_1, A_2, \ldots, A_k, M_1, M_2, \ldots, M_k, N_1, N_2, \ldots, N_k$ – дійсні числа, які знаходяться, наприклад, методом невизначених коефіцієнтів.

З формул (9) та (10) бачимо, що інтегрування звелося до інтегрування дробів такого вигляду:

1) $\displaystyle\int \frac{A}{x - x_0} dx = A \int \frac{dx}{x - x_0} = A \int \frac{d\left(x - x_0\right)}{x - x_0} = \left| x - x_0 = t \right| = A \int \frac{dt}{t} = A \ln |t| + C = A \ln |x - x_0| + C.$

2) $\displaystyle\int \frac{A}{\left(x - x_0\right)^k} dx = A \int \left(x - x_0\right)^{-k} dx = A \int \left(x - x_0\right)^{-k} \times$

$$\times d\left(x-x_0\right)=A\cdot\frac{\left(x-x_0\right)^{-k+1}}{-k+1}+C=\frac{A}{1-k}\left(x-x_0\right)^{-k+1}+C.$$

3) $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}dx=(*)$

$x^2+px+q=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2-\dfrac{p^2}{4}+q=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+\left(q-\dfrac{p^2}{4}\right)$ – виділили повний квадрат. Позначимо $a^2=q-\dfrac{p^2}{4}>0$.

Заміна $x+\dfrac{p}{2}=t$, тоді $x=t-\dfrac{p}{2}$, $dx=dt$, а отже,

$$(*)=\int\frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+a^2}dt=M\int\frac{t-\frac{p}{2}}{t^2+a^2}dt+N\int\frac{dt}{t^2+a^2}=$$

$$=M\int\frac{tdt}{t^2+a^2}+\left(N-M\frac{p}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{M}{2}\int\frac{d\left(t^2+a^2\right)}{t^2+a^2}+$$

$$+\left(N-M\frac{p}{2}\right)\int\frac{dt}{t^2+a^2}=\frac{M}{2}\ln\left|t^2+a^2\right|+\left(N-M\frac{p}{2}\right)\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\left(N-M\frac{p}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)+C.$$

Повернемось до Прикладу 1. Знайдемо

$$I=\int\left(x+2+\frac{4x^3-2x^2-3x+2}{\left(x-1\right)^2\left(x^2-1\right)}\right)dx=\frac{x^2}{2}+2x+I_1+C.$$

Інтеграл $I_1=\displaystyle\int\frac{4x^3-2x^2-3x+2}{\left(x-1\right)^2\left(x^2-1\right)}dx=$

$$=\int\frac{4x^3-2x^2-3x+2}{\left(x-1\right)^2\left(x-1\right)(x+1)}dx=\int\frac{4x^3-2x^2-3x+2}{\left(x-1\right)^3\left(x+1\right)}dx=$$

$$=\int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{D}{x+1}\right)dx=(**).$$

Бачимо, що множнику $(x-1)^3$ має відповідати 3 дроби, а $(x+1)$ відповідає один дріб.

Щоб знайти числа A, B, C, D, скористаємось методом невизначених коефіцієнтів. Зведемо до спільного знаменника $(x-1)^3(x+1)$ підінтегральну функцію, записану через суму дробів. Маємо

$$A(x-1)^2(x+1)+B\left(x^2-1\right)+C(x+1)+D(x-1)^3=$$

$$=A\left(x^3+x^2-2x^2-2x+x+1\right)+Bx^2-B+Cx+C+$$

$$+D\left(x^3-3x^2+3x-1\right)=Ax^3-Ax^2-Ax+A+Bx^2-B+Cx+C+$$

$$+Dx^3-3Dx^2+3Dx-D=4x^3-2x^2-3x+2.$$

Дроби є рівними тоді, коли рівні їхні чисельники та знаменники.

Прирівняємо числа (коефіцієнти) біля відповідних степенів x:

$$\begin{aligned} x^3:&\ A+D=4\\ x^2:&\ -A+B-3D=-2\\ x:&\ -A+C+3D=-3\\ x^0:&\ A-D+C-B=2 \end{aligned}$$

Отримали систему 4-ох рівнянь з 4-ма невідомими.

$$\begin{cases} A+D=4 & (I)\\ -A+B-3D=-2 & (II)\\ -A+C+3D=-3 & (III)\\ A-D+C-B=2 & (IV) \end{cases} \Rightarrow$$

Додамо (II) та (III) рівняння

$$\Rightarrow \begin{cases} A+D=4\\ -2A+B+C=-5\\ A-D+C-B=2\\ -A+C+3D=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+D=4\\ -A-D+2C=-3\\ -A+C+3D=-3\\ A-D+C-B=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+D=4 \\ -4+2C=-3 \\ -A+C+3D=-3 \\ A-D+C-B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=\frac{1}{2} \\ 4D=1-\frac{1}{2} \\ A+D=4 \\ A-D+C-B=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C=\frac{1}{2} \\ D=\frac{1}{8} \\ A=\frac{31}{8} \\ B=\frac{31}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-2=\frac{9}{4}. \end{cases}$$

Знайдені числа A, B, C, D підставимо в (**)

$$(**)=\int \frac{31}{8}\cdot\frac{dx}{x-1}+\int \frac{9}{4}\cdot\frac{dx}{(x-1)^2}+\int \frac{dx}{2(x-1)^3}+\int \frac{1}{8}\cdot\frac{dx}{x+1}=$$

$$=\frac{31}{8}\int \frac{dx}{x-1}+\frac{9}{4}\int \frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^3}+\frac{1}{8}\int \frac{dx}{x+1}=$$

$$=\frac{31}{8}\ln|x-1|-\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{8}\ln|x+1|+C.$$

Остаточно маємо

$$I=\frac{x^2}{2}+2x+\frac{31}{8}\ln|x-1|-\frac{9}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x-1)^2}+\frac{1}{8\ln|x+1|}+C.$$

Розглянемо ще один дріб, який виникає при розкладі знаменника в формулі (8). Це дріб вигляду

4) $I=\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l}dx, \quad l=2,3,\ldots, \ D=p^2-4q<0.$

Як і у випадку 3) зробимо заміну $t=x+\frac{p}{2}$; $x=t-\frac{p}{2}$; $dx=dt$.

Оскільки, $x^2+px+q=x^2+2\cdot\frac{p}{2}\cdot x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)$ і $a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$, то

$$I=\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l}dx=\int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{(t^2+a^2)^l}dt=$$

$$= \int \frac{Mt + N - M \cdot \frac{p}{2}}{\left(t^2 + a^2\right)^l} dt = M \int \frac{t}{\left(t^2 + a^2\right)^l} dt + \left(N - M \cdot \frac{p}{2}\right) \times$$

$$\times \int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^l} = \frac{M}{2} \int \frac{d\left(t^2 + a^2\right)}{\left(t^2 + a^2\right)^l} + \left(N - M \cdot \frac{p}{2}\right) \int \frac{dt}{\left(t^2 + a^2\right)^l} =$$

$$= \frac{M}{2(1-l)\left(t^2 + a^2\right)^{l-1}} + \left(N - M \cdot \frac{p}{2}\right) \cdot I_l,$$

де I_l є інтегралом, який береться частинами за рекурентною формулою і описаний в 4) методу інтегрування частинами.

II. Інтегрування деяких виразів, які містять радикали вигляду

$$R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+k}}\right). \tag{11}$$

Далі домовимось буквою R позначати раціональну функцію своїх аргументів. Будемо розглядати підстановки, які приводять підінтегральний вираз до раціонального вигляду. Розглянемо інтеграл

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+k}}\right) dx, \tag{12}$$

де R – раціональна функція від двох аргументів, $m \in N$, a, b, c, k – дійсні сталі.

Покладемо

$$\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+k}} = t, \tag{13}$$

тоді $\dfrac{ax+b}{cx+k} = t^m$. Виразимо звідси x: $ax + b = t^m(cx + k) \Rightarrow$

$$\Rightarrow x\left(a - ct^m\right) = kt^m - b \Rightarrow x = \frac{kt^m - b}{a - ct^m}; \tag{14}$$

$$dx = \left(\frac{kt^m - b}{a - ct^m}\right)' dt = \frac{mkt^{m-1}\left(a - ct^m\right) + mct^{m-1}\left(kt^m - b\right)}{\left(a - ct^m\right)^2} dt =$$

$$= \frac{makt^{m-1} - mkct^{2m-1} + mckt^{2m-1} - mbct^{m-1}}{(a - ct^m)^2} dt =$$

$$= \frac{mt^{m-1}(ak - bc)}{(a - ct^m)^2} dt. \tag{15}$$

Отже, внаслідок заміни змінних отримаємо інтеграл від раціональної функції

$$\int R\left(\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+k}}, x\right) dx = \int R\left(t, \frac{kt^m - b}{a - ct^m}\right) \cdot m\frac{(ak - bc)t^{m-1}}{(a - ct^m)^2} dt,$$

$$ak \neq bc.$$

Приклад 2. Знайти інтеграл

$$I = \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}.$$

Розв'язання. Заміною

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t; \tag{16}$$

$$\frac{1-x}{1+x} = t^2 \Rightarrow 1 - x = t^2(1+x) \Rightarrow x\left(t^2+1\right) = 1 - t^2,$$

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{17}$$

і

$$dx = \frac{-2t\left(1+t^2\right) - \left(1-t^2\right) \cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{-2t - 2t^3 - 2t + 2t^3}{(1+t^2)^2} dt =$$

$$= -\frac{4t}{(1+t^2)^2} dt,$$

будемо мати

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x} = \int t \cdot \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{1+t^2}{1-t^2} dt = -4 \int \frac{t^2}{(1-t^2)(1+t^2)} dt =$$

$$= -4\int \frac{t^2}{(1-t)(1+t)\left(1+t^2\right)}dt = -4\int\left(\frac{A}{1-t}+\frac{B}{1+t}+\frac{Ct+D}{\left(1+t^2\right)}\right)dt =$$

$$= -4\int \frac{A(1+t)\left(1+t^2\right)+B(1-t)\left(1+t^2\right)+(Ct+D)\left(1-t^2\right)}{(1-t)(1+t)\left(1+t^2\right)}dt = (*)$$

Прирівняємо чисельники дробів

$$A\left(1+t^2+t+t^3\right)+B\left(1+t^2-t-t^3\right)+Ct-Ct^3+D-Dt^2 =$$

$$= t^2+0\cdot t^3+0\cdot t+0$$

$$\begin{array}{r} t^3: \\ t^2: \\ t: \\ t^0: \end{array}\left\{\begin{array}{l} A-B-C=0 \\ A+B-D=1 \\ A-B+C=0 \\ A+B+D=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=B \\ 2A+2B=1 \\ A-B-C=0 \\ A+B+D=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=\frac{1}{4} \\ B=\frac{1}{4} \\ C=0 \\ D=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$(*) = -4\left(\frac{1}{4}\int\frac{dt}{1-t}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{1+t}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}\right) =$$

$$= -\int\frac{dt}{1-t}-\int\frac{dt}{1+t}+2\int\frac{dt}{1+t^2} = \ln|1-t|-\ln|1+t|+2\operatorname{arctg}t+C =$$

$$= \ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+2\operatorname{arctg}t+C = \ln\left|\frac{1-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C =$$

$$= \ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.$$

Зауваження. До інтеграла (12) зводяться більш загальні інтеграли вигляду

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+k}\right)^r,\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+k}\right)^s\right)dx, \qquad (18)$$

де $r,\ldots,s$ – раціональні числа. Потрібно звести ці показники до спільного знаменника m і підстановка $\sqrt[m]{\dfrac{ax+b}{cx+k}}=t$, де m – найменше спільне кратне знаменників дробів $r,\ldots,s$.

III. Інтегрування біноміальних диференціалів

Біноміальними називають підінтегральні вирази вигляду

$$x^m (a + bx^n)^p \, dx, \tag{19}$$

де $a, b \in \mathbb{R}$, показники m, n, p – раціональні числа (дроби). Виясним, коли вираз (19) інтегрується в скінченному вигляді.

Є 3 випадки, які описав П. Чебишев.

1) Нехай у виразі (19) p – ціле число, тоді підстановкою $x = t^r$, де $r =$ НСК (знаменників дробів m та n).

У цьому випадку відразу приходимо до дробово-раціональної функції. Справді, $dx = rt^{r-1}dt$, тоді

$$x^m (a + bx^n)^p \, dx = t^{mr} (a + bt^{nr})^p \cdot rt^{r-1}dt = rt^{r(m+1)-1} (a + bt^{nr})^p \, dt.$$

Приклад 3. Знайти інтеграл

$$I = \int \sqrt[3]{x} \left(1 + \sqrt{x}\right)^2 dx.$$

Розв'язання. Бачимо, що $m = \dfrac{1}{3}$, $n = \dfrac{1}{2}$, $p = 2$. У нас p – ціле, НСК$(3, 2) = 6$, тому $r = 6$. Отже, заміна $x = t^6$, $dx = 6t^5dt$. Підставимо в I отримуємо

$$\int \sqrt[3]{x} \left(1 + \sqrt{x}\right)^2 dx = \int \left(t^6\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 + \left(t^6\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 6t^5dt = \int t^2 \left(1 + t^3\right)^2 \cdot 6t^5dt =$$

$$= 6 \int t^7 \left(1 + 2t^3 + t^6\right) dt = 6 \int t^7dt + 12 \int t^{10}dt + 6 \int t^{13}dt =$$

$$= 6 \cdot \frac{t^8}{8} + 12 \cdot \frac{t^{11}}{11} + 6 \cdot \frac{t^{14}}{14} + C = \frac{3}{4}t^8 + \frac{12}{11}t^{11} + \frac{3}{7}t^{14} + C, \; t = \sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{6}}.$$

2) Нехай p – не ціле (дріб), але $\dfrac{m+1}{n}$ – ціле число. Тоді підстановка

$$a + bx^n = t^s, \tag{20}$$

де s – знаменник раціонального p.

Приклад 4. Знайти інтеграл

$$I = \int x^5 \cdot \sqrt[3]{(1+x^3)^2}dx = \int x^5 \cdot \left(1+x^3\right)^{\frac{2}{3}} dx.$$

Розв'язання. Тут $m = 5$, $n = 3$, $p = \dfrac{2}{3}$ – раціональне, знаменником p є число 3. Утворимо число $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{5+1}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$ – ціле число. Отже, підстановка $\sqrt[3]{1+x^3} = t \Rightarrow 1+x^3 = t^3$; $x^3 = t^3 - 1$; $x = \left(t^3-1\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow dx = \dfrac{1}{3}\left(t^3-1\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3t^2dt = t^2\left(t^3-1\right)^{-\frac{2}{3}} dt$. Підставимо знайдене в I:

$$I = \int \left(\left(t^3-1\right)^{\frac{1}{3}}\right)^5 t^2 \cdot t^2\left(t^3-1\right)^{-\frac{2}{3}} dt = \int \left(t^3-1\right)t^4dt =$$

$$= \int \left(t^7 - t^4\right) dt = \frac{t^8}{8} - \frac{t^5}{5} + C,\ t = \sqrt[3]{1+x^3}.$$

3) Нехай p, $\dfrac{m+1}{n}$ – не цілі, а $\dfrac{m+1}{n} + p$ – ціле число, тоді підстановка

$$t = \sqrt[s]{\frac{a+bx^n}{x^n}}, \tag{21}$$

де s – знаменник раціонального p.

Приклад 5. Знайти інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \int \left(1+x^3\right)^{-\frac{1}{3}} dx.$$

Розв'язання. Маємо, що $m = 0$, $n = 3$, $p = -\dfrac{1}{3}$. Утворимо спочатку $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{0+1}{3} = \dfrac{1}{3}$ – не ціле, тому розглянемо $\dfrac{m+1}{n} + p = \dfrac{1}{3} + \left(-\dfrac{1}{3}\right) = 0$ – ціле число.

Підстановкою (21) прийдемо до

$$t = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{x^3}};\ \frac{1+x^3}{x^3} = t^3 \Rightarrow x^3\left(t^3-1\right) = 1 \Rightarrow$$

$$x^3 = \frac{1}{t^3-1} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{t^3-1}} = \left(t^3-1\right)^{-\frac{1}{3}};$$

$$dx = -\frac{1}{3}\left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{3}} \cdot 3t^2 dt.$$

Підставимо в I:

$$\int \left(1+\frac{1}{t^3-1}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(-\frac{1}{3}\left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{3}}\right) \cdot 3t^2 dt = -\int \left(\frac{t^3-1+1}{t^3-1}\right)^{-\frac{1}{3}} \times$$

$$\times \left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{3}} t^2 dt = -\int t^{-1} \cdot t^2 \cdot \left(t^3-1\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(t^3-1\right)^{-\frac{4}{3}} dt =$$

$$= -\int \frac{t}{t^3-1} dt = -\int \left(\frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+1}\right) dt = (*)$$

$$A\left(t^2+t+1\right) + Bt^2 - Bt + Ct - C = t + 0 \cdot t^2 + 0$$

$$\begin{array}{r} t^2: \\ t: \\ t^0: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A+B=0 \\ A-B+C=1 \\ A-C=0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \\ C=\frac{1}{3} \end{array} \right.$$

$$(*) = -\left(\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t-1} + \int \frac{-\frac{1}{3}t+\frac{1}{3}}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} dt\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{3}\int \frac{t dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

Заміна $t+\frac{1}{2} = z$, $t = z-\frac{1}{2}$, $dt = dz$

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{d(t-1)}{t-1} - \frac{1}{3}\int \frac{dz}{z^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{3}\int \frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)dz}{z^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = (**)$$

$$\int \frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)dz}{z^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(z^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)}{z^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|z^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right| - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2z}{\sqrt{3}} + C$$

$$(**) = -\frac{1}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2z}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6}\ln\left|z^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right| - \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2z}{3} + C =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2z}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6}\ln\left|z^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right| + C =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C,\ t = \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}.$$

IV. Інтегрування квадратичних ірраціональностей підстановками Ейлера

Розглянемо клас інтегралів вигляду

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx. \tag{22}$$

Припускається, що квадратний тричлен не має рівних коренів (інакше корінь добувся б і отримали б раціональну функцію). Є три підстановки, які називають підстановками Ейлера, за допомогою яких інтеграл зводиться до інтеграла від раціональної функції.

Перша підстановка застосовується, якщо у виразі (22) число $a > 0$, тоді

$$t = \sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{a}x \text{ або } t - \sqrt{a}x = \sqrt{ax^2+bx+c}. \tag{23}$$

Піднесемо до квадрату ліву і праву частини рівності (23). Маємо

$$t^2 = ax^2+bx+c+ax^2+2\sqrt{ax^2+bx+c}\cdot\sqrt{a}x,$$

$$t^2 - bx - c = 2ax^2 + 2\sqrt{a}x\sqrt{ax^2+bx+c},$$

$$t^2 - bx - c = 2\sqrt{a}x\left(\sqrt{a}x + \sqrt{ax^2+bx+c}\right),$$

$t^2 - bx - c = 2\sqrt{a}xt$ або виразимо x: $t^2 - c = x\,(2\sqrt{a}t + b)$, звідки

$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b}. \tag{24}$$

Знайдемо

$$dx = \frac{2t\,(2\sqrt{a}t + b) - \left(t^2 - c\right) \cdot 2\sqrt{a}}{\left(2\sqrt{a}t + b\right)^2} dt =$$

$$= \frac{4\sqrt{a}t^2 + 2bt - 2\sqrt{a}t^2 + 2\sqrt{a}c}{\left(2\sqrt{a}t + b\right)^2} dt = 2\frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{\left(2\sqrt{a}t + b\right)^2} dt. \tag{25}$$

Цінність підстановки Ейлера саме в тому, що відносно x отримується лінійне рівняння, а разом з нею і радикал $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ виражається раціонально через t. Якщо отримані вирази для x – вираз (24), а для dx – вираз (25) підставити в (22), будемо інтегрувати раціональну функцію від t. У результаті, повернемося до x, покладаючи $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{a}x$.

Приклад 6. Знайти інтеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 + x + 1}} = I.$

Розв'язання. Бачимо, що $ax^2 + bx + c = x^2 + x + 1$ і $a = 1 > 0$, крім того, дискримінант $D = 1 - 4 = -3 < 0$. Тому застосуємо першу підстановку Ейлера. Згідно з формулою (23) маємо $t = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$, тоді $\sqrt{x^2 + x + 1} = t - x$. Піднесемо до квадрату $x^2 + x + 1 = t^2 - 2tx + x^2$, звідки $x(1 + 2t) = t^2 - 1$, звідки

$$x = \frac{t^2 - 1}{1 + 2t}, \tag{26}$$

а

$$dx = \frac{2t(1 + 2t) - \left(t^2 - 1\right) \cdot 2}{\left(1 + 2t\right)^2} dt = \frac{2t + 4t^2 - 2t^2 + 2}{\left(1 + 2t\right)^2} dt =$$

$$= \frac{2\left(t^2 + t + 1\right)}{\left(1 + 2t\right)^2} dt. \tag{27}$$

Підставимо (26) і (27) в I. Маємо

$$I=\int\frac{2\left(t^2+t+1\right)}{\left(1+2t\right)^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{t^2-1}{1+2t}-1\right)\left(t-\frac{t^2-1}{1+2t}\right)}dt=$$

$$=2\int\frac{t^2+t+1}{\left(1+2t\right)^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{t^2-1-1-2t}{1+2t}\right)\left(\frac{2t^2+t-t^2+1}{1+2t}\right)}dt=$$

$$=2\int\frac{t^2+t+1}{\left(1+2t\right)^2}\cdot\frac{\left(1+2t\right)^2}{\left(t^2-2t-2\right)\left(t^2+t+1\right)}dt=2\int\frac{dt}{t^2-2t-2}=(*)$$

$$t^2-2t-2=0;$$
$$D=4-4\cdot(-2)=12=\left(2\sqrt{3}\right)^2;$$
$$t_1=\tfrac{2+2\sqrt{3}}{2}=1+\sqrt{3};$$
$$t_2=\tfrac{2-2\sqrt{3}}{2}=1-\sqrt{3}.$$

$$(*)=2\int\frac{dt}{\left(t-\left(1+\sqrt{3}\right)\right)\left(t-\left(1-\sqrt{3}\right)\right)}=$$

$$=2\int\frac{dt}{\left(t-1-\sqrt{3}\right)\left(t-1+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=2\int\left(\frac{A}{t-1-\sqrt{3}}+\frac{B}{t-1+\sqrt{3}}\right)dt=(**)$$

$$A\left(t-1+\sqrt{3}\right)+B\left(t-1-\sqrt{3}\right)=1$$
$$At-A+A\sqrt{3}+Bt-B-B\sqrt{3}=1+0\cdot t$$
$$\begin{array}{r}t:\\ t^0:\end{array}\left\{\begin{array}{l}A+B=0\\ A\sqrt{3}-B\sqrt{3}-A-B=1\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}A+B=0\\ A\sqrt{3}-B\sqrt{3}-(A+B)=1\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}A=-B\\ A-B=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}A=-B\\ B=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}A=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\\ B=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\end{array}\right.$$

$$(**) = 2\int \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{dt}{t-1-\sqrt{3}} + 2\int -\frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{dt}{t-1+\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d\left(t-1-\sqrt{3}\right)}{t-1-\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d\left(t-1+\sqrt{3}\right)}{t-1+\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\ln \left| t-1-\sqrt{3} \right| - \ln \left| t-1+\sqrt{3} \right| \right) + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+x+1}+x-1-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+x+1}+x-1+\sqrt{3}} \right| + C.$$

Друга підстановка Ейлера використовується, якщо $c > 0$. У цьому випадку підстановка

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c} \text{ або } \sqrt{ax^2+bx+c} = xt - \sqrt{c}. \quad (28)$$

Піднесемо до квадрату $ax^2+bx+c = x^2t^2 + 2\sqrt{c}tx + c$. Винесемо x: $(ax+b)\cdot x = \left(t^2x + 2\sqrt{c}t\right)x$, скоротимо на нього, тоді $ax + b = t^2x + 2\sqrt{c}t$ або $x\left(a-t^2\right) = 2\sqrt{c}t - b$, звідки $x = \dfrac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}$. Знайдемо

$$dx = \frac{2\sqrt{c}\left(a-t^2\right) - (2\sqrt{c}t-b)\cdot(-2t)}{\left(a-t^2\right)^2} dt =$$

$$= \frac{2a\sqrt{c} - 2\sqrt{c}t^2 + 4\sqrt{c}t^2 - 2bt}{\left(a-t^2\right)^2} dt = 2\frac{\sqrt{c}t^2 - bt + a\sqrt{c}}{\left(a-t^2\right)^2} dt. \quad (29)$$

Підставивши (28) і (29) в (22), отримаємо раціональний вираз від t, проінтегруємо і в результаті покладемо $t = \dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x}$.

Зауваження 1. *Випадки $a > 0$, $c > 0$ зводяться один до одного підстановкою $x = \dfrac{1}{z}$. Тому другою підстановкою можна і не користуватись.*

Третя підстановка Ейлера використовується тоді, коли квадратний тричлен має два дійсні різні корені x_1 і x_2. Його можемо розкласти на множники

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,.$$

Покладемо

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t\,(x - x_1)\,. \tag{30}$$

Піднесемо до квадрату вираз (30), дістанемо $ax^2 + bx + c = t^2\,(x - x_1)^2$. Оскільки $a\,(x - x_1)\,(x - x_2) = t^2\,(x - x_1)^2$, то скоротимо на $(x - x_1)$. Маємо

$$a\,(x - x_2) = t^2\,(x - x_1)\,.$$

Виразимо звідси x:

$$x\left(a - t^2\right) = ax_2 - t^2x_1 \Rightarrow x = \frac{ax_2 - t^2x_1}{a - t^2}. \tag{31}$$

Знайдене x підставимо у праву частину (30), маємо

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t\left(\frac{ax_2 - t^2x_1}{a - t^2} - x_1\right) =$$

$$= \frac{ax_2 - t^2x_1 - ax_1 + t^2x_1}{a - t^2} \cdot t = \frac{a\,(x_2 - x_1)\,t}{a - t^2}.$$

Знайдемо

$$dx = \left(\frac{ax_2 - t^2x_1}{a - t^2}\right)' dt = \frac{-2tx_1\left(a - t^2\right) - \left(ax_2 - t^2x_1\right) \cdot (-2t)}{\left(a - t^2\right)^2} dt =$$

$$= \frac{-2atx_1 + 2t^3x_1 + 2atx_2 - 2t^3x_1}{\left(a - t^2\right)^2} dt = \frac{2a\,(x_2 - x_1)\,t}{\left(a - t^2\right)^2} dt. \tag{32}$$

V. Інтегрування раціональних виразів, які містять тригонометричні та показникові функції

1) Інтегрування диференціалів $R(\sin x, \cos x)dx$

Універсальна тригонометрична підстановка

$$t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}\ (-\pi < x < \pi). \tag{33}$$

Виразимо $\sin x$ та $\cos x$ через тангенс половинного кута

$$\sin x = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

З (33) знаходимо $\dfrac{x}{2} = \mathrm{arctg}t$ або $x = 2\mathrm{arctg}t$.

Знайдемо $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$. Отже,

$$R(\sin x, \cos x)dx = R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$$

і бачимо, що інтегрування тригонометричного виразу звелося до інтегрування дробово-раціональної функції.

Крім універсальної тригонометричної підстановки при інтегруванні $R(\sin x, \cos x)dx$ використовуються такі міркування і підстановки

2) *Якщо виконується рівність* $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ *або, по-іншому, функція* R *є непарною відносно* $\sin x$*, тоді використовуємо*

$$t = \cos x. \tag{34}$$

3) *Якщо виконується рівність* $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ *або, по-іншому,* R *є непарною відносно* $\cos x$*, то підстановка*

$$t = \sin x. \tag{35}$$

4) *Якщо виконується рівність* $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ *або, по-іншому, функція* R *є парною відносно* $\sin x$ *та* $\cos x$*, тоді підстановка*

$$t = \mathrm{tg}x\ (t = \mathrm{ctg}x),\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\ (0 < x < \pi). \tag{36}$$

Приклад 7. Знайти інтеграл $I = \int \dfrac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx$.

Розв'язання. Тут

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x},$$

функція $\sin x$ входить у першому та третьому степені, тому

$$R(-\sin x, \cos x) = \frac{(-\sin x) + (-\sin x)^3}{\cos 2x} = -\frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x},$$

а отже, R змінює знак при зміні знаку $\sin x$, тому є непарною відносно $\sin x$ і згідно з 2) використовується підстановка $t = \cos x$. Виразимо через t усі члени підінтегрального виразу: $\sin x = \sqrt{1-t^2}$, $\sin^3 x = \left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}$, $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = t^2 - \left(\sqrt{1-t^2}\right)^2$, $dt = -\sin x dx \Rightarrow \dfrac{dt}{-\sqrt{1-t^2}} = dx$. Підставимо все в I:

$$I = \int \frac{\sqrt{1-t^2} + \sqrt{(1-t^2)^3}}{t^2 - (1-t^2)} \cdot \left(-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right) = -\int \frac{1+1-t^2}{2t^2-1} dt =$$

$$= -\int \frac{2-t^2}{2t^2-1} dt = \int \frac{t^2-2}{2t^2-1} dt = \frac{1}{2}\int dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{2t^2-1} =$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \int \frac{d\sqrt{2}t}{\left(\sqrt{2}t\right)^2 - 1} = \left|\sqrt{2}t = z\right| = \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \int \frac{dz}{z^2-1} =$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + C = \frac{1}{2}\cos x - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t\sqrt{2}-1}{t\sqrt{2}+1}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2}\cos x - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1}\right| + C.$$

Приклад 8. $I = \int \cos^3 x \sin x dx$.

Розв'язання. $R(\cos x, \sin x) = \cos^3 x \cdot \sin x$, крім того бачимо, що R не змінює знаку при одночасній зміні знаку біля $\cos x$ та $\sin x$. Справді, $R(-\cos x, -\sin x) = (-\cos x)^3 \cdot (-\sin x) = -\left(\cos^3 x\right) \times$ $\times(-\sin x) = \cos^3 x \cdot \sin x = R(\cos x, \sin x)$. Отже, згідно з 4) використовуємо підстановку $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$. Тому маємо

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}; \quad \sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$I = \int \frac{1}{\left(\sqrt{1+t^2}\right)^3} \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt = \int \frac{t}{(1+t^2)^3} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(t^2+1\right)}{(1+t^2)^3} = \left| t^2+1 = z \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^3} = \frac{1}{2} \int z^{-3} dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{z^{-2}}{-2} + C =$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z^2} + C = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1+t^2)^2} + C = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)^2} + C =$$

$$= -\frac{1}{4} \cos^4 x + C.$$

II спосіб.

$$I = \int \cos^3 x \sin x dx = -\int \cos^3 x d(\cos x) = \left| \cos x = t \right| =$$

$$= -\int t^3 dt = -\frac{t^4}{4} + C = -\frac{1}{4} \cos^4 x + C.$$

Тут така заміна, бо підінтегральний вираз містить і функцію, і її похідну.

Питання для самоконтролю

1. Дайте означення первісної та невизначеного інтеграла для функції.

2. Сформулюйте і доведіть теорему про зв'язок всіх первісних для функції.

3. Наведіть властивості невизначеного інтеграла.

4. Повторіть таблицю інтегралів основних елементарних функцій.

5. Пригадайте, як знаходити невизначений інтеграл методом заміни змінної.

6. Запишіть формулу інтегрування частинами у невизначеному інтегралі. Опишіть способи вибору частин залежно від вигляду підінтегральної функції.

7. Опишіть метод невизначених коефіцієнтів для розкладу дробово-раціональної функції на суму елементарних дробів.

8. Які знаєте методи інтегрування елементарних дробів?

9. Складіть алгоритм інтегрування дробово-раціональної функції.

10. Який вигляд біноміального диференціала та як його інтегрувати?

11. Для інтегрування яких функцій використовуються підстановки Ейлера?

12. Опишіть методи інтегрування виразів, що містять тригонометричні функції.

Завдання для самостійної роботи

Задача 8. Знайти інтеграли.

8.1.

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$. б) $\int sin\, x \cdot cos\, x\, dx$. в)$\int (2x+7)^{10} dx$.

г) $\int \frac{dx}{3x^2+4}$. д)$\int (3^x+1)^2\, dx$.

8.2.

а) $\int \frac{dx}{2x^2+3}$. б) $\int \left(\sqrt{2x+1}-1\right)(2x+1)dx$. в) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x+1}}$.

г) $\int \frac{x^2 dx}{x^2-4}$. д) $\int \frac{xdx}{x+4}$.

8.3.

а) $\int \frac{dx}{3x^2-4}$. б) $\int \frac{cos\, 2x}{cos^2 x \cdot sin^2 x} dx$. в) $\int \frac{dx}{(2x+3)^5}$.

г)$\int \frac{x^2+1}{x^2+4} dx$. д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

8.4.

а) $\int \frac{dx}{2^{3x-1}}$. б) $\int ctg\left(\frac{x}{2}+1\right) dx$. в) $\int \frac{dx}{x^2(1-x^2)}$.

г) $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$. д) $\int \frac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}{x} dx$.

8.5.

а) $\int 3^{-2x+1} dx$. б) $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$. в) $\int sin^2 \frac{x}{2} dx$.

г) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5x-1}}$. д) $\int \frac{2x-1}{x-2} dx$.

8.6.

а) $\int tg\, \frac{x}{3} dx$. б) $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt[3]{x}} dx$. в) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+1}}$.

г) $\int \frac{4^x-1}{2^x} dx$. д) $\int \frac{x+2}{2x-1} dx$.

8.7.

а) $\int \frac{dx}{sin^2\, 5x}$. б) $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx$. в) $\int \sqrt[3]{3x+2} dx$.

г) $\int \frac{4x+1}{2x+3} dx$. д) $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$.

8.8.

а) $\int \frac{dx}{3x+2}$. б) $\int \frac{dx}{cos\, 2x + sin^2 x}$. в) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$.

г) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x} dx$. д) $\int \frac{dx}{3-x^2-2x}$.

8.9.

а) $\int \sqrt{5x-3} dx$. б) $\int \frac{dx}{2x^2-1}$. в) $\int \frac{dx}{7x-2}$.

г) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$. д) $\int 5^{3x-5}dx$.

8.10.

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+2}}$. б) $\int tg(2x+1)dx$. в) $\int cos^2\frac{x}{4}dx$.

г) $\int \frac{dx}{x^2-4x+3}$. д) $\int \frac{2x+3}{x-1}dx$.

8.11.

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$. б) $\int ctg(2x-1)dx$. в) $\int(3x-2)^5dx$.

г) $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}dx$. д) $\int \frac{3^{4x}+2}{3^x}dx$.

8.12.

а) $\int \frac{dx}{5x^2-3}$. б) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx$. в) $\int \frac{dx}{(3x-1)^7}$.

г) $\int \frac{\left(2+\sqrt{x}\right)^2}{x}dx$. д) $\int \frac{dx}{cos^2\frac{x}{2}}$.

8.13.

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}}$. б) $\int(2^x-3)^2dx$. в) $\int \frac{dx}{2x^2-3}$.

г) $\int \frac{3x-1}{x+2}dx$. д) $\int \frac{dx}{sin^2(3x-1)}$.

8.14.

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2+2x}}$. б) $\int(3x+2)\sqrt{3x}dx$. в) $\int \frac{dx}{3x^2+1}$.

г) $\int \frac{dx}{5x-7}$. д) $\int \frac{dx}{x^2+2x-3}$.

8.15.

а) $\int \frac{3+cos^2 x}{sin^2 x}dx$. б) $\int \sqrt{2x-5}dx$. в) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-1}}$.

г) $\int 3^{2x}\cdot 2^{2x+1}dx$. д) $\int \frac{5x+4}{x-3}dx$.

8.16.

а) $\int \frac{(4+x)^2}{x\sqrt{x}}dx$. б) $\int \frac{sin^2 2x-4}{cos^2 2x}dx$. в) $\int \frac{dx}{9x^2+5}$.

г) $\int \frac{dx}{5^{3x+4}}$. д) $\int \frac{x^2+5}{x^2-2}dx$.

8.17.

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$. б) $\int sin\,x\cdot cos\,x\,dx$. в) $\int(2x+7)^{10}dx$.

г) $\int \frac{dx}{3x^2+4}$. д) $\int(3^x+1)^2\,dx$.

8.18.

а) $\int \frac{dx}{2x^2+3}$. б) $\int\left(\sqrt{2x+1}-1\right)(2x+1)dx$. в) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x+1}}$.

г) $\int \frac{x^2dx}{x^2-4}$. д) $\int \frac{xdx}{x+4}$.

8.19.

а) $\int \frac{dx}{3x^2-4}$. б) $\int \frac{cos\,2x}{cos^2\,x\cdot sin^2\,x}\,dx$. в) $\int \frac{dx}{(2x+3)^5}$.

г) $\int \frac{x^2+1}{x^2+4}\,dx$. д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

8.20.

а) $\int \frac{dx}{2^{3x-1}}$. б) $\int ctg\left(\frac{x}{2}+1\right)dx$. в) $\int \frac{dx}{x^2(1-x^2)}$.

г) $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$. д) $\int \frac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}{x}\,dx$.

8.21.

а) $\int 3^{-2x+1}dx$. б) $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx$. в) $\int sin^2\,\frac{x}{2}\,dx$.

г) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5x-1}}$. д) $\int \frac{2x-1}{x-2}\,dx$.

8.22.

а) $\int tg\,\frac{x}{3}\,dx$. б) $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt[3]{x}}\,dx$. в) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+1}}$.

г) $\int \frac{4^x-1}{2^x}\,dx$. д) $\int \frac{x+2}{2x-1}\,dx$.

8.23.

а) $\int \frac{dx}{sin^2\,5x}$. б) $\int \frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}\,dx$. в) $\int \sqrt[3]{3x+2}dx$.

г) $\int \frac{4x+1}{2x+3}\,dx$. д) $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$.

8.24.

а) $\int \frac{dx}{3x+2}$. б) $\int \frac{dx}{cos\,2x+sin^2\,x}$. в) $\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}\,dx$.

г) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}\,dx$. д) $\int \frac{dx}{3-x^2-2x}$.

8.25.

а) $\int \sqrt{5x-3}dx$. б) $\int \frac{dx}{2x^2-1}$. в) $\int \frac{dx}{7x-2}$.

г) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$. д) $\int 5^{3x-5}dx$.

8.26.

а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+2}}$. б) $\int tg(2x+1)dx$. в) $\int cos^2\,\frac{x}{4}\,dx$.

г) $\int \frac{dx}{x^2-4x+3}$. д) $\int \frac{2x+3}{x-1}dx$.

8.27.

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}$. б) $\int ctg(2x-1)dx$. в) $\int (3x-2)^5 dx$.

г) $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}dx$. д) $\int \frac{3^{4x}+2}{3^x}dx$.

8.28.

а) $\int \frac{dx}{5x^2-3}$. б) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}dx$. в) $\int \frac{dx}{(3x-1)^7}$.

г) $\int \frac{\left(2+\sqrt{x}\right)^2}{x}dx$. д) $\int \frac{dx}{cos^2\frac{x}{2}}$.

8.29.

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}}$. б) $\int (2^x-3)^2 dx$. в) $\int \frac{dx}{2x^2-3}$.

г) $\int \frac{3x-1}{x+2}dx$. д) $\int \frac{dx}{sin^2(3x-1)}$.

8.30.

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2+2x}}$. б) $\int (3x+2)\sqrt{3x}dx$. в) $\int \frac{dx}{3x^2+1}$.

г) $\int \frac{dx}{5x-7}$. д) $\int \frac{dx}{x^2+2x-3}$.

Задача 9. Знайти інтеграли.

9.1.

а) $\int \frac{sin\,5x}{\sqrt[3]{cos\,5x}}dx$, б) $\int x\ cos\,3\,xdx$, в) $\int \frac{(3x+13)}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$, г) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+8}}$,

д) $\int \frac{2x-3}{x^2+x+5}dx$, *е*) $\int \frac{dx}{2+tgx}$.

9.2.

а) $\int \frac{3x^2+e^x}{x^3+e^x}dx$, б) $\int x\ e^{-5x}dx$, в) $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx$, г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$,

д) $\int \frac{x-3}{x^2-9x+23}dx$, *е*) $\int \frac{dx}{4+sin\,x}$.

9.3.

а) $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{1-x^4}}dx$, б) $\int x\ sin\,4\,xdx$, в) $\int \frac{(3x+13)}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$, г) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$,

д) $\int \frac{2x+3}{x^2-7x+12}dx$, *е*) $\int sin\,3\,x\,cos\,x\,dx$.

9.4.

а) $\int e^{-x^4}x^3dx$, б) $\int ln(x+4)dx$, в) $\int \frac{2x^2+2x+20}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$, г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$,

д) $\int \frac{x}{x^2-7x+13}dx$, е) $\int \frac{\sin x dx}{1+\sin x}$.

9.5.

а) $\int \sqrt{4-5\sin 2x}\cos 2x\,dx$, б) $\int xe^{2x}dx$, в) $\int \frac{x^2+3x-6}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx$,

г) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$, д) $\int \frac{(x+2)}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx$, е) $\int \sin 3x\cos 5xdx$.

9.6.

а) $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx$, б) $\int x\ \cos 4xdx$, в) $\int \frac{x^2+3x+2}{(x-1)(x^2+x+1)}dx$, г) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$,

д) $\int \frac{3}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$, е) $\int \frac{dx}{5-4\cos x}$.

9.7.

а) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$, б) $\int (x-7)\sin 3xdx$, в) $\int \frac{36}{(x+21)(x^2-2x+10)}dx$,

г) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1}$, д) $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx$, е) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

9.8.

а) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}dx$, б) $\int x\ \cos 3xdx$, в) $\int \frac{7x-10}{x^3+8}dx$, г) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{3x+1}}$,

д) $\int \frac{2x-3}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$, е) $\int \frac{dx}{3-2\cos x}$.

9.9.

а) $\int \frac{e^{tg2x}}{\cos^2 2x}dx$, б) $\int x\ e^{\frac{1}{2}x}dx$, в) $\int \frac{x^3+2}{x^3+4x}dx$, г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+2}$,

д) $\int \frac{3x+4}{x^2+7x+14}dx$, е) $\int \cos 3x\ \cos 9xdx$.

9.10.

а) $\int (1-x^2)^5 xdx$, б) $\int x\ \sin 5xdx$, в) $\int \frac{1}{x(x^2+2)}dx$, г) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+3}}$,

д) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x-x^2}}$, е) $\int \sin 2x\sin 5x\,dx$.

9.11.

а) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$, б) $\int x\ \cos\frac{x}{5}dx$, в) $\int \frac{12}{(x-2)(x^2-2x+3)}dx$, г) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-3}}$,

д) $\int \frac{x+1}{2x^2+3x-4}dx$, е) $\int \sin^4 x\,dx$.

9.12.

а) $\int x\sqrt{5x^2+2}dx$, б) $\int x\ e^{3x-5}dx$, в) $\int \frac{x}{x^3-1}dx$, г) $\int \frac{xdx}{2+\sqrt{x+4}}$,

д) $\int \frac{2x-1}{3x^2-2x+6}dx$, е) $\int tg^2 xdx$.

9.13.

а) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{(\sin x-4)^3}}dx$, б) $\int x\ \sin 4x dx$, в) $\int \frac{x}{x^2-3x+2}dx$,

г) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+4}}$, д) $\int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2}dx$, е) $\int \sin 2x \sin 3x dx$.

9.14.

а) $\int e^{-x^4}x^3dx$, б) $\int ln(x+4)dx$, в) $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$, г) $\int \frac{\sqrt{x+2}dx}{x-3}$,

д) $\int \frac{5x+1}{x^2-4x+1}dx$, е) $\int sin^3 x\, cos^2 x\, dx$.

9.15.

а) $\int \frac{dx}{sin^2 x\sqrt{ctgx}}$, б) $\int x\ e^{5x}dx$, в) $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx$, г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+3)}$,

д) $\int \frac{x-3}{x^2-5x-4}dx$, е) $\int cos^5 x\, dx$.

9.16.

а) $\int \frac{\sin 3x}{\sqrt[3]{\cos 3x}}dx$, б) $\int x\ \cos\frac{x}{3}dx$, в) $\int \frac{x^2}{x^3-8}dx$, г) $\int \frac{(1+x)dx}{x+\sqrt{x}}$,

д) $\int \frac{2x-1}{2x^2+8x-6}dx$, е) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$.

9.17.

а) $\int \frac{3x^2+e^x}{x^3+e^x}dx$, б) $\int x\ e^{-5x}dx$, в) $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx$, г) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$,

д) $\int \frac{x-5}{2x^2+x-4}dx$, е) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$.

9.18.

а) $\int \frac{x^3}{\sqrt[5]{1-x^4}}dx$, б) $\int x\ \sin 4x dx$, в) $\int \frac{(3x^2-2x-3)}{x^3-x}dx$, г) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-1}$,

д) $\int \frac{2x+3}{3x^2+2x-7}dx$, е) $\int \frac{dx}{9+8\cos x+\sin x}$.

9.19.

а) $\int e^{-x^4}x^3dx$, б) $\int ln(x+10)dx$, в) $\int \frac{2x^2+2x+20}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$,

г) $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+5}}$, д) $\int \frac{x-3}{4x^2+2x-3}dx$, е) $\int \frac{dx}{5+6\sin 2x}$.

9.20.

а) $\int \sqrt{4-5sin\,2x}\cos 2x\, dx$, б) $\int xe^{-3x}dx$, в) $\int \frac{x^2+3x-6}{(x+1)(x^2+6x+13)}dx$,

г) $\int \frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x-1}}$, д) $\int \frac{3x-2}{x^2+5x-1}dx$, е) $\int \frac{(2-\sin x)dx}{2+\cos x}$.

9.21.

а) $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx$, б) $\int x\ \cos 4x dx$, в) $\int \frac{x^2+3x+2}{(x-1)(x^2+x+1)}dx$, г) $\int \frac{\sqrt{x+4}dx}{x}$,

д) $\int \frac{(3x+4)}{\sqrt{x^2+6x+13}}dx$, е) $\int cos^2 x\,dx$.

9.22.

а) $\int \frac{\sqrt{1+ln x}}{x}dx$, б) $\int(x-7)\,sin 3\,xdx$, в) $\int \frac{36dx}{(x+21)(x^2-2x+10)}$,

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$, д) $\int \frac{(5x+2)}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx$, е) $\int \frac{dx}{5+4\,sin x}$.

9.23.

а) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}dx$, б) $\int x\ cos 3\,xdx$, в) $\int \frac{7x-10}{x^3+8}dx$, г) $\int \frac{(x-1)dx}{x\sqrt{x-2}}$,

д) $\int \frac{(7x-2)}{\sqrt{x^2-5x+1}}dx$, е) $\int(sin x-5)^2\,dx$.

9.24.

а) $\int \frac{e^{tg2x}}{cos^2 2x}dx$, б) $\int x\ e^{\frac{1}{2}x}dx$, в) $\int \frac{x^3+2}{x^3+4x}dx$, г) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-2}}$,

д) $\int \frac{(2x+7)}{\sqrt{x^2+5x-4}}dx$, е) $\int sin 4\,x\,cos 2\,xdx$.

9.25.

а) $\int(1-x^2)^5xdx$, б) $\int x\ sin^2 x\,dx$, в) $\int \frac{1}{x(x^2+2)}dx$, г) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-4}}$,

д) $\int \frac{(x-9)}{\sqrt{4+2x-x^2}}dx$, е) $\int sin\frac{x}{2}cos\frac{3x}{2}dx$.

9.26.

а) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$, б) $\int x\ cos\frac{x}{5}dx$, в) $\int \frac{12}{(x-2)(x^2-2x+3)}dx$, г) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+10}$,

д) $\int \frac{(x-3)}{\sqrt{2x^2-4x-1}}dx$, е) $\int sin 5\,x\,cos x\,dx$.

9.27.

а) $\int \frac{sin 5x}{\sqrt[3]{cos 5x}}dx$, б) $\int x\ cos 3\,xdx$, в) $\int \frac{(3x+13)}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$, г) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+8}}$,

д) $\int \frac{2x-3}{x^2+x+5}dx$, е) $\int \frac{dx}{2+tgx}$.

9.28.

а) $\int \frac{3x^2+e^x}{x^3+e^x}dx$, б) $\int x\ e^{-5x}dx$, в) $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx$, г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$,

д) $\int \frac{x-3}{x^2-9x+23}dx$, е) $\int \frac{dx}{4+sin x}$.

9.29.

а) $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{1-x^4}}dx$, б) $\int x\ sin 4\,xdx$, в) $\int \frac{(3x+13)}{(x+1)(x^2-4x+13)}dx$, г) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$,

д) $\int \frac{2x+3}{x^2-7x+12}dx$, е) $\int sin 3\,x\,cos x\,dx$.

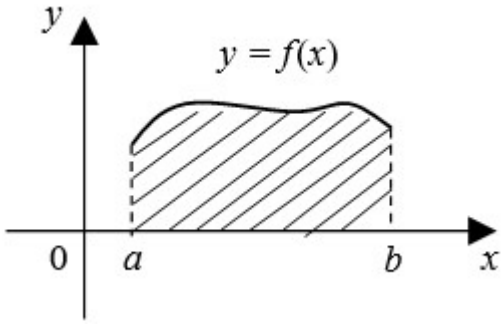
9.30.

а) $\int e^{-x^4} x^3 dx$, б) $\int ln(x+4)dx$, в) $\int \frac{2x^2+2x+20}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx$, г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$,

д) $\int \frac{x}{x^2-7x+13} dx$, е) $\int \frac{sin\, x dx}{1+sin\, x}$.

Тема 4. Визначений інтерал та його застосування

Означення 1. *Криволінійною трапецією називається фігура, обмежена неперервною кривою $y = f(x) \geq 0$ зверху, з боків прямими $x = a$ та $x = b$, знизу віссю OX.*



Нехай крива $y = f(x)$ неперервна на $[a, b]$. Поділимо відрізок $[a, b]$ на n частин (довільно) точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Довжину найбільшого з відрізків $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ $(i = 0, 1, ..., n-1)$ позначимо через λ. На кожному з відрізків $[x_i, x_{i+1}]$ візьмемо довільну точку ξ_i: $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ і утворимо суму $\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i$, яку будемо називати інтегральною сумою.

Означення 2. *Визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на $[a, b]$ називається скінченна границя інтегральної суми σ, яка не залежить від способу поділу відрізка та від вибору точок ξ_i, за умови, що довжина найбільшого з елементарних відрізків прямує до нуля:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i, \quad \lambda = \max_i |\Delta x_i|.$$

Якщо така границя існує, то $f(x)$ називається інтегрованою на $[a, b]$, а числа a та b відповідно нижньою та верхньою межами інтеграла.

Зауваження 1. Означення визначеного інтеграла правильне лише для обмежених функцій на $[a, b]$. Якщо б функція мала розрив II-го роду, то взявши ξ_i як точку розриву на відповідному відрізку, отримаємо $f(\xi_i) = \infty$, а в цьому випадку інтегральна сума σ не має скінченної границі.

1. Суми Дарбу, їх властивості

Нехай позначимо m_i і M_i відповідно точну нижню і верхню межі $f(x)$ в i-ому проміжку $[x_i, x_{i+1}]$ і утворимо суми

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i.$$

Означення 3. *Суми s і S називаються відповідно нижньою і верхньою інтегральними сумами або сумами Дарбу.*

Оскільки $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$, то помноживши цю подвійну нерівність на Δx_i ($\Delta x_i > 0$) і просумувавши за індексом i, одержимо

$$s \leq \sigma \leq S.$$

Властивості сум Дарбу:

Властивість 1. Якщо до точок поділу відрізка $[a, b]$ на частини додати нові, то нижня сума Дарбу може лише зростати, а верхня – спадати.

Властивість 2. Кожна нижня сума Дарбу не перевищує верхньої суми, що відповідає іншому поділу проміжка.

2. Умови існування визначеного інтеграла

Теорема 1. *Для існування визначеного інтеграла необхідно й достатньо, щоб*

$$\lim_{\lambda \to 0} (S - s) = 0. \tag{1}$$

Доведення. Необхідність. Нехай інтеграл існує, тобто $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = I = \int\limits_a^b f(x)dx$, тоді для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, що $|\sigma - I| < \varepsilon$ як тільки

$0 < \Delta x_i < \delta$, тобто $I - \varepsilon \le \sigma \le I + \varepsilon$ не залежно від вибору ξ_i на відповідних проміжках. За визначенням сум Дарбу

$$I - \varepsilon \le s \le S \le I + \varepsilon.$$

Отже, $\lim\limits_{\lambda \to 0} s = I$, а також $\lim\limits_{\lambda \to 0} S = I$, отже, (1) виконується.

Достатність. Оскільки множина $\{s\}$ обмежена зверху, то вона має точну верхню межу $I_* = \sup\{s\}$, крім того, $I_* \le S$. Аналогічно, множина $\{S\}$ обмежена знизу, отже має точну нижню межу $I^* = \inf\{S\}$. Очевидно, що $s \le I_* \le I^* \le S$ для $\forall$ сум Дарбу.

Нехай (1) виконується, тоді $I_* = I^* = I$. Якщо σ – значення інтегральної суми, яке відповідає розбиттю із сумами Дарбу s і S, то $s \le \sigma \le S$. Вибираючи для довільного $\varepsilon > 0$ всі $\Delta x_i < \delta$, отримаємо $|\sigma - I| < \varepsilon$, а отже $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = I$. $\square$

3. Класи інтегровних функцій

1) Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, то вона інтегровна.

2) Якщо обмежена функція $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ має лише скінченну кількість точок розриву, то вона інтегровна.

3) Монотонна обмежена функція $f(x)$ завжди інтегровна.

4. Властивості визначених інтегралів

Вони виражаються рівностями та нерівностями.

1) Якщо $f(x)$ інтегровна на $[a, b]$, то вона інтегровна і на $[b, a]$, причому

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx \quad \left(\int\limits_a^a f(x)dx = 0\right).$$

2) Нехай $f(x)$ інтегровна на найбільшому з проміжків $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$, то вона інтегровна і на двох інших, причому

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx,$$

яким би не було розташування точок a, b, c.

3) Якщо $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$, то і $k\cdot f(x)$ ($k\in R$, $k=\text{const}$) також інтегровна на цьому проміжку, причому

$$\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx.$$

4) Якщо $f(x)$ і $g(x)$ інтегровні на $[a,b]$, то і $f(x)\pm g(x)$ також інтегровні в цьому проміжку, причому

$$\int\limits_a^b \left(f(x)\pm g(x)\right)dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx.$$

5) Якщо $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$, $f(x)\geq 0$ і $a<b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Розуміється так: інтеграл від невід'ємної функції невід'ємний.

6) Якщо $f(x)$ і $g(x)$ інтегровні на $[a,b]$, $b>a$, $f(x)\leq g(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx.$$

7) Нехай $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$ і $b>a$, тоді функція $|f(x)|$ інтегрована на $[a,b]$, причому

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

5. Визначений інтеграл як функція верхньої межі

Якщо $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$, то для довільного $t \in [a,b]$ вона інтегровна на відрізку $[a,t]$. Позначаємо

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx.$$

Функція $F(t)$ має такі властивості:

Властивість 1. Якщо $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$, тоді $F(t)$ буде неперервною функцією від t на цьому проміжку.

Властивість 2. Якщо $f(x)$ неперервна в точці $t = x$, то в цій точці $F(t)$ має неперерну похідну

$$F'(t) = f(t).$$

(якщо $f(t)$ – неперервна, то її первісна диференційовна).

6. Основна формула інтегрального числення

Якщо $f(x)$ неперервна, то $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ є первісною для $f(x)$ і $F'(x) = f(x)$.

Нехай $\Phi(x)$ – довільна первісна для $f(x)$, тоді

$$F(x) = \Phi(x) + C.$$

При $x = a$ маємо $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$, звідки $C = -\Phi(a)$, отже

$$F(x) = \Phi(x) - \Phi(a).$$

Поклавши $x = b$, отримаємо в останній формулі

$$\int_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Це *формула Ньютона–Лейбніца*, основна формула інтегрального числення.

7. Формула заміни змінної у визначеному інтегралі

Знайдемо визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, де $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$ функція. Покладемо $x=\varphi(t)$, причому $\varphi(t)$ задовольняє умови:

1) $\varphi(t)$ визначена і неперервна на $[\alpha,\beta]$ і її значення не виходять за межі проміжка $[a,b]$, коли $t\in[\alpha,\beta]$;

2) $\varphi(\alpha)=a$; $\varphi(\beta)=b$;

3) на $[\alpha,\beta]$ існує неперервна похідна $\varphi'(t)$. Тоді є правильною формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{2}$$

Приклад 1. Обчислити

$$I=\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx.$$

Розв'язання. Бачимо, що $f(x)=\dfrac{\ln^2 x}{x}$ така функція, яка містить логарифм та похідну від нього. Згідно з попередньою теорією $t=\ln x$, тоді $dt=\dfrac{1}{x}dx$. Виконаємо умову 2), тобто зробимо заміну меж, записавши результат у таблицю $\begin{array}{c|c|c} x & 1 & e \\ \hline t & 0 & 1 \end{array}$. Тоді

$$I=\int\limits_0^1 t^2dt=\frac{t^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}.$$

Приклад 2. Обчислити $I=\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$.

Розв'язання. Зробимо заміну $x=a\sin t$, тоді $dx=a\cos t dt$. Зробимо заміну меж, використовуючи таблицю $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & a \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{2} \end{array}$. Бачимо,

що $a = a\sin t \Rightarrow \sin t = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}$. Отже, маємо інтеграл

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t dt = a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t dt =$$

$$= a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}}{2} - \left(0 + \frac{\sin 2\cdot 0}{2}\right)\right) = \frac{a^2\pi}{4}.$$

8. Інтегрування частинами

Нехай $u(x)$ і $v(x)$ неперервні на $[a,b]$ разом зі своїми похідними u' і v'. Тоді правильна формула інтегрування частинами

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu. \tag{3}$$

Приклад 3. Обчислити $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx$.

Розв'язання. Бачимо, що $f(x) = xe^{-x}$. Згідно з викладеним раніше: $u = x$, $dv = e^{-x}dx$, тоді $du = dx$, а $v = \int e^{-x}dx = -\int e^{-x}d(-x) = -e^{-x}$. Отже, згідно з формулою (3) маємо

$$\int\limits_0^1 xe^{-x}dx = -e^{-x}x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 -e^{-x}dx = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 e^{-x}dx =$$

$$= -xe^{-x}\Big|_0^1 - e^{-x}\Big|_0^1 = -e^{-x}(x+1)\Big|_0^1 = -e^{-1}(1+1) - (-e^0\cdot(0+1)) =$$

$$= -2e^{-1} + 1 = \frac{e-2}{e}.$$

Приклад 4. Обчислити $I_m = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx$, $m \in N$, $m > 1$.

Розв'язання. Скористаємось формулою інтегрування частинами. Покладемо $u = \sin^{m-1} x$, $dv = \sin x dx$, звідки $du = (m-1)\sin^{m-2} x \cdot \cos x dx$, $v = \int \sin x dx = -\cos x$. Інтегруючи частинами, маємо

$$I_m = -\cos x \cdot \sin^{m-1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (m-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} x \cdot \cos^2 x dx.$$

Оскільки $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, $\sin 0 = 0$, то за формулою $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ (основна тригонометрична тотожність), дістанемо в інтегралі справа

$$I_m = (m-1)I_{m-2} - (m-1)I_m,$$

звідки $I_m = \dfrac{m-1}{m} I_{m-2}$.

Зокрема, якщо $m = 2n$, то

$$I_{2n} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Якщо ж $m = 2n+1$, то

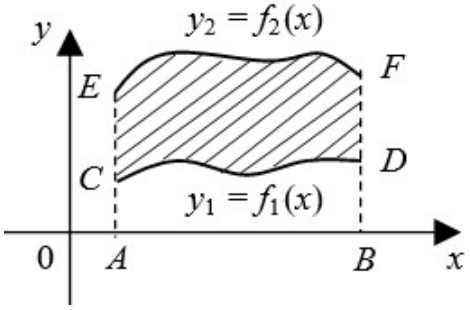
$$I_{2n+1} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2n(2n-2)\cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1}.$$

Застосування визначеного інтеграла

1. Площа плоскої фігури

Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену знизу і зверху кривими, рівняння яких $y_1 = f_1(x)$ та $y_2 = f_2(x)$ $(a \le x \le b)$. Вона отримується як різниця площ двох фігур $ABFE$ та $ABDC$, що виражається формулами

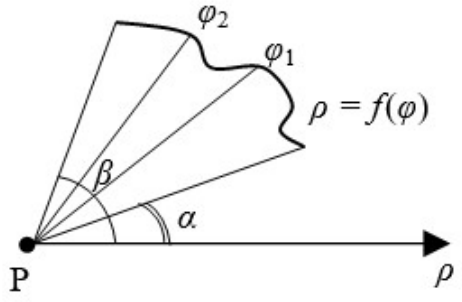
$$S = \int\limits_a^b (y_2 - y_1)\, dx = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))\, dx. \qquad (4)$$



Якщо ж лінія задана рівнянням в полярній системі координат, то основною фігурою є криволінійний сектор.

Означення 1. *Криволінійним сектором називається фігура, яка обмежена лінією $\rho = f(\varphi)$, з якою будь-який промінь, що виходить з полюса P, перетинається не більше одного разу, і двома променями $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$.*

Розіб'ємо сектор на n часткових секторів за допомогою променів, нахилених до полярної вісі під кутами $\varphi_0 = \alpha < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n = \beta$. Замінимо криволінійні сектори круговими на проміжках $[\varphi_k, \varphi_{k+1}]$.



Оскільки площа кругового сектора

$$S = \frac{1}{2}\rho^2 \cdot \gamma,$$

де γ – центральний кут, ρ – радіус, то площа n часткових секторів дорівнює

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f^2(\varphi_i)\,\Delta\varphi_i$$

де $\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$.

Переходячи до границі за умови, що $n \to \infty$ і $\Delta\varphi_i \to 0$, одержимо площу криволінійного сектора

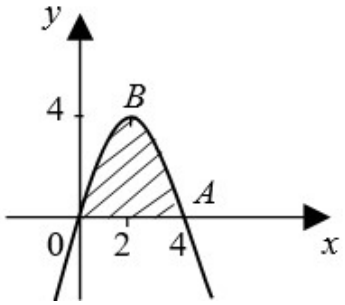
$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)d\varphi. \tag{5}$$

Приклад 5. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y = 4x - x^2$ та віссю Ox.

Розв'язання. З рівняння $y = 4x - x^2$ бачимо, що парабола вітками вниз, крім того, $4x - x^2 = 0 \Rightarrow x = 4;\ x = 0$. Парабола перетинає вісь Ox і в точках $O(0,0)$ та $A(4,0)$. Її вершина знаходиться в $B(2,4)$. Отже,

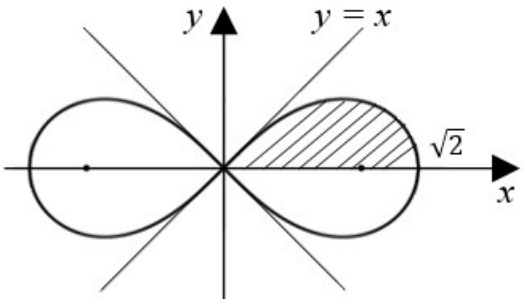
$$S = \int\limits_0^4 \left(4x - x^2\right) dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = 32 - \frac{64}{3} =$$

$$= \frac{32 \cdot 3 - 32 \cdot 2}{3} = \frac{32}{3}(\text{кв.од.}).$$



Приклад 6. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лемніскатою $\rho^2 = 2\cos 2\varphi$.

Розв'язання. З рівняння $\rho^2 = 2\cos 2\varphi$ бачимо, що функція є парною. Її схематичний графік на рисунку.



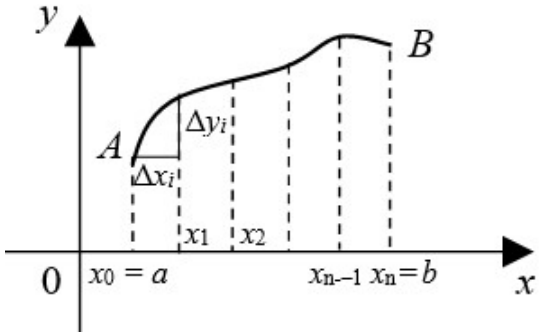
Для заштрихованої 4-ої частини плоскої фігури кут φ буде змінюватись від 0 до $\dfrac{\pi}{4}$, а тому

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2\varphi d\varphi = 4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = 2\sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2 - 0 = 2 \text{ (кв. од.)}.$$

2. Обчислення довжини дуги плоскої лінії

Означення 2. *Довжиною дуги кривої лінії називається границя, до якої прямує довжина вписаної в неї ламаної при необмеженому збільшенні числа її ланок і при прямуванні до нуля найбільшої з цих ланок.*

Поділимо дугу AB на n частин і нехай точки поділу мають абсциси $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Проведемо через кожні 2 послідовні точки поділу хорду.



Отримуємо ламану L_n, довжина якої дорівнює

$$L_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}\right)^2} \Delta x_i,$$

де $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$; $\Delta y_i = f(x_i + 1) - f(x_i)$. За формулою Лагранжа маємо, що

$$L_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + (f'(\tau_i))^2}\Delta x_i, \quad x_i < \tau_i < x_{i+1}.$$

Перейдемо до границі при $n \to \infty$ за умови, що довжина найбільшого відрізка ламаної прямує до нуля, тоді маємо

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx. \tag{6}$$

1) Це є формула обчислення довжини дуги кривої, якщо функція задана явно $y = f(x)$, $x \in [a, b]$.

2) При параметричному заданні кривої $x = x(t)$, $y = y(t)$, де $x(t)$ і $y(t)$ – неперервно диференційовні функції, довжина дуги кривої, що відповідає монотонній зміні параметра від t_1 до t_2 знаходиться за формулою

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt. \tag{7}$$

3) Якщо гладка крива задана в полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то довжина дуги дорівнює

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}d\varphi. \tag{8}$$

Приклад 7. Знайти довжину дуги кривої $y^2 = x^3$ від $x = 0$ до $x = 1$ $(y \ge 0)$.

Розв'язання. Знайдемо похідну $y' = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)'$ заданої явно фун-

кції. Бачимо, що $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, тому згідно з формулою (6)

$$L = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}dx = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx = \frac{4}{9}\int\limits_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\times$$

$$\times d\left(1 + \frac{9}{4}x\right) = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{8}{27}\left(\frac{13}{8}\sqrt{13} - 1\right).$$

Приклад 8. Знайти довжину дуги кривої $\rho = \sin^3\frac{\varphi}{3}$ від $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. $\rho' = 3\sin^2\frac{\varphi}{3}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}\cdot\frac{1}{3} = \sin^2\frac{\varphi}{3}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}$. Довжина дуги дорівнює

$$L = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^6\frac{\varphi}{3} + \left(\sin^2\frac{\varphi}{3}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}\right)^2}d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos\frac{2\varphi}{3}\right)d\varphi = \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right).$$

Розглянуто перетворення $\sin^6\frac{\varphi}{3} + \left(\sin^2\frac{\varphi}{3}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}\right)^2 = \sin^6\frac{\varphi}{3} + \sin^4\frac{\varphi}{3}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{3} = \sin^4\frac{\varphi}{3}\left(\sin^2\frac{\varphi}{3} + \cos^2\frac{\varphi}{3}\right) = \sin^4\frac{\varphi}{3}$, тоді $\sqrt{\sin^4\frac{\varphi}{3}} = \sin^2\frac{\varphi}{3}$.

3. Обчислення об'ємів тіл

Якщо площа перетину тіла площиною, перпендикулярною до осі OX, може бути визначена як функція від x, тобто $S = S(x)$, то об'єм частини тіла, що міститься між перпендикулярними до

осі OX площинами $x = a$, $x = b$ знаходиться за формулою

$$V = \int_a^b S(x)dx. \tag{9}$$

Якщо криволінійна трапеція, що обмежена кривою $y = f(x)$, прямими $y = 0$, $x = a$, $x = b$ обертається навколо осі OX, то об'єм утвореного тіла обертання обчислюється за формулою

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \tag{10}$$

Якщо ж фігура обмежена кривими $y_1 = f_1(x)$ та $y_2 = f_2(x)$, $(0 \le f_1(x) \le f_2(x))$ і прямими $x = a$, $x = b$, обертається навколо осі OX, то об'єм тіла обертання такий:

$$V = \pi \int_a^b \left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right) dx. \tag{11}$$

Приклад 9. Знайти об'єм еліпсоїда $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Розв'язання. Плоским перерізом еліпсоїда, перпендикулярного, наприклад, до осі OX, є еліпс з напівосями $b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$ і $c\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$, $-a \le x \le a$. Позначимо $S(x)$ – площу, яку обмежує еліпс. Знайдемо її для $\dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{y^2}{B^2} = 1$.

$$S = 2\int_{-A}^{A} ydx, \quad y \ge 0.$$

Запишемо рівняння еліпса в параметричному вигляді, використовуючи, що $x = A\cos t$, $y = B\sin t$. Підставимо їх у рівняння

для S, маємо

$$S = 2\int\limits_{\pi}^{0} B\sin t\cdot(-A\sin t)dt = -2AB\int\limits_{\pi}^{0}\sin^2 t dt =$$

$$= -AB\int\limits_{\pi}^{0}(1-\cos 2t)dt = AB\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi} = \pi AB.$$

При обчисленні використали заміну меж $\begin{array}{c|c|c} x & A & -A \\ \hline t & 0 & \pi \end{array}$, оскільки $\cos 0 = 1$, $\cos\pi = \cos(-\pi) = -1$. Продовжимо далі: $S(x) = \pi b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}\cdot c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}} = \pi bc\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$. Тому $V = \pi bc\displaystyle\int\limits_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_0^a = \frac{4}{3}\pi abc$ (куб. од.).

4. Площа поверхні обертання

Якщо дуга гладкої кривої $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ обертається навколо осі OX, то площа поверхні обертання знаходиться за формулою

$$S = 2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx. \tag{12}$$

Якщо ж крива задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, то

$$S = 2\pi\int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}dt. \tag{13}$$

Приклад 10. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі OX дуги синусоїди $y = \sin 2x$ від $x = 0$ до $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Скористаємось формулою (12). Для цього знайдемо $y' = (\sin 2x)' = 2\cos 2x$, тоді

$$S = 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\sqrt{1+(2\cos 2x)^2}dx = 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\sqrt{1+4\cos^2 2x}dx = (*)$$

Заміною $t = 2\cos 2x$, $dt = -4\sin 2xdx$, $-\frac{1}{4}dt = \sin 2xdx$ зробимо заміну меж $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 2 & -2 \end{array}$

$$(*) = 2\pi \int\limits_2^{-2} \sqrt{1+t^2}\left(-\frac{1}{4}dt\right) = \frac{\pi}{2}\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}\left(\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2}+\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right|\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{5}+\ln\left(\sqrt{5}+2\right)\right).$$

5. Фізичні застосування визначеного інтеграла

1) Статичні моменти та моменти інерції дуг і фігур

Нехай на площині XOY задано систему матеріальних точок $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ..., $A_n(x_n, y_n)$ з масами m_1, m_2, ..., m_n.

Означення 1. *Статичним моментом M_x цієї системи відносно осі OX називається сума добутків мас цих точок на їхні ординати*

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k. \tag{14}$$

Аналогічно відносно осі OY:

$$M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k. \tag{15}$$

Означення 2. *Моментами інерції I_x та I_y системи відносно осей OX та OY називається сума добутків мас точок на квадрати їх відстаней до відповідних осей*

$$I_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k^2, \quad I_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2. \tag{16}$$

Статичні моменти та моменти інерції дуги плоскої кривої $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ (крива задана явно) вираховується за формулами

$$\begin{aligned} M_x &= \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx; \quad M_y = \int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx; \\ I_x &= \int_a^b f^2(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx; \quad I_y = \int_a^b x^2\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx. \end{aligned} \tag{17}$$

Статичні моменти та моменти інерції дуги плоскої кривої, заданої параметричними рівняннями: $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, вираховуються за формулами

$$\begin{aligned} M_x &= \int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}dt; \quad M_y = \int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}dt; \\ I_x &= \int_\alpha^\beta y^2(t)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}dt; \quad I_y = \int_\alpha^\beta x^2(t)\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}dt. \end{aligned} \tag{18}$$

Статичні моменти і моменти інерції криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, віссю OX та двома прямими $x = a$ і $x = b$ знаходяться за формулами

$$M_x = \frac{1}{2}\int\limits_a^b f^2(x)dx; \;\; M_y = \int\limits_a^b xf(x)dx;$$
$$I_x = \frac{1}{3}\int\limits_a^b f^3(x)dx; \quad I_y = \int\limits_a^b x^2 f(x)dx. \tag{19}$$

Приклад 11. Знайти статичний момент півкола $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ $(-r \le x \le r)$ відносно осі OX.

Розв'язання. Скористаємось формулами (17), зокрема для M_x:

$$M_x = \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx, \text{ де } f'(x) = y' = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Маємо

$$M_x = \int\limits_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}dx = r\int\limits_{-r}^r dx = 2r^2.$$

Приклад 12. Знайти момент інерції I_x в прикладі 11.

Розв'язання. Скористаємося формулою для I_x з формул (17). Бачимо

$$I_x = \int\limits_a^b f^2(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx = \int\limits_{-r}^r \left(r^2 - x^2\right)\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}dx =$$
$$= r\int\limits_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2}dx = 2r\int\limits_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx = (*)$$

Підстановка $x = r\sin t$, $dx = r\cos t dt$, межі: $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & r \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{2} \end{array}$

$$(*) = 2r\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\cdot r\cos t dt = 2r^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos^2 t dt =$$

$$= 2r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = r^3 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^3}{2}.$$

2) Знаходження координат центра ваги. Теореми Гульдена

Координати центра ваги однорідної дуги плоскої лінії $y = f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ знаходиться за формулами

$$\bar{x} = \frac{1}{L} \int_a^b x dl; \quad \bar{y} = \frac{1}{L} \int_a^b y dl, \tag{20}$$

де $dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx$, а L – довжина дуги і

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Координати центра ваги криволінійної трапеції знаходяться за формулами

$$\bar{x} = \frac{1}{S} \int_a^b x dS; \quad \bar{y} = \frac{1}{2S} \int_a^b y dS, \tag{21}$$

де $dS = y dx$, а S – площа фігури, $S = \int_a^b y dx$ або

$$\bar{x} = \frac{1}{S} \int_a^b xy dx; \quad \bar{y} = \frac{1}{2S} \int_a^b y^2 dx. \tag{22}$$

Теореми Гульдена

Перша теорема Гульдена. *Площа поверхні, утвореної обертанням дуги плоскої кривої навколо осі, що знаходиться в площині цієї дуги і не перетинає її, дорівнює довжині дуги цієї кри-*

вої, помноженої на довжину кола, яке описує центр ваги цієї дуги.

Друга теорема Гульдена. *Об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо осі, що знаходиться в площині фігури і не перетинає її, дорівнює добутку площі цієї фігури на довжину кола, яка описує центр ваги фігури.*

Обчислення роботи та тиску. Робота сталої сили $F = f(x)$, яка діє в напрямку осі OX на відрізку $[x_1, x_2]$ знаходиться за формулою

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \tag{23}$$

Приклад 12. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути пружину на 4 см, якщо відомо, що від навантаження в 1 Н вона розтягується на 1 см?

Розв'язання. Згідно з законом Гука, сила F, яка розтягує пружину на x м, дорівнює $F = kx$. Щоб знайти k, скористаємось умовою задачі $x = 0,01$ м, $F = 1$ Н, отже, $k = \dfrac{1}{0,01} = 100$ Н/м, а отже, $F = 100x$. Тоді

$$A = \int_0^{0,04} 100x dx = 50x^2\Big|_0^{0,04} = 0,08 \text{ Дж}.$$

Для знаходження тиску рідини використовують закон Паскаля, за яким тиск рідини на площину дорівнює площі S, помноженій на глибину її занурення h, густину ρ і на прискорення сили тяжіння

$$P = \rho g H S. \tag{24}$$

Питання для самоконтролю

1. Дайте означення визначеного інтеграла функції.

2. Що таке суми Дарбу? Сформулюйте їх властивості.

3. Сформулюйте і доведіть критерій існування визначеного інтеграла на основі сум Дарбу. Назвіть класи інтегровних функцій.

4. Наведіть властивості визначеного інтеграла.

5. Сформулюйте означення та властивості інтеграла зі змінною верхньою межею.

6. Доведіть формулу Ньютона–Лейбніца.

7. Як проводити заміну змінної у визначеному інтегралі?

8. Запишіть формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

9. Відтворіть формули для обчислення площі фігури, довжини дуги лінії, об'єму тіла, площі поверхні обертання за допомогою визначеного інтеграла.

10. Наведіть фізичні застосування визначеного інтеграла.

Завдання для самостійної роботи

Задача 10. Обчислити визначені інтеграли.

10.1.

а) $\int_0^1 \frac{2^x+3^x}{6^x}dx$; б) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{cos^2 3x}$;

в) $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$; г) $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{3x^2+8}}$.

10.2.

а) $\int_0^1 \left(5+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$; б) $\int_2^3 \frac{dx}{4x-3}$;

в) $\int_0^{\pi/2} xcos2x\,dx$; г) $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$.

10.3.

а) $\int_0^{\sqrt{2}/2} \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{4}{\sqrt{3-x^2}}\right)dx$; б) $\int_{-2}^2 e^{3x+4}dx$;

в) $\int_0^{e-2} ln\,(x+2)\,dx$; г) $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

10.4.

а) $\int_0^2 \frac{2}{4+x^2}dx$; б) $\int_{\pi/12}^{\pi/6}(sin3x-0{,}5cos4x)dx$;

в) $\int_0^{\pi} e^x sinx\,dx$; г) $\int_1^{\sqrt{2}} x^2\sqrt{2-x^2}dx$.

10.5.

а) $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{9+(x-2)^2}dx$; б) $\int_0^3 e^{\frac{1}{3}x}\,dx$;

в) $\int_0^{\pi} xsin2x\,dx$; г) $\int_2^3 \sqrt{1+x^2}dx$.

10.6.

а) $\int_1^2 (x^2+\frac{1}{x^4})dx$; б) $\int_0^{\pi/4} sin4xdx$;

в) $\int_0^1 ln\,(x+1)\,dx$; г) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$.

10.7.

а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; б) $\int_{\pi/8}^{\pi/6} \frac{dx}{cos^2 2x}$;

в) $\int_0^{\pi/2} xcos2x\,dx$; г) $\int_1^4 \frac{xdx}{(1+\sqrt{x})^2}$.

10.8.

а) $\int_2^4 (7\sqrt{x} - \frac{2}{x})dx$; б) $\int_2^3 (3x-5)^4 dx$;

в) $\int_0^{\pi/2} xsinx\,dx$; г) $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{3x^2+2}}$.

10.9.

а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $\int_0^1 3^{3-\frac{1}{3}x} dx$;

в) $\int_0^1 xarctgx\,dx$; г) $\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx$ . .

10.10.

а) $\int_1^2 (\sqrt[4]{x} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})dx$; б) $\int_1^2 (x+2)^5 dx$;

в) $\int_1^2 xlnx\,dx$; г) $\int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{2x-1}}$.

10.11.

а) $\int_1^4 (\sqrt{x} - x)dx$; б) $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2}$;

в) $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$; г) $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+8}}$.

10.12.

а) $\int_1^3 (7x^3 - \sqrt[3]{x})dx$; б) $\int_0^2 xe^{-x^2} dx$;

в) $\int_0^{\pi/4} xcos3x\,dx$; г) $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$.

10.13.

а) $\int_3^{3\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2}$; б) $\int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{xlnx}$;

в) $\int_0^{\pi/4} e^x sin2x\, dx$; г) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

10.14.

а) $\int_1^2 \frac{x+x^{2/3}}{\sqrt[3]{x}} dx$; б) $\int_0^{\pi/3} \frac{sin^3 x dx}{cos^5 x}$;

в) $\int_0^{e-4} ln\,(x+4)\, dx$; г) $\int_0^{\sqrt{2}} x^2\sqrt{2-x^2}dx$.

10.15.

а) $\int_0^1 (e^x + \frac{1}{1+x^2})dx$; б) $\int_0^{\pi} sin^2 \frac{x}{2} dx$;

в) $\int_0^{\pi/4} xsin4x\, dx$; г) $\int_0^1 \sqrt{2+x^2}dx$.

10.16.

а) $\int_0^1 \frac{2^x+1}{3^x} dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \frac{sinxdx}{1+cosx}$;

в) $\int_0^1 x2^{-x}\, dx$; г) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(\sqrt{x^2+1})^3}$.

10.17.

а) $\int_1^2 (\sqrt[3]{x} - \sqrt{x})^2 dx$; б) $\int_{\pi/3}^{\pi/3} \frac{cosxdx}{sin^3 x}$;

в) $\int_1^2 (x-3)lnx\ \ dx$; г) $\int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{4x+5}}$.

10.18.

а) $\int_1^2 \frac{xe^x+1}{x} dx$; б) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$;

в) $\int_0^1 xarctg2x\, dx$; г) $\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2}dx$.

10.19.

а) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sqrt{x}sinx+5}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(lnx+1)}$;

в) $\int_0^{\pi/4} xsin\,{}^x/_2\, dx$; г) $\int_1^2 x^{1/3}\sqrt[3]{4-x^2}dx$.

10.20.

а) $\int_0^2 \left(6+\frac{1}{4+x^2}\right)dx$; б) $\int_2^3 \frac{dx}{3x-1}$;

в) $\int_0^{\pi/2} x\cos {}^{x}/_{3}\, dx$; г) $\int_9^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}-2}$.

10.21.

а) $\int_1^2 (4x^4-2\sqrt[3]{x})dx$; б) $\int_0^1 xe^{2x^2}dx$;

в) $\int_{\pi/8}^{\pi/4} x\cos 4x\, dx$; г) $\int_4^9 \frac{dx}{2\sqrt{x}-1}$.

10.22.

а) $\int_{0,5}^3 \frac{dx}{9+4x^2}$; б) $\int_{e^2}^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

в) $\int_0^{\pi/4} e^{2x}\sin x\, dx$; г) $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{5-x^2}}$.

10.23.

а) $\int_0^2 \frac{4}{1+2x^2}dx$; б) $\int_0^{\pi/5}(2\sin 5x+5\cos 2x)dx$;

в) $\int_0^{\pi/4} 3^x\cos x\, dx$; г) $\int_1^{\sqrt{5}} x^2\sqrt{9-x^2}dx$.

10.24.

а) $\int_{-1}^0 \frac{1}{1+(x+2)^2}dx$; б) $\int_0^1 5^{2x+1}\, dx$;

в) $\int_0^2 x4^{x+1}\, dx$; г) $\int_2^3 \sqrt{1+4x^2}dx$.

10.25.

а) $\int_1^2 (x^2+\frac{1}{x^4})dx$; б) $\int_0^{\pi/4} \sin 4x dx$;

в) $\int_0^1 \ln(x+1)\, dx$; г) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}dx$.

10.26.

а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; б) $\int_{\pi/8}^{\pi/6} \frac{dx}{\cos^2 2x}$;

в) $\int_0^{\pi/3} x\cos 3x\,dx$; г) $\int_1^4 \frac{2xdx}{(1+4\sqrt{x})^2}$.

10.27.

а) $\int_2^4 \frac{3\sqrt[3]{x}-8\sqrt{x}}{x^2}dx$; б) $\int_1^2 (4x+6)^4 dx$;

в) $\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$; г) $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{3x^2+2}}$.

10.28.

а) $\int_0^1 \frac{3dx}{\sqrt{1+5x^2}}$; б) $\int_0^1 4^{1-2x}dx$;

в) $\int_0^{0,5} x\,arctg2x\,dx$; г) $\int_{0,5}^1 \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}dx$ . .

10.29.

а) $\int_0^1 (\sqrt[5]{x} - \frac{1}{\sqrt{8-2x^2}})dx$; б) $\int_0^5 (0{,}4x+2)^3 dx$;

в) $\int_1^2 x\log_2 x\,dx$; г) $\int_3^6 \frac{xdx}{\sqrt{x-2}}$.

10.30.

а) $\int_1^4 (2\sqrt{x}-x)xdx$; б) $\int_0^1 \frac{xdx}{10+5x^2}$;

в) $\int_0^1 x3^{2x-1}\,dx$; г) $\int_0^1 \frac{2xdx}{\sqrt{x^2+16}}$.

Задача 11. Обчислити площу фігури, обмеженої заданими лініями.

11.1. $y = 4 - x^2,\ y = x^2 - 2x$.

11.2. $y = -x^2,\ y + x + 2 = 0$.

11.3. $y = -x^2 - 6x - 5,\ y = -x - 5$.

11.4. $y = x^2 + 1,\ y = 9 - x^2$.

11.5. $4y = x^2,\ y = 5 - x^2$.

11.6. $y = x + 1,\ y = \cos x,\ x = 1.$

11.7. $yx = 4,\ y + x = 5$.

11.8. $y = x^2,\ x = 1,\ x = 2,\ y = 0$.

11.9. $y = 4 - x^2,\ y = 1$.

11.10. $y = \ln x\,,\ x = e,\ y = 0\,.$

11.11. $xy = 4,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0.$

11.12. $y = x^2 - 4x + 1,\ y = x + 1\,.$

11.13. $y = x^2 + 6x + 7,\ y = -x + 1\,.$

11.14. $y = \ln x\,,\ x = e,\ x = e^2,\ y = x\,.$

11.15. $y = x^2,\ y = 2 - x^2\,.$

11.16. $4y = x^2,\ y^2 = 4x\,.$

11.17. $y = 2x - x^2,\ y = -\frac{1}{x}\,.$

11.18. $y = 6x - x^2,\ y = 1\,.$

11.19. $y = x^3,\ y = x,\ x > 0\,.$

11.20. $y = -x^2,\ y = 2x - 3\,.$

11.21. $y = -x^2,\ y = x - 6\,.$

11.22. $y = x^2,\ y = 2x^2,\ x = 1,\ x = 2\,.$

11.23. $y = -x^2 + 4x - 1,\ y = -x - 1\,.$

11.24. $y = x^2,\ y = x + 6\,.$

11.25. $y = 2 - x^2,\ y = \frac{4}{x}\,.$

11.26 $y = -x^2 + 6x - 5,\ y = x - 5$ **..**

11.27. $y = x^2,\ y = \sqrt{x}\,.$

11.28. $y = x^2 - 6x + 7,\ y = x + 1\,.$

11.29. $4y = x^2 - 3x,\ y = 0,\ x = 5\,.$

11.30. $y = -x^2 + 6x - 5,\ y = -x + 1\,.$

Задача 12. Знайти довжину лінії, заданої рівняннями.

12.1. $y = lnx,\ \frac{3}{4} \le x \le \frac{12}{5}\,.$

12.2. $\begin{cases} x = 3(2cost - cos2t), \\ y = 3(2sint - sin2t), \end{cases}\ 0 \le t \le 2\pi.$

12.3. $y = \frac{1}{2}(1 - e^x),\ 0 \le x \le 3\,.$

12.4. $\begin{cases} x = 4(cost + tsint), \\ y = 4(sint - tcost), \end{cases}\ 0 \le t \le 2.$

12.5. $y = arccos\sqrt{x} - \sqrt{x - x^2},\ 0 \le x \le 1\,.$

12.6. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)sint + 2t\,cost, \\ y = (2 - t^2)cost + 2t\,sint, \end{cases} 0 \le t \le \pi.$

12.7. $y = 1 - ln(x^2 - 1),\ 3 \le x \le 4\,.$

12.8. $\begin{cases} x = 10\,cos^3 x, \\ y = 10\,sin^3 x, \end{cases} 0 \le t \le \pi/2\,.$

12.9. $y = 2 + chx,\ 0 \le x \le 1\,.$

12.10. $\begin{cases} x = e^t(sint + cost), \\ y = e^t(cost - sint), \end{cases} 0 \le t \le \pi.$

12.11. $y = (x + 1)\sqrt{x + 1},\ -1 \le x \le 3\,.$

12.12. $\begin{cases} x = 2(t - sint), \\ y = 2(1 - cost), \end{cases} 0 \le t \le \pi/2\,.$

12.13. $y = e^x + e^{-x},\ 0 \le x \le 1\,.$

12.14. $\begin{cases} x = {}^1\!/_2\,cost - {}^1\!/_4\,cos2t, \\ y = {}^1\!/_2\,sint - {}^1\!/_4\,sin2t\ , \end{cases} {}^\pi\!/_2 \le t \le {}^{2\pi}\!/_3\,.$

12.15. $y = ln\,(sinx),\ {}^\pi\!/_3 \le x \le {}^{2\pi}\!/_3\,.$

12.16. $\begin{cases} x = 3(cost + tsint), \\ y = 3(sint - tcost), \end{cases} 0 \le t \le {}^\pi\!/_3\,.$

12.17. $y = x\sqrt{x},\ 0 \le x \le 4\,.$

12.18. $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{t}{3}(t^2 - 3), \end{cases} -1 \le t \le 1.$

12.19. $y = x^2/4 - {}^{lnx}\!/_2,\ 0 \le x \le 2\,.$

12.20. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)sint + 2t\,cost, \\ y = (2 - t^2)cost + 2t\,sint, \end{cases} 0 \le t \le {}^\pi\!/_3\,.$

12.21. $y = \sqrt{x^3},\ 0 \le x \le 4\,.$

12.22. $\begin{cases} x = t^6/6, \\ y = 2 - t^4/4, \end{cases} 0 \le t \le 1.$

12.23. $y = ln(1 - x^2), \ -{}^1/_4 \le x \le {}^1/_4.$

12.24. $\begin{cases} x = 2cost, \\ y = 2sint, \end{cases} 0 \le t \le \pi.$

12.25. $y = 1 + arcsin\, x - \sqrt{1 - x^2}, \ 0 \le x \le 1.$

12.26. $\begin{cases} x = 6(sint + cost), \\ y = 6(sint - tsint), \end{cases} 0 \le t \le \pi.$

12.27. $y = 1 - ln(cosx), \ 0 \le x \le {}^\pi/_3.$

12.28. $\begin{cases} x = 3(t - sint), \\ y = 3(1 - cost), \end{cases} \pi \le t \le 2\pi.$

12.29. $y = -arccos\, x + \sqrt{1 - x^2} + 1, \ 0 \le x \le {}^9/_{16}.$

12.30. $\begin{cases} x = e^t(sint + cost), \\ y = e^t(cost - sint), \end{cases} \pi/2 \le t \le \pi.$

Задача 13. Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, що обмежена заданими лініями.

13.1. $y = -x^2 + 5x - 6, \ y = 0.$

13.2. $y^2 = 2x, \ 0 \le x \le 2.$

13.3. $y = 3sinx, y = sinx, \ 0 \le x \le \pi.$

13.4. $yx = 4, \ 1 \le x \le 4.$

13.5. $y = 2x - x^2, y = 4x - 2x^2.$

13.6. $y = 5cos\, {}^x/_5, \ -5 \le x \le 5.$

13.7. $y = x^4, \ 0 \le x \le 1.$

13.8. $y^2 = 4 - x, \ 0 \le x \le 4.$

13.9. $y = 5cosx, \ y = cosx, \ x = 0, \ x \ge 0.$

13.10. $y = 4cos\,{}^{x}/_{4}$, $-4 \le x \le 4$.

13.11. $y = sin^2x$, $y = 0$, $x = {}^{\pi}/_{2}$.

13.12. $y = \cos(x - {}^{\pi}/_{3})$, $0 \le x \le {}^{\pi}/_{2}$.

13.13. $x = \sqrt[3]{y-2}$, $y = 1$, $x = 1$.

13.14. $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$.

13.15. $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$.

13.16. $y = {}^{1}/_{(1+x^2)}$, $-1 \le x \le 1$.

13.17. $y = x^3 + 1$, $0 \le x \le 2$.

13.18. $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 1$.

13.19. $y = 1 + \cos x$, $-{}^{\pi}/_{2} \le x \le {}^{\pi}/_{2}$.

13.20. $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$, $x = 2$.

13.21. $y = sin\,{}^{\pi x}/_{2}$, $y = x^2$.

13.22. $y = x^2$, $y = 4$, $x = 0$.

13.23. $y = \sqrt{x}$, $y = x$.

13.24. $y = e^{1-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

13.25. $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$.

13.26. $y^2 = x$, $y = x^2$.

13.27. $x^2+(y-2)^2 = 1$.

13.28. $y = cosx$, $0 \le x \le {}^{\pi}/_{2}$.

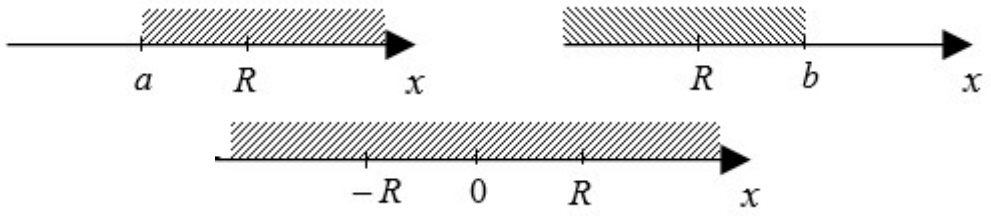
13.29. $y = x^2$, $y = 1$, $x = 2$.

13.30. $y = 1 - x^2$, $x = \sqrt{y-2}$, $x = 0$, $x = 1$.

Тема 5. Невласні інтерали

1. Невласні інтеграли I-го роду (одновимірний випадок)

Визначимо одновимірні зв'язки нескінченної області: $a \leq x < +\infty$; $-\infty < x \leq b$, нескінченна пряма $-\infty < x < +\infty$.



Будемо вважати, що $f(x)$ визначена на півпрямій $a \leq x < +\infty$ і для довільного $R \geq a$ існує визначений інтеграл $\int\limits_a^R f(x)dx$, який позначимо

$$F(R) = \int\limits_a^R f(x)dx. \tag{1}$$

Дослідимо питання про граничне значення функції $F(R)$ з формули (1), тобто питання існування границі

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_a^R f(x)dx. \tag{2}$$

Позначимо

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_a^R f(x)dx = \int\limits_a^\infty f(x)dx \tag{3}$$

і (3) будемо називати невласним інтегралом I-го роду від функції $f(x)$ на півпрямій $a \leq x < +\infty$.

Якщо границя (3) існує скінченна, то невласний інтеграл називається збіжним, а якщо не існує, або нескінченна, то розбіжним.

Зауваження 1.

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^{+\infty} f(x)dx.$$

Зі збіжності інтеграла $\int\limits_b^{+\infty} f(x)dx$ *випливає збіжність* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. *З розбіжності одного з них випливає розбіжність іншого.*

Зауваження 2. *Якщо невласний інтеграл збігається, то значення границі у виразі (2) позначається символом (3)*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int\limits_a^R f(x)dx.$$

Зауваження 3. *Аналогічно невласному інтегралу (3) визначаються невласні інтеграли* $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$ *та* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, *причому перший є граничним переходом* $\lim\limits_{R\to-\infty} \int\limits_R^b f(x)dx$, *а другий* $\lim\limits_{\substack{R'\to-\infty \\ R''\to+\infty}} \int\limits_{R'}^{R''} f(x)dx$.

Приклад 1. Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$.

Розв'язання. Розглянемо $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$, $p = const$, $a > 0$. За цих умов функція $\frac{1}{x^p}$ інтегровна на будь-якому відрізку $a \le x \le R$, причому

$$\int\limits_a^R \frac{dx}{x^p} = \int\limits_a^R x^{-p} dx = \begin{cases} \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_a^R = \frac{1}{1-p}\left(R^{1-p} - a^{1-p}\right), \ p \neq 1; \\ \left.\ln x\right|_a^R = \ln R - \ln a = \ln \frac{R}{a}, \ p = 1. \end{cases}$$

Розглянемо

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{1-p}\left(R^{1-p} - a^{1-p}\right) = \frac{1}{1-p} \lim_{R\to+\infty} R^{1-p} - \lim_{R\to+\infty} \frac{a^{1-p}}{1-p} =$$

$$= \frac{1}{1-p} \lim_{R\to+\infty} \left(\frac{1}{R^{p-1}}\right) - \frac{a^{1-p}}{1-p} = 0 - \frac{a^{1-p}}{1-p}.$$

Бачимо, що у знаменнику вираз R^{p-1} при $p - 1 > 0$ прямує до $+\infty$, а отже, $\frac{1}{R^{p-1}}$ прямує до нуля. Інтеграл отримує скінченне значення $\frac{a^{1-p}}{p-1}$.

Висновок: при $p > 1$ інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ – збіжний.

Якщо $p < 1$, то $p - 1 < 0$, тому $\frac{1}{R^{p-1}} = R^{1-p}$ прямує до $+\infty$ при $1 - p > 0$, а отже, $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{R^{p-1}} = +\infty$.

Висновок: при $p < 1$ інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ – розбіжний.

Окремо дослідимо випадок $p = 1$

$$\lim_{R\to+\infty} (\ln R - \ln a) = \lim_{R\to+\infty} \ln R - \lim_{R\to+\infty} \ln a = +\infty - \ln a = +\infty.$$

Висновок: інтеграл розбігається при $p = 1$.

Розглянемо критерії збіжності невласного інтеграла I-го роду.

Теорема 1 (загальна ознака збіжності). *Нехай на півпрямій $a \le x < +\infty$ виконується нерівність*

$$|f(x)| \le g(x). \tag{4}$$

Тоді зі збіжності інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Теорема 2 (частинна ознака збіжності). *Нехай на півпрямій $0 < a \le x < +\infty$ функція $f(x)$ задовольняє співвідношення*

$$|f(x)| \le \frac{c}{x^p},$$

де $c > 0$ і p – сталі та $p > 1$. Тоді інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається.

Якщо існує така стала $c > 0$, що на півпрямій $0 < a \le x < +\infty$ правильна нерівність $|f(x)| \ge \frac{c}{x^p}$, в якій $p \le 1$, то інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

Введемо поняття абсолютної та умовної збіжності невласних інтегралів.

Означення 1. *Невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ називається абсолютно збіжним, якщо збігається $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$.*

Означення 1. *Невласний інтеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *називається умовно збіжним, якщо він збігається, а* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *розбігається.*

Зауваження. *Покладемо в теоремі 2 функцію* $g(x) = |f(x)|$*, отримаємо, що з абсолютної збіжності невласного інтеграла випливає його збіжність.*

Теорема 3 (ознака Діріхле–Абеля). *Нехай функції* $f(x)$ *і* $g(x)$ *визначені на* $a \le x < +\infty$*. Нехай далі функція* $f(x)$ *неперервна на півпрямій* $a \le x < +\infty$ *і має на цій прямій обмежену первісну* $F(x)$*.*

Припустимо також, що функція $g(x)$ *монотонно не зростаюча на півпрямій* $a \le x < +\infty$*, прямує до нуля при* $x \to +\infty$ *і має похідну* $g'(x)$*, неперервну на півпрямій* $a \le x < +\infty$*. За цих умов збігається невласний інтеграл*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x) \cdot g(x)dx. \tag{5}$$

Зауваження. *При обчисленні невласних інтегралів використовуються і метод заміни, і метод інтегрування частинами.*

Заміна змінних під знаком невласного інтеграла

Нехай

1) функція $f(x)$ неперервна на півосі $a \le x < +\infty$;

2) піввісь є множиною значень деякої строго монотонної функції $x = g(t)$, заданої на півосі $\alpha \le t < +\infty$ або $-\infty < t \le \alpha$ і має на цій півосі неперервну похідну;

3) $g(\alpha) = a$.

За цих умов зі збіжності одного з невласних інтегралів

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \quad \text{і} \quad \int\limits_\alpha^{+\infty} f(g(t))\cdot g'(t)dt \quad \left(\text{або} \int\limits_{-\infty}^{\alpha} f(g(t))\cdot g'(t)dt\right) \qquad (6)$$

випливає збіжність іншого та рівність цих інтегралів.

Інтегрування частинами

Нехай $u(x)$ і $v(x)$ мають неперервні похідні на півпрямій $a \le x < +\infty$ і, крім того, існує граничне значення

$$\lim_{x\to\infty} u(x)\cdot v(x) = A.$$

За цих умов зі збіжності одного з інтегралів

$$\int\limits_a^{+\infty} u(x)\cdot v'(x)dx \quad \text{та} \quad \int\limits_a^{+\infty} v(x)\cdot u'(x)dx$$

випливає збіжність іншого.

Правильною є формула

$$\int\limits_a^{+\infty} u(x)\cdot v'(x)dx = A - u(a)\cdot v(a) - \int\limits_a^{+\infty} v(x)\cdot u'(x)dx.$$

Приклад 1. Обчислити $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}dx$, $a > 0$.

Розв'язання.

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}dx = \lim_{R\to+\infty}\int\limits_0^{R} e^{-ax}dx = \lim_{R\to+\infty}\left(-\frac{1}{a}e^{-ax}\right)\Big|_0^R =$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\left(-\frac{1}{a}e^{-aR} + \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a},$$

оскільки $\lim\limits_{R\to+\infty} e^{-aR} = \lim\limits_{R\to+\infty} \dfrac{1}{e^{aR}} = 0.$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{2xdx}{x^2+1}.$

Розв'язання.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xdx}{x^2+1} = \lim_{R\to-\infty} \int\limits_{R}^{0} \frac{2xdx}{x^2+1} + \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{0}^{R} \frac{2xdx}{x^2+1} =$$

$$= \lim_{R\to-\infty} \int\limits_{R}^{0} \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} + \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{0}^{R} \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} = \left| x^2+1=t \right| =$$

$$= \lim_{R\to-\infty} \ln\left|x^2+1\right| \Big|_{R}^{0} + \lim_{R\to+\infty} \ln\left|x^2+1\right| \Big|_{0}^{R} =$$

$$= \lim_{R\to-\infty} \left(0 - \ln\left(R^2+1\right)\right) + \lim_{R\to+\infty} \left(\ln\left(R^2+1\right) - 0\right).$$

Оскільки $\ln\left(R^2+1\right) \to \infty$ при $R \to \pm\infty$, то інтеграл розбігається.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{x}{(1+x)^3} dx.$

Розв'язання.

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x)^3} = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{0}^{R} \frac{xdx}{(1+x)^3} = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{0}^{R} \left(\frac{1}{(x+1)^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(x+1)^3} \right) dx = \lim_{R\to+\infty} \left(-\frac{1}{(x+1)} \right) \Big|_{0}^{R} + \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2(1+x)^2} \Big|_{0}^{R} =$$

$$= 0 + 1 + 0 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Підінтегральна функція $f(x) = \dfrac{x}{(1+x)^3}$ є дробово-раціональною функцією зі знаменником $(1+x)^3$, а рівняння $(1+x)^3 = 0$ має три

кратні корені $x_{1,2,3} = -1$. Розкладемо $f(x)$ на суму дробів згідно з теорією:

$$f(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3},$$

де A, B, C – невідомі числа. Тоді

$$\frac{x}{(1+x)^3} = \frac{(x+1)^2 A + B(x+1) + C}{(x+1)^3} \Rightarrow$$

$$x = Ax^2 + 2Ax + A + Bx + B + C.$$

Прирівняємо коефіцієнти

$$\begin{array}{r} x^2: \\ x: \\ x^0: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A = 0 \\ 2A + B = 1 \\ A + B + C = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 0 \\ B = 1 \\ C = -1 \end{array} \right.$$

Отже, $\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x)^3} = \frac{1}{2}$.

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} x \sin x dx$ або довести, що він розбігається.

Розв'язання.

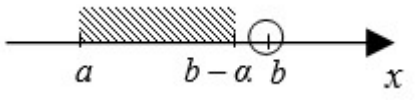
$$\int\limits_0^{+\infty} x \sin x dx = \lim_{R \to +\infty} \int\limits_0^R x \sin x dx = \left| \begin{array}{c} u = x \\ dv = \sin x dx \\ du = dx \\ v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{R \to +\infty} \left(-x \cos x \Big|_0^R + \int\limits_0^R \cos x dx \right) = \lim_{R \to +\infty} (-R \cos R + \sin R) \Rightarrow$$

оскільки $\lim\limits_{R \to +\infty} \cos R$ та $\lim\limits_{R \to +\infty} \sin R$ не існують, тому інтеграл розбіжний.

2. Невласні інтеграли II-го роду

Нехай на напіввідкритому інтервалі $[a, b)$ визначена і неперервна функція $f(x)$. Точку b будемо називати *особливою*, якщо функція необмежена на $[a, b)$, але є обмеженою на довільному відрізку $[a, b-\alpha] \subset [a, b)$. Нехай, крім того, вона є інтегровною на $[a, b-\alpha]$.



При таких припущеннях на $[a, b-\alpha]$ задана функція

$$F(\alpha) = \int_a^{b-\alpha} f(x)dx. \tag{7}$$

Дослідимо існування границі $F(\alpha)$ при $\alpha \to 0+0$ і позначимо

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \to 0+0} \int_a^{b-\alpha} f(x)dx. \tag{8}$$

Інтеграл у лівій частині називається невласним інтегралом II-го роду від функції $f(x)$ на проміжку $[a, b)$. Якщо така границя існує і скінченна, то інтеграл є збіжним. Якщо ж границя не існує або нескінченна, то невласний інтеграл розбіжний. У випадку збіжності величина границі в формулі (8) позначається так само $\int_a^b f(x)dx$.

Приклад 5. Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}, \quad p > 0.$$

Розв'язання. Бачимо, що точка $x = b$ є особливою точкою функції $f(x)$ ($f(b) \to +\infty$). Крім того бачимо, що $f(x)$ інтегровна на

довільному $[a, b-\alpha]$, причому

$$\int\limits_a^{b-\alpha} \frac{dx}{(b-x)^p} = \begin{cases} -\dfrac{(b-x)^{1-p}}{1-p}\Big|_a^{b-\alpha} = \dfrac{(b-a)^{1-p} - \alpha^{1-p}}{1-p}, \ p \neq 1, \\ -\ln(b-x)\Big|_a^{b-\alpha} = \ln\frac{b-a}{\alpha}, \ p = 1. \end{cases}$$

Знайдемо

$$\lim_{\alpha\to 0+0}\left(\frac{(b-a)^{1-p} - \alpha^{1-p}}{1-p}\right) = \lim_{\alpha\to 0+0}\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p} - \lim_{\alpha\to 0+0}\alpha^{1-p} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p} - 0, \ \text{якщо } 1-p > 0, p < 1, \\ -\infty, \ \text{тобто не існує скінченної границі при } p > 1. \end{cases}$$

Окремо розглянемо $\lim\limits_{\alpha\to+0}(\ln(b-a) - \ln\alpha) = +\infty$, а отже і при $p = 1$ інтеграл розбігається.

Висновок. Невласний інтеграл II-го роду у цьому прикладі збігається при $p < 1$ і розбігається при $p \geq 1$ (на відміну від невласного інтеграла I-го роду).

Означення 3. *Нехай $f(x)$ визначена на прямій $-\infty < x < +\infty$ і інтегровна на кожному скінченному інтервалі цієї прямої. Будемо казати, що $f(x)$ інтегровна за Коші, якщо існує границя*

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx.$$

Цю границю будемо називати головним значенням власного інтеграла від функції $f(x)$ в розумінні Коші (за Коші) і позначають

$$V.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx. \tag{9}$$

Приклад 6. Знайти головне значення інтеграла від $\sin x$.

Розв'язання. Оскільки функція $\sin x$ є непарною, тому $\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx = 0$, а отже $V.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$.

Правильними є твердження:

1) Якщо $f(x)$ непарна, то вона інтегровна за Коші і головне значення інтеграла від неї дорівнює нулеві.

2) Якщо $f(x)$ парна, то вона інтегровна за Коші тоді і тільки тоді, коли збігається невласний інтеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx. \tag{10}$$

Перше твердження очевидне ($f(-x) = -f(x)$), а для другого рівність $\int\limits_{-R}^{R} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{R} f(x)dx$ виконується для довільної парної функції.

Означення 4. *Нехай $f(x)$ визначена на $[a, b]$, крім, можливо, точки c $(a < c < b)$ і інтегровна на довільному інтервалі, що не містить c. Будемо називати, що функція $f(x)$ інтегровна за Коші, якщо існує границя*

$$\lim_{\alpha\to 0+0}\left(\int\limits_{a}^{c-\alpha} f(x)dx + \int\limits_{c+\alpha}^{b} f(x)dx\right) = V.p. \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$$

яка називається головним значенням інтеграла за Коші.

Приклад 7. Функція $\dfrac{1}{x-d}$ не інтегровна на $[a, b]$ $(a < d < b)$ у невласному розумінні, але вона інтегровна за Коші

$$V.p. \int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{x-d} = \lim_{\alpha\to+0}\left(\int\limits_{a}^{c-\alpha} \frac{dx}{x-d} + \int\limits_{c+\alpha}^{b} \frac{dx}{x-d}\right) = \ln\frac{b-d}{d-a}.$$

Приклад 8. Знайти інтеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

Розв'язання. Бачимо, що $[-1;1]$ містить $x=0$, а в цій точці функція є необмеженою. Розіб'ємо на два інтеграли

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 3\int\limits_{-1}^{1} x^{2-\frac{2}{3}}dx + 2\int\limits_{-1}^{1} x^{-\frac{2}{3}}dx = 3\int\limits_{-1}^{1} x^{\frac{4}{3}}dx + 2\int\limits_{-1}^{1} x^{-\frac{2}{3}}dx =$$

$$= 3\,\frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}}\Bigg|_{-1}^{1} + 2\lim_{\alpha\to 0+0}\left[\int\limits_{-1}^{0-\alpha} x^{-\frac{2}{3}}dx + \int\limits_{0+\alpha}^{1} x^{-\frac{2}{3}}dx\right] =$$

$$= \frac{9}{7}+\frac{9}{7}+2\lim_{\alpha\to 0+0}\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\Bigg|_{-1}^{0-\alpha} + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}\Bigg|_{0+\alpha}^{1}\right) = \frac{18}{7}+2(3+3) = \frac{18}{7}+12 = 14\frac{4}{7}.$$

Питання для самоконтролю

1. Дайте означення невласного інтеграла першого роду на півпрямій. Коли він називається збіжним, а коли розбіжним?

2. Запишіть означення невласного інтеграла першого роду на прямій.

3. Наведіть умови, при яких невласний інтеграл першого роду $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^p}$ є збіжним (розбіжним).

4. Сформулюйте ознаки збіжності невласного інтеграла першого роду.

5. Як розуміти абсолютну та умовну збіжність невласного інтеграла першого роду?

6. Пригадайте особливості здійснення заміни змінних та інтегрування частинами у невласному інтегралі першого роду.

7. Дайте означення невласного інтеграла другого роду, його збіжності та розбіжності.

8. При яких значеннях p невласний інтеграл другого роду $\int\limits_a^b \dfrac{dx}{(b-x)^p}$ є збіжним (розбіжним)?

9. Дайте означення інтегровної за Коші функції на всій прямій та на інтервалі. Що таке головне значення інтеграла за Коші?

Завдання для самостійної роботи

Задача 14. Обчислити невласні інтеграли першого роду (або встановити їх розбіжність).

14.1. $\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{\pi(x^2+4x+5)}$;

14.2. $\int_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{16x^4+1}$;

14.3. $\int_{1}^{+\infty} \frac{4dx}{x(1+ln^2\,x)}$;

14.4. $\int_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$;

14.5. $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}$;

14.6. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+2x)\,ln\,3}$;

14.7. $\int_{1}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{16x^4-1}}$;

14.8. $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(ln\,x-1)^2}$;

14.9. $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{16dx}{\pi(4x^2+4x+5)}$;

14.10. $\int_{0}^{\infty} \frac{arctg2x}{\pi(1+4x^2)}\,dx$;

14.11. $\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$;

14.12. $\int_{1}^{+\infty} \frac{(arctgx)^2dx}{1+x^2}$;

14.13. $\int_{3}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$;

14.14. $\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2dx}{x^3-1}$;

14.15. $\int_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt[4]{(x^2+16)^5}}$;

14.16. $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\,lnln\,x}$;

14.17. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$;

14.18. $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{6x^2-5x+1}$;

14.19. $\int_{0}^{+\infty} x\,sin(x^2)\,dx$;

14.20. $\int_{0}^{+\infty} xe^{2x^2+1}dx$;

14.21. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{x^2-4x}$;

14.22. $\int_{1}^{+\infty} \frac{1+2x}{x^2(1+x)}\,dx$;

14.23. $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+1}$;

14.24. $\int_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{x^2+1}$;

14.25. $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(ln\,x-1)^2}$;

14.26. $\int_{0}^{\infty} \frac{x^2dx}{x^3+7}$;

14.27. $\int_{0}^{\infty} e^{-3x}xdx$;

14.28. $\int_{2}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+5)^3}}\,dx$;

14.29. $\int_{2}^{\infty} \frac{ln\,x}{x}\,dx$;

14.30. $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{9x^2-9x+2}$.

Задача 15. Обчислити невласні інтеграли другого роду (або встановити їх розбіжність).

15.1. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$;

15.2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$;

15.3. $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{ln(3x-1)}{3x-1}dx$;

15.4. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{(ln\,x)^3}}$;

15.5. $\int_0^1 \frac{xdx}{1-x^4}$;

15.6. $\int_1^5 \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3-1}}$;

15.7. $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$;

15.8. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{(1-x)(ln(1-x))^2}$;

15.9. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(2x-1)^2}$;

15.10. $\int_0^4 \frac{10xdx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}$;

15.11. $\int_0^1 \frac{9xdx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$;

15.12. $\int_{\frac{1}{3}}^2 \frac{dx}{9x^2-6x+1}$;

15.13. $\int_{-\frac{1}{3}}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$;

15.14. $\int_0^1 \frac{ln\,x}{x}dx$;

15.15. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+4}$;

15.16. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{sinxdx}{\sqrt[7]{cos^2\,x}}$;

15.17. $\int_0^1 \frac{arcsinx}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

15.18. $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$;

15.19. $\int_0^1 \frac{x^4dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$;

15.20. $\int_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;

15.21. $\int_0^3 \frac{dx}{2x^2+x^4}$;

15.22. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{(2x+4)^3}$;

15.23. $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{ln\,x}}$;

15.24. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{cosxdx}{sin^2\,x}$;

15.25. $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$;

15.26. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}$;

15.27. $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2}$;

15.28. $\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{64-x^6}}$;

15.29. $\int_0^1 \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$;

15.30. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Григорій Михайлович Фіхтенгольц. Курс диференціального та інтегрального числення. Переклад небайдужих до математики і України: Сергій Зінов'єв 2022.02.24-2023.03.17. – 664 с.

2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика : Навч. посібн. – "А.С.К", 2006. – 648 с.

3. Дубовик В.П., Юрик І.І., Вовкодав І.П. та ін. Вища математика : Збірник задач / навч. посібник. – К. : Ігнатекс–Україна, 2011. – 480 с.

4. Матаналіз у прикладах і задачах : У 2 ч. : Навч. посіб. / Л.І. Дюженкова, Т.В. Колесник, М.Я. Лященко та ін. – К. : Вища шк., 2002. – Ч.1. – 462 с.

5. Веренич І.І., Лавренчук В.П., Пасічник Г.С. Вища математика : лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз. Частина 1 : Навчальний посібник. – Чернівці : Рута, 2003. – 205 с.

6. Веренич І.І., Лавренчук В.П., Пасічник Г.С., Черевко І.М. Вища математика : математичний аналіз, диференціальні рівняння : Підручник. – Чернівці : Рута, 2008. – 267 с.

7. Гонік Л. Матан / Ларрі Гонік : пер. з англ. Світлана Попадюк : худож. Ларрі Гонік. – Київ, РІДНА МОВА, 2020. – 240 с. (Серія "Наука в коміксах")

ЗМІСТ

Передмова 3
Тема 1. Числові послідовності 4
1. Означення числової послідовності. Приклади числових послідовностей 4
2. Обмежені та необмежені числові послідовності . . . 5
3. Нескінченно малі та нескінченно великі числові послідовності. Властивості нескінченно малих та нескінченно великих послідовностей 6
4. Означення границі числової послідовності. Збіжні послідовності. Геометричний зміст збіжної послідовності 9
5. Властивості збіжних та розбіжних послідовностей 12
6. Означення монотонної (зростаючої та спадної) послідовності. Теорема про границю монотонної послідовності 15
7. Лема про вкладені відрізки 17
8. Число Ейлера 18
Завдання для самостійної роботи 21
Тема 2. Основні поняття про функцію. Диференціальне числення функції однієї змінної 26
1. Границя функції 26
2. Нескінченно малі функції 27
3. Перша чудова границя 28
4. Нескінченно великі функції 30
5. Неперервність функції в точці 30
6. Арифметичні дії над неперервними функціями . . . 32
7. Класифікація точок розриву 32
8. Теореми про неперервні функції 34
9. Похідна функції 38

10. Похідна функції 44
11. Похідні і диференціали вищих порядків 47
12. Теорема про диференційовні функції 52
13. Правило Лопіталя 55
14. Дослідження функцій за допомогою похідних 59
Завдання для самостійної роботи 71
Тема 3. Невизначений інтерал 84
1. Поняття невизначеного інтеграла. Властивості невизначеного інтеграла 84
2. Методи інтегрування 87
3. Основні класи функцій, інтегровних у скінченному вигляді 94
Завдання для самостійної роботи 115
Тема 4. Визначений інтерал та його застосування .. 123
1. Суми Дарбу, їх властивості 124
2. Умови існування визначеного інтеграла 124
3. Класи інтегровних функцій 125
4. Властивості визначених інтегралів 125
5. Визначений інтеграл як функція верхньої межі .. 127
6. Основна формула інтегрального числення 127
7. Формула заміни змінної у визначеному інтегралі . 128
8. Інтегрування частинами 129
Завдання для самостійної роботи 144
Тема 5. Невласні інтерали 153
1. Невласні інтеграли I-го роду (одновимірний випадок) 153
2. Невласні інтеграли II-го роду 161
Завдання для самостійної роботи 166
Список використаної літератури 168

Навчальне видання

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ : КОРОТКИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ. ЧАСТИНА 1

Навчальний посібник

Автори: *Перун Галина Михайлівна*
Мельничук Лілія Михайлівна

Літературний редактор: Лупул О.В.