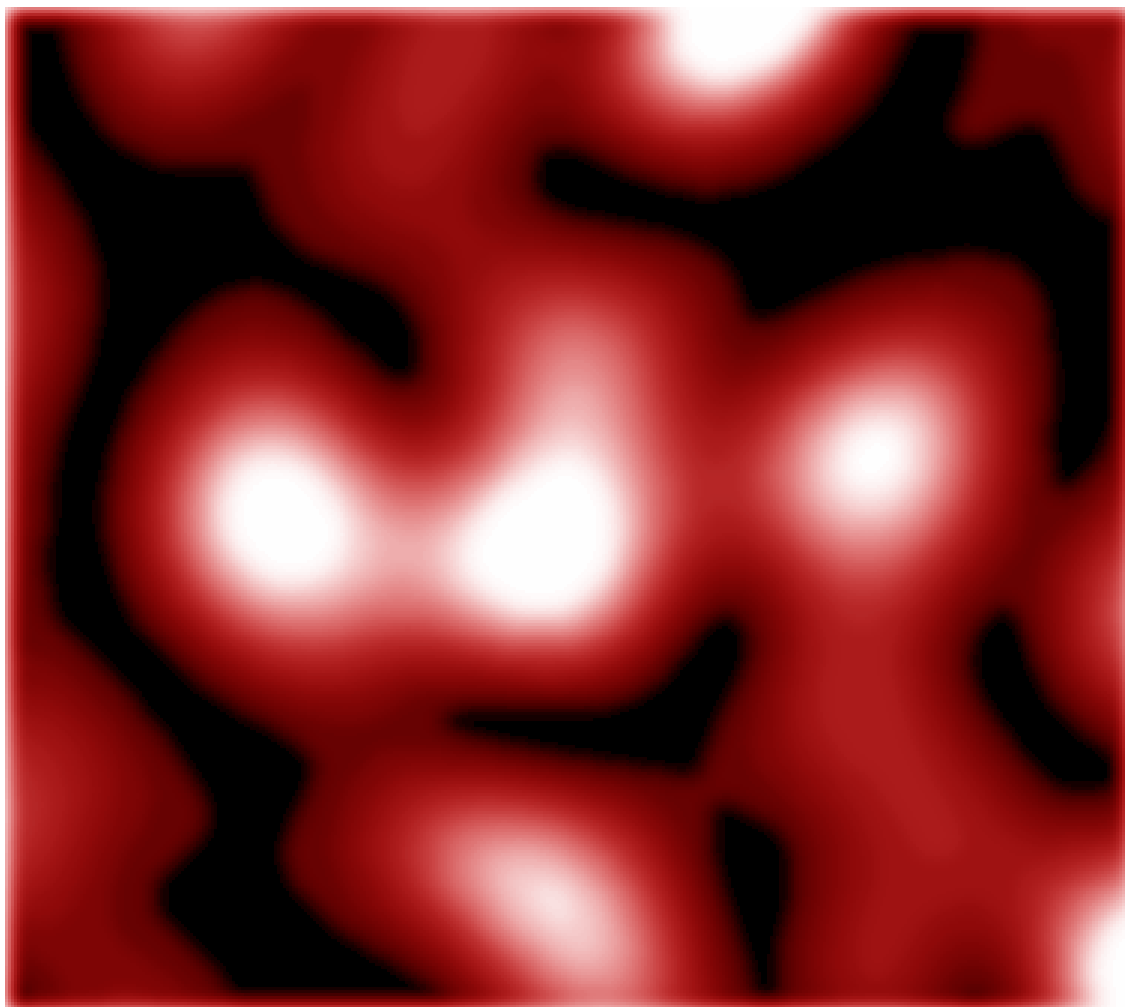


Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
Науково-навчальний інститут фізико-технічних і комп'ютерних наук
Кафедра кореляційної оптики



І.І. Мохунь, Ю.Ю. Вікторовська

Кореляційна оптика

Чернівці 2024

УДК 535.3, 535.016
ББК: 74.586.81/96-252.4

M89

Друкується за ухвалою Вченої ради
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича
(протокол №8 від 27 травня 2024)

Рецензенти: В.І. Федів, д.ф.-м.-н, проф., завідувач кафедри біологічної фізики та медичної
інформатики Буковинського державного медичного
університету
С.Г. Одулов, д.ф.-м.н, г.н.с. Інституту фізики НАНУ, Член-кореспондент НАНУ

M86 Мохунь І.І., Вікторовська Ю.Ю. Кореляційна оптика. – Чернівці: Чернів. нац. ун-т,
2024. – 178 с.

Викладені питання волоконно-оптичних ліній і компонентів волоконно-оптичних
систем передавання, описано принципи роботи систем з відкритими атмосферними
каналами зв'язку

Для студентів спеціальностей 152, Метрологія та інформаційно-
вимірювальна техніка; 172, Телекомунікації та радіотехніка.

УДК 535.3, 535.016
ББК: 74.586.81/96-252.4

ЗМІСТ

	ВСТУП	8
1.	СКАЛЯРНИЙ ОПТИЧНИЙ СИГНАЛ ТА ЙОГО ХАРАКТЕРИСТИКИ	10
1.1.	Основні рівняння	10
1.1.1.	Рівняння Максвелла	10
1.1.3.	Хвильове рівняння	10
1.2.	Скалярне наближення. Гармонічні хвилі	11
1.3.	Хвильові пакети. Групова швидкість	13
1.3.1.	Квазімонохроматичне наближення	13
1.3.2.	Биття	14
1.3.3.	Простий хвильовий пакет	14
1.4.	Розповсюдження оптичного сигналу	17
1.4.1.	Зміна фази хвилі при її розповсюдженні. Фазова затримка	17
1.4.2.	Комплексні амплітуди деяких хвиль	18
	Плоска хвиля	18
	Сферична хвиля	18
	Гауссів пучок 0-го порядку, який розповсюджується вздовж z	19
1.4.3.	Фазова затримка, що вноситься тонким оптичним елементом	19
1.4.4.	Фазова затримка, яку вносить сферична лінза	20
2.	МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ОПТИКИ	23
2.1.	Інтегральне перетворення Фур'є	23
2.2.	Згортка та кореляція	23
2.2.1.	Згортка	23
2.2.2.	Кореляція	23
2.2.3.	Зв'язок між згортою і кореляцією	25
2.3.	Деякі властивості перетворення Фур'є	25
2.3.1.	Лінійність перетворення Фур'є	25
2.3.2.	Теорема зсуву	25
2.3.3.	Теорема масштабу	25
2.3.4.	Співвідношення Парсеваля (Закон збереження енергії)	26
2.3.5.	Пряма й обернена теореми згортки і кореляції	26
2.3.6.	Похідна від сигналу та Фур'є-перетворення	27
2.4.	Деякі «незвичайні» функції. Узагальнені, сингулярні тощо	27
2.4.1.	δ -функція	27
2.4.2.	Функція $\text{sinc}(t)$	28
2.4.3.	Прямокутний імпульс	28
2.4.4.	Функція Хевісайда	29
2.4.5.	Гаусова модуляція хвилі	29
2.5.	Деякі приклади Фур'є-перетворень	30
2.5.1.	Фур'є-образ прямокутного імпульсу	30

2.5.2.	Нормована до одиниці плоска хвиля та δ -функція	30
2.5.3.	Гармонічний сигнал	30
2.5.4.	Гауссова функція	31
2.5.5.	Функція Хевісайда	31
2.5.6.	Функція типу «сферична хвиля»	32
2.6.	Перетворення Мелліна	32
2.7.	Сигнали з обмеженим спектром. Відліки функції. Теорема Котельнікова – Шеннона	33
2.8.	Метод стаціонарної фази. Наближена величина деяких інтегралів	36
2.9.	Елементи «елементарної» матричної алгебри	38
2.9.1.	Множення матриці на число	38
2.9.2.	Транспонування матриці (заміна рядків на стовпці)	38
2.9.3.	Додавання матриць	38
2.9.4.	Добуток матриць	38
2.9.5.	Знаходження оберненої матриці A^{-1}	38
3.	РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ОПТИЧНОГО СИГНАЛУ	39
3.1.	Системи в оптиці	39
3.1.1.	Просторово-інваріантні системи	39
3.1.2.	Багатокаскадні системи	40
3.2.	Розповсюдження оптичного сигналу у вільному просторі	41
3.2.1.	Наближення Френеля	41
3.2.2.	Наближення Фраунгофера	43
3.2.3.	Принцип Бабіне	43
3.3.	Реалізація Фур'є-перетворення в оптиці	44
3.4.	Наближення хвильових фронтів	46
3.4.1.	Наближення тіні	53
3.4.2.	Багатокаскадна просторово-залежна система з асферичними елементами	54
4.	ВЕКТОРНІ ПОЛЯ. ПОЛЯРИЗАЦІЯ	56
4.1.	Елементарні уявлення	56
4.2.	Гармонічна електромагнітна плоска хвиля	57
4.2.1.	Еліптична поляризація	57
4.2.2.	Фізичний зміст головної фази	60
4.2.3.	Ортогональні форми поляризації	62
4.2.4.	Різниця фаз між у- і х-компонентами та форма поляризаційного еліпса.....	62
4.2.5.	Розклад поля на циркулярно поляризовані компоненти	63
4.3.	Сучасні методи опису стану поляризації електромагнітної хвилі	66
4.3.1.	Вектор Джонса	66
4.3.2.	Інтенсивність хвилі	66
4.3.3.	Вектори Джонса для деяких станів поляризації	67

4.3.4.	Перетворення вектора Джонса при повороті системи координат (навколо осі z)	68
4.3.5.	Представлення поляризованого світла комплексними числами	69
4.3.6.	Представлення поляризованого світла точками на сфері Пуанкаре ...	70
4.3.7.	Параметри Стокса	71
4.3.8.	Локальні параметри Стокса	72
4.3.9.	Матриця когерентності	73
4.3.10.	Спеціальні випадки	74
4.4.	Розповсюдження поляризованого світла через поляризуючі оптичні системи	75
4.4.1.	Формалізм матриці Джонса	75
4.4.2.	Значення елементів T_{ij} матриці Джонса	77
4.4.3.	Послідовність оптичних систем	77
4.4.4.	Матриці Джонса «основних» оптичних пристроїв	77
4.4.4.1.	Пристрої, які працюють на пропускання	78
4.4.4.2.	Пристрої, які працюють на відбивання	78
4.4.5.	Перетворення декартової матриці Джонса при повороті системи координат	79
4.4.6.	Кругова матриця Джонса	79
4.4.7.	Виділення інформації про еліпс поляризації при використанні формалізму матриці Джонса. Поляризаційна передаточна функція	80
4.5.	Розповсюдження частково поляризованого квазімонохроматичного світла через деполаризуючі оптичні системи. Формалізм матриці Мюллера	80
4.5.1.	Приклад застосування формалізму матриці Мюллера. Розрахунок значення членів матриці	81
4.5.2.	Експериментальне визначення елементів матриці Мюллера	82
4.5.3.	Заклучні ремарки	85
4.6.	Незвичайні випадки поляризації світлової хвилі	85
4.6.1.	Суперпозиція хвиль із різними частотами	85
4.6.2.	Суперпозиція циркулярно-поляризованих хвиль	86
4.6.3.	Суперпозиція лінійно-поляризованих хвиль	88
4.6.4.	Поляризаційні характеристики полів, утворених в результаті суперпозиції хвиль з різними частотами	89
4.6.4.1.	Лінійно ортогонально поляризовані пучки	90
4.6.4.2.	Циркулярно ортогонально поляризовані пучки	91
5.	КОГЕРЕНТНІСТЬ ОПТИЧНОЇ ХВИЛІ	94
5.1.	Елементарні уявлення про когерентність	94
5.1.1.	Деякі визначення та ключові поняття	94
5.1.2.	Елементарні уявлення про часову і просторову когерентність	94
5.1.2.1.	Часова когерентність і час когерентності. Довжина когерентності	94
5.1.2.2.	Просторова когерентність	95

5.2.	Уявлення про когерентність на основі підходів кореляційної оптики ...	96
5.2.1.	Кореляційна функція 2-го порядку	96
5.2.2.	Комплексне представлення фізичних поліхроматичних полів	97
5.3.	Нестала суперпозиція. Інтерференція хвиль із різними частотами	99
5.4.	Формування зображення у когерентному і некогерентному світлі	102
5.4.1.	Когерентний випадок	102
5.4.2.	Повністю некогерентний випадок	102
5.4.3.	Ідеальна просторово-інваріантна система. Обмежуючі апертури. Функція розсіювання точки	102
6.	ПОНЯТТЯ ПРО ГОЛОГРАФІЮ, ОПТИЧНУ ОБРОБКУ ІНФОРМАЦІЇ ТА ДЕЯКІ ІНШІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ОПТИКИ	105
6.1.	Елементарні поняття про голографію	105
6.2.	Безопорна голограма	107
6.2.1.	Принципи відновлення зображення із безопорної голограми	107
6.2.2.	Передаючі властивості безопорної голограми	110
6.2.3.	Оцінка відношення сигнал/шум у зображенні, що відновлене з безопорної голограм	114
6.2.3.1.	Природа шумів у безопорній голографії	114
6.2.3.2.	Двовимірні безопорні голограми	116
	Корелятор Ван-дер-Люгта	116
	Нелінійна двовимірні голограми	118
6.2.3.3.	Тривимірні безопорні голограми	119
6.2.4.	Відновлення амплітуди і фази оптичного поля неасоціативним методом	121
6.2.4.1.	Відновлення безопорної голограми при заміні амплітудної модуляції читаючої частини вхідного поля	124
6.2.4.2.	Експериментальна реалізація відновлення зображення «фазових» об'єктів неасоціативним методом	127
6.3.	Деякі застосування методів кореляційної оптики	129
6.3.1.	Поняття про голографічну інтерферометрію	129
6.3.2.	Поняття про фільтрацію оптичних сигналів	131
6.3.2.1.	Досліди Аббе	132
6.3.2.2.	Інші приклади смугової фільтрації	134
	Фільтрація адитивних завад	134
	Фільтрація мультиплікативних завад	135
6.3.2.3.	Фільтрація за допомогою «експоненціального» фільтра	136
6.3.2.4.	Фільтрація постійної складової. Підвищення контрасту	138
6.3.2.5.	Реконструкція зображення, спотвореного у наслідок «змазу»	138
6.3.2.6.	Фазово-контрастний мікроскоп	140
6.3.2.7.	Диференціювання сигналу	142
6.3.3.	Принципи оптимальної фільтрації	144
6.3.3.1.	Голографічне розпізнавання образів	144

6.3.3.2.	Фактори, які обмежують ефективність голографічних систем розпізнавання. Масштаб, ракурс, поворот зображення	146
	Бінарна модуляція	147
	Статистичний амплітудний транспарант	147
6.3.4.	Методи боротьби із факторами, які впливають на ефективність голографічних систем розпізнавання	148
6.3.4.1.	Багатократний запис голограми фільтра	148
6.3.4.2.	Застосування оптичних систем спеціального типу	148
6.3.4.3.	Системи із оберненим зв'язком	148
6.3.4.4.	Просторово-залежні методи обробки інформації	150
6.3.4.5.	Реалізація Меллін-перетворення за допомогою комп'ютерно-синтезованих голограм	151
6.3.4.6.	Реалізація масштабно-інваріантного перетворення вхідних сигналів в реальному часі	154
6.3.5.	Ідентифікація зображень за допомогою аналізу Фур'є-спектрів	159
6.3.6.	Кореляційна фільтрація за допомогою безопорної голограми	161
6.3.7.	Нейронні і нейроподібні мережі на основі голографічних фільтрів	163
6.3.7.1.	Структура нейронних мереж	163
6.3.7.2.	Алгоритм роботи нейронної мережі. Алгоритм Хопфілда	165
6.3.7.3.	Перспективи розвитку оптичних нейронних мереж	167
6.3.7.4.	Реалізація оптичних нейронних мереж	168
	Оптична нейронна мережа з процесорним ядром у вигляді безопорної голограми	168
	Оптична нейронна мережа з процесорним ядром у вигляді узгодженого фільтра	170
	Недоліки і переваги обох систем	173
	ЛІТЕРАТУРА	174

ВСТУП

Як відомо, класичні розділи оптики складаються з геометричної (променевої), хвильової (фізичної) оптики, оптики розсіюючих середовищ. З появою лазерів і когерентного випромінювання започатковані і розвиваються квантова, кореляційна та сингулярна оптика. Предметом досліджень двох останніх є властивості й закономірності формування і поширення складних, неоднорідних, структурованих оптичних полів.

Щодо проблематики кореляційної оптики, то, на нашу думку, під цією назвою можна об'єднати такі напрямки оптичних досліджень:

1. Перш за все історично поняття кореляції вводиться у теорії імовірності (статистики) як величина, яка дає змогу порівнювати сукупність випадкових величин або процесів. Відповідно кореляційна оптика оперує інтегральними (імовірнісними) характеристиками складного поля, базується на використанні статистичних моделей та методів. Поняття кореляції як у часовому так і просторовому сенсах застосовують дуже часто, наприклад, це поняття центральне в теорії когерентності оптичних хвиль, поляризаційної оптики тощо.

2. З іншого боку, операція кореляції може бути застосована детерміновано на основі певної, цілком визначеної процедури (інтегрального перетворення), яка застосовується до детермінованих сигналів. Так, на початку 60-х попереднього сторіччя в оптиці, насамперед, в оптичній обробці інформації, почали дуже широко (і плідно) застосовувати підходи теорії зв'язку, які базуються на застосуванні різного типу інтегральних перетворень, зокрема перетворення Фур'є. Це дало можливість в простій алгоритмізованій формі описати процеси розповсюдження когерентних оптичних хвиль, процеси трансформації і фільтрації оптичних хвиль тощо.

Враховуючи вищесказане, в цьому курсі ми будемо розглядати:

1. Найбільш загальні і сучасні методи опису як скалярних, так і векторних хвиль. Елементи теорії когерентності.

2. Закономірності розповсюдження та трансформації хвиль різної природи у вільному просторі і в різного типу оптичних системах. Методи аналізу та моніторингу їх характеристик, які однозначно (або варіативно) пов'язані із фізичними об'єктами, системами, що сформували ці поля, тощо.

3. Інтегральні перетворення, які описують розповсюдження оптичних сигналів, їх трансформацію та можуть бути реалізовані (або реалізуються) в оптиці.

4. На основі розглянутих закономірностей проаналізуємо можливості оптичної обробки зображень, полів, сформованих насамперед когерентними хвилями. Розглянемо їх застосування в системах метрології, обробки інформації тощо.

Зазначимо, що, виходячи з такої постановки питання, предмет кореляційної оптики надзвичайно широкий і складний. Відповідно детально розглянути «всі» проблеми сучасної оптики з точки зору концепції випадкових функцій, процесів, кореляції початково неможливо.

Саме тому в цьому курсі ми іноді будемо відходити від «строгого» математичного аналізу, і наші висновки в основному будемо будувати на основі деяких фізичних міркувань, які не можуть бути спростовані і не вимагають додаткового доведення.

Особливо відзначимо відносно невелику кількість літературних джерел наведених в конспекті лекцій. Природно, що кількість посилань може бути збільшена практично безмежно. Проте застосований нами підхід викликаний такими причинами:

1. Наведені лише головні, «класичні посилання», цінність яких «перевірена часом».
2. Наведені такі посилання, повний текст яких досить просто отримати з мережі Інтернет.
3. Нарешті наведені літературні джерела, які тією чи іншою мірою відображають результати досліджень науковців, які працювали або працюють на кафедрі «Кореляційної оптики» Чернівецького університету.

При цьому відзначимо, що даний конспект не претендує на повноту викладення матеріалу. Насамперед, це стосується розділів, які присвячені прикладним аспектам використання фундаментальних результатів, отриманих в рамках кореляційної оптики, а саме оптичної обробки інформації, поляриметрії, безконтактних методів моніторингу характеристик фізичних систем і т. ін.

Більше того, враховуючи обмежений час, відведений на вивчення курсу, деякі питання, навіть дуже важливі для розуміння самого предмета кореляційної оптики, наведені фрагментарно і неповно, за що автор наперед просить вибачення у читачів даного рукопису.

Водночас автори будуть вважати своє завдання виконаним, якщо в деяких питаннях цей конспект буде слугувати певним доповненням до класичних підручників і монографій.

1. СКАЛЯРНИЙ ОПТИЧНИЙ СИГНАЛ ТА ЙОГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

1.1. Основні рівняння

1.1.1. Рівняння Максвелла

Як відомо (див., наприклад, пос. 1-3) у самому загальному вигляді електромагнітна хвиля описується рівняннями Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 4\pi \rho \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (1.4)$$

де $\vec{E}, \vec{H}$ – вектори електричної і магнітної напруженостей електромагнітного поля; $\vec{D}, \vec{B}$ – вектори електричної і магнітної індукції; $\vec{j}$ – густина електричного струму; ρ – густина електричного заряду.

У вільному просторі $\vec{j}, \rho = 0$. $\vec{D}, \vec{B}$ – враховують вплив середовища.

1.1.2. Матеріальні рівняння

Якщо $\vec{j} = 0$, то таких рівнянь лише два:

$$\begin{cases} \varepsilon \vec{E} = \vec{D} \\ \mu \vec{H} = \vec{B} \end{cases} \quad (1.5)$$

де ε, μ – діелектрична і магнітна проникності відповідно.

1.1.3. Хвильове рівняння [1,2]

Хвильове рівняння для випадку однорідного середовища, вільного від токів і зарядів, має вигляд:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.6)$$

де $v = \frac{c}{n}$ – величина, яка пов'язана зі швидкістю розповсюдження світла в середовищі; c – швидкість розповсюдження світла у вакуумі; $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ – показник заломлення середовища.

Для парамагнетиків (немагнітні речовини) $\mu \rightarrow 1$. Всі прозорі речовини, які нами будуть аналізуватися, – парамагнетики. Відповідно будемо вважати, що $n = \sqrt{\varepsilon}$.

Величину $v = \frac{c}{n}$ називають фазовою швидкістю, яка відповідає швидкості розповсюдження поверхонь однакової фази для плоскої хвилі. Для хвилі загального вигляду це не зовсім так. Фазова швидкість змінюється від точки до точки. Проте при

достатньо високій частоті фазова швидкість приблизно така сама, як і для плоскої хвилі.

Таке саме хвильове рівняння справедливе для напруженості магнітного поля і для кожної Декартової компоненти електричного або магнітного полів.

1.2. Скалярне наближення. Гармонічні хвилі [1,2]

Нехай в певній точці простору $\vec{r}_0$ збурення викликане скалярною електромагнітною хвилею залежить лише від часу t :

$$V(\vec{r}_0, t) = E(t). \quad (1.7)$$

При цьому напруженість електричного поля задовольняє скалярне хвильове рівняння. Тоді, зокрема, розв'язками цього рівняння є періодичні гармонічні функції у вигляді:

$$E(t) = A \cos(\omega t + \Phi), \quad (1.8)$$

де A – амплітуда (або модуль амплітуди), $(\omega t + \Phi)$ – фаза. Величина

$$v = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \quad (1.9)$$

може бути інтерпретована як частота коливань, ω – кругова (циклічна або кутова) частота, T – період коливань.

Відповідно хвиля, яка розповсюджується у напрямку $\vec{s}$ ($\vec{s}$ – одиничний вектор), описується співвідношенням:

$$E(\vec{r}, t) = A \cos[\omega(t - \frac{\vec{r}\vec{s}}{v}) + \Phi] \quad (1.10)$$

Унаслідок періодичності (1.10) співвідношення не зміниться при заміні $\vec{r}\vec{s}$ на $\vec{r}\vec{s} + \lambda$, де

$$\lambda = v \frac{2\pi}{\omega} = vT. \quad (1.11)$$

Величина λ має назву довжини хвилі. Окрім λ може бути введений параметр

$$\lambda_0 = n\lambda = cT, \quad (1.12)$$

який має назву зведеної довжини хвилі, довжини хвилі, яка розповсюджується у вакуумі з тією ж самою частотою.

Одночасно з довжиною хвилі може бути введена величина

$$k_0 = \frac{1}{\lambda} = \frac{v}{c}, \quad (1.13)$$

яка має назву хвильового числа [1]. Дуже часто хвильовим числом називають величину

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}. \quad (1.14)$$

Тоді, за аналогією із (1.12), параметр

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \quad (1.15)$$

називають зведеним хвильовим числом $k = nk_0$. Іноді хвильовим числом називають саме цю величину.

Вектор з довжиною k і напрямком $\vec{s}$ отримав назву хвильового вектора:

$$\vec{k} = k\vec{s}. \quad (1.16)$$

В подальшому під хвильовим числом будемо розуміти саме величину $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$.

Природно, що для гармонічної хвилі загального вигляду величина Φ , яка має назву *просторової фази*, є функцією координат

$$E(\vec{r}, t) = A(\vec{r})\cos[\omega t - \Phi(\vec{r})]. \quad (1.17)$$

Розв'язок рівняння

$$\Phi(\vec{r}) = \text{const} \quad (1.18)$$

визначає так звані *поверхні постійної фази*, або *хвильові поверхні*.

Напруженість поля $E(\vec{r}, t)$ може бути записана дещо в іншому вигляді:

$$E(\vec{r}, t) = \text{Re}\{U(\vec{r})e^{\pm j\omega t}\}. \quad (1.19)$$

Величину $V(\vec{r}, t) = U(\vec{r})e^{\pm j\omega t}$ називають *комплексною хвильовою функцією*, а величину

$$U(\vec{r}) = A(\vec{r})e^{j\Phi(\vec{r})} \quad (1.20)$$

комплексною амплітудою хвилі.

Природно, що у когерентному випадку перехід до комплексного вигляду (комплексної амплітуди) іноді дуже корисний і значно спрощує розрахунки. При цьому перехід до напруженості поля може бути здійснений лише на кінцевому етапі множенням на відповідний комплексний фазовий множник $e^{\pm j\omega t}$ та виконанням операції по взяттю дійсної частини від експоненти.

Відзначимо, що для комплексної амплітуди реально існуючого поля виконується аналог хвильового рівняння

$$\nabla^2 U + n^2 k^2 U = 0, \quad (1.21)$$

який є не чим іншим, як рівнянням Лапласа.

На закінчення цього параграфа зауважимо:

1. Для векторного випадку (як і в скалярному варіанті) можуть бути введені комплексна хвильова функція та векторний аналог комплексної амплітуди.

2. У випадку виконання параксіального наближення для комплексних амплітуд виконуються такі співвідношення [3-7]:

$$U_z = \frac{1}{jk} \vec{\nabla} \vec{U}_t, \quad (1.22)$$

де $\vec{U}$ – відповідна комплексна амплітуда векторного електричного поля, $\vec{U}_t$ – її поперечна (трансверсальна) складова:

$$\vec{U}_t = \vec{i}U_x + \vec{j}U_y \quad (1.23)$$

Окрім співвідношення (1.22) виконується також

$$\frac{j}{k} \text{rot} \vec{U} = \vec{V}, \quad (1.24)$$

де $\vec{V}$ – комплексна хвильова функція магнітного поля.

У випадку виконання параксіального наближення співвідношення (1.22 і 1.24) дають можливість отримати деякі характеристики векторної електромагнітної хвилі (наприклад, вектор Умова – Пойнтінга, «відповідальний» за енергетичні характеристики хвилі) лише у термінах x - та y -компонент електричного поля.

1.3. Хвильові пакети. Групова швидкість [1]

Природно, що реальне електромагнітне збурення дуже рідко можна інтерпретувати як певну хвилю однієї частоти. Насправді таке збурення, наприклад напруженість електричного поля, формується як результат сумарної дії хвиль із різними частотами. Інакше кажучи, реальна електромагнітна хвиля – це *поліхроматична* хвиля:

$$E(\vec{r}, t) = \int_0^\infty A_\omega(\vec{r}) \cos[\omega t - \Phi_\omega(\vec{r})] d\omega, \quad (1.25)$$

або у комплексній формі

$$E(\vec{r}, t) = \text{Re} \int_0^\infty A_\omega(\vec{r}) \exp\{j[\omega t - \Phi_\omega(\vec{r})]\} d\omega, \quad (1.26)$$

де величини A_ω та Φ_ω – функції від конкретної частоти монохроматичних складових такої хвилі.

1.3.1. Квазімонохроматичне наближення

Нехай $A_\omega(\vec{r})$ суттєво відрізняються від 0 лише в середині вузького інтервалу

$$\bar{\omega} - \frac{1}{2}\Delta\omega \leq \omega \leq \bar{\omega} + \frac{1}{2}\Delta\omega, \text{ при умові } \frac{\Delta\omega}{\bar{\omega}} \ll 1. \quad (1.27)$$

Така ситуація відповідає так званому квазімонохроматичному наближенню. Для опису такої хвилі використовують поняття хвильової групи або хвильового пакета.

1.3.2. Биття

Уявимо собі, що результуюче електромагнітне збурення формується як суперпозиція двох близьких за частотою хвиль

$$E(\vec{r}, t) = A \exp[-j(\omega t - kz)] + A \exp\{-j[\cos(\omega + \delta\omega) t - (k + \delta k)z]\}, \quad (1.28)$$

В (1.28) і далі для скорочення символ Re опущений. (1.28) може бути переписане у вигляді:

$$E(\vec{r}, t) = A \left\{ \exp\left[\frac{1}{2}j(t\delta\omega - z\delta k)\right] + \exp\left[-\frac{1}{2}j(t\delta\omega - z\delta k)\right] \right\} \times \exp[-j(\bar{\omega}t - \bar{k}z)] = 2A \cos\left[\frac{1}{2}(t\delta\omega - z\delta k)\right] \exp[-j(\bar{\omega}t - \bar{k}z)] \quad (1.29)$$

де $\bar{\omega} = \omega + \frac{1}{2}\delta\omega$ та $\bar{k} = k + \frac{1}{2}\delta k$ – середня частота та середнє хвильове число.

Інакше кажучи, як впливає з аналізу (1.29), в результаті суперпозиції формується деякий гармонічний сигнал (із середньою частотою $\bar{\omega}$), промодульований косинусом, швидкість зміни якого набагато менша, ніж швидкість зміни цього гармонічного сигналу.

1.3.3. Простий хвильовий пакет

Цей факт ілюструється рисунком 1.1

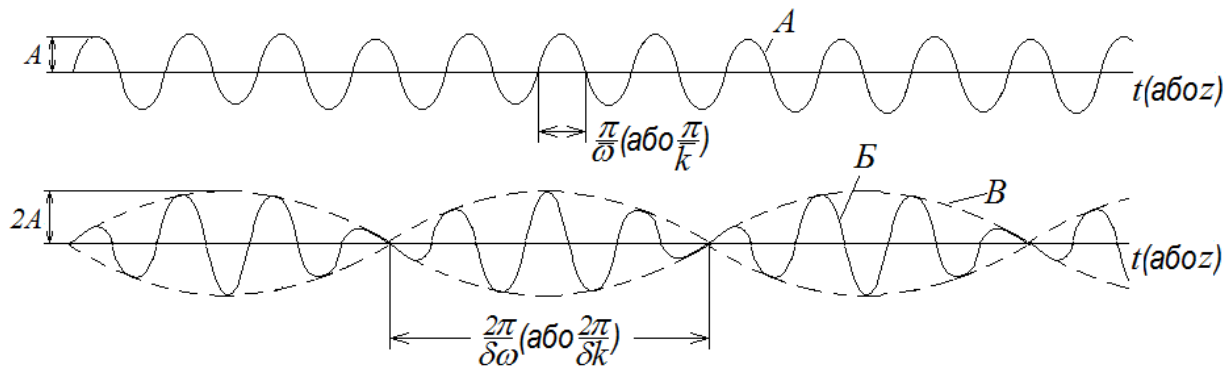


Рис. 1.1

А – хвиля $A \cos(\bar{\omega}t - \bar{k}z)$, Б – хвиля $2A \cos[\frac{1}{2}(t\delta\omega - z\delta k)]$, В – хвильовий пакет

Верхній рисунок відповідає гармонічному сигналу із частотою $\bar{\omega}$ (позначений літерою А). На нижньому рисунку літерою Б позначений сигнал, який відповідає суперпозиції (биття). І нарешті літерою В позначена огинаюча результуючого сигналу, яка і формує так званий *хвильовий пакет (цуг)* в межах двох мінімумів (нулів). Довжину пакета також можна визначити, якщо вимірювати відстань між двома максимумами.

При цьому відстань між сусідніми максимумами для хвилі B визначається співвідношенням:

$$\begin{cases} \delta t = \frac{4\pi}{\delta\omega} & \text{при фіксованому } z \\ & \text{або} \\ \delta z = \frac{4\pi}{\delta k} & \text{при фіксованому } t \end{cases}. \quad (1.30)$$

Відстань між сусідніми максимумами, які пов'язані з фазою

$$\begin{cases} \delta t = \frac{2\pi}{\omega} & \text{при фіксованому } z \\ & \text{або} \\ \delta z = \frac{2\pi}{k} & \text{при фіксованому } t \end{cases}. \quad (1.31)$$

Оскільки $\frac{\delta\omega}{\bar{\omega}} \ll 1$, $\frac{\delta k}{k} \ll 1$ амплітуда змінюється достатньо повільно у порівнянні з амплітудою хвилі A .

З (1.31) випливає, що площини постійної амплітуди і, зокрема, максимуми амплітуди розповсюджуються зі швидкістю

$$v^{(g)} = \frac{\delta\omega}{\delta k} \rightarrow \frac{d\omega}{dk}. \quad (1.32)$$

Ця швидкість має назву групової швидкості хвилі.

Площини постійної фази розповсюджуються зі швидкістю

$$v^{(p)} = \frac{\bar{\omega}}{k}. \quad (1.33)$$

$$k = n(\omega) \frac{\omega}{c}. \quad (1.34)$$

Рівняння (1.3.4) відображає явище дисперсії показника заломлення.

Отже, підсумуємо отримані факти:

1. Фазова швидкість – швидкість, з якою розповсюджується поверхня однакових фаз певної монохроматичної складової поліхроматичної хвилі. За відсутності дисперсії показника заломлення фазова швидкість таких складових не залежить від частоти. Тому весь набір хвиль, який формує пакет, рухається із тією самою швидкістю, яка і є груповою швидкістю. При цьому хвильовий пакет при розповсюдженні не змінює своєї початкової форми.

2. Для випадку, коли складові поліхроматичної хвилі мають певну дисперсію показника заломлення фазова і групову швидкість – швидкість розповсюдження хвильового пакета як єдиного цілого не збігаються. Більше того, постановка такого питання некоректна у принципі, оскільки для кожної монохроматичної складової швидкість розповсюдження індивідуальна. Групову швидкість – це швидкість руху групи або цуга хвиль, які утворюють в кожний даний момент часу локалізований у просторі хвильовий пакет.

Повернемося до суперпозиції лише двох хвиль, які різняться за частотою на величину $\delta\omega$, або в термінах довжин хвиль різняться за довжиною хвилі на величину $d\lambda$. Саме такі хвилі зображені на рис. 1.2 для певного моменту часу. При цьому будемо вважати для визначеності, що чим більша довжина хвилі, тим більша її швидкість розповсюдження в середовищі.

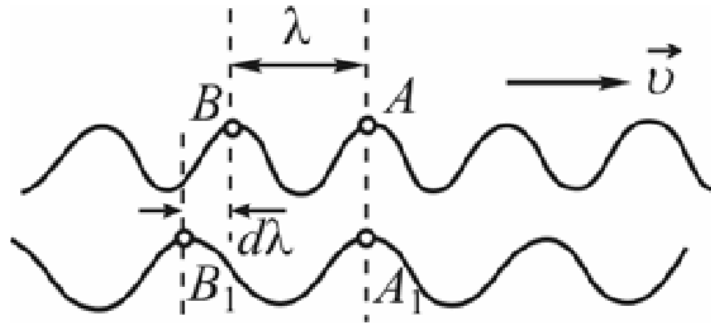


Рис. 1.2

При цьому нехай фазова швидкість верхньої хвилі v .

Взаємне розташування елементів хвиль (максимумів, мінімумів тощо) таке, що для вибраного моменту часу максимумами хвиль A і A_1 мають однакову локалізацію, тобто енергетичний максимум хвильового утворення знаходиться саме в цій точці.

Через деякий проміжок часу τ нижня хвиля обжене верхню на відрізок $d\lambda$, в результаті чого будуть збігатися гребні хвиль B і B_1 .

Це означає, що максимум групи хвиль за даний час зміститься на одну довжину хвилі λ і суміститься із точкою B . Тому швидкість розповсюдження максимуму групи у середовищі $v^{(g)}$ менше швидкості розповсюдження верхньої хвилі на величину λ/τ і відповідно

$$v^{(g)} = v - \frac{\lambda}{\tau}. \quad (1.35)$$

Як бачимо з рисунка, час τ , за який максимум групи хвиль B_1 дожене максимум B , дорівнює $d\lambda/dv$. Тому вираз (1.35) набуде вигляду:

$$v^{(g)} = v - \frac{d\lambda}{dv}. \quad (1.36)$$

Звідки випливає, що групова швидкість $v^{(g)}$ тим більше відрізняється від фазової швидкості v , чим сильніша залежність швидкості від довжини хвилі $\delta v/\delta\lambda$. Групова швидкість менша від фазової, якщо $\frac{dv}{d\lambda} > 0$ (хвилі з більшою λ розповсюджуються швидше, ніж хвилі з меншою λ). Це випадок нормальної дисперсії.

Якщо $\frac{dv}{d\lambda} < 0$ (більш довгі довжини хвиль розповсюджуються повільніше, ніж короткі), то групова швидкість більша від фазової. Спостерігається аномальна дисперсія.

1.4. Розповсюдження оптичного сигналу

1.4.1. Зміна фази хвилі при її розповсюдженні. Фазова затримка

Звернемося до рис. 1.3, на якому для простоти в одновимірному варіанті представлено розповсюдження деякої монохроматичної хвилі з площини x_0 до площини x_1 .

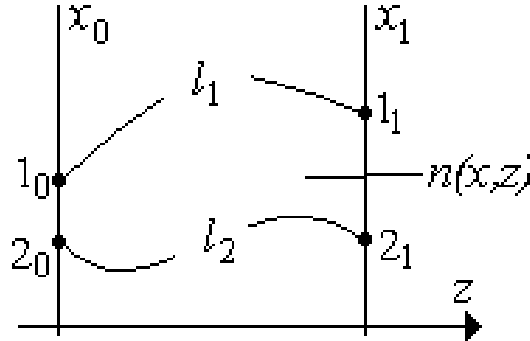


Рис. 1.3

Як відомо, в оптиці, внаслідок швидких змін характеристик хвилі, неможливо «відслідкувати», виміряти абсолютну величину її фази. Можна говорити, аналізувати, вимірювати лише різницю фаз в певних точках простору між двома хвилями або різними частинами однієї і тієї ж хвилі.

Продемонструємо алгоритм розрахунку різниці фаз між різними частинами хвильового фронту, яку набуває хвиля при розповсюдженні в середовищі між площинами. Для простоти будемо вважати, що в площині x_0 фази в обох точках фронту однакові.

Нехай показник середовища є певною функцією від x, z . Тоді в кожній точці простору хвиля розповсюджується з різною швидкістю $v(x, z) = \frac{c}{n(x, z)}$. Загальну зміну фази від точки m_0 до точки m_1 ($m = 1, 2$) можна визначити за виразом

$$\Phi_m = k \int_{m_0}^{m_1} n(l_s) dl, \quad (1.37)$$

де $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – хвильове число; l_s – траєкторія променя, вздовж якої розповсюджується хвильовий фронт.

Якщо $n = \text{const}$, то

$$\Phi_m = knl_s = kl_{s \text{ опт}}, \quad (1.38)$$

де $l_{s \text{ опт}} = nl_s$ – оптична довжина.

Відповідно різниця фаз може бути обчислена за співвідношенням

$$\Delta\Phi_{12} = kn\Delta l, \quad (1.39)$$

де Δl – різниця геометричних шляхів.

1.4.2. Комплексні амплітуди деяких хвиль

Плоска хвиля

Для простоти будемо розглядати випадок, коли плоска хвиля (монохроматичний паралельний пучок) розповсюджується у площині x, z . У більш загальному випадку вираз для комплексної амплітуди змінюється неістотно.

Звернемося до рисунку 1.4, де схематично надано розповсюдження плоскої хвилі під кутом γ до осі z .

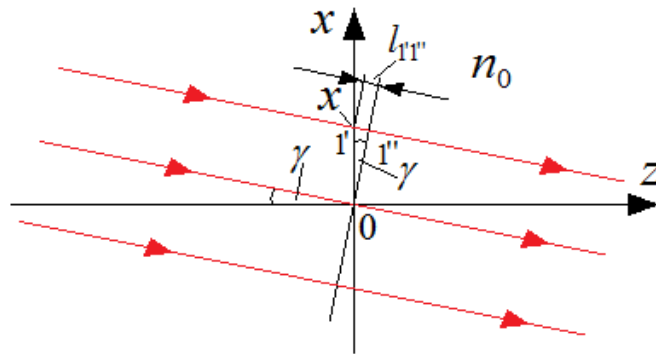


Рис. 1.4

Природно, що амплітуда хвилі стала для будь-якої точки хвильового фронту та не залежить від z . Фазу хвилі у будь-якій точці хвильового фронту будемо порівнювати із фазою в точці $x=0$. Якщо ми отримаємо вираз для різниці фаз між цією і довільною точкою хвильового фронту в координатах x, z , то фактично визначимо зміну фази хвилі у площині x .

Різницю геометричних шляхів, які проходить хвиля від точки $x=0$ до довільної точки, можна записати як $l_{1'1''} = x \sin \gamma$. Тоді зміна фази запишеться як $\Phi_{1'1''} = k n_0 x \sin \gamma$ і відповідно комплексну амплітуду хвилі можна записати у вигляді:

$$U_{pl}(x) = A \exp(j k n_0 x \sin \gamma), \quad (1.40)$$

де $A = \text{const}$ – модуль амплітуди хвилі, а n_0 – показник заломлення середовища, в якому розповсюджується хвиля.

Дуже часто у нашому розгляді ми будемо застосовувати плоску хвилю, яка розповсюджується строго вздовж z і модуль амплітуди якої нормований до одиниці. Комплексна амплітуда такої хвилі $U_{pln}(x) = 1$.

Сферична хвиля

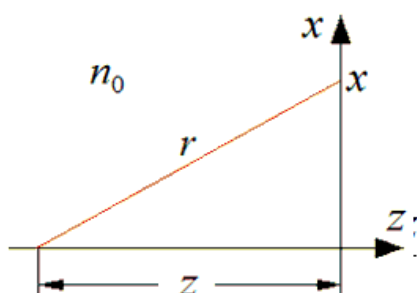


Рис. 1.5

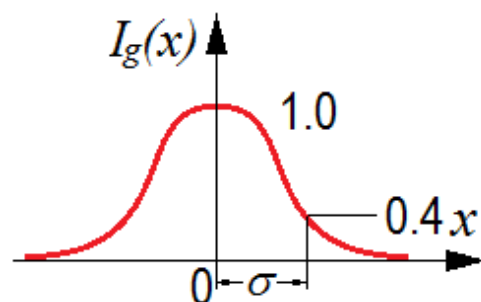


Рис. 1.6

Як і в попередньому випадку, розрахуємо зміну фази для довільної точки хвильового фронту (див. рис. 1.5).

Досить легко показати, що така сферична хвиля із центром у точці $x=0$, $z=0$ має комплексну амплітуду

$$U_{sf}(x) = \frac{1}{\sqrt{r}} \exp(jkn_0 r). \quad (1.41)$$

Відзначимо, що у двовимірному випадку амплітудний множник $\frac{1}{\sqrt{r}}$ змінюється на $\frac{1}{r}$.

При виконанні параксіального наближення вираз (1.41) спрощується за рахунок того, що множник $\frac{1}{\sqrt{r}} \approx \frac{1}{\sqrt{z}}$, а r в експоненті може бути наближено записане як

$$r = \sqrt{z^2 + x^2} \approx z + \frac{x^2}{2z}. \quad (1.42)$$

Зауважимо, що в подальшому апроксимацію для фази хвилі типу (1.42) ми будемо використовувати досить часто, якщо виконується параксіальне наближення.

Врешті-решт комплексну амплітуду сферичної хвилі можна записати як

$$U_{sf}(x) = \frac{1}{\sqrt{z}} \exp[\pm jkn_0 (z + \frac{x^2}{2z})]. \quad (1.43)$$

Знак (+) в експоненті відповідає випадку, коли сферична хвиля розбіжна і знак (–), коли така хвиля збігається.

Гауссів пучок 0-го порядку, який розповсюджується вздовж z

Такий пучок, розподіл інтенсивності якого наведений на рис. 1.6, має комплексну амплітуду типу

$$U_g(x) \sim e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad (1.44)$$

де σ характеризує ширину пучка.

Зауважимо, що фазовий фронт такого пучка можна вважати плоским.

1.4.3. Фазова затримка, що вноситься тонким оптичним елементом [8-10]

Нехай нормована до одиниці плоска хвиля з комплексною амплітудою 1 падає на деякий оптичний елемент, як зображено на рис. 1.7.

Природно, промінь, який падає на елемент у точці 2, буде заломлюватися і на виході (точка 3) зміщується на величину δ відносно точки 4, яка розташована на тій же відстані від осі z , що й точка 1. Будемо вважати елемент тонким, якщо $\delta \rightarrow 0$ та зміщенням променя можна нехтувати.

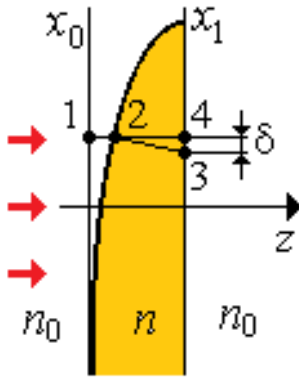


Рис. 1.7

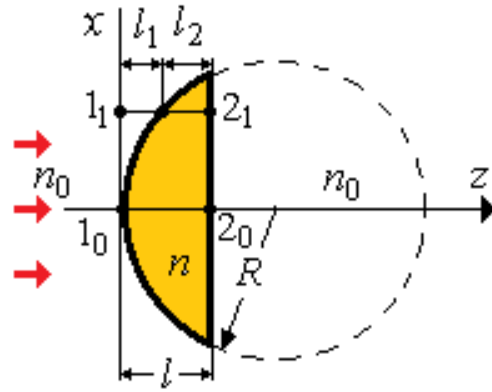


Рис.1.8

Тоді фазову модуляцію, яку вносить такий елемент, можна представити як

$$\Phi(x_0) = k(n_0 l_{12} + n l_{24}), \quad (1.45)$$

а його дію на деяку хвилю з комплексною амплітудою до елемента $U_{(-)}$ як

$$U_{(+)} = U_{(-)} H(x_0), \quad (1.46)$$

де $U_{(+)}$ – комплексна амплітуда, а $H(x_0)$ – пропускання елемента

$$H(x_0) = A(x_0) \exp[j\Phi(x_0)], \quad (1.47)$$

де $A(x_0)$ – амплітудна модуляція, яку вносить елемент.

Природно, що елемент може вносити як чисто амплітудну, так і чисто фазову модуляцію.

1.4.4. Фазова затримка, яку вносить сферична лінза [8-10]

Розглянемо, яку модуляцію вносить тонка сферична лінза. Природно, якщо лінза виконана з прозорого матеріалу, то вона вносить лише фазову модуляцію. Розташуємо лінзу, як зображено на рис. 1.8. Фазову затримку, яку вносить лінза, можна легко розрахувати, якщо спрямувати на неї одиничну плоску хвилю. Тоді зміна фази поля після лінзи і буде тією затримкою, яку вносить лінза.

Геометричні шляхи, які проходять промені, можна розрахувати, якщо відома залежність зміни форми поверхні лінзи від $z(x)$. Враховуючи круглу форму лінзи, легко бачити, що

$$z = R - \sqrt{R^2 - x^2} = R - R\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}, \quad (1.48)$$

де R – радіус кривизни лінзи.

Тоді при параксіальному наближенні залежність $z(x)$ має вигляд $z \approx \frac{x^2}{2R}$. Відповідно фазова затримка описується виразом

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_0 = \frac{kn_0x^2}{2f}, \quad (1.49)$$

де $f = \frac{R}{n/(n_0-1)}$ – фокусна відстань лінзи.

Тоді тонку лінзу в параксіальній області можна інтерпретувати як тонкий фазовий елемент із пропусканням:

$$L(x) = \exp(-j \frac{kn_0}{2f} x^2). \quad (1.50)$$

Відзначимо, що якщо лінза розсіююча, то знак в експоненті змінюється на (+).

Природно, що будь-який елемент, який вносить фазову затримку типу (1.49), буде працювати як збиральна лінза. Як такий елемент можна використати плоско паралельну пластинку (див рис. 1.9), показник заломлення якої змінюється від центру до периферії за квадратичним законом. Така лінза отримала назву градієнтної.

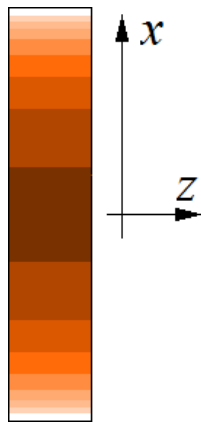


Рис. 1.9

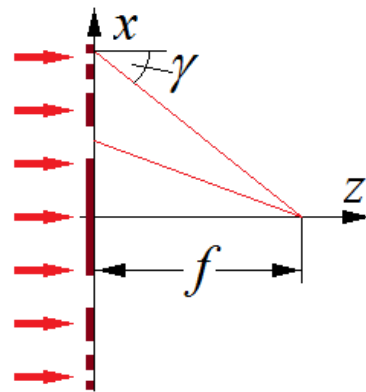


Рис.1.10

Аналогічні функції буде виконувати дифракційна решітка зі змінним періодом, що забезпечує перетинання будь-якого променя (першого дифракційного порядку) з віссю z на відстані f від решітки (див. рис. 1.10). Легко бачити, що за виконання параксіального наближення просторова частота такої решітки змінюється за законом

$$\vartheta(x) = \frac{1}{T} = \frac{x}{\lambda f}, \quad (1.51)$$

де T – період решітки.

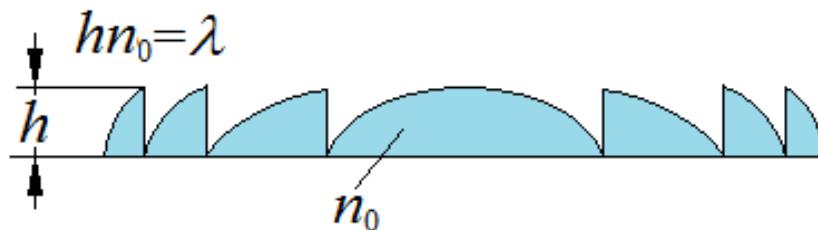


Рис. 1.11. Поперечна структура кіноформу

Такий фокусуєчий елемент (дифракційна лінза) добре відомий із курсу фізичної оптики під назвою лінзи Френеля. Природно, що у випадку тонкої решітки фокусування плоскої хвилі буде здійснюватися лише у 1-му дифракційному порядку. Всі інші порядки

утворюють певний шум. Разом з тим, якщо така решітка виконана як товста [11], то за певних умов (товщина, форма та орієнтація штрихів) дифракція на такій решітці може відбуватися лише у 1-й дифракційний порядок. Аналогічний ефект може бути досягнутий, якщо така решітка виконана за технологією виготовлення фазової решітки типу кіноформ [12] (див. рис. 1.11). Правильно виконаний елемент також формує один дифракційний порядок. У такому випадку такий елемент (природно для певної λ) можна вважати повним аналогом скляної сферичної лінзи.

2. МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ОПТИКИ [8-10]

2.1. Інтегральне перетворення Фур'є

За визначенням, під перетворенням Фур'є розуміють таке інтегральне перетворення:

$$\mathfrak{F}(\omega, \nu) = \mathfrak{F}\{U(x, y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} U(x, y) \exp[-j(\omega x + \nu y)] dx dy. \quad (2.1)$$

Змінні ω, ν називають частотами.

Інакше операцію перетворення Фур'є будемо позначати так:

$$U(x, y) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \mathfrak{F}(\omega, \nu). \quad (2.2)$$

Співвідношення (2.1) встановлює певний зв'язок між певною функцією $U(x, y)$ та її Фур'є-образом $\mathfrak{F}(\omega, \nu)$, або інакше кажучи, переводить сигнал з координатного (часового) простору в частотний.

Величину

$$M(\omega, \nu) = \mathfrak{F}(\omega, \nu) \mathfrak{F}^*(\omega, \nu) = |\mathfrak{F}(\omega, \nu)|^2 \quad (2.3)$$

називають *спектром потужності* (в зв'язку просто спектром) сигналу $U(x, y)$.

Зв'язок між Фур'є-образом та сигналом встановлюється за допомогою оберненого перетворення Фур'є:

$$U(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}\{\mathfrak{F}(\omega, \nu)\} = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}(\omega, \nu) \exp[j(x\omega + y\nu)] d\omega d\nu, \quad (2.4)$$

або

$$\mathfrak{F}(\omega, \nu) \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} U(x, y). \quad (2.5)$$

2.2. Згортка та кореляція

2.2.1. Згортка

Під згорткою двох сигналів $U_1(t)$ і $U_2(t)$ будемо розуміти такий вираз:

$$\psi_{12} = U_1 \otimes U_2 = \int_{-\infty}^{\infty} U_1(t) U_2(\tau - t) dt. \quad (2.6)$$

Операція згортки володіє властивістю комутативності:

$$\psi_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} U_1(t) U_2(\tau - t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} U_1(\tau - t) U_2(t) dt. \quad (2.7)$$

або

$$U_1 \otimes U_2 = U_2 \otimes U_1. \quad (2.8)$$

2.2.2. Кореляція [8,9,13]

Нехай маємо сигнал $U(\mathbf{r}, t)$. Кореляційна функція порядку $(m + n)$ визначається як середнє по ансамблю від добутку величин U , які беруться у різних просторово часових точках:

$$\varphi^{(m,n)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{m+n}; t_1, \dots, t_{m+n}) = \langle \prod_{j=1}^m U_j^*(\mathbf{r}_j, t_j) \prod_{k=m+1}^{m+n} U_k(\mathbf{r}_k, t_k) \rangle. \quad (2.9)$$

Стаціонарне і ергодичне поле

Для такого типу полів можна перейти від усереднення по ансамблю до усереднення за часом ($\langle \dots \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \dots dt$):

$$\begin{aligned} \varphi^{(m,n)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{m+n}; t_1, \dots, t_{m+n}) &\equiv \varphi^{(m,n)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{m+n}; \tau_1, \dots, \tau_{m+n}) = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \prod_{j=1}^m U_j^*(\mathbf{r}_j, t + \tau_j) \prod_{k=m+1}^{m+n} U_k(\mathbf{r}_k, t + \tau_k) dt \end{aligned} \quad (2.10)$$

Звернемо увагу на специфічний випадок, який має суттєве значення для оптичних досліджень, а саме кореляційну функцію 2-го порядку, для якої має місце таке співвідношення:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) &\equiv \varphi^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) \equiv \varphi_{12} \equiv U_1^* U_2 \equiv \\ &\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T U_1^*(\mathbf{r}_1, t) U_2(\mathbf{r}_2, t + \tau) dt \equiv \int_{-\infty}^{\infty} U_1^*(\mathbf{r}_1, t) U_2(\mathbf{r}_2, t + \tau) dt \end{aligned} \quad (2.11)$$

Відзначимо, що у випадку, коли має місце рівність $U_1(\mathbf{r}_1, t) = U_2(\mathbf{r}_1, t)$, говорять про автокореляційну функцію φ_{11} .

На рис. 2.1. схематично зображений модуль такої функції для випадку, коли $U_1(\mathbf{r}_1, t)$ має випадковий характер. При цьому для простоти розгляду будемо вважати, що сигнал U_1 одновимірний. Очевидно, що характер зміни $\varphi(\tau)$ визначає масштаб флуктуації сигналу U_1 і пов'язаний із розмірами середнього структурного елемента (наприклад, із середніми розмірами спекла у випадковому спекл-полі). Цій величині відповідає так звана довжина кореляції l_{corr} , яка визначається відстанню від максимуму кореляції, коли автокореляційна функція спадає на половину. Можна вважати, що в межах цієї відстані сигнал U_1 змінюється так, що цю ділянку правомірно характеризувати певними загальними параметрами, які в області з розмірами l_{corr} змінюються мало, наприклад, певною постійною фазою хвилі тощо.

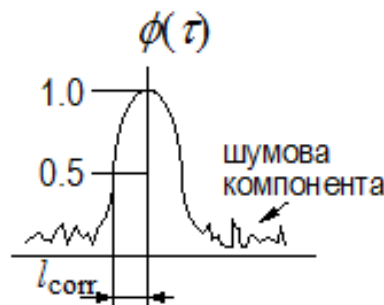


Рис. 2.1

Відзначимо, що у двовимірному випадку кожний напрямок зміни U_1 характеризується своєю довжиною кореляції $l_{i\text{corr}}$, ($i = x, y$). Якщо розглядати зміну сигналу в певній площині x, y , то можна говорити про певну площу кореляції $S_{\text{corr}} = l_{x\text{corr}} \times l_{y\text{corr}}$. Аналогічно при аналізі зміни сигналу U_1 в трьох координатах можна говорити про об'єм кореляції.

2.2.3. Зв'язок між згорткою і кореляцією

Очевидно, вирази для кореляції 2-го порядку і згортки дуже подібні. Саме тому кореляцію 2-го порядку слід розглядати як певну згортку:

$$U_1 * U_2 = U_1 \otimes U_2^*(-t). \quad (2.12)$$

2.3. Деякі властивості перетворення Фур'є

2.3.1. Лінійність перетворення Фур'є

Ця властивість випливає безпосередньо з визначення такого інтегрального перетворення і може бути формалізована так:

$$\mathfrak{F}\{U_1 + U_2 + \dots + U_n\} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \dots + \mathfrak{F}_n, \quad (2.13)$$

тобто Фур'є-образ від суми сигналів дорівнює сумі Фур'є-образів.

2.3.2. Теорема зсуву

В цьому пункті і в наступних для простоти і скорочення будемо розглядати одновимірний випадок. При цьому дуже легко показати, що такий розгляд не впливає на загальність отриманих нами результатів і одновимірний випадок елементарно може бути узагальнений для двокординатного розподілу сигналу.

Нехай нам відомий Фур'є-образ сигналу U і він дорівнює $\mathfrak{F}$. Виникає запитання: наскільки зміниться Фур'є-образ, якщо його зсунути у просторі (або часі) на величину x_0 ?

З визначення для Фур'є-перетворення легко отримати, що у цьому випадку Фур'є-образ зсунутого сигналу має вигляд:

$$\tilde{\mathfrak{F}}(\omega) = e^{-j\omega x_0} \mathfrak{F}(\omega). \quad (2.14)$$

Іншими словами, Фур'є-образ зсунутого сигналу відрізняється від початкового лінійним фазовим множником, у якому показник експоненти пропорційний x_0 . При цьому треба відзначити, що якщо розглядати спектри потужності, то цей фазовий множник зникає і можна стверджувати, що спектри потужності початкового і зсунутого сигналів однакові. Таку властивість Фур'є-перетворення іноді називають просторовою інваріантністю.

2.3.3. Теорема масштабу

Тепер будемо вважати, що зміни у початковому сигналі відбуваються за рахунок його масштабування:

$$\tilde{U}(x) = U(ax). \quad (2.15)$$

Знову з визначення для Фур'є-перетворення легко показати, що Фур'є-образ масштабованого сигналу має вигляд:

$$\tilde{\mathfrak{F}}(\omega) = \frac{1}{a} \mathfrak{F}\left(\frac{\omega}{a}\right). \quad (2.16)$$

Тобто структура Фур'є-образу масштабованого сигналу залишається тією самою, проте і кінцевий Фур'є-образ масштабується з коефіцієнтом $\frac{1}{a}$. Звідси випливає очевидний висновок. Чим ширший сигнал у координатному просторі, тим меншу площу він займає у частотному просторі. І навпаки: невеликі за розмірами у координатному просторі сигнали формують дуже протяжні спектри у частотному просторі.

2.3.4. Співвідношення Парсеваля (Закон збереження енергії)

Можна показати, що для Фур'є-перетворення виконується така рівність:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |U(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathfrak{F}(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.17)$$

Цю рівність називають співвідношенням Парсеваля, яке фактично можна трактувати як виконання закону збереження енергії при переході від координатного до частотного простору. Додамо, без доведення, що подібне твердження можна сформулювати для кількості інформації в сигналі та його образі – кількість інформації в сигналі не змінюється при переході від координатного до частотного простору.

2.3.5. Пряма й обернена теореми згортки і кореляції

Наведемо дуже важливі співвідношення, які пов'язані з добутком сигналів або їх Фур'є-образів і з відповідними Фур'є-перетвореннями від таких комбінацій.

Можна показати, що Фур'є-перетворення від добутку сигналів є згортою відповідних Фур'є-образів і Фур'є-образ від згортки - це простий добуток образів:

$$U_1 U_2 \xrightarrow{\mathfrak{F}} \mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2 \quad \text{та} \quad U_1 \otimes U_2 \xrightarrow{\mathfrak{F}} \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2. \quad (2.18)$$

Враховуючи симетричні властивості прямого і оберненого Фур'є-перетворення, справедливе таке:

$$\mathfrak{F}_1 \otimes \mathfrak{F}_2 \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} U_1 U_2 \quad \text{та} \quad \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} U_1 \otimes U_2. \quad (2.19)$$

Тепер, спираючись на співвідношення (2.12), можна показати, що

$$U_1 * U_2 \xrightarrow{\mathfrak{F}} \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2^* \quad \text{та} \quad \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_{21}^* \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} U_1 \otimes U_2^*(-x) = U_1 * U_2. \quad (2.20)$$

2.3.6. Похідна від сигналу та Фур'є-перетворення

Запишемо визначення оберненого Фур'є-перетворення в одновимірному вигляді та продиференціюємо по x праву та ліву частини. Враховуючи, що $\mathfrak{F}(\omega)$ не залежить від x отримуємо:

$$\frac{dU(x)}{dx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (j\omega) \mathfrak{F}(\omega) \exp(jx\omega) d\omega. \quad (2.21)$$

Відповідно похідна n -го порядку має вигляд:

$$\frac{d^n U(x)}{dx^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (j\omega)^n \mathfrak{F}(\omega) \exp(jx\omega) d\omega. \quad (2.22)$$

Як буде ясно із подальшого розгляду, вирази (2.21) та (2.22) фактично формують алгоритм для оптичної реалізації системи, яка трансформує певне зображення до зображення, яке є похідною від початкового сигналу.

2.4. Деякі «незвичайні» функції. Узагальнені, сингулярні тощо

2.4.1. δ -функція

Ця узагальнена функція вводиться відповідно до такого співвідношення:

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(t) \delta(\tau - t) dt = U(\tau), \quad (2.23)$$

яке може прочитане як – згортка функції із дельта-функцією є сама функція.

У явному вигляді δ -функція може бути записана як

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & \text{в решті точок} \end{cases}. \quad (2.23)$$

Графічне зображення поведінки «центрованої» і зсунутої на величину x_0 δ -функції подано на рис. 2.2.

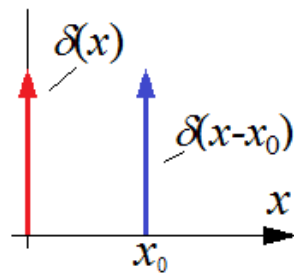


Рис. 2.2

Зображення залежності у вигляді стрілки вказує на нескінченно велике значення функції.

Відзначимо, що така ситуація не свідчить про «порушення закону збереження енергії, оскільки виконується співвідношення

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\delta(x)|^2 dx = 1. \quad (2.24)$$

В оптиці існує досить багато ситуацій, коли поле, створене певним об'єктом, може бути промодельоване δ -функцією, наприклад, хвиля, яка пройшла через відносно маленький отвір у непрозорому екрані, тощо.

2.4.2. Функція $\text{sinc}(t)$

Функція $\text{sinc}(t)$ відіграє важливу роль в оптиці та зв'язку. Зокрема за її допомогою описуються поле в далекій зоні, створене в результаті дифракції на щілині, діаграма спрямованості антени тощо.

Поведінка такої функції описується співвідношенням

$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}. \quad (2.25)$$

Нулі функції виникають в точках, де синус набуває нульове значення. Поведінка функції $\text{sinc}(t)$ ілюструється рис. 2.3.

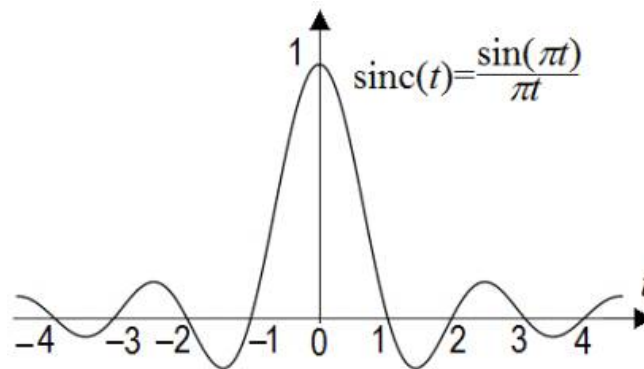


Рис. 2.3

Відзначимо, що у випадку, коли така функція описує певну комплексну амплітуду і можна говорити про інтенсивність хвилі $I(t) = |\text{sinc}(t)|^2$, то можна стверджувати, що приблизно 90% енергії, яку переносить хвиля, зосереджено як раз у головному максимумі, обмеженому першими нулями функції $\text{sinc}(t)$.

2.4.3. Прямокутний імпульс

Деяка певною мірою ідеалізована функція, яка задається співвідношенням

$$P_a(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & \text{в решті точок} \end{cases}. \quad (2.26)$$

Поведінка такої функції ілюструється рис. 2.4.

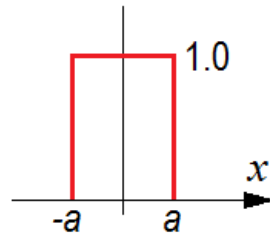


Рис. 2.4

2.4.4. Функція Хевісайда

Функція, яка задається співвідношенням

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

Поведінка такої функції ілюструється рис. 2.5.

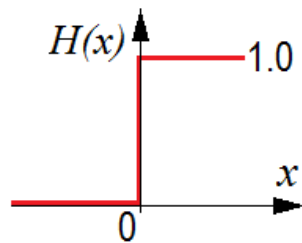


Рис. 2.4

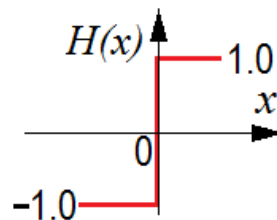


Рис. 2.5

Іноді під функцією Хевісайда розуміють залежність (рис. 2.5):

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

2.4.5. Гауссова модуляція хвилі

Насамперед, хвилі з такою модуляцією це Гауссові пучки 0-го порядку, комплексна амплітуда яких задається співвідношенням (розподіл інтенсивності такого пучка, наданий на рис. 2.6):

$$U \sim e^{-at^2} = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.28)$$

Унаслідок того, що фазу таких пучків можна вважати нульовою, вони найчастіше використовуються в оптиці для моделювання плоских хвиль.

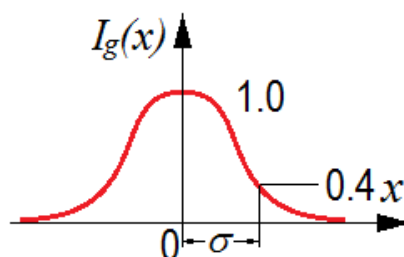


Рис. 2.6

2.5. Деякі приклади Фур'є-перетворень

2.5.1. Фур'є-образ прямокутного імпульсу

Фур'є-образ прямокутного імпульсу може бути розрахований безпосередньо з визначення Фур'є-перетворення:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} P_a(x) \exp[-j(\omega x)] dx = \int_{-a}^a \exp[-j(\omega x)] dx = \\ &= \frac{1}{-j\omega} \int_{-a}^a \exp[-j(\omega x)] d[-j(\omega x)] = \frac{2a}{2j(a\omega)} \exp[-j(\omega x)] \Big|_{-a}^a = (2.29a) \\ &= \frac{2a}{a\omega} \frac{1}{2j} \{\exp[j(\omega a)] - \exp[-j(\omega a)]\} = 2a \frac{\sin(\omega a)}{\omega a},\end{aligned}$$

або у скороченому вигляді:

$$\mathfrak{F}(\omega) = 2a \operatorname{sinc}(\omega a / \pi). \quad (2.29b)$$

де $2a$ – ширина прямокутного імпульсу.

2.5.2. Нормована до одиниці плоска хвиля та δ -функція

Легко показати, що

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \operatorname{sinc}(at) \rightarrow \delta(t), \quad (2.30)$$

тобто при нескінченному зростанні ширини прямокутного імпульсу, його Фур'є-образ наближається до δ -функції. Разом з тим прямокутний імпульс «нескінченної» ширини є не чим іншим, як комплексною амплітудою нормованої до одиниці плоскої хвилі, яка розповсюджується вздовж осі z .

Звідки випливає що

$$1 \xrightarrow{\mathfrak{F}} \delta(\omega). \quad (2.31)$$

Із симетрії прямого та оберненого Фур'є-перетворень маємо:

$$\delta(x) \xrightarrow{\mathfrak{F}} 1. \quad (2.32)$$

Для зсунутої δ -функції ($\delta(x - x_0)$) унаслідок теореми зсуву справедливе таке

$$\delta(x - x_0) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \exp(-jx_0\omega). \quad (2.33)$$

Отже:

$$\exp(-j\omega x) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \delta(\omega - a). \quad (2.34)$$

2.5.3. Гармонічний сигнал

Комплексна амплітуда, яка змінюється за синусоїдальним законом, може бути легко отримане, якщо нормовану до одиниці плоску хвилю спрямувати на дифракційну решітку, пропускання якої змінюється за синусоїдальною залежністю (рис. 2.7)

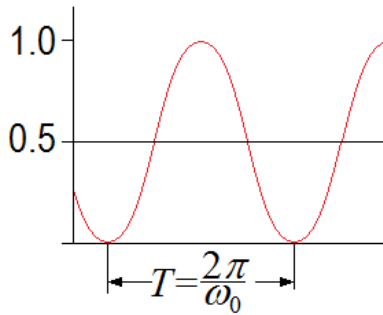


Рис. 2.7

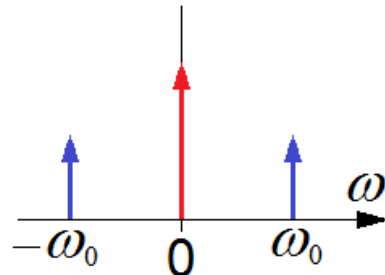


Рис. 2.8

Відповідно

$$\begin{aligned} f_g(x) &= 0.5 + 0.5 \cos(\omega_0 x) = \\ &= 0.5 + 0.5 \frac{\exp(j\omega_0 x) + \exp(-j\omega_0 x)}{2} = \\ &= 0.5 + 0.25 \exp(j\omega_0 x) + 0.25 \exp(-j\omega_0 x) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Легко показати, що Фур'є-образ такої промодульованої хвилі має вигляд (рис. 2.8)

$$\mathfrak{F}\{f_g(x)\} = 0.5\delta(\omega) + 0.25\delta(\omega - \omega_0) + 0.25\delta(\omega + \omega_0). \quad (2.36)$$

Інакше кажучи, у частотній площині формуються три пічка. При цьому центральний сплеск удвічі більший, ніж бокові.

Звернемо увагу, на той факт що права частина спектрів (див. рис. 2.3, 2.8) «дзеркально» ідентична лівій. Відзначимо, що така дзеркальність характерна для випадку, коли розглядається Фур'є-образ дійсної функції. У такій ситуації немає потреби аналізувати весь спектр, достатньо проаналізувати ту частину спектру, яка відповідає додатним частотам. Саме такий підхід застосовують у зв'язку, де абсолютна більшість сигналів описується дійсними функціями.

2.5.4. Гауссова функція

Фур'є-образ такої функції:

$$U(x) = e^{-ax^2}. \quad (2.37)$$

Залишається Гауссовою функцією

$$\mathfrak{F}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}. \quad (2.38)$$

2.5.5. Функція Хевісайда

Фур'є-образ такої функції:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

має вигляд:

$$\mathfrak{F}(\omega) = \frac{j}{\pi\omega}. \quad (2.40)$$

2.5.6. Функція типу «сферична хвиля»

Фур'є-образ такої функції:

$$U(x) = e^{j\alpha x^2} \quad (2.41)$$

має вигляд:

$$\mathfrak{Z}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j\frac{\omega^2}{4a}}. \quad (2.40)$$

тобто і в частотній площині Фур'є-образ описується співвідношенням, яке характерне для сферичної хвилі в області, де виконується параксіальне наближення.

2.6. Перетворення Мелліна [12]

Одне з визначень цього перетворення має вигляд

$$\mathcal{M}(\omega) = \int_0^\infty f(x) x^{-j\omega-1} dx. \quad (2.41)$$

Розглянемо теорему масштабу, аналогічну тій, що розглядалася для Фур'є-перетворення. Проаналізуємо, як зміниться Меллін-образ для масштабованої функції $f(ax)$.

За визначенням, такий образ може бути записаний як

$$\mathcal{M}\{f(ax)\} = \int_0^\infty f(ax) x^{-j\omega-1} dx. \quad (2.42)$$

При заміні змінної $t = ax$ маємо

$$\mathcal{M}\{f(ax)\} = \frac{1}{a} \int_0^\infty f(t) t^{-j\omega-1} \frac{1}{a}^{-j\omega} \left(\frac{1}{a}\right)^{-1} dt = \frac{1}{a}^{-j\omega} \int_0^\infty f(t) t^{-j\omega-1} dt. \quad (2.43)$$

Або в скороченому варіанті

$$\mathcal{M}\{f(ax)\} = a^{j\omega} \mathcal{M}(\omega). \quad (2.44)$$

Інакше кажучи, Меллін-образ масштабованої функції відрізняється на лінійний фазовий множник $a^{j\omega}$. Якщо розглядати «спектри потужності» Мелліна $|\mathcal{M}(\omega)|^2$, то такі спектри взагалі однакові. Інакше кажучи, на відміну від Фур'є-перетворення, перетворення Мелліна інваріантне відносно масштабу початкової функції.

Використаємо замість x іншу змінну $x = e^t$ і зробимо відповідну заміну. Тоді співвідношення 2.41 перетвориться на таке

$$\mathcal{M}(\omega) = \int_{-\infty}^\infty f[\exp(t)] e^{-j\omega t} dt, \quad (2.44a)$$

або скорочено

$$\mathcal{M}(\omega) = \mathfrak{Z}\{\exp(t)\}. \quad (2.44b)$$

Це співвідношення встановлює зв'язок між Меллін- та Фур'є-перетворенням. Якщо у початковій функції перейти від x до $\exp(x)$, то при Фур'є-перетворенні ми отримуємо Меллін-образ.

Виникає питання, у чому полягає суть такого переходу. Легко побачити, що такий перехід зводиться до заміни лінійних координат у початковій функції на логарифмічні.

Дійсно в таких координатах замість масштабованості виникає координатний зсув

$$ax \rightarrow \ln(ax) = \ln(x) + \ln(a), \quad (2.45)$$

до якого, як відомо, Фур'є-перетворення інваріантне.

На закінчення цього пункту розглянемо інше «спотворення» початкової функції. Нехай ми маємо двовимірний випадок. Розгорнемо початкову функцію $f(x, y)$ навколо деякої точки. Така операція ілюструється рис. 2.9а.

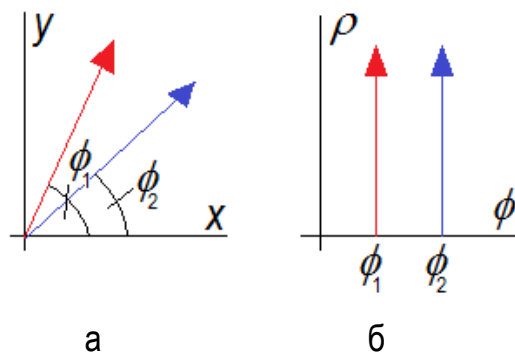


Рис. 2.9

Природно, що основні ознаки початкової функції як певного просторового розподілу зберігаються. Разом з тим Фур'є-образ в координатах ω, ν розгортається на такий самий кут. Фур'є-образ драматично змінюється.

Розв'язок проблеми може бути здійснений, якщо в початковій функції перейти від лінійних координат до полярних. У таких координатах (див. рис. 2.9б) початкова та розгорнута функції будуть відрізнятися лише зсувом $\Delta = \varphi_2 - \varphi_1$, до якого Фур'є-перетворення інваріантне.

2.7. Сигнали з обмеженим спектром. Відліки функції. Теорема Котельнікова – Шеннона [9,10]

Розглянемо проблему, суть якої полягає в наступному. Будь-яке вимірювання певного характеристик фізичного розподілу відбувається дискретно у деяких точках. Ступінь дискретності задається роздільною здатністю приладу, або іншими словами, кроком між вибірковими значеннями фізичної величини, яку вимірює прилад. Формується певна вибірка, яка тією чи іншою мірою відповідає розподілу фізичної величини. Постає логічне питання: який мінімальний крок між значеннями аналізованої величини допустимий? Так, щоб, маючи відповідну вибірку, можна було б відновити фізичний розподіл без спотворень.

Спробуємо дати відповідь на це питання. Уявімо собі, що маємо певний сигнал (для простоти аналізу одновимірний) з обмеженим спектром.

Відзначимо, що така вимога практично ніколи не виконується, оскільки обмеженість спектра за частотою автоматично відповідає тому, що в координатному просторі сигнал

має необмежену протяжність. Разом з тим, реальний сигнал в координатному просторі завжди заданий на певному проміжку.

Проте можна говорити про ефективну смугу частот спектра сигналу, в межах якої переноситься практично вся енергія (наприклад, її 90%).

У цьому сенсі можна вважати, що вимога обмеженості спектра сигналу деякою мірою практично завжди може бути виконана.

Розглянемо певний сигнал, для якого реалізується найпростіший обмежений спектр у вигляді прямокутного імпульсу (рис. 2.10):

$$aP_{\omega_c}(\omega) = \begin{cases} a & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \text{в решті точок} \end{cases}. \quad (2.46)$$

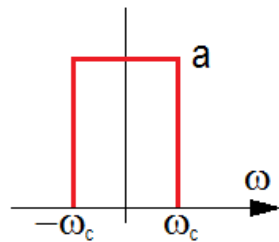


Рис. 2.10

Використовуючи обернене Фур'є-перетворення знаходимо, що такий спектр відповідає сигналу

$$f_0(t) = \frac{a}{\pi} \omega_c \frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t}. \quad (2.47)$$

Відзначимо, що величина постійного коефіцієнта не має значення, тому для простоти будемо вважати, що $a = \frac{\pi}{\omega_c}$. Тоді (2.47) набуває вигляду

$$f_0(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t}. \quad (2.48)$$

Тоді (2.46) перетвориться до такого:

$$\mathfrak{F}\{f_0(t)\} = G_0(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{\omega_c} & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{в решта точках} \end{cases}. \quad (2.49)$$

Функцію $f_0(t)$ називають функцією відліків. Її поведінка показана на рис. 2.11

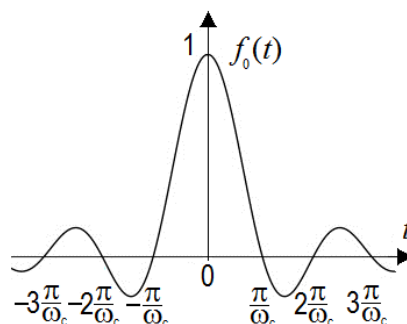


Рис. 2.11

Її максимальне значення дорівнює 1, а нулі досягаються у точках $t = \frac{k\pi}{\omega_c}$ $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Якщо таку функцію зсувати вздовж осі t , то смуга частот, яку вона займає, не зміниться внаслідок просторової інваріантності Фур'є-перетворення.

Надаючи таким зсувам значення, кратне величині $\frac{\pi}{\omega_c}$, можна утворити систему ортогональних функцій:

$$f_k(t) = f_0\left(t - k \frac{\pi}{\omega_c}\right) = \frac{\sin(\omega_c t - k \frac{\pi}{\omega_c})}{\omega_c t - k \frac{\pi}{\omega_c}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.50)$$

Покажемо, що довільну функцію з обмеженим спектром у смузі $(-\omega_c, \omega_c)$ можна розкласти по функціях відліків у ряд Котельнікова:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k f_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{\sin(\omega_c t - k \frac{\pi}{\omega_c})}{\omega_c t - k \frac{\pi}{\omega_c}}. \quad (2.51)$$

Коефіцієнти a_k знаходимо так. Нехай $t = \frac{n\pi}{\omega_c}$. Тоді

$$f\left(\frac{n\pi}{\omega_c}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \frac{\sin(n\pi - k\pi)}{n\pi - k\pi}. \quad (2.52)$$

Легко побачити, що

$$f\left(\frac{n\pi}{\omega_c}\right) = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases} \quad (2.53)$$

або в іншій формі

$$a_n = f\left(\frac{n\pi}{\omega_c}\right). \quad (2.54)$$

Відповідно ряд Котельнікова набуває вигляду:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\omega_c}\right) \frac{\sin(\omega_c t - k \frac{\pi}{\omega_c})}{\omega_c t - k \frac{\pi}{\omega_c}}. \quad (2.55)$$

Вияснимо фізичний зміст коефіцієнтів розкладу. Нагадаємо, що кругова частота пов'язана з звичайною частотою і періодом співвідношенням $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$. Виходячи з цього,

$$\omega_c = \frac{2\pi}{T_c}. \quad (2.56)$$

де T_c – «період найбільшої частоти».

Звідси маємо

$$a_n = f\left(\frac{nT_c}{2}\right). \quad (2.57)$$

Відповідно $a_0 = f(0)$, $a_1 = f\left(\frac{T_c}{2}\right)$, ...

Зробимо проміжний висновок. Функція з обмеженим спектром повністю визначається певною сукупністю своїх відліків, які взяті із кроком $\frac{T_c}{2}$.

Інакше кажучи, якщо ми візьмемо таку вибірку, задану, наприклад, нескінченно тонкими функціями (δ -функціями)

$$F(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\omega_c}\right) \delta\left(t - \frac{k\pi}{\omega_c}\right), \quad (2.58)$$

то цього достатньо для відновлення функції $f(t)$ без спотворень.

Сигнал $f(t)$ можна відновити в результаті фільтрації сигналу $F(t)$ на смуговому фільтрі зі смугою пропускання $2\omega_c$.

Операція фільтрації передбачає такі стадії:

1. Отримання Фур'є-образу сигналу $F(t) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \tilde{\mathfrak{F}}(\omega)$
2. Множення Фур'є-образу на пропускання фільтру $\mathcal{F}(\omega) = \tilde{\mathfrak{F}}(\omega)H(\omega)$
3. Обернене Фур'є-перетворення $\tilde{\mathfrak{F}}(\omega) \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} \tilde{F}(t)$

Фур'є-образ від вибірки описується співвідношенням

$$\tilde{\mathfrak{F}}(\omega) = \mathfrak{F}\{F(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\omega_c}\right) \mathfrak{F}\left\{\delta\left(t - \frac{k\pi}{\omega_c}\right)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\omega_c}\right) e^{-j\omega \frac{k\pi}{\omega_c}}. \quad (2.59)$$

Відповідний фільтр має пропускання

$$H(\omega) = P_{\omega_c}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \text{в решта точках} \end{cases} \quad (2.60)$$

Результат фільтрації після оберненого Фур'є-перетворення має вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\omega_c}\right) \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega(t - \frac{k\pi}{\omega_c})} d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k\pi}{\omega_c}\right) \frac{\sin(\omega_c t - k\frac{\pi}{\omega_c})}{\omega_c t - k\frac{\pi}{\omega_c}} = \frac{1}{\pi} f(t) \end{aligned} \quad (2.61)$$

тобто з точністю до $\frac{1}{\pi}$ дорівнює початковій функції.

2.8. Метод стаціонарної фази. Наближена величина деяких інтегралів [1,9]

Нехай маємо деякий інтеграл

$$I = \int_a^b f(t) e^{jk\mu(t)} dt. \quad (2.62)$$

де $f(t)$, $k\mu(t)$ – дійсні функції. При цьому ступінь експоненти $k\mu(t)$ змінюється значно швидше, ніж $f(t)$. Виникає запитання: чи можна отримати наближену величину цього інтегралу?

Перетворимо (2.62) до вигляду

$$I = \int_a^b f(t) \cos[k\mu(t)] dt + j \int_a^b f(t) \sin[k\mu(t)] dt. \quad (2.63)$$

Рисунок 2.12 ілюструє поведінку підінтегральної функції першого інтегралу.

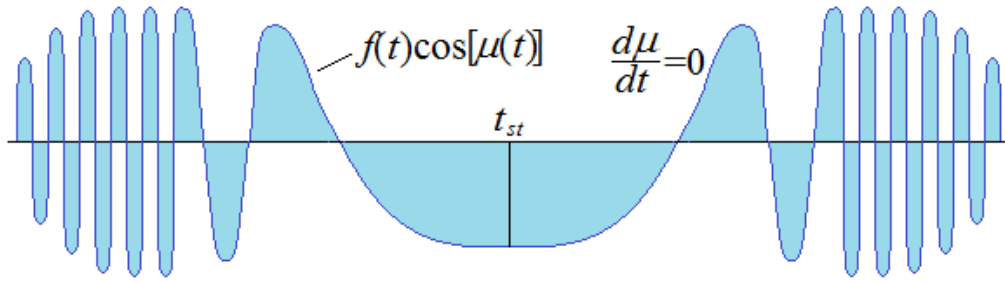


Рис. 2.12

Як можна бачити з рисунка, в місцях цієї функції, де $\mu(t)$ змінюється швидко, площі (відмічено блакитним), які відповідають сусіднім шматочкам функції, приблизно однакові. Як результат значення інтегралу в цих інтервалах прямує до нуля. Винятком, коли інтеграл набуває відносно великого значення, є ділянки функції, де $\mu(t)$ змінюється повільно. Такі ділянки відповідають випадку, коли на певному інтервалі $\mu(t)$ має стаціонарну точку. В самій точці швидкість зміни $\mu(t)$ нульова, оскільки там $\frac{d\mu(t)}{dt} = 0$.

Якщо така точка на інтервалі інтегрування одна, тоді, очевидно, має виконуватися таке:

$$I \sim f(t_{st})e^{jk\mu(t_{st})}, \quad (2.64)$$

де t_{st} – координата стаціонарної точки.

Можна показати, що більш точний вираз має вигляд

$$I \approx \sqrt{-\frac{\pi}{2k\mu''(t_{st})}} e^{-j\frac{\pi}{4}} f(t_{st}) e^{jk\mu(t_{st})}. \quad (2.65)$$

де $\mu''(t_{st})$ – значення другої похідної від $\mu(t)$ в стаціонарній точці.

Двовірна інтерпретація методу стаціонарних фаз така:

$$U = \iint_R A(x, y) \exp[jk\mu(x, y)] dx dy \approx \frac{2\pi j A(x_0, y_0)}{k \sqrt{\mu_{xx}\mu_{yy} - \mu_{xy}^2}} \exp[jk\mu(x_0, y_0)]. \quad (2.66)$$

де $\mu(x, y)$ – двічі диференційована в R функція; $\mu_{xx}, \mu_{yy}, \mu_{xy}$ – другі похідні від $\mu(x, y)$; x_0, y_0 – точки з області R , які є розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} \mu_x(x, y) = 0 \\ \mu_y(x, y) = 0 \end{cases} \quad (2.67)$$

де μ_x, μ_y – перші похідні від $\mu(x, y)$. Тобто x_0, y_0 – стаціонарні точки функції $\mu(x, y)$ в області R .

При цьому для других похідних виконується умова

$$\begin{cases} \mu_{xx}\mu_{yy} - \mu_{xy}^2 \neq 0 \\ \mu_{xy} \neq 0 \end{cases}. \quad (2.68)$$

2.9. Елементи «елементарної» матричної алгебри [13]

2.9.1. Множення матриці на число (e)

Маємо матрицю

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}. \quad (2.69)$$

Результат множення матриці на деяке число e має вигляд:

$$e\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ea_1 & eb_1 \\ ea_2 & eb_2 \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

2.9.2. Транспонування матриці (заміна рядків на стовпці)

Така операція і її результат можуть бути представлені виразом

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^T \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}. \quad (2.71)$$

2.9.3. Додавання матриць

Для початку зауважимо, що операція додавання матриць можлива лише у випадку, коли матриці однакової розмірності. Результат додавання представлений співвідношенням

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_1+c_1 & b_1+d_1 \\ a_2+c_2 & b_2+d_2 \end{bmatrix}. \quad (2.72)$$

2.9.4. Добуток матриць

Зауважимо, що операція множення матриць можлива лише у випадку, коли кількість стовпців матриці $\mathbf{A}$ дорівнює кількості рядків матриці $\mathbf{B}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_1c_1+b_1c_2 \\ a_2c_1+b_2c_2 \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

Більш складний варіант описується виразом

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_1c_1+b_1c_2 & a_1d_1+b_1d_2 \\ a_2c_1+b_2c_2 & a_2d_1+b_2d_2 \end{bmatrix}. \quad (2.74)$$

Відзначимо, що в загальному випадку $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$

2.9.5. Знаходження оберненої матриці $\mathbf{A}^{-1}$

Процедура знаходження оберненої матриці зводиться до такого:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^T, \quad (2.75)$$

де $|\mathbf{A}|$ – визначник матриці; $\mathbf{A}^T$ – транспонована матриця.

3. РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ОПТИЧНОГО СИГНАЛУ

3.1. Системи в оптиці [9]

Перш за все будемо вважати, що системи, які ми будемо розглядати, лінійні:

$$L(f_1 + f_2 + \dots + f_n) = L(f_1) + L(f_2) + \dots + L(f_n). \quad (3.1)$$

тобто дія системи на суму сигналів дорівнює сумі реакцій системи на кожний сигнал окремо.

Нехай маємо оптичний сигнал, комплексна хвильова функція якого

$$f(x, y)e^{-j\omega t}. \quad (3.2a)$$

Цей сигнал проходить через певну оптичну систему і перетворюється на хвилю із комплексною хвильовою функцією (див. рис. 3.1)

$$g(x, y)e^{-j\omega t}. \quad (3.2b)$$

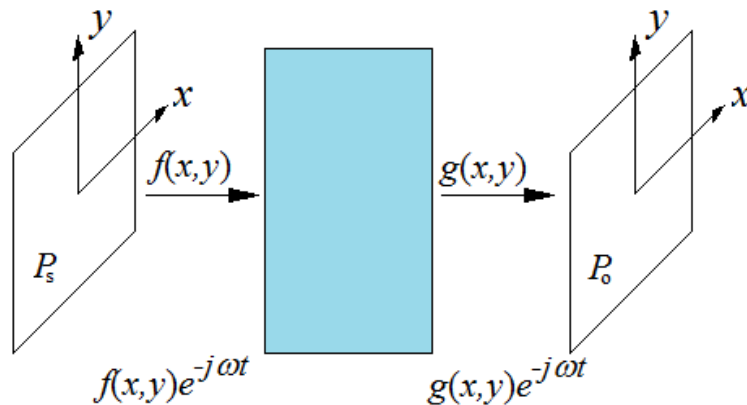


Рис. 3.1

Нехай у деякій точці ξ, η площини x, y розташоване точкове джерело $\delta(x - \xi, y - \eta)$. Після проходження через систему формується його результуюче зображення $h(x, y, \xi, \eta)$, яке має назву *функції розсіювання точки*, або *імпульсної реакції системи* (*імпульсного відгуку системи*).

Внаслідок лінійності системи та виконання принципу суперпозиції можна стверджувати, що якщо відомий імпульсний відгук системи $h(x, y, \xi, \eta)$, можна розрахувати реакцію системи на будь-який вхідний сигнал

$$g(x, y) = \iint_S f(x, y)h(x, y, \xi, \eta)d\xi d\eta, \quad (3.3)$$

де S – область об'єкта.

3.1.1. Просторово-інваріантні системи

Уявимо собі, що новий вхідний сигнал утворюється шляхом зсуву сигналу $f(x, y)$ у вхідній площині системи $f(x - x_0, y - y_0)$. Якщо вихідний сигнал системи має вигляд

$g(x - x_0, y - y_0)$, то у цьому випадку кажуть, що система інваріантна відносно зсуву вхідного сигналу, або кажуть, що система *просторово-інваріантна*.

Якщо зображення точкового джерела, розташованого у початку координат $\delta(x)\delta(y)$, то h описується співвідношенням $h(x, y, 0, 0)$, і в нашому випадку

$$h(x, y, \xi, \eta) = h(x - \xi, y - \eta). \quad (3.4)$$

Звідси випливає, що для просторово-інваріантної системи

$$g(x, y) = \iint_S f(x, y) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta = f \otimes h, \quad (3.5a)$$

тобто для просторово-інваріантної системи вихідний сигнал є не чим іншим, як згортою вхідного сигналу та імпульсного відгуку системи.

Нехай Фур'є-образ вхідного сигналу $F(\omega, v)$, вихідного – $G(\omega, v)$ та Фур'є-образ імпульсного відгуку – $H(\omega, v)$. Тоді якщо взяти Фур'є-перетворення від лівої і правої частин (3.5a) унаслідок прямої теореми про згортку маємо

$$G(\omega, v) = F(\omega, v) \times H(\omega, v). \quad (3.5b)$$

Величину $H(\omega, v)$ називають *частотною характеристикою* (або *передаточною функцією*) системи.

3.1.2. Багатокаскадні системи

Маємо дві послідовно розташовані просторово-інваріантні лінійні системи L_1 і L_2 (каскад 1 і каскад 2) з імпульсними відгуками $h_1(t)$ і $h_2(t)$ (див. рис. 3.2)

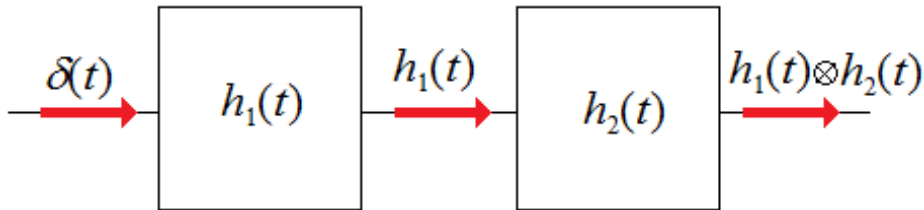


Рис. 3.2

Подамо на вхід першої системи сигнал від центрального точкового джерела $\delta(t)$. Тоді на виході 1-го каскаду сформується сигнал $g_1(t) = h_1(t)$, який водночас є вхідним сигналом для другої системи.

З співвідношення (3.5a) випливає, що сигнал на виході другої системи має вигляд

$$g_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) h_2(t - \tau) d\tau = h_1 \otimes h_2 = h, \quad (3.6)$$

де $h(t)$ – імпульсний відгук системи, яка складається з двох систем L_1 і L_2

Відповідно передаточна функція системи, яка складається з двох каскадів, описується як

$$H(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega), \quad (3.7)$$

тобто є простим добутком передаточних функцій системи 1 та 2.

Екстраполюючи випадок двокаскадної систему на систему, яка складається з n каскадів, легко показати, що передаточна функція такої системи

$$H(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega) \dots H_n(\omega) \quad (3.8)$$

та

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.9)$$

3.2. Розповсюдження оптичного сигналу у вільному просторі

3.2.1. Наближення Френеля

Спробуємо описати процес розповсюдження складної оптичної хвилі у вільному просторі. Будемо використовувати не дуже строгий, але фізично обґрунтований підхід. Більш строгий аналіз можна знайти, наприклад, в [9]. Окрім цього, для простоти будемо розглядати одновимірний випадок, оскільки отримані в цьому результати дуже легко розповсюдити на випадок залежності сигналу від двох координат.

Нехай початкове поле утворюється як результат взаємодії одинично нормованої плоскої хвилі із транспарантом, який має пропускання $H(x)$ (див. рис. 3.3)

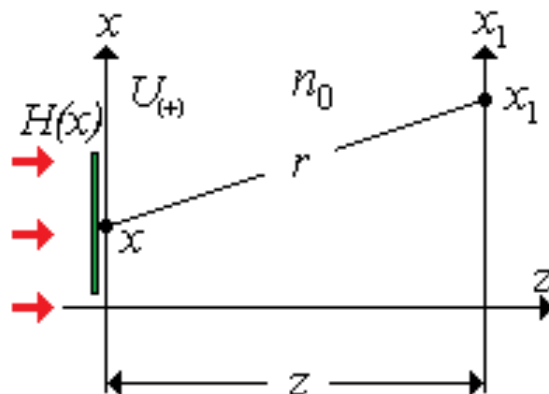


Рис. 3.3

Після транспаранта комплексна амплітуда хвилі дорівнює пропусканню транспаранта. Розіб'ємо це поле на сукупність точкових джерел. Початкова амплітуда будь-якого такого точкового джерела в точці x також визначається пропусканням транспаранта $H(x)$.

Отже від транспаранта розповсюджується сукупність сферичних хвиль з амплітудами $H(x)$, сформованих точковими джерелами у площині x . Кожна така хвиля у площині x_1 на відстані z від вхідної площини в довільній точці x_1 сформує елементарну хвилю

$$U_{ca} = \frac{1}{\sqrt{r}} H(x) \exp(jkn_0 r), \quad (3.10)$$

де $r = \sqrt{z^2 + (x_1 - x)^2}$.

Природно, що поле, яке формується всією сукупністю точкових джерел, – це такий інтеграл

$$U(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} H(x) \exp(jkn_0 r) dx. \quad (3.11)$$

Спробуємо провести певне спрощення виразу (3.11), враховуючи, що при виконанні параксіального наближення справедливе таке:

$$\text{для амплітудного множника} - \frac{1}{\sqrt{r}} \approx \frac{1}{\sqrt{z}}, \quad (3.12a)$$

$$\text{для фазового множника} - r \approx z + \frac{(x_1 - x)^2}{2z}. \quad (3.12b)$$

Співвідношення (3.12) мають назву наближення Френеля. З врахуванням (3.13) (3.11) перетвориться на таке

$$U(x_1) \sim \frac{1}{\sqrt{z}} \exp(jkn_0 z) \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \exp[j \frac{kn_0}{2z} (x_1 - x)^2] dx. \quad (3.13)$$

Більш точне співвідношення має додатковий множник $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{-j\frac{\pi}{4}}$

$$U(x_1) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{z}} \exp(jkn_0 z) \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \exp[j \frac{kn_0}{2z} (x_1 - x)^2] dx. \quad (3.14a)$$

Відзначимо, що інтеграл типу (3.14) дуже подібний до перетворення Френеля

$$\Phi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-j \frac{(t-\xi)^2}{2}] dt. \quad (3.15a)$$

Обернене перетворення Френеля має вигляд

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi) \exp[j \frac{(t-\xi)^2}{2}] d\xi. \quad (3.15b)$$

Двовимірною інтерпретацією виразу (3.14a) має вигляд

$$U(x_1, y_1) = \frac{-j}{z} \exp(jkn_0 z) \iint_{-\infty}^{\infty} H(x) \exp\{j \frac{kn_0}{2z} [(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2]\} dx dy. \quad (3.14b)$$

Зробимо оцінку в похибці фази, яка виникає внаслідок застосування апроксимації типу (3.12b).

Відомо, що розклад функції типу $\sqrt{1 \mp \beta}$ в ряд має вигляд

$$\sqrt{1 \mp \beta} \approx 1 \mp \frac{1}{2}\beta + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\beta^2 \mp \dots, \quad (3.16)$$

де в нашому випадку $\beta = (\frac{x - x_1}{z})^2$.

При цьому будемо враховувати таке:

1. Як відомо, похибка у розкладі не перевищує наступного члена розкладу, який іде за тим членом, яким ми обмежуємося.
2. За критерієм Релея [1,16] фази хвиль вважаються однаковими, якщо різниця фаз не перевищує $\pi/2$, тобто похибка у фазі

$$|\Delta\Phi_{\text{пох}}| \leq \pi/2. \quad (3.17)$$

З (3.16) та (3.17) маємо

$$\Delta\Phi_{\text{пом}} = kn_0 \frac{3}{8} \left(\frac{x-x_1}{z}\right)^4 \leq \pi/2, \quad (3.18a)$$

або

$$\left(\frac{x-x_1}{z}\right)^4 \leq \frac{2}{3n_0} \lambda. \quad (3.18b)$$

Співвідношення (3.18) формує критерій можливості застосування виразу (3.14) для обчислення комплексної амплітуди поля на відстані z від вхідної площини. Це співвідношення дає можливість розрахувати поле сформоване будь-якою хвилею у зоні дифракції Френеля.

3.2.2. Наближення Фраунгофера

В принципі замість апроксимації типу (3.12б) можна застосувати ще більш жорстке наближення

$$\frac{(x_1-x)^2}{2z} = \frac{1}{2z} (x_1^2 + x^2) - \frac{1}{z} x_1 x \approx -\frac{1}{z} x_1 x, \quad (3.19)$$

яке має назву наближення Фраунгофера.

У такому випадку (3.13) трансформується до вигляду

$$U(x_1) = \frac{1}{\sqrt{z}} \exp(jkn_0 z) \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \exp(-j\omega x) dx, \quad (3.20)$$

де $\omega = \frac{kn_0}{z} x_1$.

Таке наближення справедливе для далекої зони дифракції (зони Фраунгофера) і вказує на той факт, що поле в далекій зоні є не чим іншим, як перетворенням Фур'є від поля у вхідній площині.

3.2.3. Принцип Бабіне

Розглянемо один із наслідків, який впливає з нашого розгляду. Нехай вхідне поле формується при дифракції на непрозорих екранах, які схематично зображені на рис. 3.4.

Екрани на рисунках (а) і (б) відрізняються тим, що місця екрана, які пропускають світло екраном (а), замінюють на екрані (б) непрозорими частинами. Такі екрани називають додатковими.

Досить умовно пропускання екрану (а) можна представити як

$$f(t) = P_a(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq a \\ 0, & \text{в решта точках} \end{cases}. \quad (3.21)$$

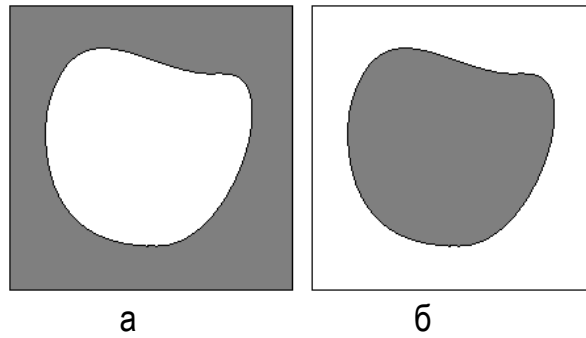


Рис. 3.4

Тоді пропускання екрана (б) можна описати виразом (див. рис. 3.5):

$$\tilde{f}(t) = 1 - P_a(t). \quad (3.22)$$

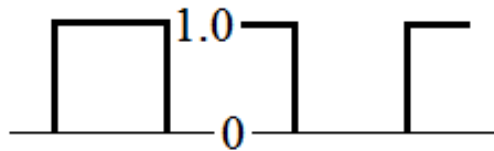


Рис. 3.5

Як впливає з (3.21) і (3.22), якщо розглядати дифракційне поле, зокрема у далекій зоні, то інтенсивності сформованих полів практично ідентичні, оскільки вони відрізняються тим, що у другому випадку в точці з нульовими координатами формується додатковий яскравий пік. Що стосується решти точок площини спостереження, то відрізнити, яким з екранів формується поле, неможливо.

3.3. Реалізація Фур'є-перетворення в оптиці

В попередньому параграфі ми встановили, що комплексна амплітуда поля у далекій зоні є Фур'є-образом від комплексної амплітуди у вхідній площині. Отже, можна вважати, що питання реалізації такого інтегрального перетворення вирішено. Разом з тим абсолютна величина відстані від вхідної площини до площини спостереження, для якої виконується наближення Фраунгофера, залежить від багатьох факторів, таких як структура транспаранта, довжина хвилі, розміри максимального та мінімального елемента вхідного поля тощо. Тому виникає питання чи існує можливість прогнозованого отримання Фур'є-образа в іншій оптичній системі, або іншою мовою, чи можлива реалізація Фур'є-перетворення іншим методом.

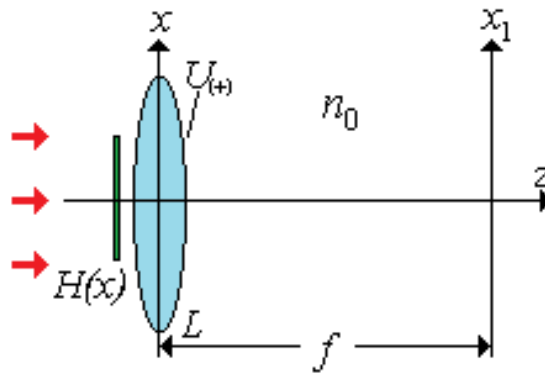


Рис. 3.5

Розглянемо дещо спрощено основну ідею такої реалізації і, як у більшості випадків, обмежимося розглядом одномірного випадку. Більш строгий розгляд цього питання можна знайти, наприклад, в [9,14].

Нехай нормована до одиниці хвиля освітлює транспарант із пропусканням $H(x)$. Безпосередньо за транспарантом розташована лінза з фокусною відстанню f (див. рис. 3.5). Безпосередньо за транспарантом поле має вигляд:

$$U_{(+)}(x) = H(x)L(x), \quad (3.23)$$

де $L(x)$ – функція пропускання тонкої лінзи.

Як було показано раніше, при виконанні параксіального наближення $L(x)$ має вигляд

$$L(x) = \exp(-j \frac{kn_0}{2f} x^2). \quad (3.24)$$

Комплексна амплітуда поля, яке формується на відстані f від композиції транспаранта лінзи в площині x_1 визначається перетворенням Френеля:

$$U(x_1) = \frac{1}{\sqrt{f}} \exp(jkn_0 f) \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \exp(-j \frac{kn_0}{2f} x^2) \exp[j \frac{kn_0}{2f} (x_1 - x)^2] dx. \quad (3.25)$$

Після простих перетворень маємо

$$U(x_1) = \frac{1}{\sqrt{f}} \exp(jkn_0 f) \exp(j \frac{kn_0}{2f} x_1^2) \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \exp(-j \frac{kn_0}{f} x_1 x) dx. \quad (3.26)$$

Відповідно можна вважати, що з точністю до множника $\frac{1}{\sqrt{f}} \exp(jkn_0 f) \exp(j \frac{kn_0}{2f} x_1^2)$ поле $U(x_1)$ дорівнює Фур'є-образу від $H(x)$

$$U(x_1) \sim \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \exp(-j\omega x) dx, \quad (3.27)$$

де $\omega = \frac{kn_0}{f} x_1$.

При цьому інтенсивність поля в площині x_1 , яка дорівнює $|U(x_1)|^2$, повністю збігається з істинним спектром потужності вхідного поля, сформованого транспарантом $H(x)$.

Основну відмінність отриманого виразу для поля $U(x_1)$ від Фур'є-образу визначає квадратичний фазовий множник $\exp(j\frac{kn_0}{2f}x_1^2)$, оскільки постійний фазовий множник $\exp(jkn_0f)$ у більшості випадків в оптиці ігнорується.

Відзначимо, що такий квадратичний множник з'являється завдяки специфічному взаємному розташуванню транспаранта і лінзи. Можна показати, що такого типу множник існує при будь-якій відстані між транспарантом і лінзою, за винятком випадку, коли транспарант розташований в передній фокальній площині (див. рис. 3.6).

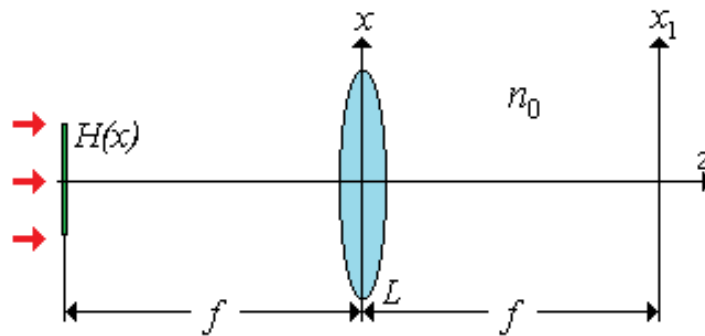


Рис. 3.6

У цьому випадку в задній фокальній площині реалізується точне Фур'є-перетворення від $H(x)$.

Отже, каскад, зображений на рис. 3.6, дає можливість реалізації Фур'є-перетворення для будь-якого вхідного поля.

По суті, застосований Фур'є-перетворюючий об'єктив L можна розглядати як певний компресор простору. На різних відстанях від об'єктива до його задньої фокальної площини послідовно реалізуються всі дифракційні поля, які виникають при дифракції від початкової площини до безмежності при дифракції хвилі у вільному просторі.

3.4. Наближення хвильових фронтів [5,6]

Відзначимо, що при розгляді закономірностей розповсюдження оптичної хвилі по за нашою увагою залишився важливе питання, а як відбувається трансформація характеристик хвилі в безпосередній близькості від вхідної площини. Зокрема інтуїтивно можна зробити висновок, що при невеликих відстанях поле практично таке саме як і у вхідній площині.

Розглянемо цю ситуацію більш детально. Нехай у вхідній площині формується поле

$$U(x, y) = A(x, y)\exp[jk\Phi(x, y)]. \quad (3.28)$$

де $k\Phi(x, y)$ – просторова фаза хвилі, яка визначає фронт хвилі.

Зробимо деякі якісні зауваження відносно процесу трансформації хвилі відповідно до її характеристик.

Природно, що чим дрібніші елементи амплітудної модуляції $A(x, y)$, тим швидше хвиля починає відрізнятися від тієї, що сформована у вхідній площині. Такі самі міркування можна висловити відносно фазової модуляції $k\Phi(x, y)$. Чим менший масштаб флуктуації функції $\Phi(x, y)$ і чим більша абсолютна величина фазових змін тим швидше змінюються характеристики хвилі.

Ці міркування ілюструються рис. 3.7, на якому схематично зображені фронти хвиль із різними фазовими характеристиками.

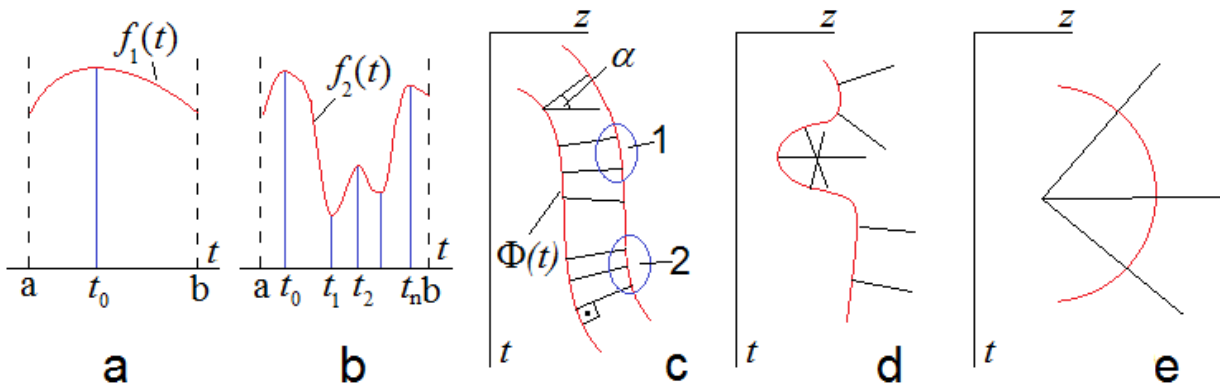


Рис. 3.7. Трансформація хвиль із різними фазовими характеристиками:

а – фронт хвилі із великим масштабом флуктуації фази; б – фронт хвилі із дрібними флуктуаціями фази і великими значеннями фазової модуляції; с – трансформації фронту при розповсюдженні хвилі у випадку (а); д – трансформації фронту при розповсюдженні хвилі у випадку (б); е – розповсюдження сферичної хвилі

Як бачимо з рисунку (с), у випадку із «плавними» змінами фази можна детерміновано перерахувати характеристики хвильового фронту на деякій відстані від вхідної площини. На цьому ринку наведені положення нормалей до хвильового фронту. Наступний фронт досить просто формується, якщо провести певну огинаючу через кінцівки відрізків нормалей на певній відстані від початкового фронту. При цьому амплітуда наступного фронту визначається густиною нормалей на фронті, що склалася.

Отже, фактично можна вважати, що розповсюдження хвилі типу (а) відбувається «без дифракції», а її характеристики можна отримати суто з геометричних міркувань.

Інша ситуація складається для хвилі типу (б), оскільки, як видно з рисунка (д), для певних ділянок хвильового фронту, нормалі перетинаються і результат формування наступного фронту виходячи із геометричних міркувань, передбачити неможливо.

Можна зробити висновок, що відстань від вхідної площини, на якій можна розрахувати характеристики поля «геометричним» методом, визначається масштабами флуктуацій амплітуди і фази початкового поля та величиною фазової модуляції, тобто наскільки дрібні амплітудні зміни та наскільки «плавні» фазові зміни спостерігаються у початковому полі.

Для прикладу на рисунку (е) наведений фронт сферичної хвилі, яка можна вважати, розповсюджується без дифракції від вхідної площини до безмежності.

Спробуємо провести детальний аналіз трансформації вхідної хвилі.

Зауважимо, що наближене значення комплексної амплітуди в площині x', y' може бути отримане, застосовуючи метод стаціонарної фази, у двовимірному випадку має вигляд:

$$U = \iint_R A(x, y) \exp[jk\mu(x, y)] dx dy \approx \frac{2\pi j A(x_0, y_0)}{k \sqrt{\mu_{xx}\mu_{yy} - \mu_{xy}^2}} \exp[jk\mu(x_0, y_0)]. \quad (3.29)$$

де $\mu(x, y)$ – двічі диференційована в R функція; $\mu_{xx}, \mu_{yy}, \mu_{xy}$ – другі похідні від $\mu(x, y)$; x_0, y_0 – точки з області R , які є розв'язками системи рівнянь

$$\begin{cases} \mu_x(x, y) = 0 \\ \mu_y(x, y) = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

де μ_x, μ_y – перші похідні від $\mu(x, y)$. Тобто x_0, y_0 – стаціонарні точки функції $\mu(x, y)$ в області R .

При цьому для других похідних виконується умова

$$\begin{cases} \mu_{xx}\mu_{yy} - \mu_{xy}^2 \neq 0 \\ \mu_{xy} \neq 0 \end{cases}. \quad (3.31)$$

У нашому випадку $\mu(x, y)$ має вигляд

$$\mu(x, y) = \Phi(x, y) + \frac{1}{2z} [(x - x')^2 + (y - y')^2]. \quad (3.32)$$

Тоді система (3.30) трансформується до вигляду

$$\begin{cases} z\Phi_x + x - x' = 0 \\ z\Phi_y + y - y' = 0 \end{cases} \quad (3.33)$$

а співвідношення (3.3.1) може бути записане як

$$(\Phi_{xx} + \frac{1}{z})(\Phi_{yy} + \frac{1}{z}) - \Phi_{xy}^2 \Big|_{\substack{x=x(x',y') \\ y=y(x',y')}} \neq 0. \quad (3.34)$$

де $x = x(x', y')$, $y = y(x', y')$ – розв'язки системи (3.33).

Тоді поле в площині x', y' описується співвідношенням

$$U(x', y') = \frac{A(x, y)}{\sqrt{(z\Phi_{xx} + 1)(z\Phi_{yy} + 1) - z^2\Phi_{xy}^2}} \times \exp\{jk[z + \{\Phi(x, y) + \frac{z}{2}[\Phi_x^2 + \Phi_y^2]\}]\} \Big|_{\substack{x=x(x',y') \\ y=y(x',y')}}. \quad (3.35)$$

Відзначимо, що якщо стаціонарна точка в R не одна, то поле $U(x', y')$ визначається як сума полів типу (3.35).

Співвідношення (3.35) будемо називати наближенням хвильових фронтів, наближенням, коли розповсюдження хвилі можна вважати бездифракційним.

Якщо розв'язків системи (3.33) нескінченно багато, тобто хоча б один із розв'язків вироджується у невизначеність, то поле, яке відповідає цій невизначеності, вироджується

у δ -функцію. Прикладом фізичної реалізації такої ситуації може бути виникнення чогось подібного до каустики, або точки фокусування сферичної хвилі (див. рис. 3.8).

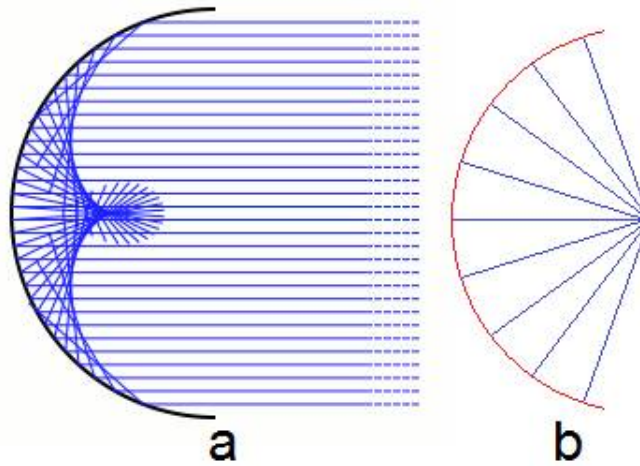


Рис. 3.8

a – каустика, яка утворюється фокусуванням широкого пучка сферичним дзеркалом;
b – фокусування сферичної хвилі

Спробуємо з'ясувати, за якими умовами можна застосовувати наближення хвильових фронтів.

Одновимірною інтерпретацією наближення хвильових фронтів має вигляд:

$$U(x') = \frac{A(x)}{\sqrt{z\Phi''(x)+1}} \exp\{jk \left[\Phi(x) + \frac{z}{2} (\Phi'(x))^2 \right]\} \Big|_{x=x(x')}, \quad (3.34)$$

де Φ' , Φ'' – перша і друга похідні від фазової модуляції; $x = x(x')$ – розв'язок рівняння

$$z\Phi'(x) + x - x' = 0. \quad (3.35)$$

При цьому виконується умова

$$\Phi''(x) + \frac{1}{z} \neq 0 \Big|_{x=x(x')}. \quad (3.36)$$

Поле в площині x'

$$U(x') = \frac{1}{\sqrt{\lambda z}} e^{j(kz - \frac{\pi}{4})} \int_{-\infty}^{\infty} U(x) \exp[j \frac{k}{2z} (x - x')^2] dx \quad (3.37)$$

або в явному вигляді

$$U(x') = \frac{1}{\sqrt{\lambda z}} e^{j(kz - \frac{\pi}{4})} \int_{-\infty}^{\infty} A(x) \exp\{jk \left[\Phi(x) + \frac{1}{2z} (x - x')^2 \right]\} dx. \quad (3.38)$$

Окрім цього

$$\mu(x) = \Phi(x) + \frac{1}{2z} (x - x')^2. \quad (3.39a)$$

$$\mu'(x) = \Phi'(x) + \frac{1}{z}(x - x'). \quad (3.39b)$$

$$\mu''(x) = \Phi''(x) + \frac{1}{z}. \quad (3.39c)$$

Розкладемо $\mu(x)$ в ряд Тейлора за степенями x в околі точки x_0 , яке є розв'язком рівняння (10), та обмежимося першими трьома членами:

$$\mu(x) = \mu(x_0) + \mu'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}\mu''(x_0)(x - x_0)^2 + R(x), \quad (3.40)$$

де $R(x)$ – залишковий член.

З рівняння (3.35) $x - x' = -z\Phi'(x)$ і, окрім цього, $\mu'(x_0)$ дорівнює нулю за визначенням.

Тоді, нехтуючи членом $R(x)$, наближене значення для $\mu(x)$ матиме вигляд

$$\mu(x) \approx \Phi(x_0) + \frac{z}{2}[\Phi'(x_0)]^2 + [\Phi''(x) + \frac{1}{z}]\frac{(x-x_0)^2}{2}. \quad (3.41)$$

Відповідно до (3.38) і до (2.41), маємо

$$U(x') = \frac{1}{\sqrt{\lambda z}} e^{j(kz - \frac{\pi}{4})} \exp\{jk[\Phi(x_0) + \frac{z}{2}[\Phi'(x_0)]^2]\} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} A(x) \exp\{jk\frac{1}{2}[(\Phi''(x_0) + \frac{1}{z})(x - x_0)^2]\} dx \quad (3.42)$$

Інтеграл у виразі (3.42) можна інтерпретувати як дифракцію Френеля поля $A(x)$ на відстані $\tilde{z} = \frac{1}{\Phi''(x_0) + \frac{1}{z}}$ від площини x_0

Зробимо заміну. Позначимо

$$(\Phi''(x_0) + \frac{1}{z})^{\frac{1}{2}}(x - x_0) = t. \quad (3.43)$$

Відповідно

$$x = \frac{t}{(\Phi''(x) + \frac{1}{z})^{\frac{1}{2}}} + x_0 = \frac{t}{\sqrt{\mu''(x_0)}} + x_0 \\ dx = \frac{dt}{\sqrt{\mu''(x_0)}} \quad (3.44)$$

Тоді з точністю до постійного фазового множника (3.42) перетвориться на таке:

$$U(x') \sim \frac{1}{\sqrt{\mu''(x_0)}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\frac{t}{\sqrt{\mu''(x_0)}} + x_0) \exp(jk \frac{t^2}{2}) dt. \quad (3.45)$$

$A(\tau)$, як відомо, можна записати у вигляді оберненого Фур'є-перетворення

$$A(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (3.46)$$

Виходячи з цього, поле $U(x')$ можна записати як

$$U(x') \sim \frac{1}{\sqrt{\mu''(x_0)}} \int_{-\infty}^{\infty} A\left(\frac{t}{\sqrt{\mu''(x_0)}} + x_0\right) \exp(jk \frac{t^2}{2}) dt. \quad (3.47)$$

де

$$\begin{aligned} A\left(\frac{t}{\sqrt{\mu''(x_0)}} + x_0\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega\left(\frac{t}{\sqrt{\mu''(x_0)}} + x_0\right)} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega x_0} e^{j\omega \frac{t}{\sqrt{\mu''(x_0)}}} d\omega. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Тоді

$$U(x') \sim \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\mu''(x_0)}} \iint_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega x_0} e^{j\omega \frac{t}{\sqrt{\mu''(x_0)}}} e^{jk \frac{t^2}{2}} dt d\omega, \quad (3.49)$$

або

$$U(x') \sim \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\mu''(x_0)}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega \frac{t}{\sqrt{\mu''(x_0)}}} e^{jk \frac{t^2}{2}} dt \right\} G(\omega) e^{j\omega x_0} d\omega. \quad (3.50)$$

Розглянемо внутрішній інтеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jk \frac{t^2}{2}} e^{j\omega \frac{t}{\sqrt{\mu''(x_0)}}} dt. \quad (3.51)$$

Зробимо заміну

$$\begin{aligned} q &= \frac{t}{\sqrt{\mu''(x_0)}} \\ q \sqrt{\mu''(x_0)} &= t. \\ dt &= \sqrt{\mu''(x_0)} dq \end{aligned} \quad (3.52)$$

Тоді (3.51) перетвориться на

$$I = \sqrt{\mu''(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jk \mu''(x_0) \frac{q^2}{2}} e^{j\omega q} dq. \quad (3.53)$$

Вираз (3.53) можна інтерпретувати як обернене Фур'є-перетворення функції типу «комплексна амплітуда розбіжної сферичної хвилі».

Позначимо $\omega = -\vartheta$.

Тоді остаточно (3.53) набуває вигляду (пряме Фур'є-перетворення від функції $e^{k \mu''(x_0) \frac{q^2}{2}}$)

$$I = \sqrt{\mu''(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jk \mu''(x_0) \frac{q^2}{2}} e^{-j\vartheta q} dq. \quad (3.54)$$

Як відомо, Фур'є-образ функції $U(x) = e^{j\alpha x^2}$ має вигляд

$$\mathfrak{F}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j\frac{\omega^2}{4a}}. \quad (3.55)$$

У нашому випадку $a = \frac{k\mu''(x_0)}{2}$. Тоді (3.54) перетвориться на

$$I = e^{j\frac{\pi}{4}\sqrt{\lambda}} e^{-j\frac{\vartheta^2}{2k\mu''(x_0)}} = e^{j\frac{\pi}{4}\sqrt{\lambda}} e^{-j\frac{\omega^2}{2k\mu''(x_0)}}. \quad (3.56)$$

Врешті (3.50) набуде вигляду:

$$U(x') = \sim \frac{1}{\sqrt{2\Phi''(x)+1}} \exp\{jk[\Phi(x_0) + \frac{z}{2}[\Phi'(x_0)]^2]\} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega x_0} e^{-j\frac{\omega^2}{2k\mu''(x_0)}} d\omega. \quad (3.57)$$

Очевидно, що у випадку, якщо $e^{-j\frac{\omega^2}{2k\mu''(x_0)}} \rightarrow 1$, то (3.57) ідентично наближенню хвильових фронтів.

Умова $e^{-j\frac{\omega^2}{2k\mu''(x_0)}} \rightarrow 1$ відповідає умові $\frac{\omega^2}{2k\mu''(x_0)} \rightarrow 0$

За критерієм Релея (який, очевидно, може бути дуже грубий для нашого розгляду) це відповідає ситуації, коли

$$\left| \frac{\omega_{\text{гр}}^2}{2k\mu''(x_0)} \right| \leq \pi/2, \quad (3.58)$$

де під $\omega_{\text{гр}}$ розуміємо деяку граничну частоту спектра.

(3.58) і є умовою застосування наближення хвильових фронтів.

Очевидно, що таке наближення може бути застосоване лише у випадку, коли спектр амплітуди $A(\tau)$ швидко спадає, і починаючи з певної граничної частоти $\pm\omega_{\text{гр}}$ ним можна нехтувати. Інакше кажучи, функція $A(\tau)$ – функція з гострим спектром.

Щодо критерію такої граничної частоти, то його можна сформулювати так.

Як відомо, у спектрі прямокутного імпульсу 90% енергії зосереджено у головному максимумі (див. рис. 3.9). Першій нуль спектра відповідає частоті $\omega_0 = \frac{2\pi}{2a}$, де $2a$ – протяжність прямокутного імпульсу.

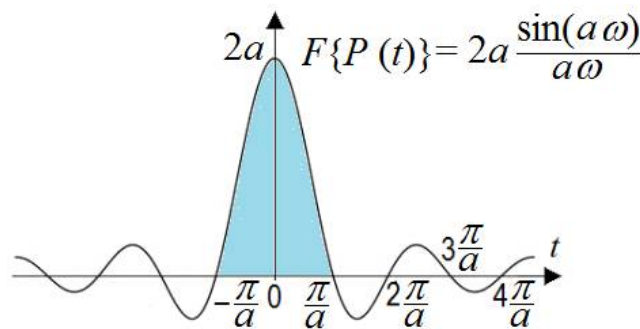


Рис. 3.9

За аналогією, для наближення хвильових фронтів маємо аналогічний критерій для граничної частоти

$$\frac{\int_{-\omega_{\text{гp}}}^{\omega_{\text{гp}}} |G(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega} \geq 0.9. \quad (3.59)$$

Звідси випливає, що співвідношення (3.58) і (3.59) формують критерій застосування наближення хвильових фронтів.

3.4.1. Наближення тіні

Уявимо, що деякий транспарант із пропусканням $A(x)$ освітлюється плоскою, нормованою до одиниці хвилею, яка розповсюджується вздовж z . Поле безпосередньо за транспарантом (граничне поле) дорівнює $A(x)$. Виникає питання: на якій відстані від площини x поле можна вважати ідентичним граничному полю. Інакше кажучи, на якій відстані від транспаранту можна нехтувати явищем дифракції.

В цьому випадку

$$\mu''(x) = \frac{1}{z}, \quad (3.60)$$

оскільки кривизна світлового пучка нульова.

Умова для граничної частоти набуває вигляду

$$\left| \frac{z\omega_{\text{гp}}^2}{2k} \right| \leq \pi/2. \quad (3.61)$$

При цьому $\omega_{\text{гp}} = \frac{\pi}{a}$.

Виконання умови (3.61) будемо називати умовою виконання наближення тіні.

Звідси випливає значення z , на якій виконується наближення тіні.

$$z \leq (2a)^2/2\lambda. \quad (3.62)$$

Виходячи з (3.62), для отвору розмірами близькими до 1 мм відстань, на якій поле буде розповсюджується без дифракції, складає величину близьку до 50 см.

Якщо застосувати більш строгий критерій, наприклад, критерій Марішала, який певною мірою можна сформулювати як те, що середньоквадратична різниця фаз двох фронтів не перевищує $\pi/7$ [1], умова для граничної частоти трансформується до вигляду

$$\left| \frac{z\omega_{\text{гp}}^2}{2k} \right| \leq \pi/7, \quad (3.63)$$

а величина z для прямокутного отвору визначається виразом

$$z \leq (2a)^2/14\lambda. \quad (3.64)$$

Для отвору розміром 1 мм маємо відстань, на якій поле буде розповсюджуватися без дифракції порядку 7 см.

3.4.2. Багатокаскадна просторово-залежна система з асферичними елементами

Як було показано для багатокаскадної просторово-інваріантної системи, вихідний сигнал визначається співвідношенням

$$g(x, y) = \iint_S f(x, y) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta = f \otimes h, \quad (3.65)$$

де h – імпульсний відгук системи, а частотна характеристика багатокаскадної системи є простим добутком таких характеристик, які відповідають каскадам:

$$H(\omega) = H_1(\omega) H_2(\omega) \dots H_n(\omega). \quad (3.66)$$

Саме тому імпульсний відгук системи досить просто розрахувати, якщо відомі передаточні функції каскадів системи і розрахунок вихідного сигналу зводиться до обчислення лише двох інтегралів:

1. Обчислення імпульсного відгуку як оберненого Фур'є-перетворення від передаточної функції $H(\omega)$.

2. Безпосередній розрахунок вихідного сигналу.

Треба відзначити, що співвідношення (3.65), (3.66), умова просторової інваріантності виконуються лише для систем із сферичною оптикою, якщо ж в системі наявні певні асферичні елементи, то реакція системи змінюється при зсуві сигналу у вхідній площині (див. рис. 3.10). Такі системи отримали назву просторово-залежних і вихідний сигнал розраховується, виходячи із загального співвідношення:

$$g(x, y) = \iint_S f(x, y) h(x, y, \xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (3.67)$$

При цьому співвідношення типу (3.67) застосовують для кожного каскаду, якщо він містить асферичні елементи. Отже, розрахунок вихідного сигналу перетворюється на обчислення низки інтегралів, іноді досить складних. Кількість таких інтегралів дорівнює кількості каскадів. Виходячи з цього розрахунок вихідного сигналу у просторово-залежній системі є непростю задачею.

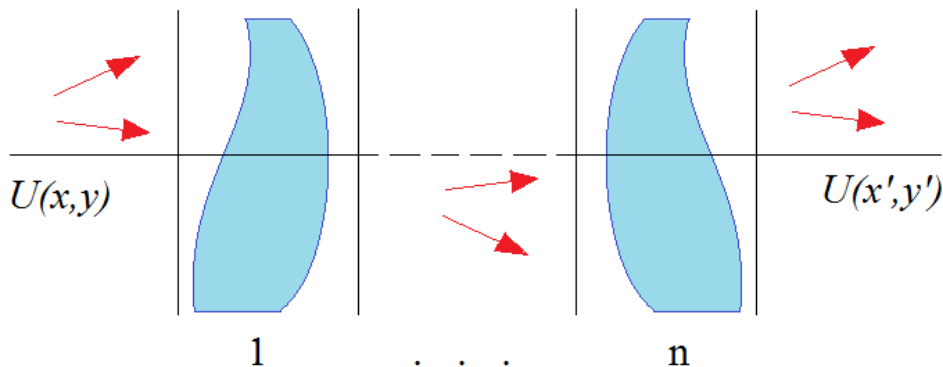


Рис. 3.10

Задача могла би бути спрощена, якщо б перетворення хвиль при проходженні кожного каскаду можна було обчислити на основі «бездифракційних» алгоритмів типу наближення хвильових фронтів.

Разом з тим у загальному випадку вхідний сигнал, як правило, не відповідає вимогам, які дають можливість такі алгоритми застосовувати. Винятком тут можуть бути спеціальні хвилі типу Гауссових пучків, плоских та сферичних хвиль [10].

Проте нагадаємо, що вхідний сигнал може бути представлений як обернене Фур'є-перетворення від його Фур'є-образу $G(\omega, \vartheta)$:

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} G(\omega, \vartheta) e^{j(\omega x + \vartheta y)} d\omega d\vartheta. \quad (3.68)$$

Відзначимо, що співвідношення (3.68) можна трактувати як суперпозицію деяких парціальних плоских хвиль $e^{j(\omega x + \vartheta y)}$ із відповідними ваговими коефіцієнтами.

Тоді, якщо вдається простежити трансформацію кожної такої хвилі через просторово-залежну систему, то внаслідок виконання принципу суперпозиції вихідний сигнал можна обчислити за співвідношенням

$$U_n(x', y') = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} G(\omega, \vartheta) p(\omega, \vartheta, x', y') d\omega d\vartheta, \quad (3.69)$$

де $p(\omega, \vartheta, x', y') = \hat{L}[e^{j(\omega x + \vartheta y)}]$ – «трансформована» парціальна плоска хвиля; $\hat{L}$ – нелінійний оператор, який відображає дію просторово-залежної багатокаскадної системи на початкову «плоску» хвилю $e^{j(\omega x + \vartheta y)}$

Природно, що плоска хвиля $e^{j(\omega x + \vartheta y)}$ відповідає умовам можливості застосування наближення хвильових фронтів хоча б у першому каскаді системи. Дуже часто вдається простежити її трансформацію до вихідної площини системи.

Отже, наведений підхід дає можливість значно спростити розрахунок вихідного сигналу у просторово-залежній системі і звести кількість інтегралів, які необхідно обчислити, до мінімуму.

4. ВЕКТОРНІ ПОЛЯ. ПОЛЯРИЗАЦІЯ [1,17,18]

4.1. Елементарні уявлення

Найбільш просте, а з іншого боку, найбільш загальне визначення поняття поляризації світла можна сформулювати так: поляризоване світло – це світло з переважним напрямком коливань, переважним для одного з поперечних напрямків коливань або певного напрямку обертання. Ще більш загально можна стверджувати, що явищу поляризації електромагнітної хвилі відповідає явище детермінованого у часі руху кінцівки вектора напруженості електричного (магнітного) поля.

Найбільш відомі і прості рухи такого вектора ілюструються рис. 4.1.

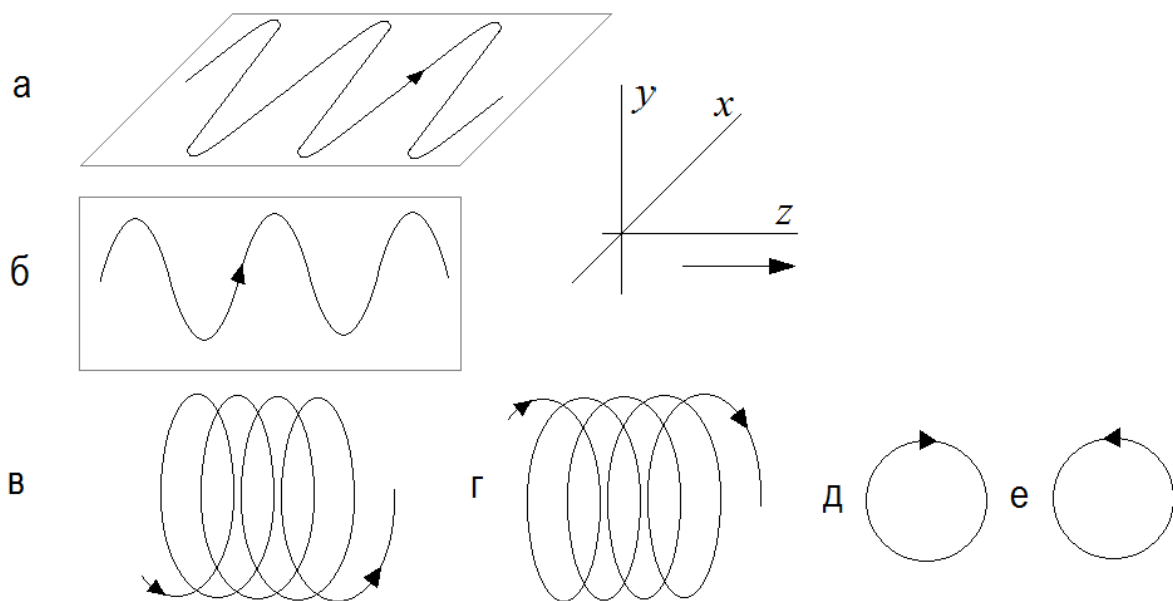


Рис. 4.1. Елементарні типи поляризації електромагнітної хвилі

а – лінійно горизонтально поляризований пучок; б – лінійно вертикально поляризований пучок; в,д – правоциркулярно поляризований пучок; г,е – лівоциркулярно поляризований пучок

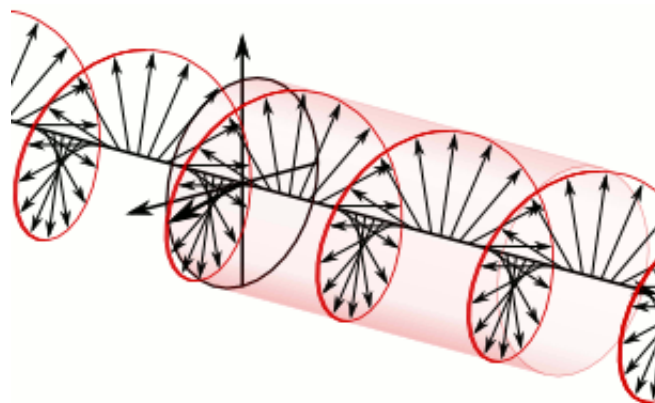


Рис. 4.2

Кажуть, що поле поляризоване лінійно, якщо вектор напруженості поля здійснює коливання лише у одній площині (рис. а та б).

Вектор може здійснювати більш складний рух, наприклад, рухатися вздовж кола (рис. в-е) або еліпса. Пучок вважається правополяризованим, якщо спостерігач, який дивиться на такий пучок, бачить обертання вектора за годинниковою стрілкою (рис. в,г).

Більш детально поведінка вектора напруженості електричного поля для циркулярно поляризованого пучка показана на рис. 4.2

4.2. Гармонічна електромагнітна плоска хвиля

Перш за все треба відзначити, що для плоскої хвилі вектори $\vec{E}$ і $\vec{H}$ та напрямок розповсюдження $\vec{s}$ утворюють таку трійку векторів, що гармонічну плоску хвилю можна вважати поперечною [1,17]. При цьому таке твердження несправедливе для хвилі загального вигляду. Зокрема, площина, в якій змінюється вектор напруженості, збігається з площиною, в якій розташований вектор $\vec{s}$.

Нехай напруженість електричного поля хвилі $\vec{E}$ можна розкласти за Декартовим базисом $E_x(\vec{r}, t)$, $E_y(\vec{r}, t)$, $E_z(\vec{r}, t)$.

Тоді для кожної компоненти плоскої хвилі справедливо таке:

$$E_i(\vec{r}, t) = A_i \cos(\tau + \Phi_i) = \operatorname{Re}[A_i e^{-j(\tau + \Phi_i)}], \quad (4.1)$$

де $i = x, y, z$, $A_i > 0$ і τ :

$$\tau = \omega \left(t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{s}}{v} \right) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}, \quad \Phi_i - \text{початкова фаза.}$$

Якщо $\vec{s}$ за напрямком збігається з віссю z , то

$$\begin{cases} E_x = A_x \cos(\tau + \Phi_x) \\ E_y = A_y \cos(\tau + \Phi_y) \\ E_z = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

4.2.1. Еліптична поляризація

Співвідношення (4.2) може бути переписане у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{E_x}{A_x} = \cos \tau \cos \Phi_x - \sin \tau \sin \Phi_x \\ \frac{E_y}{A_y} = \cos \tau \cos \Phi_y - \sin \tau \sin \Phi_y \end{cases} \quad (4.3)$$

Домножимо перше рівняння на $\sin \Phi_y$, а друге на $\sin \Phi_x$ та віднімемо від першого рівняння друге. Потім домножимо перше рівняння на $\cos \Phi_y$, а друге на $\cos \Phi_x$ та знову віднімемо від першого рівняння друге. Отримаємо таку систему:

$$\begin{cases} \frac{E_x}{A_x} \sin \Phi_y - \frac{E_y}{A_y} \sin \Phi_x = \cos \tau \sin(\Phi_y - \Phi_x) \\ \frac{E_x}{A_x} \cos \Phi_y - \frac{E_y}{A_y} \cos \Phi_x = \sin \tau \sin(\Phi_y - \Phi_x) \end{cases} \quad (4.4)$$

Якщо піднести до квадрата праву і ліву частину (4.4) то маємо

$$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 - 2 \frac{E_x}{A_x} \frac{E_y}{A_y} \cos \Delta \Phi = \sin^2 \Delta \Phi, \quad (4.5)$$

де $\Delta \Phi = \Phi_y - \Phi_x$ – різниця початкових фаз компонент.

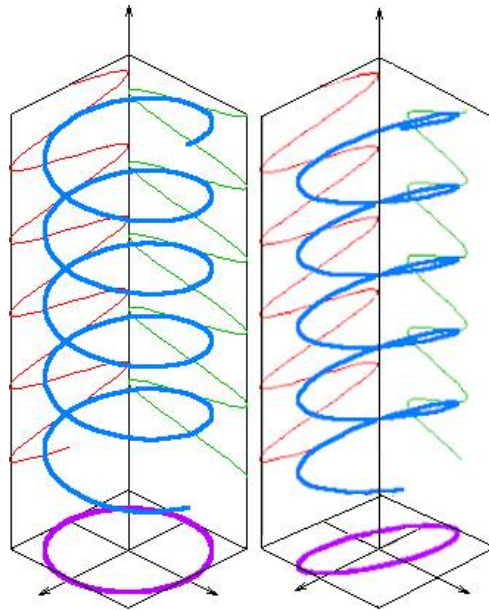


Рис. 4.3

Рівняння (4.5) – не що інше як рівняння конічного перетину, тобто еліпс. Інакше кажучи, у загальному випадку, кінцівка вектора напруженості електричного поля рухається у часі вздовж спіральної траєкторії, яка у проекції на площину, перпендикулярну напрямку розповсюдження $\vec{s}$, формує певний еліпс (див. рис. 4.3).

Спробуємо визначити, скільки та які параметри можуть визначати стан поляризації електромагнітної плоскої хвилі.

На рис. 4.4 наведений деякий поляризаційний еліпс. Природно, що одним з параметрів повинна бути характеристика, яка визначає орієнтацію еліпса відносно осей x, y . Ця характеристика має назву *азимуту поляризації* α . Область визначення азимуту $-90^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ або $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.

Наступна характеристика $e = \frac{b}{a}$ – *еліптичність*, яка визначає співвідношення між великою і малою напівосями еліпса. Іноді таке співвідношення характеризують за допомогою параметра β , так званого *кута еліптичності*, який пов'язаний із еліптичністю співвідношенням

$$e = \operatorname{tg}(\beta). \quad (4.6)$$

Область визначення β знаходиться в межах $-\pi/4 \leq \beta \leq \pi/4$.

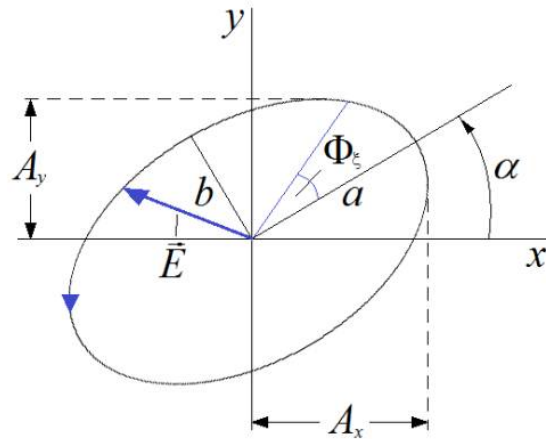


Рис. 4.4

Природно, що це співвідношення між осями може бути визначено за допомогою ексцентриситету еліпса:

$$\varepsilon = \frac{(a^2 - b^2)^{1/2}}{a} = (1 - e^2)^{1/2}. \quad (4.7)$$

Для того щоб визначити напрямок циркуляції вектора напруженості хвилі вводять *спінорний фактор* (англійською *handedness factor* [3]) h , який дорівнює $+1$ для правої і -1 для лівої поляризації.

Для зручності знак спінорного фактору може бути присвоєний еліптичності $-1 \leq e \leq 1$. Тут $e = +1$ відповідає *правій циркулярній* поляризації, а $e = -1$ *лівій циркулярній* поляризації.

В принципі у більшості випадків таких параметрів достатньо для опису стану поляризації хвилі. Разом з тим, щоб однозначно охарактеризувати позицію вектора напруженості у часі, не вистачає ще одного параметра, чогось на зразок початкової фази для скалярної хвилі, який би визначав орієнтацію цього вектора відносно осей еліпса (осей координат) у «початковий» момент часу.

Як і раніше, будемо вважати, що кожен компоненту (ортогональну) напруженості можна записати як:

$$E_i(\vec{r}, t) = A_i \cos(\omega t - \Phi_i) = \text{Re}(U_i e^{-j\omega t}), \quad (4.8)$$

де $U_i = A_i e^{j\Phi_i}$ – комплексна амплітуда i -ої компоненти

Вираз (4.8) може бути представлений в іншому вигляді:

$$E_i(\vec{r}, t) = p_i(\vec{r}) \cos(\omega t) + q_i(\vec{r}) \sin(\omega t), \quad (4.9)$$

де $p_i(\vec{r}) = A_i \cos(\Phi_i)$, $q_i(\vec{r}) = A_i \sin(\Phi_i)$

Відповідно напруженість поля як векторна величина може бути представлена за допомогою комплексної хвильової функції:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{U}(\vec{r}) e^{-j\omega t}]. \quad (4.10)$$

Враховуючи (4.9), комплексна хвильова функція може бути записана як

$$\begin{cases} \vec{U}(\vec{r}) = \vec{p}(\vec{r}) + j\vec{q}(\vec{r}) \\ \vec{U}^*(\vec{r}) = \vec{p}(\vec{r}) - j\vec{q}(\vec{r}) \end{cases} \quad (4.11)$$

або за допомогою певних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$

$$\vec{U} = (\vec{a} + j\vec{b})e^{j\Phi_\xi}, \quad (4.12)$$

які пов'язані з векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$ співвідношеннями:

$$\begin{cases} \vec{p} = \vec{a}\cos(\Phi_\xi) - \vec{b}\sin(\Phi_\xi) \\ \vec{q} = \vec{a}\sin(\Phi_\xi) + \vec{b}\cos(\Phi_\xi) \end{cases} \quad (4.13a)$$

або

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{p}\cos(\Phi_\xi) + \vec{q}\sin(\Phi_\xi) \\ \vec{b} = -\vec{p}\sin(\Phi_\xi) + \vec{q}\cos(\Phi_\xi) \end{cases} \quad (4.13b)$$

Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – ортогональні, зокрема, збігаються за напрямками з осями поляризаційного еліпса. Тоді

$$\vec{a}\vec{b} = 0. \quad (4.14)$$

Звідки випливає

$$\operatorname{tg}(2\Phi_\xi) = \frac{2\vec{p}\vec{q}}{\vec{p}^2 - \vec{q}^2}. \quad (4.15)$$

Параметр Φ_ξ називають початковою фазою (Шерклиф У. [18]), головна або абсолютна фаза [17], фазовим фактором (М.Борн, Е.Вольф [1]) (*vibration phase*, Дж. Най [3]). В подальшому ми будемо називати цю величину *головною* або *вібраційною* фазою.

4.2.2. Фізичний зміст головної фази

Параметр Φ_ξ має простий фізичний зміст, а саме фіксує орієнтацію вектора напруженості відносно великої осі поляризаційного еліпса (див. рис. 4.5) і відраховується як певний кут між вектором напруженості поля і цією віссю в початковий момент часу.

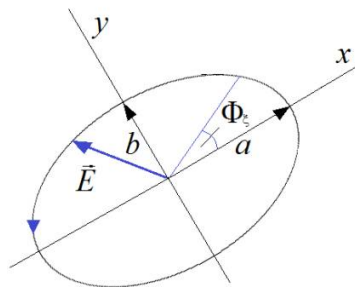


Рис. 4.5

Щодо області визначення головної фази, то різні автори по-різному визначають область задання цього параметра. Це пов'язано з тим, що кут, який відповідає цій характеристиці відраховується від великої осі еліпса. Разом з тим обертання еліпса на кут π приводить до того ж самого еліпса, оскільки азимут поляризації визначений в межах цього кута. Тоді, вважають деякі автори, зокрема Дж. Най [3], головна фаза також визначена в межах від 0 до π . Водночас орієнтації вектора поля під кутом γ та $\gamma + \pi$ формують різні фізичні ситуації (див. рис. 4.6)

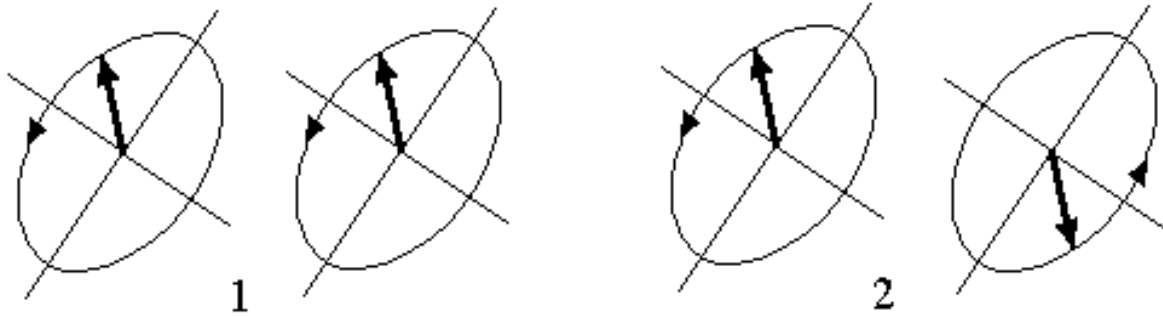


Рис. 4.6. Локалізація вектора напруженості двох хвиль.
1 – головна фаза хвиль однакова; 2 – відрізняється на π .

Спробуємо показати це аналітично. Розглянемо співвісні суперпозиції, які формуються у 1-му і 2-му випадках:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{rez} = & \vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{a} [\cos(\omega t - \Phi_{\xi i}) + \cos(\omega t - \Phi_r)] + \\ & + \cos(\omega t - \Phi_r)] + \vec{b} [\sin(\omega t - \Phi_{\xi i}) + \sin(\omega t - \Phi_r)]' \end{aligned} \quad (4.16)$$

де $i = 1, 2$, або

$$\vec{E}_{rez} = 2 \cos\left(\frac{\Phi_{\xi i} - \Phi_r}{2}\right) \left[\vec{a} \cos\left(\omega t - \frac{\Phi_{\xi i} + \Phi_r}{2}\right) + \vec{b} \sin\left(\omega t - \frac{\Phi_{\xi i} + \Phi_r}{2}\right) \right], \quad (4.17)$$

Нехай $\Phi_{\xi 1} = \Phi_r$. Тоді $\Phi_{\xi 2} = \Phi_r + \pi$. Відповідно у 1-му випадку $\vec{E}_{rez} = 2\vec{E}_1$ і $\vec{E}_{rez} = 0$ у другому.

Саме тому будемо вважати, що область визначення головної фази $0 \leq \Phi_{\xi} \leq 2\pi$ [17].

Забігаючи наперед, зауважимо, що векторна хвиля може бути представлена не тільки як суперпозиція двох ортогональних лінійно поляризованих компонент але і як суперпозиція двох будь-яких ортогональних, у тому числі і циркулярно-поляризованих, компонент.

При розкладі поля на ортогональні циркулярно поляризовані компоненти маємо:

$$\vec{E} = \vec{e}_R U_R + \vec{e}_L U_L, \quad (4.18)$$

де U_R, U_L – комплексні амплітуди електричного поля правої і лівої ортогонально поляризованих компонент; $\vec{e}_R$ і $\vec{e}_L$ – одиничні право- і лівополяризовані вектори.

Можна показати, що справедливе таке співвідношення:

$$\begin{cases} \Phi_{\xi} = \frac{\Phi_L + \Phi_R}{2} \\ \alpha = \frac{\Phi_L - \Phi_R}{2} \end{cases} \quad (4.19)$$

де Φ_L, Φ_R – фази ліво- і правоортогонально циркулярно поляризованих компонент.

Враховуючи, що область визначення фаз Φ_L, Φ_R $0, 2\pi$, будемо для однозначності вважати, що область визначення азимута поляризації $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.

4.2.3. Ортогональні форми поляризації

Відзначимо, що стани поляризації лінійні (рис. 4.1 а і б) циркулярно поляризовані (ліва і права поляризація, рис. в і г та рис 4.1 д і е) вважаються ортогональними. Суперпозиція таких хвиль формує результуюче поле, амплітудна модуляція в якому, характерна для інтерференції двох хвиль, відсутня.

Ортогональними можуть бути не тільки лінійно і циркулярно поляризовані хвилі. Такою властивістю володіють і хвилі загального типу тобто еліптично поляризовані, коли великі осі поляризаційних еліпсів з однаковою еліптичністю складають 90° .

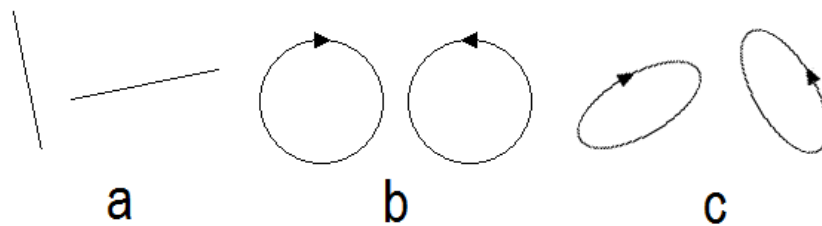


Рис. 4.7

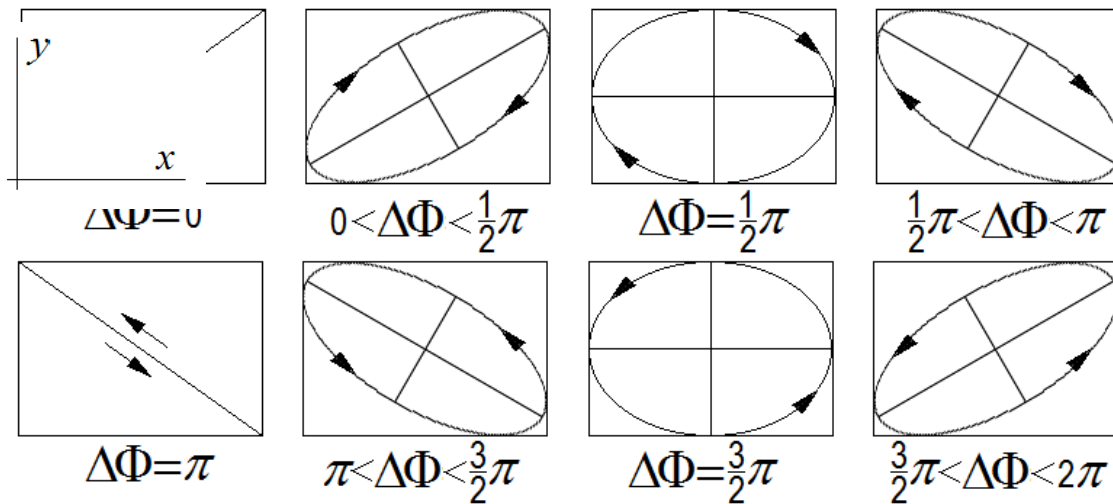
На рис. 4.7 наведені приклади траєкторій, які описують вектори напруженості поля в ортогонально поляризованих хвилях.

4.2.4. Різниця фаз між y - і x -компонентою та форма поляризаційного еліпса [1]

Форма поляризаційного еліпса його орієнтація напрямку залежить від різниці фаз між ортогональними лінійно поляризованими компонентами, отриманими при відповідному типі розкладу векторного поля (див. рис. 4.8).

При різниці фаз 0 або π хвиля поляризована лінійно. При цьому при різниці фаз, яка дорівнює 0 , площа коливання вектора поля складає з віссю x кут менше $\pi/2$, а при різниці фаз π азимут поляризації знаходиться в межах $\pi/2, \pi$.

Щодо еліптично поляризованої хвилі, то при різниці фаз від 0 до $\pi/2$ велика ось поляризаційного еліпса також орієнтована до осі x під кутом менше $\pi/2$. При різниці фаз $\pi/2$ осі еліпса за орієнтацією збігаються осями x і y . При рівності модулів амплітуд ортогональних компонент еліпс вироджується в коло. Тобто хвиля циркулярно поляризована. Хвиля циркулярно поляризована також у випадку, коли різниця фаз між компонентами $\frac{3}{2}\pi$ (або, що теж саме $-\pi/2$), при цьому модулі амплітуди компонент однакові.

Рис.
4.8

При різниці фаз $\pi/2 < \Delta\Phi < \pi$ азимут поляризації знаходиться в межах $\pi/2, \pi$.

Загальною рисою всіх випадків еліптичної поляризації при різниці фаз $0 < \Delta\Phi < \pi$ є права циркуляція напруженості поля. При різниці фаз, більшій ніж π і меншій 2π , циркуляція вектора напруженості ліва.

4.2.5. Розклад поля на циркулярно поляризовані компоненти

Знову звернемося до співвідношення (4.18)

$$\vec{E}(x, y, t) = U_R \vec{e}_R + U_L \vec{e}_L. \quad (4.18)$$

де

$$\begin{cases} U_R = A_R e^{j\Phi_R} \\ U_L = A_L e^{j\Phi_L} \end{cases} \quad (4.20)$$

комплексні амплітуди електричного поля правої і лівої ортогонально поляризованих компонент.

При цьому можна показати, що якщо результуюча хвиля $\vec{E}(x, y, t)$ поляризована лінійно, то

$$A_R = A_L. \quad (4.21)$$

Відповідно до (4.19) x - та y -компоненти поля запишуться як

$$\begin{cases} E_x = A_R e^{j\Phi_R} e_{Rx} + A_L e^{j\Phi_L} e_{Lx} \\ E_y = A_R e^{j\Phi_R} e_{Ry} + A_L e^{j\Phi_L} e_{Ly} \end{cases}, \quad (4.22)$$

де x - та y -компоненти одиничних векторів мають вигляд

$$\begin{cases} e_{Rx} = \cos\omega t \\ e_{Ry} = -\sin\omega t \end{cases} \text{ та } \begin{cases} e_{Lx} = \cos\omega t \\ e_{Ly} = \sin\omega t \end{cases}. \quad (4.23)$$

Рисунок 4.9 ілюструє поведінку одиничних векторів у різні моменти часу. Тоді компоненти можуть бути переписані у вигляді

$$\begin{cases} E_x = \text{Re}\{[A_R e^{j\Phi_R} + A_L e^{j\Phi_L}]e^{-\omega t}\} \\ E_y = \text{Re}\{j[A_R e^{j\Phi_R} - A_L e^{j\Phi_L}]e^{-\omega t}\} \end{cases} \quad (4.24)$$

або, враховуючи, що $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$, а $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$ у вигляді комплексних амплітуд

$$\begin{cases} U_x = A_R e^{j\Phi_R} + A_L e^{j\Phi_L} \\ U_y = A_R e^{j(\Phi_R + \frac{\pi}{2})} + A_L e^{-j(\Phi_L + \frac{\pi}{2})} \end{cases} \quad (4.25)$$

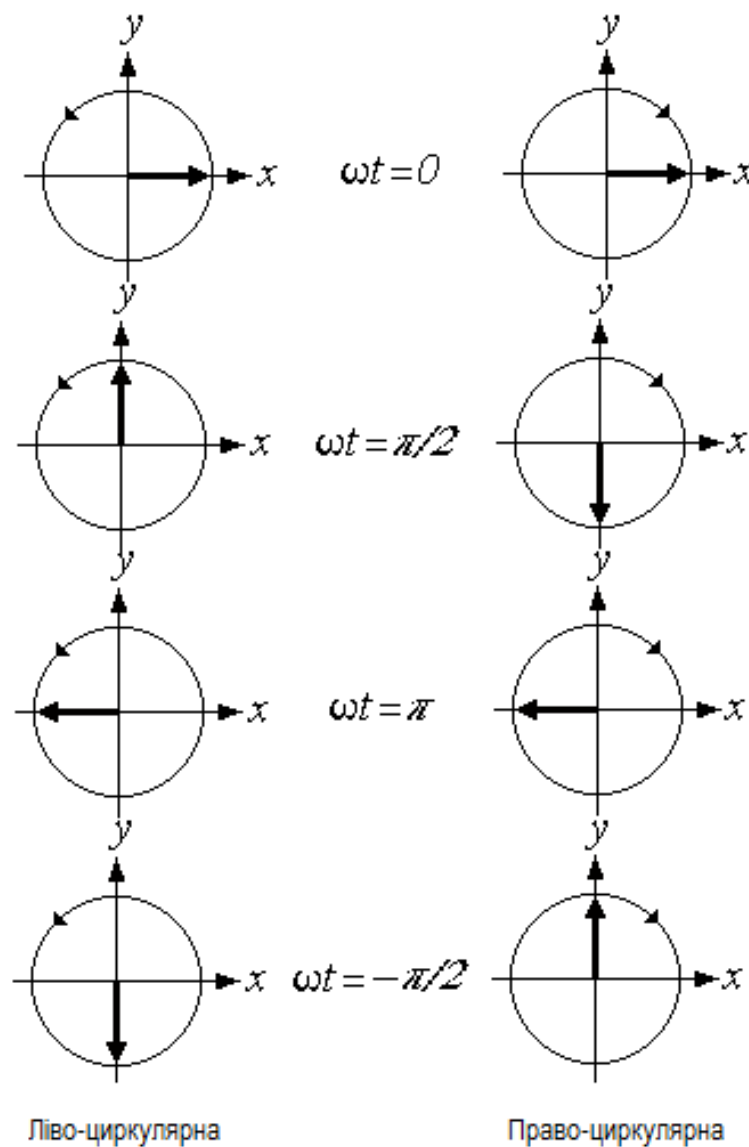


Рис. 4.9

Після відповідного перетворення маємо

$$\begin{cases} U_x = e^{j\frac{\Phi_L+\Phi_R}{2}} [A_L e^{j\frac{\Phi_L-\Phi_R}{2}} + A_R e^{-j\frac{\Phi_L-\Phi_R}{2}}] \\ U_y = e^{j\frac{\Phi_L+\Phi_R}{2}} [A_L e^{j(\frac{\Phi_L-\Phi_R}{2}+\frac{\pi}{2})} + A_R e^{-j(\frac{\Phi_L-\Phi_R}{2}+\frac{\pi}{2})}] \end{cases}, \quad (4.26)$$

враховуючи (4.19), x - та y -комплексні амплітуди запишуться як

$$\begin{cases} U_x = e^{j\Phi_\xi} [A_L e^{j\alpha} + A_R e^{-j\alpha}] \\ U_y = e^{j\Phi_\xi} [A_L e^{j(\alpha+\frac{\pi}{2})} + A_R e^{-j(\alpha+\frac{\pi}{2})}] \end{cases}. \quad (4.27)$$

У випадку лінійної поляризації $A_R = A_L = A$. Тоді

$$\begin{cases} U_x = \frac{2}{2} A e^{j\Phi_\xi} (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) = 2A \cos(\alpha) e^{j\Phi_\xi} \\ U_y = \frac{2}{2} A e^{j\Phi_\xi} (e^{j(\alpha+\frac{\pi}{2})} + e^{-j(\alpha+\frac{\pi}{2})}) = 2A \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) e^{j\Phi_\xi} = 2A \sin(\alpha) e^{j\Phi_\xi} \end{cases}. \quad (4.28)$$

Відзначимо, що $\cos \alpha \geq 0$, якщо $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, а $\sin \alpha \geq 0$, якщо $0 \leq \alpha \leq \pi$, тобто у всьому інтервалі зміни азимуту.

Тоді можна записати:

$$\begin{cases} U_x = 2A |\cos(\alpha)| e^{j\{\Phi_\xi + \pi H[\frac{\cos(\alpha)}{|\cos(\alpha)|}]\}} \\ U_y = 2A \sin(\alpha) e^{j\Phi_\xi} \end{cases}, \quad (4.29)$$

$$\text{де } H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Відповідно модулі амплітуди та фази x - та y -компонент можна записати як

$$\begin{cases} A_x = 2A |\cos(\alpha)| \\ A_y = 2A \sin(\alpha) \end{cases}, \quad (4.30a)$$

$$\begin{cases} \Phi_x = \Phi_\xi + \pi H[\frac{\cos(\alpha)}{|\cos(\alpha)|}] \\ \Phi_y = \Phi_\xi \end{cases}. \quad (4.30b)$$

На закінчення цього пункту відзначимо, що весь проведений розгляд справедливий не тільки для плоскої хвилі, але і для хвиль загального вигляду, якщо виконується параксіальне наближення. В цьому сенсі всі поляризаційні характеристики хвилі загального вигляду стосуються певної точки у просторі, тобто можна говорити про локальні поляризаційні характеристики хвилі.

Додамо, що, крім цього, при виконанні параксіального наближення хвилю загального вигляду, як і плоску хвилю, можна вважати поперечною.

4.3. Сучасні методи опису стану поляризації електромагнітної хвилі [17,18]

4.3.1. Вектор Джонса

Для аналізу і розрахунку станів поляризації, повністю поляризованих світлових пучків найбільшого поширення набув метод, розроблений американським фізиком Р.Джонсом.

Така характеристика вводилася, виходячи з таких міркувань. У випадку, коли вісь z збігається з напрямком розповсюдження плоскої монохроматичної хвилі, напруженість електричного поля, як відомо, може бути записана як:

$$\vec{E}(z, t) = [A_x \cos(\omega t + \Phi_x - kz)] \vec{x} + [A_y \cos(\omega t + \Phi_y - kz)] \vec{y}. \quad (4.31)$$

Оскільки для опису хвилі вибрані фіксовані вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$, то немає потреби зберігати їх у математичному виразі. Тому, групуючи скалярні компоненти хвилі у 2×1 , вектор стовпчик (матрицю) можна записати:

$$\vec{E}(z, t) = \begin{bmatrix} A_x \cos(\omega t + \Phi_x - kz) \\ A_y \cos(\omega t + \Phi_y - kz) \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

При цьому оскільки маємо справу із монохроматичною хвилею, то інформацію про часову залежність напруженості поля можна опустити. Окрім цього використовуючи поняття фазора (4.32), можна переписати:

$$\vec{E}(z, 0) = e^{-jkz} \vec{U} = e^{-jkz} \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \end{bmatrix} = e^{-jkz} \begin{bmatrix} A_x e^{j\Phi_x} \\ A_y e^{j\Phi_y} \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

Останній крок до відповідного опису хвилі полягає в тому, що можна опустити інформацію про просторову структуру хвилі шляхом переходу до опису поля у якійсь конкретній площині, наприклад, у площині $z = 0$. Маємо:

$$\vec{E}(0,0) = \vec{U} = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x e^{j\Phi_x} \\ A_y e^{j\Phi_y} \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

Цей вектор має назву *повного вектора Джонса*, який урешті-решт є стовпцем комплексних амплітуд двох ортогональних компонент вектора напруженості електричного поля.

4.3.2. Інтенсивність хвилі

Інтенсивність монохроматичної хвилі можна визначити за допомогою виразу

$$I = |U_x|^2 + |U_y|^2 = U_x^* U_x + U_y^* U_y. \quad (4.35)$$

В більш компактній формі інтенсивність можна отримати, домножуючи вектор Джонса на ермітово-спряжений вектор $\vec{U}^\dagger$:

$$I = \vec{U}^\dagger \vec{U}, \quad (4.36)$$

де $\vec{U}^\dagger$ – не що інше, як вектор-рядок $\vec{U}^\dagger = [U_x^* U_y^*]$.

Вектор Джонса нормованої до одиниці плоскої хвилі називають *нормальним*. Для такого випадку

$$I = \vec{U}_n^\dagger \vec{U}_n = 1. \quad (4.37)$$

4.3.3. Вектори Джонса для деяких станів поляризації

Для лінійно-поляризованої хвилі вздовж x з одиничною амплітудою та нульовою початковою фазою вектор Джонса може бути записаний як

$$U_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Для аналогічної хвилі, поляризованої вздовж y ,

$$U_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Для ліво- і право циркулярно-поляризованих хвиль з одиничною амплітудою маємо:

$$U_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}. \quad (4.40a)$$

$$U_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}. \quad (4.40b)$$

Деякі матриці Джонса та відповідні стани поляризації ілюструються рисунком 4.10.

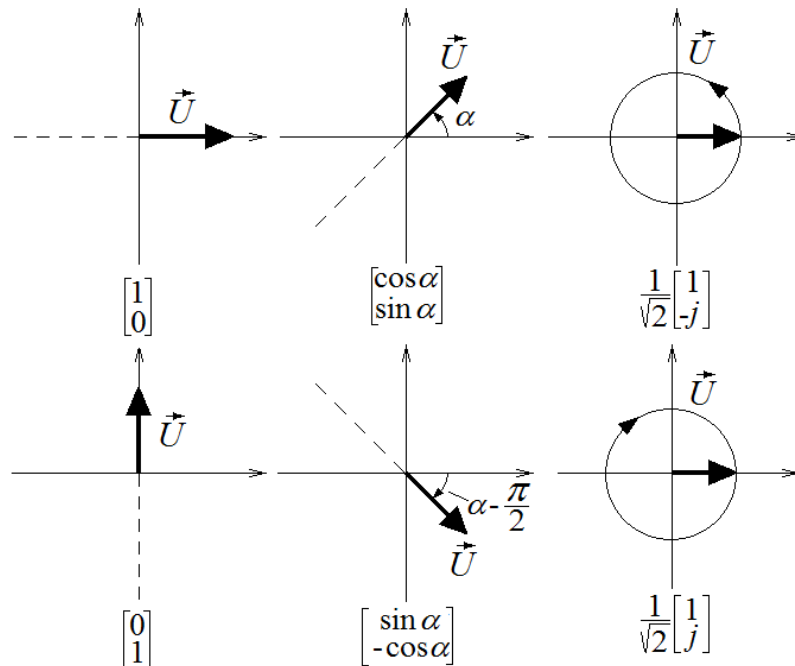


Рис. 4.10

4.3.4. Перетворення вектора Джонса при повороті системи координат (навколо осі z)

Перед тем як привести співвідношення для вектора Джонса при повороті системи координат, наведемо вираз для вектора при паралельному переносі (вздовж осі z):

$$\vec{U}(z) = e^{-jkz} \vec{U}(0). \quad (4.41)$$

Дуже легко показати, що при повороті системи координат навколо осі z (див. рис. 4.11) компоненти $\vec{U}$ зміняться так:

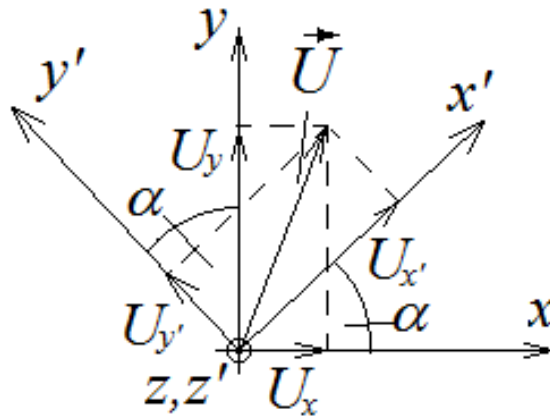


Рис. 4.11

$$\begin{cases} U_{x'} = (\cos\alpha)U_x + (\sin\alpha)U_y \\ U_{y'} = (-\sin\alpha)U_x + (\cos\alpha)U_y \end{cases} \quad (4.42)$$

Або у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} U_{x'} \\ U_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \end{bmatrix}. \quad (4.43a)$$

$$\vec{U}_{x',y'} = \vec{R}(\alpha) \vec{U}_{x,y}. \quad (4.43b)$$

де $\vec{R}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ – матриця повороту.

Така матриця має властивості:

$$\begin{aligned} \vec{R}^{-1}(\alpha) &= \vec{R}^\dagger(\alpha) = \vec{R}(-\alpha) \\ \vec{R}(\alpha_1) \vec{R}(\alpha_2) &= \vec{R}(\alpha_1 + \alpha_2) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Додатково відзначимо, що інтенсивність хвилі інваріантна відносно повороту системи координат:

$$I_{x',y'} = I_{x,y}. \quad (4.45)$$

На завершення цього пункту відзначимо, що вектор Джонса може бути введений не тільки для монохроматичної, а й для квазімонохроматичної хвилі, якщо час аналізу достатньо малий і змінами амплітуди та фаз компонент можна нехтувати.

4.3.5. Представлення поляризованого світла комплексними числами

Введемо параметр χ :

$$\chi = \frac{U_x}{U_y}. \quad (4.46)$$

Або в іншому вигляді

$$\chi = \frac{|U_x|}{|U_y|} e^{j(\Phi_x - \Phi_y)}. \quad (4.47)$$

Вираз (4.47) відображає той факт, що еліпс поляризації повністю визначається відносною амплітудою і відносною фазою однієї з осцилюючих компонент по відношенню до іншої.

Можна показати, що:

$$\chi = \frac{\operatorname{tg} \alpha + j \operatorname{tg} \beta}{1 - j \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad (4.48)$$

де α – азимут поляризації; β – кут еліптичності (еліптичність $e = \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \beta$).

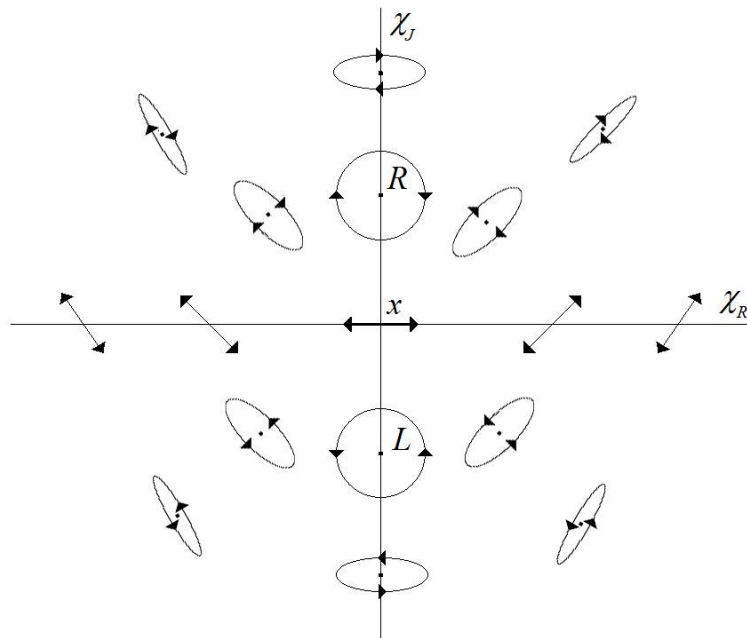


Рис. 4.12

Отже, будь-який поляризаційний стан монохроматичної хвилі із азимутом α та кутом еліптичності β можна охарактеризувати одним комплексним числом χ . При цьому кожному такому комплексному числу χ можна покласти у відповідність точку комплексної площини.

1. Початок координат $\chi = 0$ та нескінченно віддалена точка $\chi = \infty$ являють собою лінійно поляризовані стани в напрямках осі x (горизонтальну) та осі y (вертикальну).
2. Дві точки на уявній осі $R(\chi = j)$ і $L(\chi = -j)$ відповідають станам правої і лівої циркулярної поляризації.
3. Розподіл решти станів поляризації ілюструється рис. 4.12

4.3.6. Представлення поляризованого світла точками на сфері Пуанкаре

Наочно та дуже просто представляти стан поляризації за допомогою сфери Пуанкаре (див. рис. 4.13).

1. «Південний» і «північний» полюси сфери відповідають лівій і правій циркулярним поляризаціям.
2. Кожна точка на «екваторі» сфери відповідає певному стану лінійної поляризації.
3. Всі інші точки сфери ілюструють стани еліптичної поляризації. Вище екватора – права поляризація, нижче – ліва.
4. Криві постійного азимута α утворюють родину напівкіл (ліній довготи), які проходять через північний і південний полюси. Кутова довгота дорівнює значенню подвійного азимутального кута.

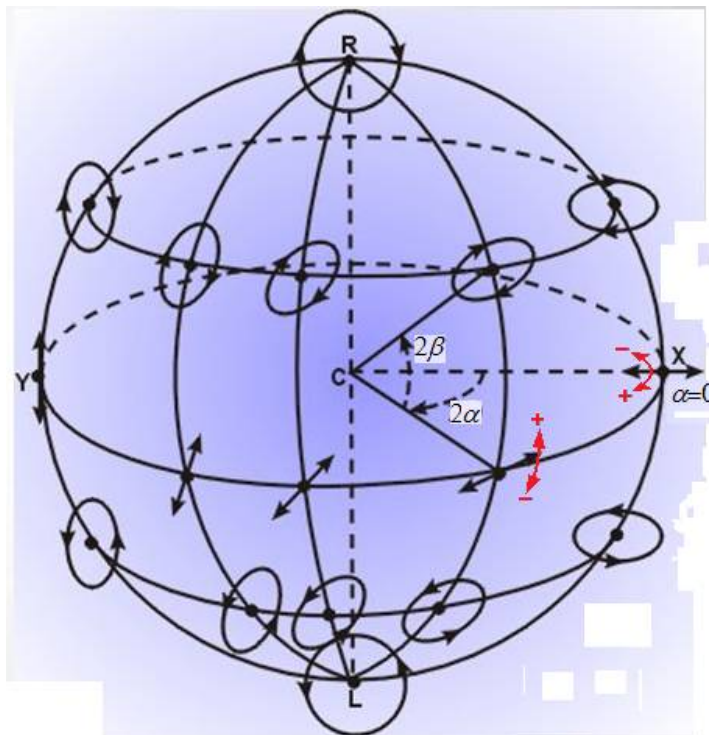


Рис. 4.13

5. Криві постійної еліптичності являють собою родину коаксіальних кіл (широт), загальною віссю яких є полярна ось, що з'єднує полюси сфери. Широта у кожній точці сфери дорівнює подвійному куту еліптичності. Лінії широт вочевидь ортогональні лініям довготи (лініям постійного азимуту)

4.3.7. Параметри Стокса

Різні стани поляризації квазімонохроматичної (або монохроматичної) плоскої хвилі можна представляти за допомогою 4-х дійсних величин, які мають назву параметрів Стокса. Зазвичай їх позначають чотирма літерами S_0, S_1, S_2, S_3 та визначають за допомогою співвідношень:

$$\begin{aligned} S_0 &= \langle E_x^2(t) \rangle + \langle E_y^2(t) \rangle \\ S_1 &= \langle E_x^2(t) \rangle - \langle E_y^2(t) \rangle \\ S_2 &= 2 \langle E_x(t) E_y(t) \cos[\Phi_y(t) - \Phi_x(t)] \rangle \\ S_3 &= 2 \langle E_x(t) E_y(t) \sin[\Phi_y(t) - \Phi_x(t)] \rangle, \end{aligned} \quad (4.49)$$

де $\langle \rangle$ – усереднення за часом. При цьому інтервал часу, за яким проводиться усереднення, повинен бути достатньо великим, щоб не виникала залежність (4.46) від величини цього інтервалу.

Як бачимо, вимірювання параметрів Стокса можна здійснити на основі вимірювання таких інтенсивностей $I_x, I_y, I_{\pi/4}, I_{-\pi/4}, I_R, I_L$, де I_x, I_y – інтенсивності ортогональних x - та y -компонент, $I_{\pi/4}, I_{-\pi/4}$ – відповідно інтенсивності лінійно поляризованих хвиль, отриманих при проходженні хвилі через ідеальний поляризатор з віссю орієнтованою під кутами $+45^\circ$ і -45° до осей x та y . I_R, I_L – інтенсивності право- і лівополяризованого світла, які можна отримати за допомогою циркулярного поляризатора.

У цьому випадку параметри Стокса визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} S_0 &= I_0 = I_x + I_y = I_{\pi/4} + I_{-\pi/4} = I_R + I_L \\ S_1 &= I_x - I_y \\ S_2 &= I_{\pi/4} - I_{-\pi/4} \\ S_3 &= I_R - I_L \end{aligned} \quad (4.50)$$

Параметри Стокса можна згрупувати у 4×1 вектор-стовпчик:

$$\vec{S} = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}, \quad (4.51)$$

або для економії місця такий вектор часто записують горизонтально у фігурних дужках, а його елементи розділяють за допомогою коми:

$$\vec{S} = \{S_0, S_1, S_2, S_3\}. \quad (4.52)$$

Природно, що для неполяризованого світла, для якого немає переважної поляризації, всі параметри Стокса, за винятком 1-го, нульові і відповідно вектор Стокса для такого світла має вигляд

$$\vec{S}_{\text{непол}} = \{S_0, 0, 0, 0\}. \quad (4.53)$$

Треба відзначити, що лише три параметри з чотирьох незалежні, тому дуже часто користуються так званими нормованими параметрами Стокса, які визначаються зі співвідношення:

$$s_i = S_i/S_0, \quad s_0 = 1. \quad (4.54)$$

Легко показати, що для повністю поляризованого світла має місце таке:

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2. \quad (4.55)$$

Для частково поляризованого світла маємо

$$S_0^2 \geq S_1^2 + S_2^2 + S_3^2. \quad (4.56)$$

або у вигляді нормованих параметрів

$$\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} \leq 1. \quad (4.57)$$

Ступінь поляризації визначається як

$$V = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0}, \quad (4.58a)$$

або

$$V = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}. \quad (4.58b)$$

4.3.8. Локальні параметри Стокса [5,6]

Відзначимо, що параметри Стокса можуть бути введені і для хвилі загального вигляду. Для такої хвилі поле поляризоване у кожній точці. Разом з тим стан поляризації змінюється при переході від точки до точки. В цьому сенсі будемо говорити про так звані *локальні параметри Стокса*.

Природно, що можна розглядати і певні усереднені за площею параметри Стокса:

$$\bar{\mathbf{S}} = \{\bar{S}_0, \bar{S}_1, \bar{S}_2, \bar{S}_3\}. \quad (4.59)$$

Відповідно, для певних ситуацій усереднені параметри Стокса можуть бути дуже подібні до параметрів, які описують неполяризовану плоску хвилю:

$$\bar{\mathbf{S}} = \{\bar{S}_0, 0, 0, 0\}. \quad (4.60)$$

Тоді кажуть про «інтегральну» *деполяризацію* хвилі. Аналогічно можна вводити термін *часткової інтегральної деполяризації* (або *часткової інтегральної поляризації*) хвилі загального вигляду.

4.3.9. Матриця когерентності

Одне з найбільш відомих представлень поляризації казімонохроматичних полів ґрунтується на матриці когерентності. 2х2 матриця когерентності визначається через декартів 2х1 вектор Джонса так

$$\mathbf{J} = \langle \vec{E}_{x,y}(t) \times \vec{E}_{x,y}^\dagger(t) \rangle = \begin{bmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_y E_x^* \rangle & \langle E_y E_y^* \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix}, \quad (4.61)$$

де E_i – напруженості електричного поля; $\times$ – простий добуток напруженості поля, відповідний на ермітово-спряжений вектор; $i = x, y$.

Діагональні елементи матриці J_{xx} та J_{yy} – дійсні величини і є не чим іншим, як інтенсивністю ортогональних компонент. Повна інтенсивність хвилі дорівнює сліду матриці $\mathbf{J}$:

$$I = \langle E_x E_x^* \rangle + \langle E_y E_y^* \rangle = J_{xx} + J_{yy} = \text{Sp} \mathbf{J}. \quad (4.62)$$

Недіагональні елементи J_{xy} та J_{yx} визначають взаємну кореляцію між x - та y -компонентами електричного вектора. Ці елементи комплексно спряжені. Тому матриця когерентності ермітова (тобто $\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{J}$).

Нормована функція когерентності визначається так

$$\mu_{x,y} = \frac{J_{xy}}{\sqrt{J_{xx} + J_{yy}}}. \quad (4.63)$$

Внаслідок нерівності Шварца [19] модуль функції $\mu_{x,y}$ обмежений, а детермінант матриці когерентності має додатну дійсну величину

$$|\mu_{x,y}| \leq 1, \\ \det(\vec{J}) = J_{xx} J_{yy} - J_{xy} J_{yx} = J_{xx} J_{yy} (1 - |\mu_{x,y}|^2) > 0. \quad (4.64)$$

При цьому граничні випадки неполяризованого і повністю поляризованого світла характеризуються такими величинами $|\mu_{x,y}|$:

$$\text{Неполяризоване світло} - |\mu_{x,y}| = 0. \quad (4.65a)$$

$$\text{Повністю поляризоване (когерентне світло)} - |\mu_{x,y}| = 1. \quad (4.65b)$$

Досить просто показати, що параметри Стокса можуть бути виражені через елементи матриці когерентності:

$$\begin{aligned} S_0 &= J_{xx} + J_{yy} \\ S_1 &= J_{xx} - J_{yy} \\ S_2 &= J_{xy} + J_{yx} \\ S_3 &= -j(J_{xy} - J_{yx}) \end{aligned} \quad (4.66)$$

У матричній формі (4.63) має вигляд:

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -j & j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{xx} \\ J_{xy} \\ J_{yx} \\ J_{yy} \end{bmatrix}, \quad (4.67)$$

або

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}\mathbf{J}, \quad (4.68)$$

де $\mathbf{J}$ – вектор когерентності, компоненти якого збігаються з елементами матриці когерентності.

Ступінь поляризації хвилі може бути обчислений за співвідношенням

$$V = \left\{ 1 - \frac{4\det(\mathbf{J})}{[\text{Sp}(\mathbf{J})]^2} \right\}^{1/2}. \quad (4.69)$$

Відзначимо, що у випадку, коли хвиля повністю когерентна, операція усереднення нівелюється і $\langle E_i E_i^* \rangle = U_i U_i^*$

Відповідно

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} U_x U_x^* & U_x U_y^* \\ U_y U_x^* & U_y U_y^* \end{bmatrix}. \quad (4.70)$$

4.3.10. Спеціальні випадки

Наведемо характерні матриці когерентності для спеціальних типів поляризації хвилі.

Світло, поляризоване вздовж осі x :

$$\mathbf{J} = I \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.71)$$

Світло, лінійно поляризоване з азимутом α :

$$\mathbf{J} = I \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}. \quad (4.72)$$

Право (ліво) циркулярно поляризоване світло:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} I \begin{bmatrix} 1 & \pm j \\ \mp j & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.73)$$

Довільно еліптично поляризована хвиля із азимутом α і кутом еліптичності β :

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} I \begin{bmatrix} (1 + \cos 2\alpha \cos 2\beta) & (\sin 2\alpha \cos 2\beta - j \sin 2\beta) \\ (\sin 2\alpha \cos 2\beta + j \sin 2\beta) & (1 - \cos 2\alpha \cos 2\beta) \end{bmatrix}. \quad (4.74)$$

Неполяризоване світло:

$$J = I \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.75)$$

Для частково поляризованого світла виконується таке:

$$J = J_{nonpol} + J_{pol}. \quad (4.76)$$

Домножуючи (4.74) на ступінь поляризації V та (4.75) на ступінь «деполяризації» $1 - V$ та складаючи згідно із (4.76) маємо:

$$J = \frac{1}{2} I \begin{bmatrix} (1+V\cos 2\alpha \cos 2\beta) & V(\sin 2\alpha \cos 2\beta - j \sin 2\beta) \\ V(\sin 2\alpha \cos 2\beta + j \sin 2\beta) & (1-V\cos 2\alpha \cos 2\beta) \end{bmatrix}. \quad (4.77)$$

На закінчення цього пункту констатуємо, що матриця когерентності може бути записана для будь-яких способів декомпозиції векторної хвилі, зокрема при розкладі поля на ортогональні циркулярно-поляризовані компоненти:

$$J = \begin{bmatrix} \langle E_R E_R^* \rangle & \langle E_R E_L^* \rangle \\ \langle E_L E_R^* \rangle & \langle E_L E_L^* \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{RR} & J_{RL} \\ J_{LR} & J_{LL} \end{bmatrix}, \quad (4.78)$$

4.4. Розповсюдження поляризованого світла через поляризуючі оптичні системи [17]

4.4.1. Формалізм матриці Джонса

Розглянемо однорідну монохроматичну плоску хвилю, яка надходить на вхід недеполяризуючої оптичної системи. В результаті взаємодії хвилі із системою на її виході утворюється одна або декілька модифікованих плоских хвиль. На рис. 4.14 зображена принципова схема оптичної системи, падаюча хвиля та одна з модифікованих плоских хвиль.

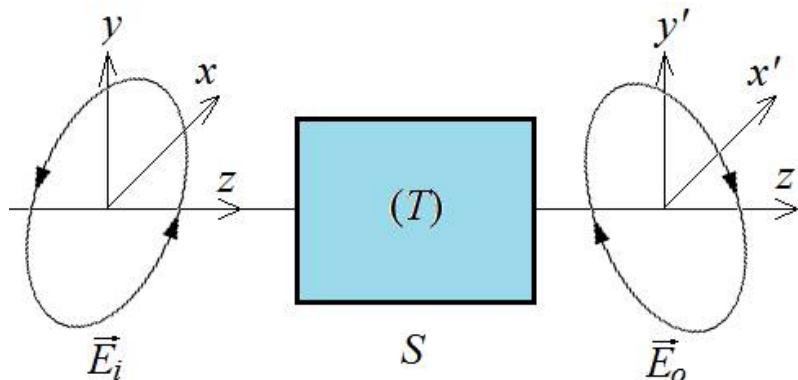


Рис. 4.14.

Падаюча та вихідна з оптичної системи S плоскі хвилі характеризуються векторами Джонса $\vec{E}_i$ та $\vec{E}_o$, що віднесені до декартових систем координат (x, y, z) і (x', y', z') на вході та виході системи. $\vec{E}_o = (T)\vec{E}_i$, де (T) – матриця Джонса для системи S .

Дві фіксовані у просторі правобічні системи координат (x, y, z) і (x', y', z') пов'язані із вхідною і вихідною хвилями. Напрямки осей z і z' паралельні хвильовим векторам $\vec{k}$ і $\vec{k}'$. При цьому вектори $\vec{k}$ і $\vec{k}'$ можуть бути непаралельними.

Нехай вхідна та вихідна хвилі описуються векторами Джонса $\vec{E}_i$ та $\vec{E}_o$ відповідно. Ці вектори узгоджені із системами координат (x, y, z) і (x', y', z') (осі x, y і x', y' можуть бути по-різному зорієнтовані).

За відсутності нелінійності та інших процесів, що приводять до зміни частоти коливання світла, пара коливань $E_{ox'}$ і $E_{oy'}$ та пара вхідних коливань E_{ix} і E_{iy} пов'язані такими лінійними співвідношеннями:

$$\begin{cases} E_{ox'} = T_{11}E_{ix} + T_{12}E_{iy} \\ E_{oy'} = T_{21}E_{ix} + T_{22}E_{iy} \end{cases} \quad (4.79)$$

Перше і друге рівняння можуть бути об'єднані в одне, записане у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} E_{ox'} \\ E_{oy'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ix} \\ E_{iy} \end{bmatrix}. \quad (4.80)$$

Або ще коротше

$$\vec{E}_o = \mathbf{T} \vec{E}_i, \quad (4.81)$$

де

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.82)$$

Співвідношення (4.81) відображає закон взаємодії падаючої хвилі з оптичною системою у вигляді простого лінійного матричного перетворення вектора Джонса цієї хвилі.

Матриця (4.82) має назву матриці Джонса оптичної системи.

Ця матриця залежить від:

1. Самої оптичної системи;
2. Частоти падаючої хвилі (процеси, які змінюють поляризацію вхідної хвилі у загальному випадку є дисперсійними);
3. Орієнтації оптичної системи відносно падаючої хвилі;
4. Розташування опорних координатних площин $z = 0$ та $z' = 0$ на вході і виході системи;
5. Азимутальної орієнтації осей x, y і x', y' відносно хвильових векторів вхідної і вихідної хвилі;
6. Даної вихідної оптичної хвилі, якщо вона не одна.

4.4.2. Значення елементів T_{ij} матриці Джонса

Якщо на вхід системи поступає хвиля, яка лінійно поляризована відносно осі x , то з (4.79) випливає, що:

$$\begin{aligned} T_{11} &= \left. \frac{E_{ox'}}{E_{ix}} \right|_{E_{iy}=0} \\ T_{21} &= \left. \frac{E_{oy'}}{E_{ix}} \right|_{E_{iy}=0} \end{aligned} \quad (4.83)$$

Якщо на вхід системи знаходить хвиля, яка лінійно поляризована відносно осі y то

$$\begin{aligned} T_{12} &= \left. \frac{E_{ox'}}{E_{iy}} \right|_{E_{ix}=0} \\ T_{22} &= \left. \frac{E_{oy'}}{E_{iy}} \right|_{E_{ix}=0} \end{aligned} \quad (4.84)$$

Діагональні елементи T_{11} та T_{21} визначаються картою «подібності» вхідних і вихідних поляризацій. Недіагональні елементи T_{12} та T_{22} визначаються картою «перехресних» вхідних і вихідних поляризацій.

4.4.3. Послідовність оптичних систем

Нехай вхідна хвиля проходить через послідовність оптичних систем, як показано на рис. 4.15

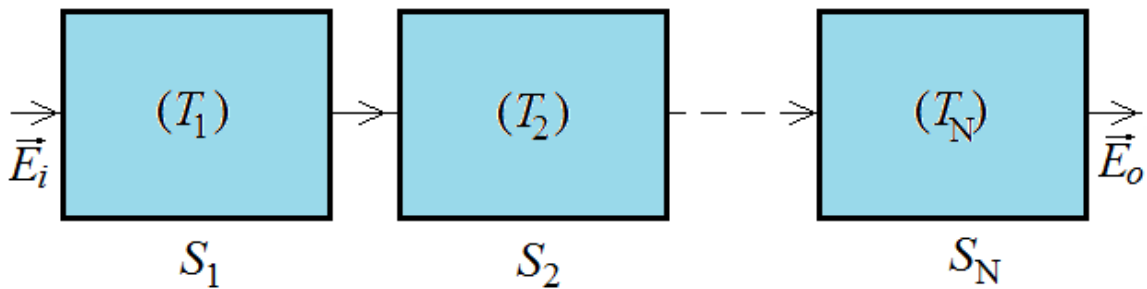


Рис. 4.15

Послідовно розглядаючи проходження хвилі через проміжні підсистеми, досить легко показати, що вихідна хвиля описується співвідношенням

$$\vec{E}_o = \mathbf{T}_c \vec{E}_1 = (\prod_{i=1}^N \mathbf{T}_i) \vec{E}_1, \quad (4.85)$$

де

$$\mathbf{T}_c = (\prod_{i=1}^N \mathbf{T}_i) \quad (4.86)$$

матриця Джонса комбінованої системи.

4.4.4. Матриці Джонса «основних» оптичних пристроїв

Наведемо без доведення характерні матриці Джонса деяких оптичних систем.

4.4.4.1. Пристрої, які працюють на пропускання

1. Матриця ділянки вільного простору (однорідного ізотропного середовища) товщиною d і показником заломлення n

$$\begin{bmatrix} E_{ox} \\ E_{oy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j2\pi nd/\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-j2\pi nd/\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ix} \\ E_{iy} \end{bmatrix}. \quad (4.87)$$

2. Матриця фазообертаючої пластинки (типу пластинки $\lambda/4$ із коефіцієнтом затухання τ) товщиною d і показниками заломлення n_o (звичайний) та n_e (незвичайний):

$$\begin{bmatrix} E_{ox} \\ E_{oy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j2\pi d(n-j\tau)/\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-j2\pi d(n-j\tau)/\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ix} \\ E_{iy} \end{bmatrix}. \quad (4.88)$$

Для пластинки без поглинання маємо:

$$\begin{bmatrix} E_{ox} \\ E_{oy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j2\pi n_o d/\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-j2\pi n_e d/\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{ix} \\ E_{iy} \end{bmatrix}. \quad (4.89)$$

3. Матриця одновісного лінійного діхроїчного середовища, в якій відбувається затухання лінійно-поляризованої хвилі, якщо її розповсюдження відбувається у напрямку, перпендикулярному до оптичної осі. Поглинання максимальне для коливань, паралельних оптичній осі, і мінімальне для коливань перпендикулярних осі.

$$\mathbf{T} = e^{-j2\pi nd/\lambda} \begin{bmatrix} e^{-2\pi d\tau_e/\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi d\tau_o/\lambda} \end{bmatrix}, \quad (4.90)$$

де $e^{-j2\pi nd/\lambda}$ визначає ізотропну затримку по фазі; τ_o, τ_e – «звичайний» і «незвичайний» коефіцієнти поглинання відповідно.

Частковий випадок – ідеальний лінійний поляризатор ($\tau_o = \infty, \tau_e = 0$)

$$\mathbf{T} = e^{-j2\pi nd/\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.91)$$

4. Середовище, яке володіє оптичною активністю (може обертати площину поляризації)

$$\mathbf{T} = e^{-j2\pi nd/\lambda} \begin{bmatrix} \cos(\alpha d) & \sin(\alpha d) \\ -\sin(\alpha d) & \cos(\alpha d) \end{bmatrix} = e^{-j2\pi nd/\lambda} \mathbf{R}(\alpha d), \quad (4.92)$$

де α – кут повороту великої осі еліпса поляризації на одиницю довжини; $\mathbf{R}(\alpha d)$ – матриця обертання.

4.4.4.2. Пристрої, які працюють на відбивання

Основна відмінність від попереднього випадку – стрибкоподібна зміна поляризаційних характеристик (див. рис. 4.16). У попередньому випадку зміни відбуваються неперервно протягом d .

Напрямки p і s лежать у площині, перпендикулярній до напрямку розповсюдження (p паралельно, а s перпендикулярно площині падіння)

У такому випадку вхідна та вихідна хвилі пов'язані співвідношенням

$$\vec{E}_r = \mathbf{R} \vec{E}_i, \quad (4.93)$$

де матриця Джонса для відбивання $\mathbf{R}$ має вигляд

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{pp} & 0 \\ 0 & R_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |R_{pp}| e^{j\Delta\Phi_{pp}} & 0 \\ 0 & |R_{ss}| e^{j\Delta\Phi_{ss}} \end{bmatrix}. \quad (4.94)$$

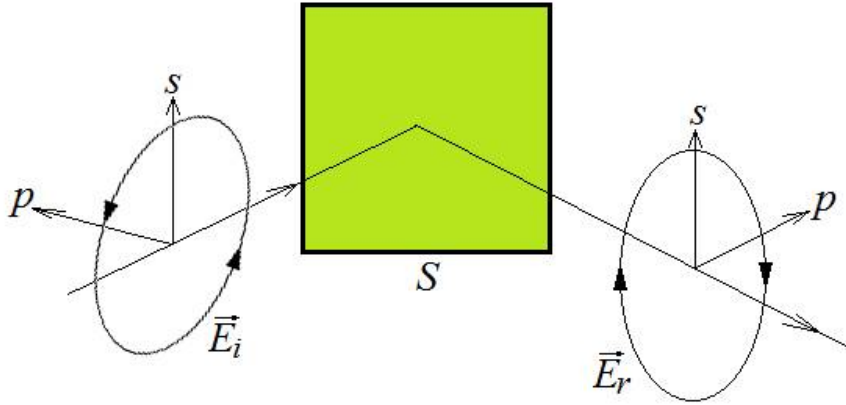


Рис. 4.16

Якщо виконується умова повного внутрішнього відбивання $|R_{pp}| = |R_{ss}| = 1$, а величини $\Delta\Phi_{pp}, \Delta\Phi_{ss}$ залежать від співвідношення між діелектричними проникностями (показниками заломлення) межуючих середовищ.

4.4.5. Перетворення декартової матриці Джонса при повороті системи координат

Якщо системи координат на вході і на виході системи повертаються на один і той самий кут α в одному й тому самому напрямку (якщо дивитися проти напрямку розповсюдження), то

$$\mathbf{T}_e = \mathbf{R}(\alpha) \mathbf{T}_0 \mathbf{R}(-\alpha). \quad (4.95)$$

У випадку ідеального лінійного поляризатора, у якого осі x і x' на вході і виході паралельні осі пропускання поляризатора, а осі y і y' спрямовані вздовж осі поглинання, кінцева матриця має вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_e &= e^{-j2\pi nd/\lambda} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \\ &= e^{-j2\pi nd/\lambda} \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) & \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \cos(\alpha) & \sin^2(\alpha) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.96)$$

4.4.6. Кругова матриця Джонса

Якщо розкласти хвилю на ортогонально циркулярно-поляризовані компоненти, то можна ввести кругову матрицю Джонса

$$\vec{E}_{l',r'}^o = \mathbf{T}_{kr} \vec{E}_{l,r}^i, \quad (4.97)$$

де $\vec{E}_{l,r}^i$ та $\vec{E}_{l',r'}^o$ – кругові вектори Джонса на вході і виході системи.

Зв'язок між декартовою та круговою матрицями Джонса описується співвідношенням

$$T_{kr} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11}^{dek} & T_{12}^{dek} \\ T_{21}^{dek} & T_{22}^{dek} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix}. \quad (4.98)$$

4.4.7. Виділення інформації про еліпс поляризації при використанні формалізму матриці Джонса. Поляризаційна передаточна функція

Як впливає зі співвідношення (4.46), вхідну та вихідну хвилі можна характеризувати комплексними числами:

$$\chi_i = \frac{E_{iy}}{E_{ix}}, \quad \chi_o = \frac{E_{oy'}}{E_{ox'}}. \quad (4.99)$$

Використовуючи співвідношення (4.79), можна показати, що

$$\chi_o = \frac{E_{oy'}}{E_{ox'}} = \frac{T_{21}E_{ix} + T_{22}E_{iy}}{T_{11}E_{ix} + T_{12}E_{iy}} = \frac{T_{22}\chi_i + T_{21}}{T_{12}\chi_i + T_{11}}. \quad (4.100)$$

Величину $\chi_o = f(\chi_i)$ називають поляризаційно передаточною функцією.

4.5. Розповсюдження частково поляризованого квазімонохроматичного світла через деполяризуючі оптичні системи. Формалізм матриці Мюллера [17]

Розглянемо умовно найбільш загальний випадок розповсюдження частково поляризованого квазімонохроматичного світла через оптичну систему, яка зменшує ступінь поляризації світла. Відзначимо, що ані формалізм матриці Джонса, ані формалізм матриці когерентності для цього не підходять, оскільки детермінована матриця Джонса не може бути застосована для опису взаємодії хвилі з деполяризуючою оптичною системою.

Розглянемо більш потужний в цьому сенсі формалізм матриці Мюллера. Формалізм матриці Мюллера оснований на аналізі трансформації вектора Стокса. Система, через яку проходить світло (в загальному випадку деполяризуюча), представляється як матриця 4x4 елементи. Всі елементи матриці дійсні числа. Зазвичай матрицю зображають у такому вигляді:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix}. \quad (4.101)$$

Результат взаємодії світла із системою можна отримати простим множенням вхідного Стокс-вектора на таку матрицю.

$$\mathbf{S}_o = \mathbf{M}\mathbf{S}_i. \quad (4.102)$$

Або в розгорнутому вигляді:

$$\begin{bmatrix} S_{o0} \\ S_{o1} \\ S_{o2} \\ S_{o3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{i0} \\ S_{i1} \\ S_{i2} \\ S_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}S_{i0} & f_{12}S_{i1} & f_{13}S_{i2} & f_{14}S_{i3} \\ f_{21}S_{i0} & f_{22}S_{i1} & f_{23}S_{i2} & f_{24}S_{i3} \\ f_{31}S_{i0} & f_{32}S_{i1} & f_{33}S_{i2} & f_{34}S_{i3} \\ f_{41}S_{i0} & f_{42}S_{i1} & f_{43}S_{i2} & f_{44}S_{i3} \end{bmatrix}. \quad (4.103)$$

Якщо маємо систему, яка складається з кількох підсистем, то вихідний результат може бути отриманий в результаті такої процедури:

$$\mathbf{S}_o = \mathbf{M}_s \mathbf{S}_i, \quad (3) \quad \text{де } \mathbf{M}_s = \mathbf{M}_N \mathbf{M}_{N-1} \dots \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1. \quad (4.104)$$

4.5.1. Приклад застосування формалізму матриці Мюллера (ФММ). Розрахунок значення членів матриці

Нехай маємо недеполяризуючу систему, на яку падає (в загальному випадку змінна у часі) хвиля $\mathbf{E}_i(t)$. Природно, що формалізм матриці Мюллера годиться і в цьому випадку.

Згідно із формалізмом матриці Джонса, на виході системи маємо

$$\mathbf{E}_o(t) = \mathbf{T} \mathbf{E}_i(t). \quad (4.105)$$

Домножимо праву і ліву частини (1.105) на комплексно-спряжені величини та проведемо усереднення за часом

$$\langle \mathbf{E}_o(t) \times \mathbf{E}_o^*(t) \rangle = \langle \mathbf{T} \mathbf{E}_i(t) \times \mathbf{T}^* \mathbf{E}_i^*(t) \rangle = (\mathbf{T} \times \mathbf{T}^*) \langle \mathbf{E}_i(t) \times \mathbf{E}_i^*(t) \rangle. \quad (4.106)$$

При отриманні кінцевого результату використана матрична тотожність

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{CD} = (\mathbf{A} \times \mathbf{C})(\mathbf{B} \times \mathbf{D}).$$

При усередненні, враховуючи, що

$$\mathbf{J}_m = \langle \mathbf{E}_m(t) \times \mathbf{E}_m^*(t) \rangle = \begin{bmatrix} J_{mxx} \\ J_{mxy} \\ J_{myx} \\ J_{myy} \end{bmatrix}, \quad (4.107)$$

отримаємо вихідний вектор когерентності

$$\mathbf{J}_o = (\mathbf{T} \times \mathbf{T}^*) \mathbf{J}_i. \quad (4.108)$$

З попередніх лекцій відомо, що параметри Стокса лінійно пов'язані з компонентами матриці когерентності. У матричній формі цей зв'язок має вигляд

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -j & j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{xx} \\ J_{xy} \\ J_{yx} \\ J_{yy} \end{bmatrix}. \quad (4.109a)$$

Або у скороченій формі

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}\mathbf{J}. \quad (4.109b)$$

Очевидно, що (4.109b) може бути модифіковане до вигляду

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{S} = \mathbf{J}. \quad (4.109c)$$

З (5.108) маємо

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{S}_o = (\mathbf{T} \times \mathbf{T}^*)(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{S}_i). \quad (4.110)$$

Звідки

$$\mathbf{S}_o = [\mathbf{A}(\mathbf{T} \times \mathbf{T}^*)\mathbf{A}^{-1}]\mathbf{S}_i. \quad (4.111)$$

Або

$$\mathbf{S}_o = \mathbf{M}\mathbf{S}_i, \quad (4.112)$$

де

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}(\mathbf{T} \times \mathbf{T}^*)\mathbf{A}^{-1}. \quad (4.113)$$

Отже, матрицю Мюллера для недеполяризуючої системи можна вирахувати за допомогою (4.113). При цьому з 16 елементів матриці лише 7 незалежні. Для деполаризуючої системи вираз (4.110) не може бути застосований, оскільки для цього випадку матриця Джонса $\mathbf{T}$ не визначена. У цьому випадку всі 16 елементів можуть бути незалежними.

Виконуючи матричне множення в (4.113), маємо

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(E_1 + E_2 + E_3 + E_4) & \frac{1}{2}(E_1 - E_2 - E_3 + E_4) & F_{13} + F_{42} & -G_{13} - G_{42} \\ \frac{1}{2}(E_1 - E_2 + E_3 - E_4) & \frac{1}{2}(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) & F_{13} - F_{42} & -G_{13} + G_{42} \\ F_{14} + F_{32} & F_{14} - F_{32} & F_{12} + F_{34} & -G_{12} + G_{34} \\ G_{14} + G_{32} & G_{14} - G_{32} & G_{12} + G_{34} & F_{12} - F_{34} \end{bmatrix}, \quad (4.114)$$

де

$$\begin{aligned} E_i &= T_i T_i^* = |T_i|^2, \quad i=1,2,3,4 \\ F_{ij} &= F_{ji} = \operatorname{Re}(T_i T_j^*) = \operatorname{Re}(T_j T_i^*), \quad i,j=1,2,3,4 \\ G_{ij} &= -G_{ji} = \operatorname{Im}(T_i T_j^*) = -\operatorname{Im}(T_j T_i^*), \quad i,j=1,2,3,4 \end{aligned} \quad (4.115)$$

Для простоти в (4.114) та (4.115) замість величин $T_{11}, T_{22}, T_{12}, T_{21}$ використані позначення T_1, T_2, T_3, T_4 .

4.5.2. Експериментальне визначення елементів матриці Мюллера

Нагадаємо:

1. Матриця Мюллера однозначно характеризує оптичну систему.
2. В загальному випадку всі 16 елементів незалежні.
3. У матричному вигляді процес перетворення вектора Стокса описується співвідношенням

$$\begin{bmatrix} S_{o0} \\ S_{o1} \\ S_{o2} \\ S_{o3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{i0} \\ S_{i1} \\ S_{i2} \\ S_{i3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}S_{i0} + f_{12}S_{i1} + f_{13}S_{i2} + f_{14}S_{i3} \\ f_{21}S_{i0} + f_{22}S_{i1} + f_{23}S_{i2} + f_{24}S_{i3} \\ f_{31}S_{i0} + f_{32}S_{i1} + f_{33}S_{i2} + f_{34}S_{i3} \\ f_{41}S_{i0} + f_{42}S_{i1} + f_{43}S_{i2} + f_{44}S_{i3} \end{bmatrix}. \quad (4.116)$$

4. Вектори Стокса для певних типів пучків цілком відомі а саме:

- Неполяризоване світло (НС):

$$\vec{S} = \{\alpha, 0, 0, 0\}. \quad (4.117)$$

- Лінійно-поляризоване вздовж осі x світло (ЛП):

$$\vec{S} = \{\beta, \beta, 0, 0\}. \quad (4.118)$$

- Право-циркулярна поляризація (ПЦП):

$$\vec{S} = \{\omega, 0, 0, \omega\}. \quad (4.119)$$

- Лінійно-поляризоване світло з азимутом 45° (ЛП 45°):

$$\vec{S} = \{\mu, 0, \mu, 0\}. \quad (4.120)$$

Спрямуємо до системи неполяризоване світло. Тоді вихідні параметри Стокса будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} S_{o0} &= f_{11}\alpha \\ S_{o1} &= f_{21}\alpha \\ S_{o2} &= f_{31}\alpha \\ S_{o3} &= f_{41}\alpha \end{aligned} \quad (4.121)$$

Відповідно до (4.121), легко знайти, що

$$\begin{aligned} f_{11} &= S_{o0}/\alpha \\ f_{21} &= S_{o1}/\alpha \\ f_{31} &= S_{o2}/\alpha \\ f_{41} &= S_{o3}/\alpha \end{aligned} \quad (4.122)$$

Таким чином, елементи $f_{11}, f_{21}, f_{31}, f_{41}$ вже відомі.

Тепер нехай на вхід системи надходить лінійно-поляризоване вздовж осі x світло. Із врахуванням (4.118) маємо:

$$\begin{aligned} S_{o0} &= (f_{11} + f_{12})\beta \\ S_{o1} &= (f_{21} + f_{22})\beta \\ S_{o2} &= (f_{31} + f_{32})\beta \\ S_{o3} &= (f_{41} + f_{42})\beta \end{aligned} \quad (4.123)$$

Звідки із врахуванням (4.122) знаходимо:

$$\begin{aligned} f_{12} &= \frac{S_{00}}{\beta} - f_{11} \\ f_{22} &= \frac{S_{01}}{\beta} - f_{21} \\ f_{32} &= \frac{S_{01}}{\beta} - f_{31} \\ f_{42} &= \frac{S_{01}}{\beta} - f_{41} \end{aligned} \quad (4.124)$$

Продовжуючи процедуру далі, спрямуємо на вхід системи право-циркулярно поляризоване світло:

$$\begin{aligned} S_{00} &= (f_{11} + f_{14})\omega \\ S_{01} &= (f_{21} + f_{24})\omega \\ S_{02} &= (f_{31} + f_{34})\omega \\ S_{03} &= (f_{41} + f_{44})\omega \end{aligned} \quad (4.125)$$

Звідки знаходимо:

$$\begin{aligned} f_{14} &= \frac{S_{00}}{\omega} - f_{11} \\ f_{24} &= \frac{S_{01}}{\omega} - f_{21} \\ f_{34} &= \frac{S_{01}}{\omega} - f_{31} \\ f_{44} &= \frac{S_{01}}{\omega} - f_{41} \end{aligned} \quad (4.126)$$

І нарешті освітлюємо систему світлом лінійно-поляризованим під кутом 45° :

$$\begin{aligned} S_{00} &= (f_{11} + f_{13})\mu \\ S_{01} &= (f_{21} + f_{23})\mu \\ S_{02} &= (f_{31} + f_{33})\mu \\ S_{03} &= (f_{41} + f_{43})\mu \end{aligned} \quad (4.127)$$

Відповідно

$$\begin{aligned} f_{13} &= \frac{S_{00}}{\mu} - f_{11} \\ f_{23} &= \frac{S_{01}}{\mu} - f_{21} \\ f_{33} &= \frac{S_{01}}{\mu} - f_{31} \\ f_{43} &= \frac{S_{01}}{\mu} - f_{41} \end{aligned} \quad (4.128)$$

4.5.3. *Заклучні ремарки*

1. Формалізм матриці Мюллера є найбільш потужним методом дослідження перетворюючих властивостей реальних розсіюючих об'єктів, оскільки можна стверджувати, що саме в поляризаційних параметрах хвилі, яка провзаємодіяла з об'єктом, міститься чи не максимально можлива інформація.

2. Експериментальний аналіз та побудова відповідних матриць Мюллера, поведінка її елементів може бути потужними інструментом при класифікації та моніторингу об'єктів різного типу.

3. В загальному випадку повинні спостерігатися певні спектральні залежності, що є актуальним, наприклад, при дослідженні об'єктів зі складною структурою, яка утворюється як комплекс різнорідних елементів.

4. На відміну від формалізму матриці Джонса формалізм матриці Мюллера дозволяє досліджувати світло, яке пройшло і через деполяризуючі об'єкти, через об'єкти, які повністю або частково руйнують когерентність хвилі.

5. Разом з тим при дослідженні недеполяризуючих (лише перетворюючих поляризацію) систем метод аналізу матриць Мюллера володіє певною надлишковістю у порівнянні з формалізмом матриць Джонса.

6. Головним недоліком формалізму матриць Мюллера є втрата інформації про величину головної (вібраційної) фази.

4.6. **Незвичайні випадки поляризації світлової хвилі**

В найбільш загальному випадку хвилю можна вважати поляризованою, якщо кінець вектора поля (електричного або магнітного) здійснює детерміноване коливання або здійснює рух вздовж детермінованої у часі траєкторії. Як впливає з нашого попереднього розгляду, у випадку монохроматичної (квазімонохроматичної) хвилі така траєкторія – еліпс. Далі ці уявлення практично поширюються на випадок поліхроматичної хвилі.

Разом з тим такий підхід не завжди вірний. Зокрема, якщо розглядати суперпозицію ортогонально поляризованих хвиль з різними частотами, траєкторія руху вектора може бути дуже складною та дуже далекою за формою від еліпса.

Відповідно невідомо, наскільки адекватні традиційні методи опису поляризації хвилі у цьому випадку.

4.6.1. *Суперпозиція хвиль із різними частотами* [20]

Суперпозиція хвиль із різними частотами не є екзотичною задачею. Ефекти такої «корельованої» інтерференції відомі вже майже сто років. Це добре відомі:

1. Ефект биття при накладанні двох скалярних хвиль [2].

2. Ефект Сан'яка [21], який лежить в основі принципу роботи лазерного гіроскопа [22,23], коли при обертанні лазера виникають дві хвилі з різними частотами. Така суперпозиція може бути реалізована в рамках нелінійної оптики [24], зокрема за рахунок подвоєння частоти [25] і т. ін.

В роботі [26] така суперпозиція була названа несталюю суперпозицією. Разом з тим між характеристиками хвиль із різними частотами, як правило, існують жорсткий

детермінований зв'язок. Тому, на наш погляд, більш правильно називати таку суперпозицію суперпозицією зв'язаних хвиль.

При цьому треба враховувати такі фактори і твердження:

1. Твердження, що хвилі різних частот не пов'язані, не зовсім правильне!
2. Ефекти суперпозиції хвиль із різними частотами легко спостерігаються у радіодіапазоні.
3. Сьогодні відомі одночастотні газові лазери з «величезною» довжиною когерентності (близько 10 км). Отже, часи когерентності, що відповідають цим значенням, складають величини порядку мікросекунд або навіть десятків мікросекунд. Очевидно, що такий час достатній для експериментального спостереження ефектів суперпозиції.

4.6.2. Суперпозиція циркулярно-поляризованих хвиль

Як добре відомо, суперпозиція двох ортогонально циркулярно-поляризованих хвиль із однаковими частотами і однаковими інтенсивностями приводить до лінійної поляризації в результуючому полі. Азимут поляризації визначається початковою різницею фаз між хвилями Δ .

Уявимо собі, що ця початкова різниця фаз швидко змінюється у часі (наприклад, лінійно). Відповідно змінюється і азимут. Очевидно, такі зміни можна інтерпретувати як «циркуляцію» вектора поля. При цьому, якщо дві монохроматичні хвилі з різними частотами накладаються одна на одну, то миттєва різниця фаз пропорційна різниці частот $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$. Іншими словами, з'являється щось подібне до циркуляції вектора поля.

Насправді пояснити зміни у положенні вектора поля таким простим підходом не можна. Траєкторія руху вектора більш складна і залежить не тільки від різниці частот, але і від співвідношення між амплітудами хвиль, величини початкової різниці Δ , поляризації хвиль і т. ін.

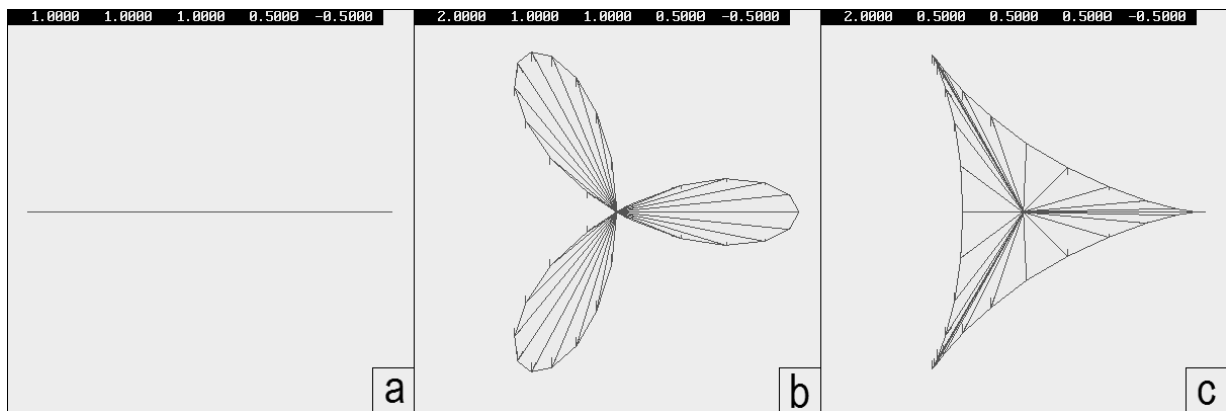


Рис.4.17. Суперпозиція двох ортогонально циркулярно-поляризованих хвиль з різними частотами і однакою інтенсивністю:

а – суперпозиція хвиль з однаковими частотами, однакових інтенсивностей і нульової початкової різниці Δ ; б – суперпозиція хвиль однакової інтенсивності з частотами, які відрізняються у два рази; с - суперпозиція хвиль із частотами, які відрізняються у два рази, їх амплітуди відрізняються також у два рази

Рис. 4.17, ілюструє формування траєкторії кінця вектора поля, утвореного в результаті суперпозиції двох ортогонально циркулярно поляризованих хвиль. Для порівняння на рисунку (а) наданий випадок, коли хвилі мають однакові частоти і інтенсивності. Рисунок (б) – це суперпозиція хвиль однакової інтенсивності та частот, які

різняться у два рази. Випадок, який ілюструється рисунком (с), відповідає подвійній різниці частот і подвійній різниці між амплітудами хвиль.

Як впливає з рисунків (b) і (с), траєкторії кінця вектора поля замкнуті. Час, упродовж якого відбувається «повне замикання» або «повний оптичний цикл», відповідає часу, який умовно можна назвати періодом биття:

$$T_b = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{\lambda_m^2}{c\Delta\lambda} + \frac{\lambda_m}{c}, \quad (4.129)$$

де $\Delta\omega$ – різниця між круговими частотами хвиль; λ_m – менша з довжин хвиль; $\Delta\lambda$ – відповідна різниця довжин хвиль.

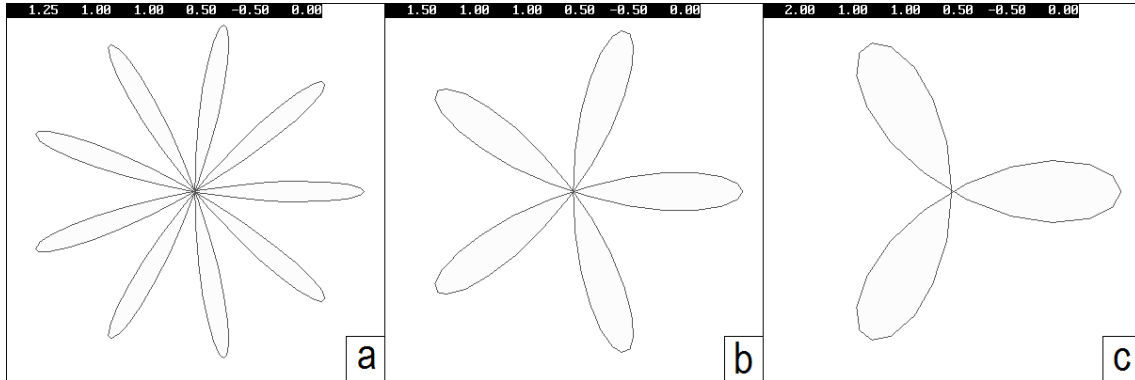


Рис. 4.18. Суперпозиція двох ортогонально циркулярно-поляризованих хвиль з різними частотами і однаковою інтенсивністю:

a – $\alpha = 1.25$; b – $\alpha = 1.5$; c – $\alpha = 2$. α – характеризує різницю у частотах

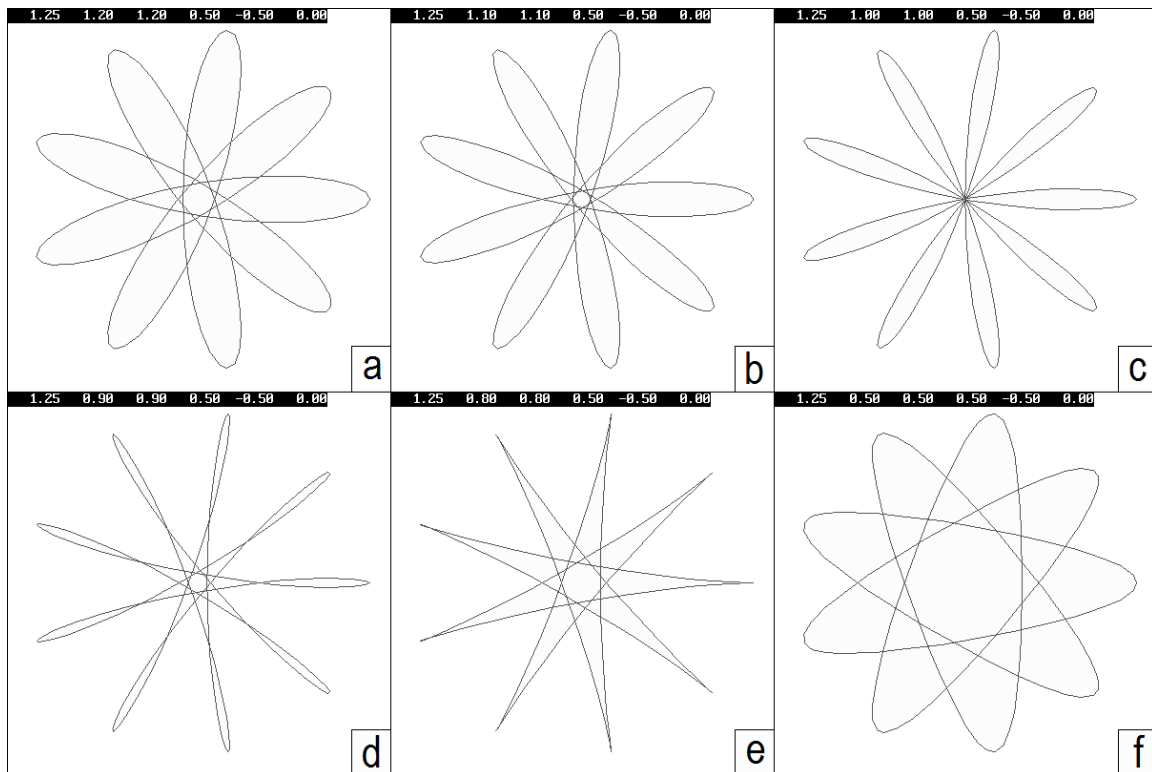


Рис. 4.19. Траєкторії кінця вектора поля в залежності від співвідношення між амплітудами хвиль γ . Співвідношення між частотами $\alpha = 1.25$.

a – $\gamma = 1.2$; b – $\gamma = 1.1$; c – $\gamma = 1$; d – $\gamma = 0.9$; e – $\gamma = 0.8$; f – $\gamma = 0.5$.

На рис. 4.18 та 4.19 наведені приклади формування траєкторії кінця вектора поля в залежності від співвідношення між частотами та між амплітудами хвиль, які беруть участь у суперпозиції.

4.6.3. Суперпозиція лінійно-поляризованих хвиль

При такій суперпозиції форма траєкторії кінця вектора поля стає ще більш «екзотичною». Такі траєкторії можуть утворювати криві, які навіть схожі на фігури Ліссажу (див. рис. 4.20-4.22). Окремий випадок такої суперпозиції для ортогонально лінійно-поляризованих хвиль із подвійною різницею частот детально розглянутий професором Фройндом в [25].

Характер руху вектора поля визначається початковою різницею фаз між пучками і співвідношенням амплітуд. Результати інтерференції хвиль з подвійною різницею частот і однаковими амплітудами подані на рисунку 4.20. Звернемо увагу на випадки, коли початкова різниця фаз дорівнює 0 або π . В цьому випадку траєкторія являє собою відкриту криву, яка схожа на параболу.

Рисунки 4.20-4.22 ілюструють результати суперпозиції хвиль з однаковою інтенсивністю, різницею в частотах, рівною 1,25 та 2 рази, та різними початковими фазами Δ . Часовий інтервал аналізу змінюється від одного до декількох періодів коливання хвилі з меншою частотою.

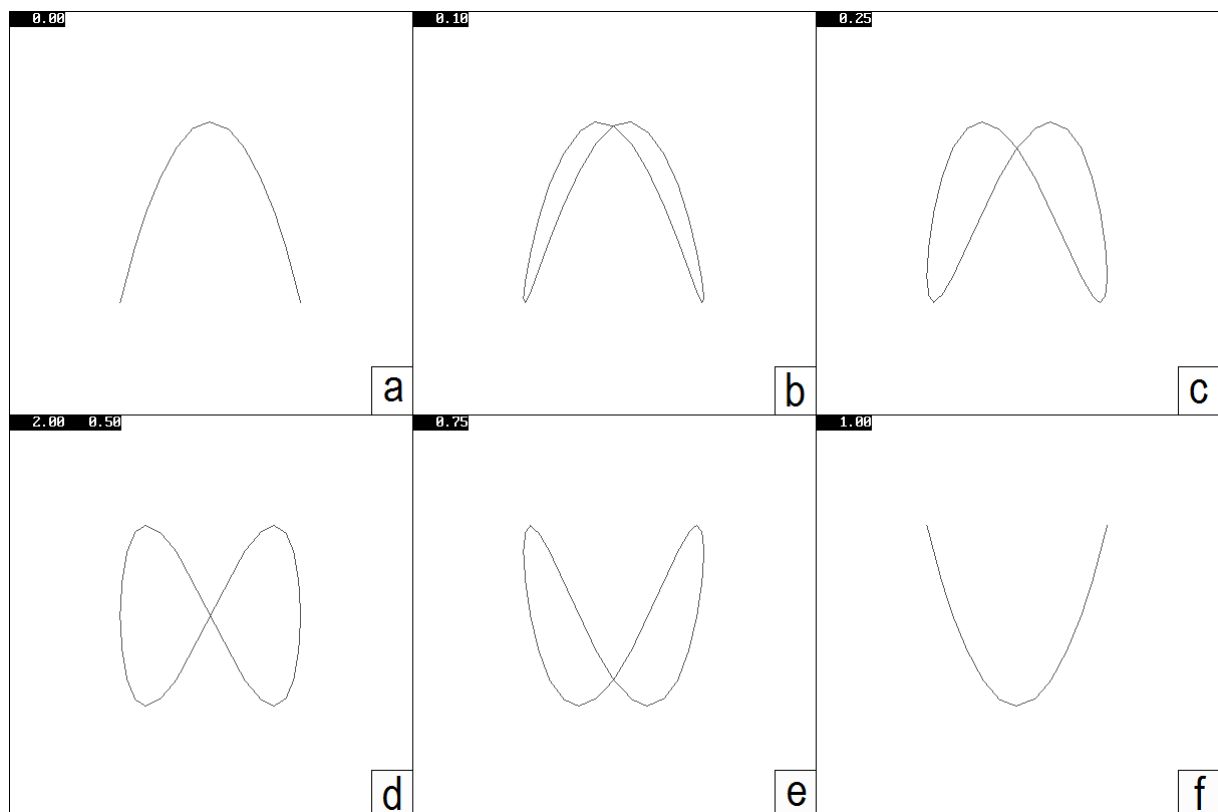


Рис. 4.20. Траєкторії кінця вектора поля для суперпозиції хвиль однакової амплітуди та подвійною різницею в частотах ($\alpha = 2$) в залежності від початкової різниці фаз Δ . а – $\Delta = 0$; б – $\Delta = 0.1\pi$; в – $\Delta = 0.25\pi$; д – $\Delta = 0.5\pi$; е – $\Delta = 0.75\pi$; ф – $\Delta = \pi$.

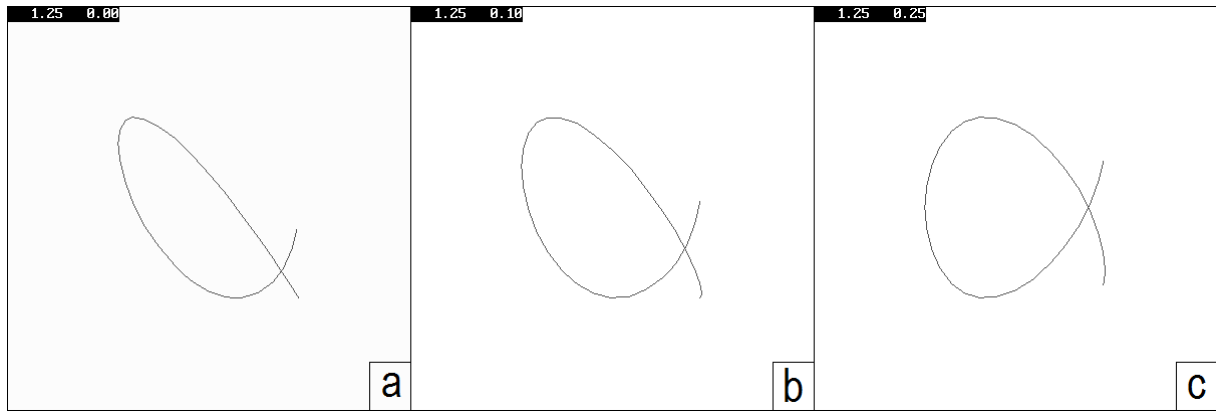


Рис. 4.21. Траєкторії кінця вектора поля для суперпозиції хвиль однакової амплітуди та подвійною різницею в частотах ($\alpha = 1.25$) в залежності від початкової різниці фаз Δ . Час аналізу один період коливання хвилі із меншою частотою.
 а – $\Phi_{02} = 0$; б – $\Phi_{02} = 0.1\pi$; с – $\Phi_{02} = 0.25\pi$.

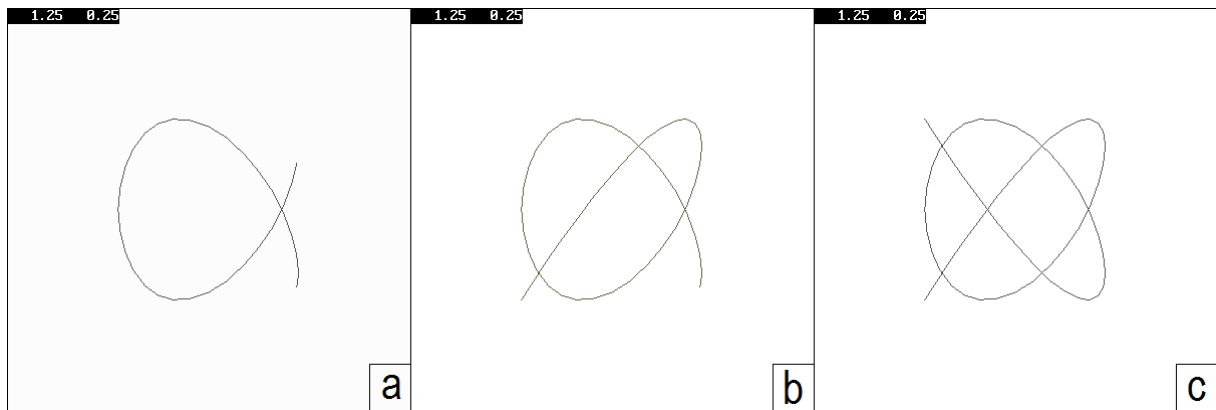


Рис. 4.22. Траєкторії кінця вектора поля для суперпозиції хвиль однакової амплітуди та подвійною різницею в частотах ($\alpha = 1.25$) в залежності від початкової різниці фаз $\Delta = 0.25\pi$. Час аналізу відповідає різним співвідношенням у долях періоду коливання хвилі із меншою частотою.
 а – $t = T_1$; б – $t = 2T_1$; с – $t = 3T_1$.

4.6.4. Поляризаційні характеристики полів, утворених в результаті суперпозиції хвиль із різними частотами

Відзначимо, що для суперпозиції, яку ми аналізуємо, можуть бути виміряні традиційні поляризаційні характеристики, зокрема параметри Стокса. Виникає питання: що вони характеризують у даному випадку? Адже траєкторія руху вектора поля відбувається не вздовж еліпса, а вздовж значно складнішої кривої.

Покажемо, якій величині дорівнюють параметри Стокса для нашої суперпозиції.

Сформуємо параметри Стокса для суперпозиції довільно поляризованих хвиль із різними частотами. Для цього використаємо зв'язок між параметрами Стокса і компонентами матриці когерентності (див. співвідношення 4.66).

Визначимо компоненти матриці когерентності:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_y E_x^* \rangle & \langle E_y E_y^* \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix}, \quad (4.130)$$

де

$$\begin{aligned} E_x &= A_{1x}e^{j(\omega_1 t + \Phi_{1x})} + A_{2x}e^{j(\omega_2 t + \Phi_{2x})} \\ E_y &= A_{1y}e^{j(\omega_1 t + \Phi_{1y})} + A_{2y}e^{j(\omega_2 t + \Phi_{2y})}, \end{aligned} \quad (4.131)$$

та Φ_{il} ; $i = 1, 2$; $l = x, y$ початкові фази коливань компонент хвиль, які беруть участь в суперпозиції.

Відповідно компоненти матриці когерентності мають вигляд:

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \langle [A_{1x}e^{j(\omega_1 t + \Phi_{1x})} + A_{2x}e^{j(\omega_2 t + \Phi_{2x})}] [A_{1x}e^{-j(\omega_1 t + \Phi_{1x})} + A_{2x}e^{-j(\omega_2 t + \Phi_{2x})}] \rangle \\ J_{yy} &= \langle [A_{1y}e^{j(\omega_1 t + \Phi_{1y})} + A_{2y}e^{j(\omega_2 t + \Phi_{2y})}] [A_{1y}e^{-j(\omega_1 t + \Phi_{1y})} + A_{2y}e^{-j(\omega_2 t + \Phi_{2y})}] \rangle, \quad (4.132a) \\ J_{xy} &= \langle [A_{1x}e^{j(\omega_1 t + \Phi_{1x})} + A_{2x}e^{j(\omega_2 t + \Phi_{2x})}] [A_{1y}e^{-j(\omega_1 t + \Phi_{1y})} + A_{2y}e^{-j(\omega_2 t + \Phi_{2y})}] \rangle \\ J_{yx} &= \langle [A_{1y}e^{j(\omega_1 t + \Phi_{1y})} + A_{2y}e^{j(\omega_2 t + \Phi_{2y})}] [A_{1x}e^{-j(\omega_1 t + \Phi_{1x})} + A_{2x}e^{-j(\omega_2 t + \Phi_{2x})}] \rangle \end{aligned}$$

де $\langle \rangle$ – знак, що означає усереднення за часом.

В явному вигляді (4.132a) може бути записано як

$$\begin{aligned} J_{xx} &= A_{1x}^2 + A_{2x}^2 \\ J_{yy} &= A_{1y}^2 + A_{2y}^2, \quad (4.132b) \\ J_{xy} &= A_{1x}A_{1y}e^{j\Delta_1} + A_{2x}A_{2y}e^{j\Delta_2} + \langle [A_{1x}A_{2y}e^{j(\Delta\omega t + \Delta_{1x2y})} + A_{2x}A_{1y}e^{-j(\Delta\omega t + \Delta_{1y2x})}] \rangle \\ J_{yx} &= A_{1x}A_{1y}e^{-j\Delta_1} + A_{2x}A_{2y}e^{-j\Delta_2} + \langle [A_{1x}A_{2y}e^{-j(\Delta\omega t + \Delta_{1x2y})} + A_{2x}A_{1y}e^{j(\Delta\omega t + \Delta_{1y2x})}] \rangle \end{aligned}$$

де $\Delta_{ikmn} = \Phi_{im} - \Phi_{kn}$; $i, k = 1, 2$; $m, n = x, y$ – різні комбінації різниці фаз хвиль, які беруть участь в суперпозиції.

Після деяких перетворень і, враховуючи, що середнє від суми дорівнює сумі середніх, для параметрів Стокса маємо:

$$\begin{aligned} S_0 &= A_{1x}^2 + A_{2x}^2 + A_{1y}^2 + A_{2y}^2 \\ S_1 &= 0 \\ S_2 &= 2[A_{1x}A_{1y} \cos(\Delta_1) + A_{2x}A_{2y} \cos(\Delta_2) + \langle A_{1x}A_{2y} \cos(\Delta\omega t + \Delta_{1x2y}) + A_{2x}A_{1y} \cos(\Delta\omega t + \Delta_{1y2x}) \rangle] \\ S_3 &= 2[A_{1x}A_{1y} \sin(\Delta_1) + A_{2x}A_{2y} \sin(\Delta_2) + \langle A_{1x}A_{2y} \sin(\Delta\omega t + \Delta_{1x2y}) - A_{2x}A_{1y} \sin(\Delta\omega t + \Delta_{1y2x}) \rangle] \end{aligned} \quad (4.133)$$

При усередненні по значному інтервалу часу, що, як можна показати, відповідає усередненню протягом періоду биття, (4.134) переходить в:

$$\begin{aligned} S_0 &= A_{1x}^2 + A_{2x}^2 + A_{1y}^2 + A_{2y}^2 \\ S_1 &= 0 \\ S_2 &= 2[A_{1x}A_{1y} \cos(\Delta_1) + A_{2x}A_{2y} \cos(\Delta_2)] \\ S_3 &= 2[A_{1x}A_{1y} \sin(\Delta_1) + A_{2x}A_{2y} \sin(\Delta_2)] \end{aligned} \quad (4.134)$$

Розглянемо деякі спеціальні випадки для виразу (5.135):

1. *Лінійно ортогонально поляризовані пучки.* Нехай одна з хвиль поляризована вздовж осі x , а інша вздовж осі y , і, відповідно:

$$\begin{aligned} A_{1x} &= A_1; A_{1y} = 0 \\ A_{2x} &= 0; A_{2y} = A_2 \end{aligned} \quad (4.135)$$

Тоді, згідно з (4.135), параметри Стокса такої суперпозиції мають вигляд:

$$\begin{aligned} S_0 &= A_1^2 + A_2^2 \\ S_1 &= 0 \\ S_2 &= 0 \\ S_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.136)$$

Інакше кажучи, параметри Стокса аналогічні параметрам Стокса для неполяризованої хвилі.

2. Циркулярно ортогонально поляризовані пучки ($\Delta_1 = \pm \frac{\pi}{2}$, $\Delta_2 = \mp \frac{\pi}{2}$)

$$\begin{aligned} A_{1x} &= A_1; A_{1y} = A_1 \\ A_{2x} &= A_2; A_{2y} = A_2 \end{aligned} \quad (4.137)$$

Параметри Стокса описуються виразом

$$\begin{aligned} S_0 &= 2A_1^2 + 2A_2^2 \\ S_1 &= 0 \\ S_2 &= 0 \\ S_3 &= 2[\pm A_1^2 \mp A_2^2] \end{aligned} \quad (4.138)$$

При рівності амплітуд 1-ої і 2-ої хвилі ($A_1 = A_2$) четвертий параметр S_3 також, як і у випадку лінійно поляризованих хвиль, дорівнює нулю, тобто, з традиційної точки зору, така хвиля неполяризована.

Взагалі кажучи, оскільки в загальноприйнятому розумінні така суперпозиція описується як некогерентна [26], то такий результат законовимірний, внаслідок того, що формалізм параметрів Стокса оперує з усередненими за часом величинами.

Тому застосуємо інший тип опису поляризаційних характеристик, який ми застосовували для опису когерентних хвиль, а саме формалізм матриці Джонса. Разом з тим внесемо деякі зміни у порівнянні з традиційним підходом.

Як наведено у параграфі 4.3, при формулюванні визначення такого вектора часова складова у вигляді експоненти $e^{j\omega t}$ опускалася. Оскільки ми маємо справу із суперпозицією хвиль із різними частотами, ми будемо зберігати цю експоненту і сформуємо модифікований вектор Джонса, який залежить від часу у вигляді:

$$\vec{J} = e^{j\omega t} \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \end{bmatrix}, \quad (4.139)$$

де $U_l = A_l e^{j\Phi_l}$; $l = x, y$ – комплексні амплітуди компонент в декартових координатах.

Уведемо модифікований вектор Джонса, який відповідає суперпозиції хвиль із різними частотами і є сумою векторів типу (4.140):

$$\vec{J}_{\text{mod}} = \sum_i^N \vec{J}_i = \sum_i^N e^{j\omega_i t} \begin{bmatrix} U_{ix} \\ U_{iy} \end{bmatrix}, \quad (4.140)$$

де $\vec{J}_i$ – модифіковані вектора Джонса, які відповідають кожній хвилі із конкретною частотою; N – кількість хвиль.

Нехай у нашому випадку 1-ша і 2-га хвилі поляризовані лінійно і ортогонально. Для визначеності будемо вважати, що

$$A_{1x} = A; A_{1y} = 0; \text{и } A_{2x} = 0; A_{2y} = A; \quad (4.141a)$$

$$\text{а } \Phi_{1x} = 0; \Phi_{2y} = \Delta; \quad (4.141b)$$

де Δ – різниця початкових фаз ортогональних хвиль.

Тоді модифікований вектор Джонса має вигляд

$$\vec{J}_{\text{mod}} = A e^{j\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t} \begin{bmatrix} e^{j\frac{\Delta\omega}{2}t} \\ e^{-j(\frac{\Delta\omega}{2}t - \Delta)} \end{bmatrix}, \quad (4.142a)$$

або

$$\vec{J}_{\text{mod}} = A e^{j\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t} e^{j\frac{\Delta\omega}{2}t} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j(\Delta\omega t - \Delta)} \end{bmatrix}. \quad (4.142b)$$

Відповідно, (4.142b) можна трактувати так. Різниця фаз між x - і y -компонентами результуючої хвилі змінюється відповідно до частоти і часу $\Delta\omega t$. Азимут вектора залишається сталим. Більше того, він нульовий (незалежно від Δ), тобто при постійному азимуті змінюється «миттєва еліптичність» результуючої хвилі, і кінець вектора напруженості дійсно здійснює складний рух.

Ще більш прозоре трактування модифікованого вектора Джонса виникає, якщо розглядати суперпозицію ортогонально циркулярно-поляризованих хвиль.

Для простоти будемо вважати, що компонентні модулі амплітуд першої і другої хвиль однакові ($A_{il} = A$) і фази x -компонент 1-ої і 2-ої хвиль нульові. Друга вимога легко виконується зміщенням початку відліку підрахунку часу аналізу.

Тоді модифікований вектор Джонса результуючої хвилі може бути записаний у вигляді

$$\vec{J}_{\text{mod}} = A e^{j\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}} e^{j\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t} \begin{bmatrix} \cos(\frac{\Delta\omega}{2}t) \\ \cos(\frac{\Delta\omega}{2}t + \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2}) \end{bmatrix}. \quad (4.143)$$

де $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$; Δ_i – різниці фаз між x - і y -компонентами 1-ої і 2-ої хвиль.

Враховуючи, що $\frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} = \pm \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} = 0$ (4.143) перетвориться до вигляду

$$\vec{J}_{\text{mod}} = A e^{j\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t} \begin{bmatrix} \cos[\pm\beta(t)] \\ \sin[\pm\beta(t)] \end{bmatrix} \sim A \begin{bmatrix} \cos[\pm\beta(t)] \\ \sin[\pm\beta(t)] \end{bmatrix}. \quad (4.144)$$

де $\beta(t) = \frac{\Delta\omega}{2}t$.

Вираз (4.144) можна інтерпретувати як вектор Джонса лінійно поляризованої хвилі із азимутальним кутом $\pm\beta(t)$ і частотою $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$. Інакше кажучи, миттєвий азимут поляризації $\pm\beta(t)$ змінюється в часі і вектор поля здійснює деяку циркуляцію (за годинниковою стрілкою, якщо в (4.144) перед β знак (+), і проти годинникової стрілки, якщо (-)) відносно центра пучка.

Отже, загальний висновок з проведеного розгляду такий: традиційні методи опису поляризаційних характеристик при аналізі суперпозиції хвиль з різними частотами не можуть бути застосовані для адекватного опису поляризаційного стану результуючої хвилі. Модифікований підхід Джонса, безумовно, можливий. Разом з тим не зовсім зрозуміло, як можуть бути визначені його відповідні параметри.

5. КОГЕРЕНТНІСТЬ ОПТИЧНОЇ ХВИЛІ [1,13,26]

5.1. Елементарні уявлення про когерентність

5.1.1. Деякі визначення та ключові поняття

Когерентність оптичної хвилі

Саме загальне визначення цього поняття може бути таке. Термін *когерентність* походить від лат. *Coherens* – «який знаходиться у зв'язку» – означає скорельованість (узгодженість) декількох коливних або хвильових процесів у часі, яка проявляється при їх суперпозиції.

З цим поняттям тісно пов'язане поняття *інтенсивності*, величина якої задається співвідношенням

$$I(t) = \langle |\bar{\mathbf{P}}(t)| \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} |\bar{\mathbf{P}}(t)| dt, \quad (5.1)$$

де T – час усереднення; $\bar{\mathbf{P}}(t)$ – усереднений за часом вектор Умова-Пойнтинга.

Відзначимо, що інтервал, протягом якого відбувається усереднення, у кожному разі визначається досить специфічно. Зокрема, коли розглядається монохроматичний випадок, які такий інтервал використовують лише один період коливання. В іншому випадку, наприклад, коли маємо результуючу хвилю, сформовану як суперпозицію хвиль із різними частотами, такий інтервал дорівнює часу биття, яке визначається згідно зі співвідношенням (4.129).

5.1.2. Елементарні уявлення про часову і просторову когерентність

5.1.2.1. Часова когерентність і час когерентності. Довжина когерентності

Припустимо, що «стабільний» світловий пучок, який випромінюється невеликим за розмірами джерелом світла σ , поділяється на два пучки в інтерферометрі Майкельсона (рис. 5.1); потім ці два пучки знову зводяться, отримавши різницю ходу $\Delta s = c\Delta t$ (c – швидкість світла).

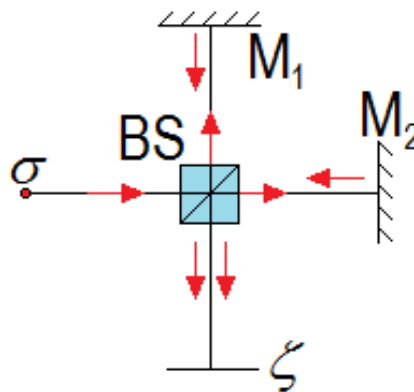


Рис. 5.1

Якщо різниця ходу Δs достатньо мала, то у площині ζ утворюються інтерференційні смуги. Тоді говорять, що смуги, які виникають, є проявом часової когерентності між двома пучками, оскільки контраст між смугами залежить від часу запізнення Δt , який виникає між пучками. В загальному випадку інтерференційні смуги виникають лише у випадку, коли

$$\Delta t \Delta \nu \leq 1, \quad (5.2)$$

де $\Delta\nu$ – ефективна ширина смуги частот світлового пучка.

Час запізнення

$$\Delta t \sim 1/\Delta\nu \quad (5.3)$$

називають *часом когерентності*, а відповідний оптичний шлях $c\Delta t$ – *довжиною когерентності*.

5.1.2.2. Просторова когерентність

Розглянемо тепер інтерференційний експеримент типу досліду Юнга (див. рис. 5.2).

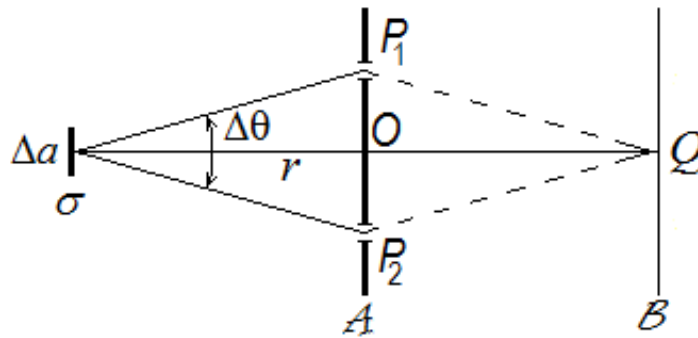


Рис. 5.2

Вважаємо, що маємо теплове джерело квазімонохроматичного випромінювання σ (тобто виконується умова $-\frac{\Delta\nu}{\nu} \ll 1$), яке має форму квадрата зі стороною Δa . Це джерело після проходження точкових отворів P_1 і P_2 екрана A створює на екрані B інтерференційну картину поблизу точки Q . При цьому отвори P_1 і P_2 розташовані достатньо близько один від одного.

Виникнення інтерференційних смуг зумовлене так званою просторовою когерентністю між пучками, які прийшли в точку Q від отворів P_1 і P_2 . При цьому інтерференційна картина спостерігається тоді і лише тоді, коли

$$\Delta\theta\Delta a < \bar{\lambda}, \quad (5.4)$$

де $\bar{\lambda} = \frac{c}{\nu}$ – ефективна довжина світла.

Для спостереження інтерференційної картини обидва точкових джерела повинні бути розташовані в площині $\mathcal{A}$ в середині деякої області з центром в точці O , площа якої дорівнює

$$S_{\text{Acoh}} \approx (r\Delta\theta)^2 \approx \frac{r^2\bar{\lambda}^2}{(\Delta a)^2} = \frac{c^2 r^2}{\nu^2 S}, \quad (5.5)$$

де $S = (\Delta a)^2$ – площа протяжного джерела. Величину S_{Acoh} називають *площею когерентності* в площині $\mathcal{A}$ поблизу точки O . Тілесний кут, під яким видно площу когерентності з джерела, дорівнює

$$\Delta\Omega \approx \frac{S_{\text{Acoh}}}{r^2} \approx \frac{c^2}{\nu^2 S}. \quad (5.6)$$

Об'єм когерентності може бути визначений як об'єм циліндра, площа основи якого дорівнює площі когерентності, а висота довжині когерентності:

$$V_{\text{Acoh}} = c\Delta t S_{\text{Acoh}} \approx \frac{c}{\Delta\nu} \frac{c^2}{v^2} \frac{r^2}{S} = \frac{c\bar{\lambda}^2 r^2 c}{\Delta\lambda v^2 S} = \frac{\bar{\lambda}^4 r^2}{\Delta\lambda S} = \left(\frac{\bar{\lambda}}{\Delta\lambda}\right) \left(\frac{r}{\Delta a}\right)^2 \bar{\lambda}^3. \quad (5.7)$$

На закінчення цього пункту відзначимо, що обидва типи когерентності – і часова, і просторова – описуються деякою функцією $\gamma(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \tau)$ конкретний вигляд якої ми визначимо дещо пізніше. Часова когерентність описується функцією $\gamma(\vec{x}_1, \vec{x}_1, \tau)$, а просторова – функцією $\gamma(\vec{x}_1, \vec{x}_2, 0)$. При цьому в загальному випадку неможливо відокремити вплив часової когерентності від впливу просторової. Проте існує такий клас оптичних полів, для яких величину $\gamma_{12}(\tau)$ можна представити у вигляді

$$\gamma_{12}(\tau) = \gamma_{11}(\tau)\gamma_{12}(0), \quad (5.8)$$

тобто ефекти часової когерентності можна відокремити від ефектів просторової. Такі поля отримали назву *взаємно спектрально чистих*.

Фактично при деяких припущеннях часова когерентність визначається спектральним складом джерела, просторова – геометричними характеристиками джерела.

5.2. Уявлення про когерентність на основі підходів кореляційної оптики

5.2.1. Кореляційна функція 2-го порядку [13]

Нагадаємо, що кореляційна функція порядку $(m + n)$ визначається як середнє по ансамблю від добутку величин U , які беруться у різних просторово часових точках:

$$\varphi^{(m,n)}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{m+n}; t_1, \dots, t_{m+n}) = \langle \prod_{j=1}^m U_j^*(\mathbf{r}_j, t_j) \prod_{k=m+1}^{m+n} U_k(\mathbf{r}_k, t_k) \rangle, \quad (5.9)$$

де $\langle \dots \rangle$ – усереднення по ансамблю.

Якщо певне поле можна вважати стаціонарним і ергодичним, то для такого типу полів можна перейти від усереднення по ансамблю до усереднення за часом:

$$\langle \dots \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \dots dt. \quad (5.10)$$

В оптиці дуже важливий випадок, коли розглядаються кореляційні функції другого порядку. В такій ситуації кореляційна функція може бути перетворена до вигляду

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) &\equiv \varphi^{(1,1)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) \equiv \varphi_{12} \equiv U_1^* U_2 \equiv \\ &\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T U_1^*(\mathbf{r}_1, t) U_2(\mathbf{r}_2, t + \tau) dt \equiv \int_{-\infty}^{\infty} U_1^*(\mathbf{r}_1, t) U_2(\mathbf{r}_2, t + \tau) dt. \end{aligned} \quad (5.11)$$

5.2.2. Комплексне представлення фізичних поліхроматичних полів

Нехай $V^{(r)}(\mathbf{r}, t)$ відповідає дійсній класичній хвильовій функції, яка характеризує поле в точці $\mathbf{r}$ в момент часу t . Ця функція може бути, наприклад, напруженістю електричного поля.

Нехай існує Фур'є-образ цієї функції

$$V^{(r)}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\mathbf{r}, \nu) \exp(-2\pi j \nu t) d\nu. \quad (5.12)$$

Оскільки $V^{(r)}$ – дійсна функція, то

$$v(\mathbf{r}, -\nu) = v^*(\mathbf{r}, \nu). \quad (5.13)$$

З цього випливає, що замість функції $V^{(r)}(\mathbf{r}, t)$ можна розглядати функцію $V(\mathbf{r}, t)$

$$V(\mathbf{r}, t) = \int_0^{\infty} v(\mathbf{r}, \nu) \exp(-2\pi j \nu t) d\nu, \quad (5.14)$$

яка має назву *комплексного аналітичного сигналу*.

Згідно з теоремою Титчмарша, дійсна і уявна частини такого типу функції утворюють пару перетворень Гільберта:

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [V^{(r)}(\mathbf{r}, t) + jV^{(i)}(\mathbf{r}, t)], \quad (5.15)$$

де

$$\begin{cases} V^{(i)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V^{(r)}(\mathbf{r}, t')}{t-t'} dt' \\ V^{(r)}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V^{(i)}(\mathbf{r}, t')}{t-t'} dt' \end{cases} \quad (5.16)$$

Тут P розуміють як головне значення інтеграла Коші при $t' = t$.

Нехай ми маємо пучок квазімонохроматичного світла (див. рис. 5.3). Будемо вважати, що пучок лінійно поляризований. Як результат пучок можна представити комплексною скалярною функцією $V(\mathbf{r}, t)$.

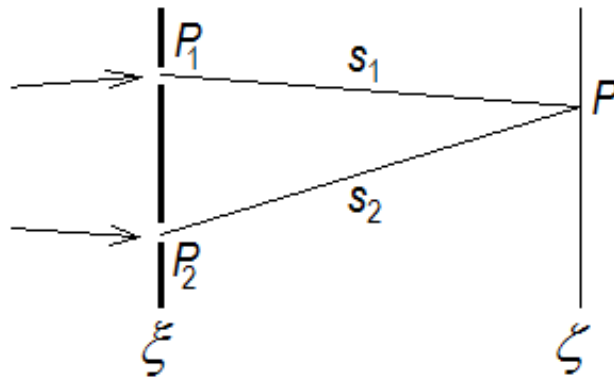


Рис. 5.3

У першому наближенні миттєве значення поля в точці P

$$V(\mathbf{r}, t) = K_1 V(\mathbf{r}_1, t - t_1) + K_2 V(\mathbf{r}_2, t - t_2), \quad (5.17)$$

де $t_1 = s_1/c$ і $t_2 = s_2/c$ – інтервали часу, які необхідні для того, щоб світло пройшло від точок $P_1(\mathbf{r}_1)$ і $P_2(\mathbf{r}_2)$ до точки P відповідно; c – швидкість світла; K_1 та K_2 – постійні множники, які залежать від розміру отворів та геометрії схеми. З елементарної теорії дифракції випливає, що множники K_1 і K_2 – суто уявні.

Миттєва інтенсивність $I(\mathbf{r}, t)$ в точці $P(\mathbf{r})$ описується співвідношенням

$$I(\mathbf{r}, t) = V^*(\mathbf{r}, t) V(\mathbf{r}, t). \quad (5.18)$$

З (5.17) і (5.18) випливає, що

$$I(\mathbf{r}, t) = |K_1|^2 I_1(\mathbf{r}_1, t - t_1) + |K_2|^2 I_2(\mathbf{r}_2, t - t_2) + 2 \operatorname{Re}\{K_1^* K_2 V^*(\mathbf{r}_1, t - t_1) V(\mathbf{r}_2, t - t_2)\}. \quad (5.19)$$

Середнє по ансамблю $\langle \dots \rangle_e$

$$\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle_e = |K_1|^2 \langle I_1(\mathbf{r}_1, t - t_1) \rangle_e + |K_2|^2 \langle I_2(\mathbf{r}_2, t - t_2) \rangle_e + 2 \operatorname{Re}\{K_1^* K_2 \Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t - t_1, t - t_2)\}, \quad (5.20)$$

де

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_1, t_2) = \langle V^*(\mathbf{r}_1, t_1) V(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle_e \quad (5.21)$$

та

$$\langle I(\mathbf{r}_j, t_j) \rangle_e = \langle V^*(\mathbf{r}_j, t_j) V(\mathbf{r}_j, t_j) \rangle_e = \Gamma(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_j, t_j, t_j) \quad (j = 1, 2). \quad (5.22)$$

Кореляційна функція $\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)$ відома під назвою *взаємної функції когерентності*. Цю функцію зручно нормувати у такій формі:

$$\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau) = \frac{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{[\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, 0)]^{1/2} [\Gamma(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2, 0)]^{1/2}} = \frac{\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{[\langle I(\mathbf{r}_1) \rangle]^{1/2} [\langle I(\mathbf{r}_2) \rangle]^{1/2}}. \quad (5.23)$$

у зазвичай називають *комплексним ступенем когерентності*.

З нерівності Шварца безпосередньо випливає, що, внаслідок наведеного нормування,

$$0 \leq |\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)| \leq 1. \quad (5.24)$$

Відповідно інтенсивність у точці $P(\mathbf{r})$ може бути записана як

$$\langle I(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle + \langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle + 2 [\langle I^{(1)}(\mathbf{r}, t) \rangle]^{1/2} [\langle I^{(2)}(\mathbf{r}, t) \rangle]^{1/2} \operatorname{Re}\{\gamma[\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, (s_1 - s_2)/c]\}, \quad (5.25)$$

Якщо інтенсивності пучків рівні, то

$$\mathfrak{R}(\mathbf{r}) = \left| \gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \frac{s_1 - s_2}{c}) \right| \quad (5.26)$$

де $\mathfrak{R}(\mathbf{r})$ – контраст інтерференційної картини.

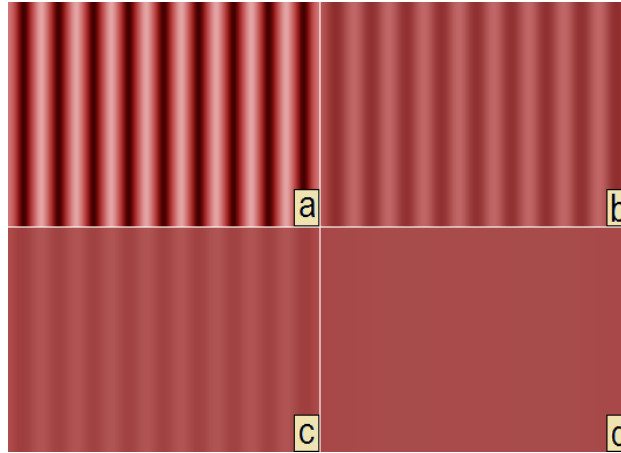


Рис. 5.4.

Інакше кажучи вимірюючи контраст інтерференційної картини можна тримати величину ступеня когерентності результуючої хвилі. При цьому контраст змінюється (див. рис. 5.4) від одиничного (монохроматичний випадок) до повністю некогерентного випадку (рис. d), коли інтерференційні смуги взагалі пропадають.

5.3. Нестала суперпозиція. Інтерференція хвиль із різними частотами [27]

В роботі [26] розглянута інтерференція хвиль із різними частотами. Така суперпозиція отримала назву несталої суперпозиції. З точки зору теорії когерентності другого порядку така суперпозиція некогерентна. Разом з тим, якщо обидві хвилі монохроматичні або навіть частково когерентні, то між їх характеристиками існує детермінований або статистичний зв'язок, який, зокрема, проявляється в тому, що для будь-якого моменту часу різниця фаз між хвилями цілком визначена. Тому, з нашої точки зору, таку суперпозицію більш адекватно називати суперпозицією зв'язаних у часі або просто зв'язаних хвиль.

Розглянемо інтерференцію двох хвиль із різним спектральним складом. При цьому для нас абсолютно неважливо, як формуються характеристики хвиль у площині спостереження. Інакше кажучи, нас не цікавить передісторія цих хвиль.

Нехай комплексні функції, які описують поля $U_1(\mathbf{r}, t)$ і $U_2(\mathbf{r}, t)$:

$$U_i(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty a_i(x, y, \omega) \rho_i(\omega) \exp\{j[\omega t + \Phi_i(x, y) + kz]\} d\omega, \quad (5.28)$$

де Φ_i – просторова фаза, яка містить також постійну початкову фазу Φ_{0i} , яка є різною для різних компонент; $\rho_i(\omega)$ – нормовані до одиниці спектральні густини; $a_i > 0$ деякі коефіцієнти, які визначають модуль амплітуди спектральних складових; $\omega = 2\pi\nu$ кругова частота.

Природно, що кожна спектральна компонента може бути описана як

$$U_{i\omega} = a_i(x, y, \omega) \rho_i(\omega) \exp\{j[\omega t + \Phi_i(x, y) + kz]\}, \quad (5.29)$$

Тоді поле в площі спостереження може бути записане як

$$U(\mathbf{r}, t) = U_1(\mathbf{r}, t) + U(\mathbf{r}, t). \quad (5.30)$$

Відповідно миттєва інтенсивність може бути представлена традиційним співвідношенням

$$I_\omega(x, y, t) = |U|^2. \quad (5.31)$$

Кожна спектральна компонента (незалежно одна від одної) формує свою результуючу «спектральну» комплексну функцію

$$U_\omega = U_1 \omega + U_2 \omega = a_1 \rho_1(\omega_1) \exp[j(\omega_2 t + \Phi_1 + k_1 z)] + a_2 \rho_2(\omega_2) \exp\{j[(\omega_2) t + \Phi_2 + k_2 z]\}. \quad (5.32)$$

При цьому $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$ – деяка величина, яка характеризує різницю між частотами компонент, що беруть участь в суперпозиції.

Нехай $\omega_1 = \omega$. Тоді $\omega_2 = \omega + \Delta\omega$.

Для більш чіткого розуміння результатів такої суперпозиції розглянемо деякий частковий випадок, де $\Delta\omega$ – деяка величина, яка характеризує різницю між частотами компонент, що беруть участь у суперпозиції.

1. Для простоти (що непринципово) будемо вважати, що у площині спостереження $z=0$.

Очевидно, що загальна миттєва спектральна інтенсивність, яка сформована першою і другою хвилями, може бути розглянута як сума миттєвих «спектральних» інтенсивностей:

$$I_\omega = |U_\omega|^2 = |(U_{1\omega} + U_{2\omega})|^2 = I_1 + I_2 + 2a_1 a_2 \rho_1(\omega) \rho_2(\omega + \Delta\omega) \cos(\Delta\omega t + \Delta\Phi), \quad (5.33)$$

де $I_i = |E_i|^2$ – парціальні спектральні інтенсивності та

$$\Delta\Phi = \Phi_2(\omega + \Delta\omega) - \Phi_1(\omega) = \Delta\tilde{\Phi} + \Delta\Phi_0, \quad (5.34)$$

де $\Delta\tilde{\Phi}$ – різниця просторових фаз, які визначають «форму» хвильового фронту кожної спектральної компоненти; $\Delta\Phi_0$ – різниця початкових фаз. При цьому $\Delta\Phi_0$ може бути записана як функція лише однієї змінної $\Delta\omega$:

$$\Delta\Phi_0(\Delta\omega) = \Phi_{02} - \Phi_{01}. \quad (5.35)$$

Зробимо подальше спрощення. Будемо вважати, що:

1. Хвилі, які беруть участь у суперпозиції, паралельні поліхроматичні пучки, які сходяться під кутами α_1 та α_2 в площині x, z . Тоді a_1 і a_2 – постійні величини, а просторові фази спектральних компонент мають вигляд

$$\Phi_i = \frac{\omega_i}{c} x \sin \alpha_i. \quad (5.36)$$

2. Якщо такі хвилі розповсюджуються співвісно в напрямку z , то

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi_0(\Delta\omega). \quad (5.37)$$

Загальна інтенсивність, яка формується всіма спектральними компонентами, описується виразом

$$I = \iint_{-\infty}^{\infty} I_{\omega} d\omega d(\omega + \Delta\omega). \quad (5.38)$$

Відзначимо, що частоту другої хвилі ω у виразі $d(\omega + \Delta\omega)$ можна вважати подібною до постійної величини та

$$d(\omega + \Delta\omega) = d(\Delta\omega). \quad (5.39)$$

Тоді (5.38) трансформується до співвідношення

$$I = \iint_{-\infty}^{\infty} I_{\omega} d\omega d(\Delta\omega). \quad (5.40)$$

Або у явному вигляді:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} I_{\omega} d\omega = I_1 + I_2 + 2a_1 a_2 \int_{-\infty}^{\infty} \mu_{\omega} \cos[\Delta\omega t + \Delta\Phi_0(\Delta\omega)] d(\Delta\omega), \quad (5.41)$$

де I_1, I_2 – парціальні інтенсивності пучків; $\mu_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_1(\omega) \rho_2(\omega + \Delta\omega) d\omega$ може бути інтерпретована як нормована до одиниці кореляційна функція спектральних розподілів першої та другої хвиль.

При цьому $0 \leq |\mu_{\omega}| \leq 1$ і величину μ_{ω} за аналогією з когерентним випадком [26] можна назвати «ступенем миттєвої когерентності», або, більш адекватно, *ступенем зв'язку між хвилями*.

У випадку «абсолютного» зв'язку між хвилями ($|\mu_{\omega}| = 1$, хвилі, які беруть участь в суперпозиції, абсолютно монохроматичні) спектральна густина кожної хвилі мають вигляд

$$\rho_i(\omega) = \delta(\omega - \omega_i). \quad (5.42)$$

В такій ситуації миттєва інтенсивність суперпозиції двох монохроматичних хвиль із різними частотами набуває форми

$$I = I_1 + I_2 + 2a_1 a_2 \int_0^{\infty} \mu_{\omega} \cos[\Delta\omega t + \Delta\Phi_0(\Delta\omega)] d(\Delta\omega), \quad (5.43)$$

де $\Delta\omega$ – різниця частот; $\Delta\Phi_0$ – різниця початкових фаз, може бути ігнорована, оскільки визначає лише «час початку биття». Формується миттєва інтерференційна картина, яка рухається зі швидкістю, яка визначається різницею частот.

На закінчення цього параграфа відзначимо, що концепція зв'язаних хвиль може застосовуватися лише у випадку, якщо парціальні часи когерентності, які відповідають кожній хвилі, більше, ніж період биття. Лише в ситуації, коли виконується така умова між хвилями, можна простежити детермінований або хоча б статистичний зв'язок. При цьому очевидно, що у випадку, коли хвилі розповсюджуються не співвісно і напрямки їх

розповсюдження складають деякий кут, то, як і в когерентному випадку, контраст миттєвої інтерференційної картини визначає величину $|\mu_\omega|$. Природно, таке твердження справедливе не тільки для плоских хвиль, але і для хвиль зі складною структурою фазових фронтів спектральних компонент.

5.4. Формування зображення у когерентному і некогерентному світлі [9,10]

5.4.1. Когерентний випадок

Як відомо з попереднього розділу (див. параграф 3.1), сигнал на виході оптичної системи описується співвідношенням

$$U_{out}(x, y) = \iint_S U_{in}(x_0, y_0) h(x, y, x_0, y_0) dx_0 dy_0, \quad (5.44)$$

де $h(x, y, x_0, y_0)$ – імпульсний відгук (імпульсна характеристика) системи.

Для систем із сферичною оптикою (просторово-інваріантних систем) вихідний сигнал є згортокою вхідного сигналу із імпульсним відгуком:

$$U_{out}(x, y) = \iint_S U_{in}(x_0, y_0) h(x - x_0, y - y_0) dx_0 dy_0 = U_{in}(x, y) \otimes h(x, y). \quad (5.45)$$

Відповідно вихідна інтенсивність може бути записана як квадрат модуля цієї величини:

$$I_{out}(x, y) = |U_{in}(x, y) \otimes h(x, y)|^2. \quad (5.46)$$

5.4.2. Повністю некогерентний випадок

На відміну від когерентного випадку, у співвідношенні типу (5.44) замість комплексної амплітуди фігурує інтенсивність вхідного зображення. Тоді сигнал на виході просторово-інваріантної системи має вигляд:

$$\begin{aligned} I_{out}(x, y) &= \iint_S I_{in}(x_0, y_0) |h(x - x_0, y - y_0)|^2 dx_0 dy_0 = \\ &= I_{in}(x, y) \otimes |h(x, y)|^2 \end{aligned}, \quad (5.47)$$

де $|h(x, y)|^2$ – інтенсивність імпульсного відгуку системи.

5.4.3. Ідеальна просторово-інваріантна система. Обмежуючі апертури. Функція розсіювання точки

Розглянемо випадок, коли зображаюча система ідеальна. Нагадаємо, що $h(x, y, x_0, y_0)$ – імпульсний відгук системи, це реакція системи на імпульсний сигнал $\delta(x_0, y_0)$. Виникає питання: як визначити $h(x, y, x_0, y_0)$ в простій системі, яка формує зображення?

Природно, що якщо зображення формується ідеальною оптичною системою, то воно повністю ідентичне вхідному сигналу.

Нагадаємо, що відомо таке співвідношення для згортки

$$f(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x_0, y_0) \delta(x - x_0, y - y_0) dx_0 dy_0. \quad (5.48)$$

Тобто згортка функції із дельта-функцією є самою функцією.

Врахуємо, що вихідне зображення є згортою вхідного сигналу з імпульсним відгуком. З цього твердження та співвідношення (5.47) випливає такий факт. В ідеальній системі імпульсний відгук дорівнює дельта функції:

$$h(x, y, x_0, y_0) = \delta(x, y, x_0, y_0). \quad (5.49)$$

Очевидно, що імпульсний відгук $h(x, y, x_0, y_0)$ реальної системи можна отримати в ситуації, коли елементи реальної системи виконують ту саму функцію, що й в деякій ідеальній оптичній системі, на виході якої формується δ -функція. Інакше кажучи, посилаючи певний вхідний сигнал на ідеальну систему на її виході, ми отримаємо δ -функцію, а посилаючи на вхід реальної системи такий самий сигнал ми отримаємо імпульсний відгук.

Для простоти будемо розглядати одновимірний випадок. Відомо, що $\mathfrak{F}\{1\} = \delta(\omega)$

Фізично така операція реалізується у системі, зображеній на рис. 5.5. де $\omega = \frac{k\xi}{\lambda f}$.

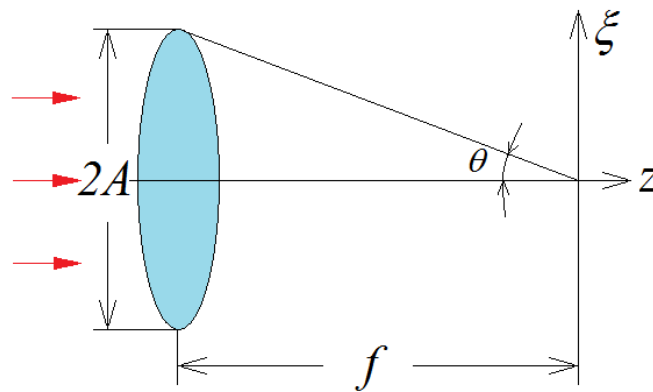


Рис. 5.5

Насправді, навіть при відсутності аберацій, існують «спотворюючі» фактори, які виникають внаслідок просторового обмеження світлових пучків, зокрема за рахунок того, що навіть ідеальні об'єктиви мають кінцеві розміри.

Отже, в реальній системі замість δ -функції на виході маємо таку величину:

$$\mathfrak{F}\{1\} = \int_{-\infty}^{\infty} P_A(x) e^{-j\omega x} dx = 2A \frac{\sin(\omega A)}{\omega A} = Er(\omega). \quad (5.50)$$

Саме ця величина визначає імпульсний відгук системи, «розмиття» вихідного зображення.

Відповідно довільне вихідне зображення формується згідно з таким співвідношенням:

$$I_{out}(x, y) = |U_{in}(x, y) \otimes Er(x, y)|^2. \quad (5.51)$$

Ширина цієї функції визначається відстанню до першого мінімуму. У двовірному випадку та випадку кругової симетрії елементів система (5.50) трансформується у вираз, який описує відому пляму Ейрі (див. рис. 5.6). Інакше її називають функцією розсіяння точки.



Рис. 5.6

Відстань до першого нуля описується співвідношенням

$$r = 1.22 \frac{\lambda}{2A} f. \quad (5.52)$$

Роздільну здатність об'єктива характеризують числовою апертурою:

Числова апертура об'єктива

$$NA = n \sin(\theta). \quad (5.53)$$

При параксіальному наближенні та оточуючому середовищі повітрі

$$NA = \sin(\theta) \approx \tan(\theta) = \frac{A}{f}. \quad (5.54)$$

Зазвичай на об'єктиві вказують так званий відносний отвір об'єктива:

$$D = \frac{2A}{f}, \quad (5.55)$$

знаючи який, можна оцінити роздільну здатність об'єктива.

6. ПОНЯТТЯ ПРО ГОЛОГРАФІЮ, ОПТИЧНУ ОБРОБКУ ІНФОРМАЦІЇ ТА ДЕЯКІ ІНШІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ОПТИКИ

6.1. Елементарні поняття про голографію [11,12]

Нехай маємо поле U_{ob} , розсіяне деяким об'єктом в результаті проходження хвилі через об'єкт або відбивання від нього. Спрямуємо у деяку площину елементарну опорну хвилю (плоску або сферичну) U_{ref} (див. рис. 6.1). В цій площині відбувається інтерференція цієї хвилі із хвилею, яка розсіяна об'єктом.

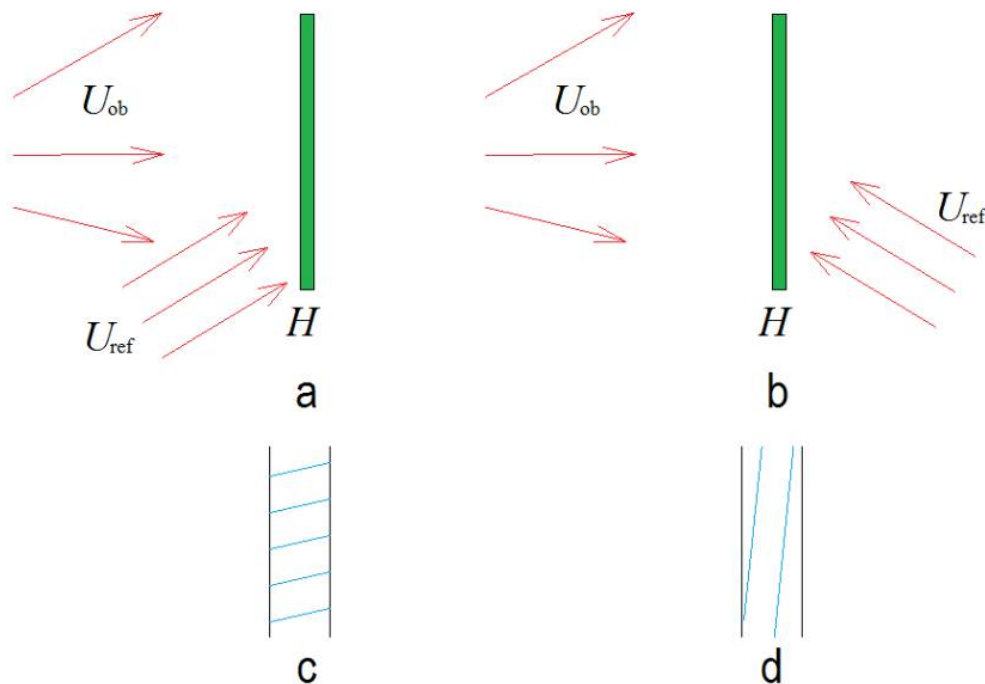


Рис. 6.1

В результаті суперпозиції в цій площині утвориться поле:

$$U = U_{ob} + U_{ref}. \quad (6.1)$$

Нехай для визначеності опорна хвиля паралельний пучок – плоска хвиля, комплексна амплітуда якої

$$p = U_{ref} = ae^{jkx \sin \alpha}. \quad (6.2)$$

Інтенсивність результуючої хвилі у площині спостереження описується співвідношенням

$$I = |U|^2 = |U_{ob}|^2 + |p|^2 + U_{ob}p^* + U_{ob}^*p. \quad (6.3)$$

Розмістимо у цій площині реєструюче середовище, почорніння якого (локальні зміни інших параметрів середовища, наприклад показник заломлення) формується пропорційне інтенсивності поля. Тоді пропускання утвореного транспаранта (амплітудне або фазове)

пропорційно інтенсивності результуючого поля (або ступеням від інтенсивності, якщо запис голограми нелінійний).

Освітимо отриманий транспарант деякою хвилею, яка відрізняється від опорної p лише кутом $\gamma = \alpha + \Delta$.

В параксiальному наближенні та невеликому Δ справедливо таке:

$$\sin(\alpha \pm \Delta) \approx \sin\alpha \pm \sin\Delta. \quad (6.4)$$

Тоді у випадку лінійного запису безпосередньо за транспарантом сформується поле:

$$U_{\text{рек}} = ae^{jkx\sin\gamma}(|U_{\text{об}}|^2 + |p|^2) + U_{\text{об}}ae^{-jkx(\sin\alpha - \sin\gamma)} + U_{\text{об}}^*ae^{jkx(\sin\alpha + \sin\gamma)}. \quad (6.5)$$

Відзначимо, що перший член відповідає 0-му порядку дифракції, другий – +1 і третій – -1 порядкам дифракції.

Унаслідок виконання при параксiальному наближенні та невеликому Δ виразу (6.4) маємо:

1. В напрямку γ спостерігається амплітудно модульована плоска хвиля.
2. В напрямку Δ відновлене поле $U_{\text{об}}$.
3. В напрямку $\sim 2\gamma + \Delta$ поле пропорційне спряженому початковому полю $U_{\text{об}}^*$.

Голограма може бути записана в розташуванні, наведеному на рис. (a,c) – тонка голограма та в розташуванні (b,d) – товста голограма.

Схема запису і відновлення тонкої голограми було запропоновано Лейтом і Упатніксом [11,12]. У цьому випадку товщина реєструючого середовища не перевищує величини порядку 10 мкм. Поверхні однакового почорніння (зміни локальних параметрів середовища) практично перпендикулярні поверхні голограми (рис. c).

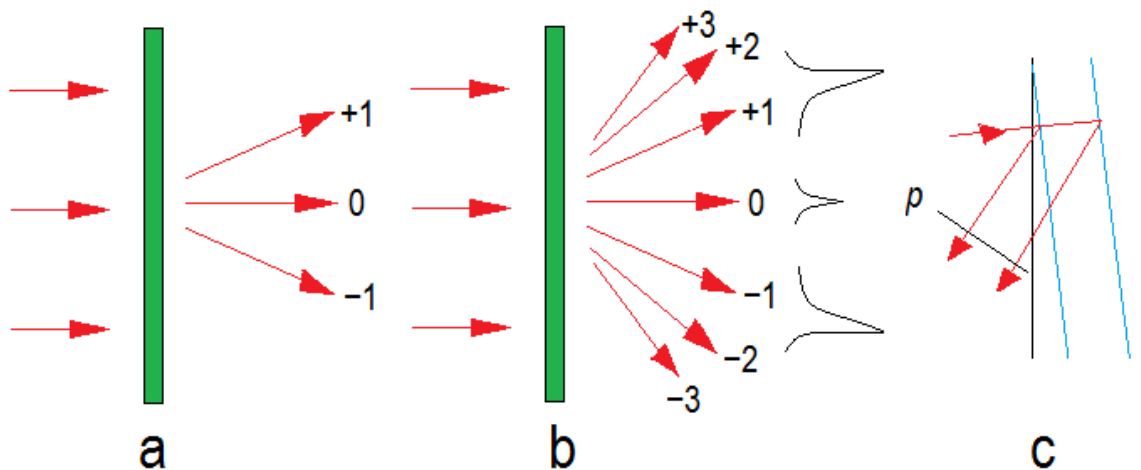


Рис. 6.2

Тонка *лінійна амплітудна голограма* формує всього 3 порядки (рис. 6.2a). Дифракційна ефективність (яка вимірюється у відсотках)

$$D = \frac{I_{+1}}{I_0} 100\%, \quad (6.6)$$

де I_{+1} – інтенсивність хвилі, відновленої у перший порядок; I_0 – інтенсивність опорної хвилі, що складає величину не більше 6%.

Нелінійна амплітудна (фазова) голограма (рис. 6.2b). Безліч порядків. Дифракційна ефективність нелінійної амплітудної голограми до 10%, фазової до 40%.

Схема запису і відновлення товстої голограми, яка представлена на рис. b,d, була запропонована Ю.Н. Денюсиком [11,12]. Товщина реєструючого шару зазвичай 15 мкм і більше. Поверхні однакового почорніння (зміни локальних параметрів середовища) практично паралельні (розташовані під невеликим кутом) до поверхні голограми. У цьому випадку (рис. 6.2c) дифрагований порядок формується як суперпозиція хвиль, відбитих від різних поверхонь почорніння. Як наслідок така голограма володіє кутовою і спектральною селективністю, оскільки сприятливі умови відновлення виконуються лише для певних кутів та довжин хвиль відновлених пучків, для яких після відбивання від поверхонь почорніння (поверхонь локальних максимумів показника заломлення) спостерігаються синфазність відбитих від різних поверхонь хвиль. При цьому формується мінімальна кількість дифракційних порядків. В ідеалі лише один дифракційний порядок. Дифракційна ефективність такої голограми може досягати 100%.

На закінчення цього параграфу розглянемо специфічний випадок відновлення голограми. Відновимо голограму не опорною хвилею, а об'єктною U_{ob} . Тоді у напрямку – 1 порядку розповсюджується хвиля, комплексна амплітуда якої $U_{ob}U_{ob}^*$. Якщо на шляху такої хвилі встановити об'єкт, то у його задній фокальній площині сформується поле:

$$U \sim \mathfrak{F}\{U_{ob}U_{ob}^*\} = \varphi_{ob} = F_{ob} * F_{ob}, \quad (6.7)$$

яке є не чим іншим, як автокореляційною функцією об'єктного поля.

6.2. Безопорна голограма

6.2.1. Принципи відновлення зображення з безопорної голограми

В цьому параграфі розглянемо специфічний запис та відновлення оптичної інформації під узагальненою назвою технологія безопорної голограми (БГ).

Уперше ідею запису відновлення такої голограми сформулював Ван Хірден у 1963 році [28]. В 1967 році В.П. Полянський та Л.В. Ковальський із співавторами в [29] дали чітке фізичне трактування процесам запису і відновлення БГ, оцінили кількісні характеристики відновлених зображень. Подальші дослідження технології безопорної голограми успішно проводилися співробітниками кафедри кореляційної оптики Чернівецького університету (див., наприклад, пос. 30-33).

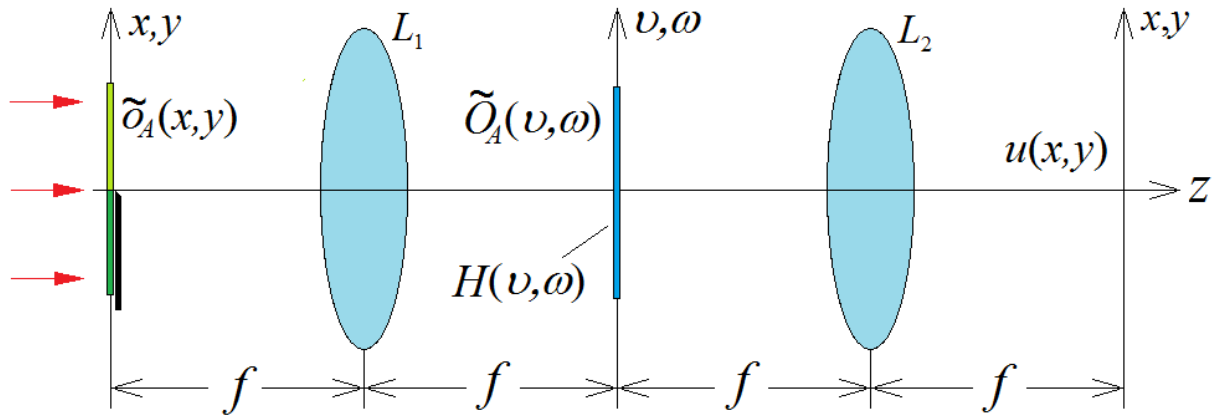


Рис. 6.3

Розглянемо основну ідею, яка покладена в основу такої технології. Для простоти аналітичного опису будемо розглядати випадок коли запис і відновлення БГ відбувається у схемі, аналогічній зображеній на рис. 6.3, тобто в схемі, яку умовно можна асоціювати із схемою запису і відновлення Фур'є-голограми.

Нехай плоска хвиля з одиничною амплітудою освітлює деякий транспарант. Природно, що за транспарантом поле визначається пропусканням цього транспаранта. Поле, сформоване об'єктом (його комплексну амплітуду), умовно розділимо на «читаючу» «А» і «фантомну» «В» частини.

$$o(x, y) = o_A(x, y) + o_B(x, y), \quad (6.7)$$

де, $o_A(x, y)$, $o_B(x, y)$ – комплексні амплітуди читаючої та фантомної частин.

Після Фур'є-перетворення за допомогою об'єктива L_1 комплексна амплітуда в частотній площині v, ω описується співвідношенням

$$O(v, \omega) = O_A(v, \omega) + O_B(v, \omega), \quad (6.8)$$

де – $O(v, \omega) = \mathfrak{F}\{o(x, y)\}$ – Фур'є-образ об'єктного поля.

Під безпорною голограмою будемо розуміти зафіксовану на фотоносії інтенсивність цього поля. Відповідно лінійна безпорна голограма (нелінійна голограма детально розглянута в [32,33]) може бути описана співвідношенням

$$\begin{aligned} H(v, \omega) \sim I(v, \omega) &= |O(v, \omega)|^2 = \\ &= |O_A(v, \omega)|^2 + |O_B(v, \omega)|^2 + O_A(v, \omega)O_B^*(v, \omega) + O_A^*(v, \omega)O_B(v, \omega). \end{aligned} \quad (6.9.)$$

На стадії відновлення закриємо частину об'єкта «В» і будемо освітлювати БГ полем $\tilde{o}_A(x, y)$. У площині голограми v, ω маємо поле $\tilde{O}_A(v, \omega)$. Поле після голограми має вигляд:

$$\begin{aligned}
U(v, \omega) &= \tilde{O}_A(v, \omega) H(v, \omega) = \\
&= [\tilde{O}_A(v, \omega) O_A^*(v, \omega)] O_A(v, \omega) + I \\
&\quad + \tilde{O}_A(v, \omega) |O_B(v, \omega)|^2 + II \\
&\quad + [\tilde{O}_A(v, \omega) O_A^*(v, \omega)] O_B(v, \omega) + III \\
&\quad + [\tilde{O}_A(v, \omega) O_B^*(v, \omega)] O_A(v, \omega) + IV
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Після оберненого Фур'є-перетворення за допомогою об'єктива L_2 , враховуючи обернену теорему для кореляції і згортки, комплексна амплітуда відновленого поля в площині зображення описується співвідношенням

$$u(x, y) = o_A \otimes \varphi_{\tilde{A}A} + \tilde{o}_A \otimes \varphi_{BB} + o_B \otimes \varphi_{\tilde{A}A} + o_A \otimes \varphi_{\tilde{A}B}, \tag{6.11}$$

де φ_{ik} – відповідні кореляційні функції.

Перший висновок випливає з аналізу четвертої складової (6.11). Оскільки в загальному випадку частини « $\tilde{A}$ » та « B » різні, то ця частина відновленого поля буде формувати шумову складову внаслідок того, що $\varphi_{\tilde{A}B} \rightarrow 0$.

Якщо частини « $\tilde{A}$ » та « A » кардинально відрізняються за структурою, то кореляційна функція $\varphi_{\tilde{A}A}$ також прямує до нуля і, як наслідок, перша і третя складові в (6.11) також прямують до нуля. Відповідно члени $o_A \otimes \varphi_{\tilde{A}A}$ та $o_B \otimes \varphi_{\tilde{A}A}$, як і четвертий, формують чисто шумову компоненту.

Абсолютно інша ситуація виникає, якщо кореляційна функція $\varphi_{\tilde{A}A}$ прямує до δ -функції. Тоді

$$o_B \otimes \varphi_{\tilde{A}A} \rightarrow o_B. \tag{6.12a}$$

та

$$o_A \otimes \varphi_{\tilde{A}A} \rightarrow o_A. \tag{6.126}$$

Перетворення $\varphi_{\tilde{A}A}$ на δ -функцію вимагає виконання двох умов:

1. Відновлююча хвиля $\tilde{o}_A$ подібна до тієї o_A , яка використовувалася при запису безопорної голограми.
2. Структура полів $\tilde{o}_A$ і o_A «дрібна». Інакше кажучи, масштаб флуктуації характеристик полів $\tilde{o}_A$ і o_A такий, що їх довжина кореляції менша, ніж найменший елемент зображення полів.

Саме тоді можна стверджувати, що закрита фантомна частина об'єктного поля (принаймні його амплітудна модуляція) буде відновлюватися.

Зауважимо, що поруч із частиною поля o_B буде спостерігатися частина поля $\tilde{o}_A + o_A$, тобто у випадку коли поля $\tilde{o}_A$ і o_A подібні, буде формуватися повне зображення. При цьому внаслідок того, що зображення читаючої частини складається як сума полів $\tilde{o}_A$ і o_A , то в загальному випадку інтенсивність «читаючої» та фантомної частин відновленого зображення різні.

Відзначимо, що ми розглядали Фур'є-схему запису і відновлення безопорної голограми. Як відомо (дивись параграф 2.3.2), система, в якій реалізується Фур'є-перетворення, просторово-інваріантна, тобто при зсуві вхідного поля поле в частотній

площині не змінюється і лише набуває лінійний фазовий зсув, який приводить до зміщення на відповідну величину сигналу у вихідній площині.

Разом з тим «безлінзовий», «френелівський» запис безопорної голограми характеризується тим, що навіть невеликі зміщення початкового поля у вхідній площині на величину сумірну із розмірами зони кореляції (зони поля, де його характеристики можна вважати сталими) приводить до зникнення фантомного зображення. Зазвичай такі зсуви мають величини порядку 1-5 мкм.

На закінчення цього параграфу треба констатувати, що останнім часом інтерес до використання безопорної голограми як певного елемента, який використовується в асоціативних пристроях запам'ятовування інформації, пристроїв кодування інформації, знову починає зростати (див., наприклад, 34-41).

6.2.2. Передаючі властивості безопорної голограми [31]

В цьому параграфі спробуємо з'ясувати, за яких умов відновлене зображення O_B має «задовільну» якість і може бути зіставлене з початковим.

Очевидно, що відновлене зображення повинно відповідати хоча б таким критеріям якості:

1. Воно повинно бути подібним до оригіналу. Зокрема, повинні відновлюватися найменші за розмірами елементи початкового зображення.
2. Відношення сигнал/шум у відновленому зображенні повинно бути достатньо високим, тобто таким, щоб на фоні шумової складової можна було ідентифікувати початкове зображення.

На основі експериментальних даних відомо, що фантомне зображення дифузно-розсіюючих об'єктів із дрібною фазовою структурою (типу матового скла) передаються безопорною голограмою практично без спотворень. Тому очевидно можна стверджувати, що поля, які розсіяні дрібноструктурними об'єктами, що вносять значну фазову модуляцію (набагато більше ніж 2π в кожному елементі структури (зоні кореляції)), можуть бути віднолені із БГ із високою якістю.

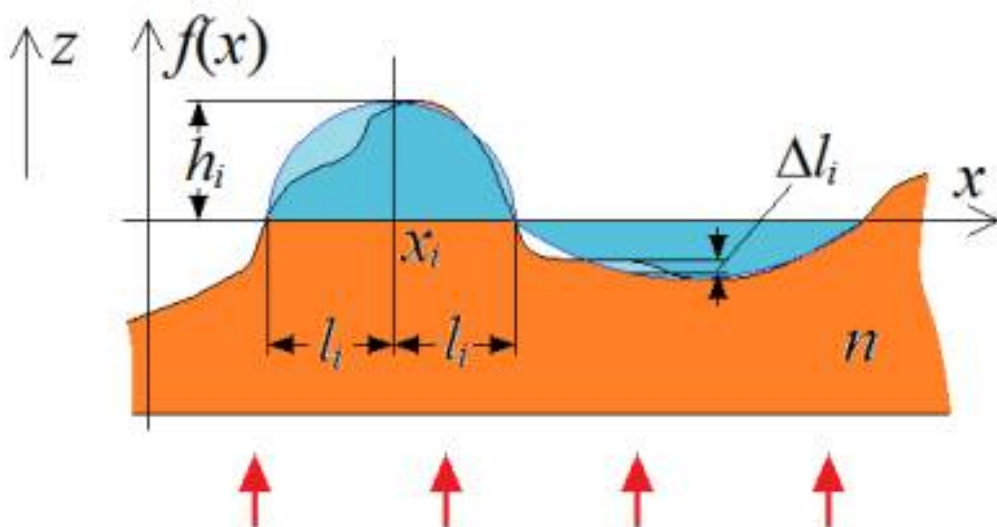


Рис. 6.4.

Саме тому розглянемо випадки, коли початкове поле промодульоване тільки за амплітудою або фазова модуляція початкового поля відносно «слабка».

Спробуємо запропонувати модель, коли транспарант, що голографується, вносить слабку фазову модуляцію. Модуляція фази у початковому полі схематично зображена на рис. 6.4. Будемо вважати, що всі значення фази об'єктного поля вище осі x більші, ніж фаза віртуальної плоскої хвилі із фронтом вдовж осі x , а нижче осі фронт початкової хвилі відстає від цієї плоскої хвилі.

Не втрачаючи загального змісту розгляду, будемо аналізувати одновимірний випадок.

Будемо вважати, що модуляція фази незначна, якщо виконується співвідношення

$$\Phi_i \leq 4kl_i. \quad (6.13)$$

де $k = 2\pi/\lambda$ – хвильове число, а $2l_i$ – розміри i -ої зони кореляції. При цьому будемо вважати, що в межах зони кореляції інтенсивність об'єктного поля постійна.

Можна показати, що зміна фази (у випадку слабкої фазової модуляції в межах зони кореляції $h_i \ll l_i$) аналогічна зміні фази, яка вноситься розсуючою, або збираючою лінзою і має вигляд

$$\Phi_i(x - x_i) = \begin{cases} k\alpha_i h_i (n - 1) \left[\frac{(x - x_i)^2}{l_i^2} + 1 \right], & |x - x_i| \leq l_i, \\ 0, & \text{in other points} \end{cases} \quad (6.14)$$

де α_i , дорівнює $+1$ у випадку розсуючої і -1 у випадку збираючої лінзи.

Виходячи з такої моделі поле, промодульоване читаючою частиною об'єкта, описується співвідношенням:

$$o_A(x) = \sum_i^M A_i P_{li}(x - x_i) e^{j\Phi_i(x - x_i)}. \quad (6.15)$$

де A_i – амплітудна модуляція, яка вноситься i -ою зоною кореляції; M – кількість вторинних джерел (зон кореляції) поля, яка відповідає читаючій частині.

Співвідношення для третього члена $[\tilde{O}_A(v, \omega) O_A^*(v, \omega)] O_B(v, \omega)$ виразу (6.10), при умові, що ($o_A = \tilde{o}_A$), можна перетворити до вигляду

$$U(\omega) = O_B(\omega) \sum_{ik}^{MM} A_i A_k e^{-j(x_i - x_k)} \mathfrak{F}\{P_{li}(x) e^{j\Phi_i(x)}\} \mathfrak{F}^*\{P_{lk}(x) e^{j\Phi_k(x)}\}. \quad (6.16)$$

Очевидно, що фантомне зображення утворюється, коли $k = i$. З (6.16) випливає, що тоді сума у цьому виразі – завжди додатна величина. Інакше цю суму можна записати як

$$T(\omega) = |O_A(\omega)|^2|_{i=k}. \quad (6.17)$$

Тоді процес, який відповідає спотворенню спектра $O_B(\omega)$, можна інтерпретувати як фільтрацію спектра $O_B(\omega)$ на певному амплітудному транспаранті із пропусканням $T(\omega)$. Можна показати, що процес перетворення поля, який відповідає фантомній частині, не набуває нових особливостей, якщо записувати не Фур'є, а Френелівську голограму.

Очевидно, якщо

$$T(\omega) \rightarrow 1, \quad (6.18)$$

тим менші спотворення вносяться до спектра $O_B(\omega)$.

Чим більше в площині голограми перетин пучків (область D), що формуються вторинними джерелами (зонами кореляції), тим більше наближається пропускання $T(\omega)$ до 1. Після оберненого Фур'є-перетворення поле в області фантомного зображення, сформованого у вихідній площині, описується виразом

$$u_f = o_B \otimes g(x), \quad (6.19)$$

де $g(x) = o_A * o_{A|i=k}$.

Чим ближче наближається $g(x)$ до δ -функції, тим більша схожість u_f із початковим об'єктним полем o_B .

Будемо вважати, що спектр $O_B(\omega)$ передається близьким до ідеального, якщо розмивання точки зображення o_B після відновлення з безпорної голограми не перевищує розмивання, яке лімітується дифракційними обмеженнями, які впливають з кінцевих розмірів голограми та вхідного отвору об'єктива $2A$.

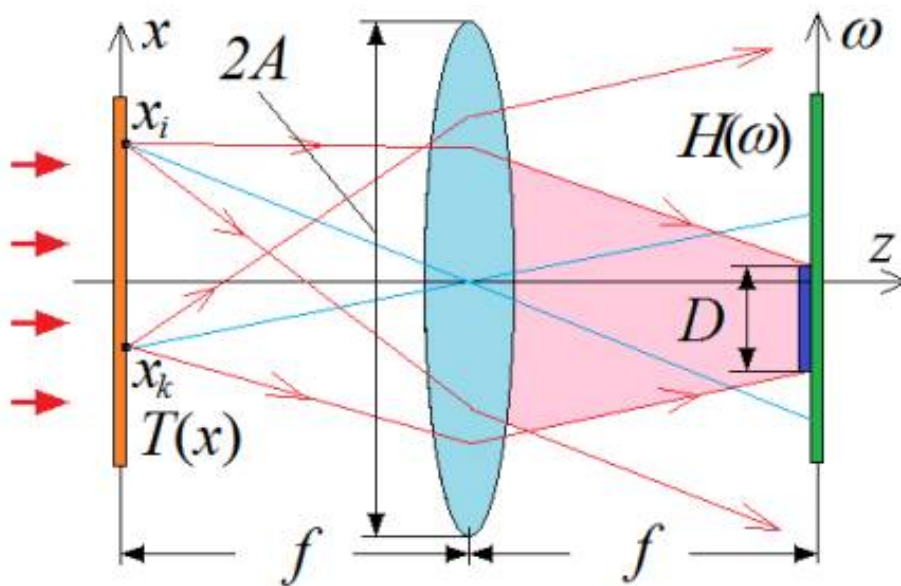


Рис. 6.5.

Припустимо, що розподіл величин, які відповідають максимальній фазовій модуляції у зоні кореляції $\rho(kh_i)$ в граничному полі, безпосередньо за об'єктом, описується функцією розподілу, яка наближається до Гауссової. Тоді, після інтегрування та усереднення по h_i $g(x)$, описується співвідношенням

$$g(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau) P(\tau|x) \frac{1}{2\sqrt{2}\sigma_{\Phi}\tau^2|x|} \operatorname{erf}[2\sqrt{2}\sigma_{\Phi}\tau|x|(1 - \tau|x|)] d\tau, \quad (6.20)$$

де $P(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1 \\ 0, & \text{in other points} \end{cases}$; $\tau = 1/2l_i$ – відповідає густині розміщення зон кореляції в граничному полі; $\rho(\tau)$ – функція розподілу випадкової величини τ ; σ_Φ – дисперсія фази в граничному полі.

Нехай розподіл випадкової величини τ має вигляд Релеївської функції розподілу:

$$\rho(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2\sigma^2}\right), & 0 < \tau < \infty \\ 0, & \text{in other points} \end{cases}, \quad (6.21)$$

де $\sigma = \frac{1}{2l}$ – дисперсія величини τ ; $2l$ – середні розміри зони кореляції.

Після усереднення по τ зведена до одиниці $g(x)$ в інтервалі $0, 4\pi$ задовільно описується співвідношенням

$$g(x) = \left\{ \left[1 - \exp\left(-\frac{\sigma_\Phi}{\sqrt{2\pi^3}}\right) \right] \times \exp(-\sqrt{2\pi}\sigma_\Phi|X|) + \exp\left(-\frac{\sigma_\Phi}{\sqrt{2\pi^3}}\right) \right\} \times \\ \times \left\{ \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}|X|\right) + \frac{2}{\pi}|X| \left[\exp\left(-\frac{\pi}{4X^2}\right) - 1 \right] \right\}, \quad (6.22)$$

де $X = \frac{x}{2l}$.

Тоді пропускання амплітудного фільтра $T(\omega)$ має вигляд

$$T(\omega) = \Im\left\{g\left(\frac{x}{2l}\right)\right\}. \quad (6.23)$$

Рис. 6.6 ілюструє поведінку $g(x)$ в залежності від σ_Φ . На цьому ж рисунку для порівняння наведено розміри середньої зони кореляції в початковому зображенні (прямокутний імпульс). З (6.22) і рис. 6.6 випливає, що для більшості реальних об'єктів ($2l$ не перевищує величини порядку 10 мкм) при фазових модуляціях приблизно $2 \div 4\pi$ $g(x)$ достатньо вузька, а ідентичність зображення і оригіналу визначається характеристиками оптики системи спостереження. Отже, в цьому випадку, структура об'єкта, що голографується, передається з високою якістю. Проте, якщо для відновлення зображення використовувати читаючі частини у вигляді статистичних амплітудних транспарантів, якість відновленого зображення падає і розмиття точки зображення зростає в 4 рази.

Ситуація повинна поліпшитися, якщо замість голограми Фур'є записувати голограму Френеля, оскільки з наближенням голограми до об'єкта зміна пропускання амплітудного фільтра, який формується читаючою частиною, набуває плавного характеру. В цьому випадку спектр O_v передається з меншими спотвореннями.

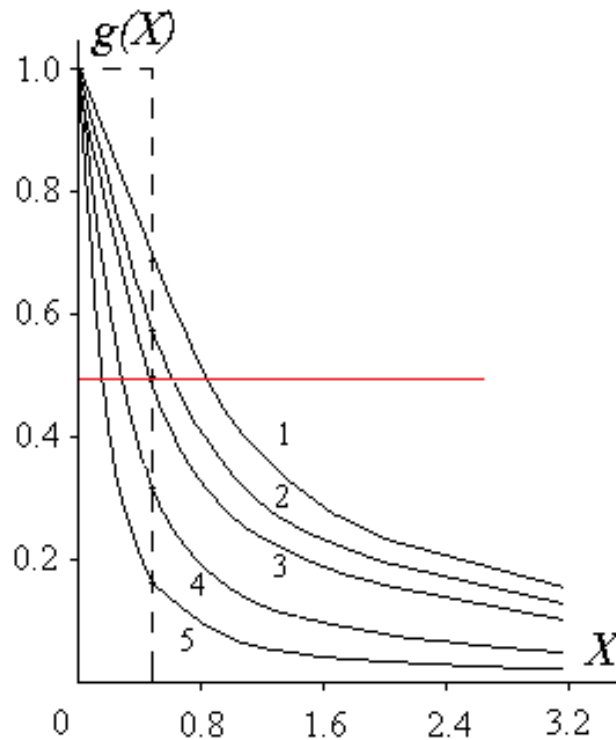


Рис. 6.6. Залежність $g(x)$ від X та дисперсії фази σ_Φ .

1 – $\sigma_\Phi = 0$; 2 – $\sigma_\Phi = \pi/2$; 3 – $\sigma_\Phi = \pi$; 4 – $\sigma_\Phi = 2\pi$; 5 – $\sigma_\Phi = 4\pi$. Штриховою лінією для порівняння наведено прямокутний імпульс, ширина якого вказує на розміри середньої зони кореляції в початковому зображенні.

6.2.3. Оцінка відношення сигнал/шум у зображенні, що відновлене з безопорної голограми
Сформулюємо ряд припущень для проведення такої оцінки.

1. На першому етапі, оскільки очевидно, що відношення сигнал/шум при голографуванні фазових об'єктів методом безопорної голограми вище, ніж амплітудних. Будемо вважати, що зображення, які голографуються, сформовані полями, дисперсія фази яких значно більше $\pi/2$.

На другому етапі проведемо аналіз відновлених зображень, які формуються амплітудними об'єктами.

6.2.3.1. Природа шумів у безопорній голографії [29]

Представимо початкове поле як суперпозицію точкових джерел, якими за умови дрібноструктурності поля виступають зони кореляції (див. рис. 6.7). Такі джерела позначені квадратами у лівій частині рисунка. При цьому червоні квадратики відповідають джерелам розміщеним у читаючій частині, а зелені у фантомній. Голограма на рисунку позначена чорною лінією у правій частині рисунка.

Розглянемо елементарні решітки, які при цьому утворюються:

1. Перший тип решіток – це решітки, які утворюються джерелами з читаючої (частина А) та фантомної (частина В) частин початкового поля. Решітки типу 1А1В або 3А3В (кожне джерело з А утворює решітку із кожним джерелом з В).

2. Решітки типу 1A2A (кожне джерело з читаючої частини А утворює решітку з кожним подібним джерелом).

3. Решітки типу 2B3B (кожне джерело з фантомної частини В утворює решітку з кожним подібним джерелом з іншою позицією).

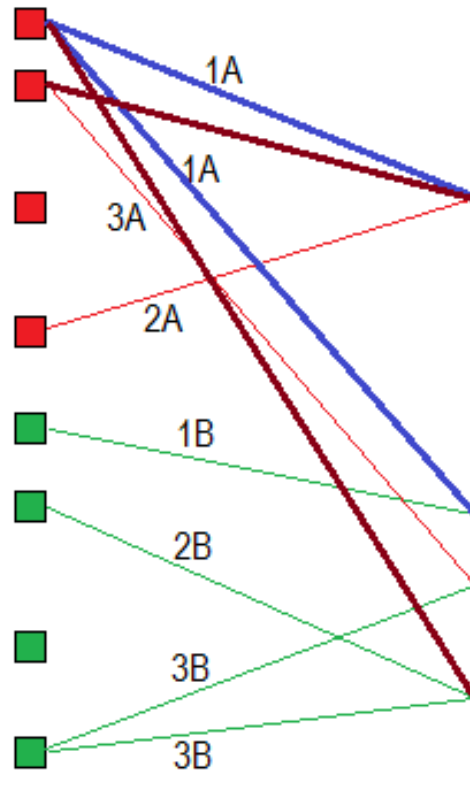


Рис. 6.7

В процесі відновлення голограми точкові джерела (зони кореляції) читаючої частини опромінують всі типи решіток:

1. Наприклад, джерелом 1A читається решітка типу 1A1B (синя лінія) відновлюються «правильні» елементарні поля, що відповідають відновленню фантомного зображення. Кількість таких елементарних відновлених полів M .

2. Подібні «правильні» елементарні поля відновлюються джерелом 1A, якщо читається решітка типу 1A2A. Відбувається відновлення зображення читаючої частини. Кількість таких відновлених полів також M .

3. Решта полів, відновлені джерелом 1A, відновлюють шумову компоненту, оскільки відбувається зчитування «чужих» решіток, записаних іншими точковими джерелами:

- Джерелом 1A зчитується чужа решітка типу 3A3B. Кількість відновлених полів $M \times (N-1)$.
- Джерелом 3A зчитується чужа решітка типу 1A2A. Кількість відновлених полів $M \times (M-1)$.

6.2.3.2. Двовимірна безопорна голограма [31]

Корелятор Ван-дер-Люгта [8,14,43,48,49]

Нехай на вхід пристрою, зображеного на рисунку 6.8а, подається поле U_0 . У Фур'є-площині (ω) маємо поле, пропорційне Фур'є-образу від поля U_0

$$F(\omega) = \mathfrak{F}\{U_0\}. \quad (6.24)$$

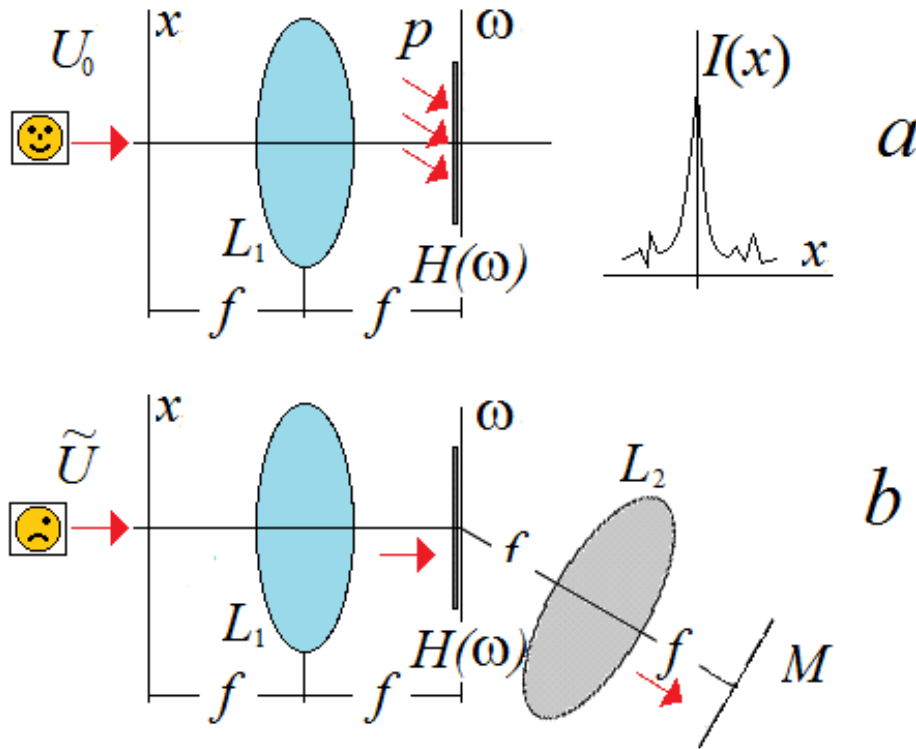


Рис. 6.8

Спрямуємо у Фур'є-площину плоску опорну хвилю p . Тоді сформується поле:

$$U(\omega) = F(\omega) + p. \quad (6.25)$$

Розмістимо у цій площині реєструєче середовище і зафіксуємо інтенсивність результуючого поля:

$$I(\omega) = |F(\omega)|^2 + |p|^2 + F(\omega)p^* + F^*(\omega)p. \quad (6.26)$$

Нехай пропускання отриманого фільтра пропорційне цій інтенсивності $H(\omega) \sim I(\omega)$.

Подамо на вхід пристрою поле $\tilde{U}$. Після голограми маємо деяке відновлене поле. У виразі нижче наведений лише останній додаток, який характеризує поле, що розповсюджується у напрямку опорної хвилі:

$$\tilde{U}(\omega) = \dots + \tilde{F}(\omega)F^*(\omega)p. \quad (6.27)$$

За допомогою об'єктива L_2 (рисунок б) здійснимо обернене Фур'є-перетворення. На виході у задній фокальній площині об'єктива L_2 маємо поле:

$$U(x) = \dots + \tilde{U} * U_0. \quad (6.28)$$

Якщо поле $\tilde{U}$ подібне до поля U_0 ($\tilde{U} \rightarrow U_0$), у вихідній площині маємо кореляційний пік, якій наближається до автокореляції φ_{00} . Якісний розподіл інтенсивності у вихідній площині наведений справа на рис. а.

Відзначимо, що, як і у випадку безопорної голограми, навіть невеликий зсув голограми фільтра у частотній площині приводить до зникнення кореляційного піку. Детально з цим ефектом можна ознайомитися в [43]

Для подальшого розгляду будемо використовувати таку модель граничного поля, поля сформованого безпосередньо за вхідною площиною. Знову для аналізу відношення сигнал/шум використаємо представлення граничного поля сукупністю точкових джерел.

Тоді поля o_A та o_B можуть бути записані у вигляді

$$\begin{aligned} o_A(x,y) &= \sum_k^M A_k e^{j\Phi_k} \delta(x-x_k, y-y_k) \\ o_B(x,y) &= \sum_i^N A_i e^{j\Phi_i} \delta(x-x_i, y-y_i) \end{aligned} \quad (6.29)$$

Величини $A_k, A_i, \Phi_k, \Phi_i, x_k, x_i, y_k, y_i$ різні в читаючій та фантомній частинах і не збігаються навіть при рівності індексів k та i . Проте нехай статистика цих величин (функції розподілу, середні величини, дисперсії) в обох частинах поля однакова.

Нехай фаза елементарних джерел розподілена в межах інтервалу $0, 2n\pi$ (n достатньо велике). Тоді:

- фантомне зображення передається без суттєвих спотворень.
- враховуючи той факт, що $\Phi = \Phi + 2n\pi$, та факт, що n дійсно велике, практично для будь-якої функції розподілу фаз можна вважати, що на інтервалі $-\pi \div \pi$ фаза розподілена практично рівномірно.

Тоді функцію розподілу фази можна визначити як

$$\rho(\Phi) \approx \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi \leq \Phi \leq \pi \\ 0, & \text{in other points} \end{cases} \quad (6.30)$$

Можна показати, що кількість шумових сплесків в області довільної точки i фантомного зображення, відновленого з безопорної голограми, найбільша у випадку, коли кількість елементарних джерел у читаючій частині максимально велика (така як було при запису).

При цьому будемо вважати, що якщо відновлені точки зображення (шумові сплески) попадають в одну зону кореляції, то можна нехтувати їх розбіжністю у позиціях і вважати, що всі вони локалізовані однаково в «центральної» точці зони.

Тоді поле в околі довільної точки i (сформоване як корисними, так і шумовими сплесками) можна представити у вигляді

$$u(x_i, y_i) \cong A_i M \bar{A}^2 \delta(x - x_i, y - y_i) \{ e^{j\Phi_i} + e^{j\Phi_i} (1 - M) \sum_l^M a_l e^{j\Psi_l} + \frac{1}{M} \sum_n^M b_n e^{j\Psi_n} \}, \quad (6.31)$$

де $\bar{A}^2$ – середня локальна інтенсивність зображення; величини Ψ_l, Ψ_n – випадкові величини – різноманітні лінійні комбінації Φ_i і Φ_k , які, як випливає з вищесказаного, також можна вважати рівномірно розподіленими на інтервалі $-\pi \div \pi$, a_l і b_n – різні добутки величин A_i і A_k ; $\bar{a}_l = 1$, $\bar{b}_n = \frac{\bar{A}}{A_n}$.

Перший член в дужках (6.31) – не що інше, як зображення точки i , другий – “власні” шуми точки i (шуми, які виникають за рахунок освітлення i -тої елементарної решітки джерелами читаючої частини, якщо не виконуються умови формування фантомного зображення). Відзначимо, що цей доданок виглядає однаково для будь-якої довільної точки i . Третій доданок асоціюється з шумами сусідніх точок.

Саме наявність цього доданка дозволяє зрозуміти різницю між корелятором Ван-дер-Люгта та безопорною голограмою, оскільки у випадку корелятора третій доданок відсутній.

Представляючи другий та третій доданки як суми випадкових фазорів (див. пос. 34) та проводячи усереднення, можна отримати таке співвідношення для відношення сигнал/шум у точці i :

$$Q = \frac{1 + \frac{1}{M} + \frac{\bar{A}^2}{4A_i^2}}{\frac{1}{M} + \frac{\bar{A}^2}{4A_i^2}} \rightarrow \frac{\bar{A}^2 + 4A_i^2}{\bar{A}^2} = 1 + 4 \frac{A_i^2}{\bar{A}^2} \sim 5. \quad (6.32)$$

З (6.32) випливає, що при достатньо великому M середнє за площею безопорної голограми відношення сигнал/шум $\bar{Q}$ для двовимірної безопорної голограми складає величину близьку до 5.

Разом з тим, якщо фантомну та читаючу частини рознести в просторі на величину більшу, ніж лінійні розміри об'єктного поля, відношення сигнал/шум залежить від співвідношення кількості точкових випромінювачів в обох частинах.

Можна показати, що у випадку, коли кількість вторинних джерел у читаючій частині значно більша, ніж ця величина у фантомній частині, відношення сигнал/шум наближається до величини відношення сигнал/шум, яке спостерігається в кореляторі Ван-дер-Люгта. При рівності кількості вторинних джерел у фантомній і читаючій частинах відношення сигнал/шум складає величину близьку до 16.

При цьому можна зробити такий додатковий висновок. Для корелятора Ван-дер-Люгта відношення сигнал/шум (якщо не враховувати шумів фотоносія) сягає величини $Q = M + 1$.

Нелінійна двовимірна голограма

Як відомо, ситуація тонкої і лінійної (взагалі кажучи, амплітудної, або голограми з дуже малою фазовою модуляцією) голограми є ідеалізованими випадками. Реальні

фотоносії тією або іншою мірою мають нелінійні властивості. Більше того, всі фазові голограми в певною мірою можуть розглядатися як нелінійні, оскільки такі голограми характеризуються появою додаткових гармонічних складових у відновленому полі. Тому, внаслідок нелінійного запису безопорної голограми, кількість шумових сплесків, які відповідають третьому членові у виразі (6.31), збільшується. Разом з тим у першому і другому членах кількість шумових сплесків залишаються без зміни.

Із врахуванням особливостей нелінійного запису (6.32) перетворюється до такого співвідношення:

$$Q = 1 + \left[\frac{1}{M} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{d^2} \frac{J_d^2}{J_1^2} \left(1 - \frac{1}{2d} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (6.33)$$

де J_d і J_1 – усереднені коефіцієнти розкладу в ряд Фур'є; d – номер гармоніки пропускання елементарних решіток.

З виразу (6.33) випливає, що шумові сплески, які відповідають гармонікам із d більше 2, не призводять до суттєвої зміни відношення сигнал-шум, незалежно від конкретного співвідношення між J_d і J_1 . Це зумовлене тим, що зі збільшенням d шумові сплески розподіляються по значно більшій площі, яка суттєво більша площі, що займається об'єктом.

6.2.3.3. Тривимірна безопорна голограма [31]

Як відомо тривимірній (товстій) голограмі властива так звана кутова селективність, тобто результат відновлення залежить від кута, під яким така голограма освітлюється, або іншою мовою, наскільки кут, під яким освітлюється голограма, близький до кута, при якому така решітка записувалася. Відповідно при великій різниці цих кутів інтенсивність відновленої хвилі прямує до нуля.

Зробимо ряд припущень:

- умови запису безопорної голограми повністю зберігаються при її відновленні;
- усадки фотошару, які змінюють оптимальні кути опромінення голограми, не беруться до уваги;
- аналіз будемо проводити в скалярному наближенні для випадку, коли реалізується наближення далекої зони, тобто розповсюдження хвиль описується в термінах Фур'є-перетворення.

Відзначимо, що поляризаційні зміни, які можуть виникати в процесі відновлення безопорної голограми, приведуть тільки до зміни шумової складової та у зв'язку з виконанням першої та другої умов не приведуть до суттєвої зміни корисного сигналу. Ефекти, які пов'язані з тривимірним характером безопорної голограми її кутовою селективністю, мало впливають на власні шуми у полі відновленого зображення. Внаслідок цього в першому наближенні можна для шумів, які входять у третій член (6.31), ввести деяку узагальнену функцію кутової селективності, $f\left(\frac{m_1\eta}{\sqrt{M}}, \frac{m_2\eta}{\sqrt{M}}, \frac{1}{f_Y}\right)$, яка приведе до відповідного зниження амплітуди шумових сплесків. Нехай функція $f\left(\frac{m_1\eta}{\sqrt{M}}, \frac{m_2\eta}{\sqrt{M}}, \frac{1}{f_Y}\right)$ описується залежністю, яка близька до Гауссової:

$$f\left(\frac{m_1\eta}{\sqrt{M}}, \frac{m_2\eta}{\sqrt{M}}, \frac{1}{f\gamma}\right) = \exp\left(-\frac{(m_1+m_2)^2\Omega^2}{M\gamma^2}\right), \quad (6.34)$$

де $\Omega = \eta/f$ – кутова апертура, під якою спостерігається об'єкт, що голографується; f – фокусна відстань Фур'є-перетворюючих об'єктивів; η – поперечні розміри об'єкта, який голографується; γ – певний параметр кутової селективності (у радіанах).

Аргументи функції $\frac{m_1\eta}{\sqrt{M}}, \frac{m_2\eta}{\sqrt{M}}$ визначають координати вторинного джерела, яке відновлює «чужу» ґратку. Відзначимо, що номери m_1 і m_2 відраховуються від вторинного джерела читаючої частини, яке відновлює «свою» ґратку. Таким чином, чим далі знаходиться точка, шуми якої роблять внесок у шумове поле точки i , тим m_1 і m_2 більші.

Враховуючи, що $\frac{\eta}{\sqrt{M}}$ – величина, яка обернена до лінійної густини вторинних джерел; $\frac{m_1\eta}{\sqrt{M}}, \frac{m_2\eta}{\sqrt{M}}$ – координати деякої області сусідніх із точкою i точок зображення, кількість шумових сплесків в області точки i визначається співвідношенням $M\left(1 - \frac{m_1}{\sqrt{M}}\right)\left(1 - \frac{m_2}{\sqrt{M}}\right)$.

У цьому випадку (6.31) перетвориться на співвідношення

$$\begin{aligned} u(x_i, y_i) \cong & A_i M \bar{A}^2 \delta(x - x_i, y - y_i) \times \\ & \times [e^{j\Phi_i} + \frac{1}{M} e^{j\Phi_i} \sum_k^M a_k e^{j\Phi_k} + \\ & + \frac{1}{M} \sum_{m_1 m_2} \frac{\sqrt{M} \sqrt{M}}{m_1 m_2 M \gamma^2} e^{-(m_1+m_2)^2 \Omega^2} \sum_{m_1 m_2} \frac{\sqrt{M}^{1-m_1}}{\sqrt{M}} \frac{\sqrt{M}^{1-m_2}}{\sqrt{M}} b_{m_1 m_2} e^{j\Psi_{m_1 m_2}}] \end{aligned} \quad (6.35)$$

$$\text{де } \bar{b}_{m_1 m_2}^2 = b^2 = \frac{\bar{A}^2}{A_i^2}$$

Середнє відношення сигнал/шум можна записати у вигляді

$$Q = 1 + \left\{ \frac{1}{M} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{d^2} \frac{J_d^2}{J_1^2} \left[\frac{\sqrt{\pi}\gamma}{2\sqrt{2}\Omega} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}\Omega}{\gamma}\right) + \frac{\gamma^2}{4d\Omega^2} \left(e^{-\frac{2\Omega^2}{\gamma^2}} - 1 \right) \right]^2 \right\}^{-1}. \quad (6.36)$$

Можна розглянути такі граничні випадки:

1. $\gamma \rightarrow 0$. Випадок тонкої нелінійної голограми (6.36) переходить у (6.33)
2. $\gamma \rightarrow \infty$. Випадок товстої голограми з «абсолютною» кутовою інтенсивністю. $Q \rightarrow M + 1$, тобто величина відношення сигнал/шум наближається до такої величини у кореляторі типу Ван-дер-Люгта.

На рис. 6.9 в логарифмічних одиницях наведена залежність величини відношення сигнал/шум від величини кутової селективності, яка апіорі зростає при збільшенні товщини голограми.

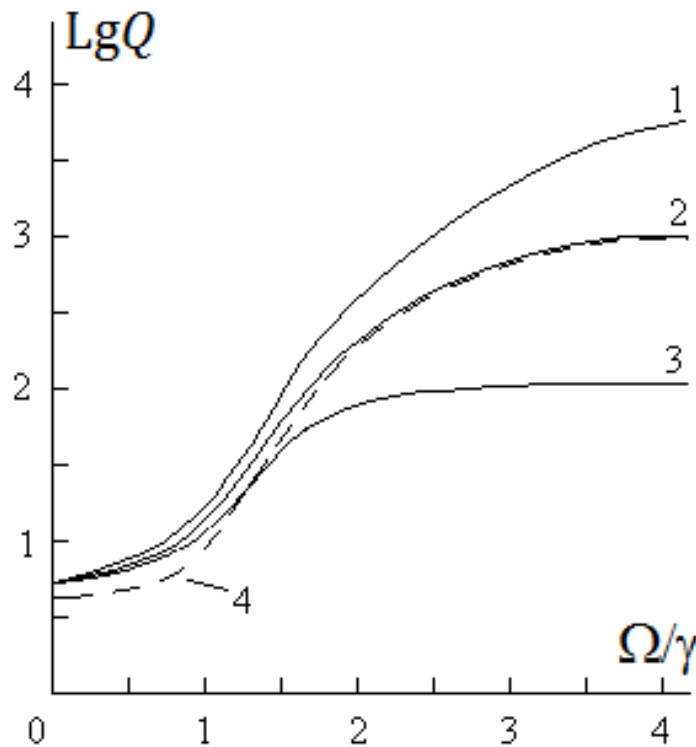


Рис. 6.9. Графік залежності логарифму відношення сигнал/шум LgQ від кутової селективності Ω/γ та нелінійних властивостей голограми для різної кількості відновлюючих джерел M :

M : 1 – 10000; 2 – 1000; 3 – 100. 4 – відповідає нелінійній голограмі

6.2.4. Відновлення амплітуди і фази оптичного поля неасоціативним методом

Знову звернемося до процесу відновлення безопорної голограми.

Нехай на стадії запису безопорної голограми читаюча частина поля $o_A(x, y)$ утворилася при проходженні через деякий дрібно-структурний транспарант із сильною фазовою модуляцією, тобто дисперсія фази у граничному полі набагато більше ніж 2π . Відповідно з достатньою точністю знову можемо вважати, що фаза точкових джерел, асоційованих із зонами кореляції, рівномірно розподілена у межах $0 \div 2\pi$, а сам транспарант можна вважати сильно розсіюючим з достатньо широкою індикатрисою. Припустимо, що відновлення проводиться відмінним від початкового (записуючого) полем $o_D(x, y)$, яке сформоване іншим транспарантом. Проте статистичні характеристики поля $o_D(x, y)$ такі самі, як і у початкового поля $o_A(x, y)$.

«Фантомна» частина поля (частина поля, яка локалізована в області фантомного зображення) у вихідній площині запишеться у вигляді

$$u_{ABD} = o_B(x, y) \otimes g_{AD}(x, y), \quad (6.37)$$

де

$$g_{AD}(x, y) = o_A(x, y) * o_D(x, y), \quad (6.38)$$

функція кореляції полів записаної (A) та читаючої (D) частин.

Як і в попередньому розгляді, будемо вважати, що для кожного із цих полів виконується умова δ -скорельованості. Проте нехай ці поля абсолютно різні:

$$o_A(x, y) \neq o_D(x, y). \quad (6.39)$$

Тоді взаємна кореляційна функція цих полів прямує до нуля:

$$g_{AD}(x, y) \rightarrow 0. \quad (6.40)$$

Зробимо припущення, які відповідають нашій моделі граничного поля.

1. Будемо вважати, що вторинні джерела поля o_A і поля o_D локалізовані однаково, якщо відмінність у їхніх координатах не перевищує половинного розміру зони кореляції.

2. Фази вторинних джерел за критерієм Релея приймаємо рівними, якщо вони відрізняються не більше ніж на $\pi/2$.

Тоді, враховуючи випадкову природу полів $o_A(x, y)$ і $o_D(x, y)$, їх можна розбити на k областей, для яких виконуються рівності

$$\begin{aligned} o_A^*(x, y) &= \sum_k^K q_{Ak}^*(x, y) \\ o_D(x, y) &= \sum_k^K q_{Dk}(x, y) e^{j\Delta_k} \end{aligned} \quad (6.41)$$

де Δ_k – деякий випадковий зсув фаз, характерний для кожного k , а $q_{Ak}^*(x, y)$ і $q_{Dk}(x, y)$ можуть бути представлені у вигляді

$$\begin{aligned} q_{Ak}^* &= \sum_l^{Lk} A_l e^{-j\Phi_l} \delta(x - x_l, y - y_l) \\ q_{Dk} &= \sum_l^{Lk} D_l e^{j\Phi_l} \delta(x - x_l, y - y_l) \end{aligned} \quad (6.42)$$

де A_l і D_l в загальному випадку різні і $\bar{A}_l = \beta \bar{D}_l$ (β – деякий коефіцієнт).

Інакше кажучи, з точністю до певного фазового множника $e^{j\Delta_k}$ фазові частини вторинних джерел у кожній такій області збігаються, а локальні амплітуди різні. При цьому кількість можливих представлень по типу (6.41) для тих же самих $o_A(x, y)$ і $o_D(x, y)$ досить велика і визначається тільки загальною кількістю вторинних джерел.

З виразів (6.41) і (6.42) випливає, що поля $o_A(x, y)$ і $o_D(x, y)$ з точністю до амплітудних коефіцієнтів A_l і D_l , які, як буде видно у подальшому, несуттєві для процесу відновлення, складаються із зон, які відрізняються тільки випадковим постійним фазовим множником $e^{j\Delta_k}$.

Отже, якщо відновлювати безопорну голограму областю поля $o_D(x, y)$, в яку попадає лише одна така зона, то очевидно, що бідь-яка така зона відновить неспотворене фантомне зображення.

Відповідно (6.38) набуде вигляду

$$g_{AD}(x, y) = \sum_k^K g_{ADk}(x, y), \quad (6.43)$$

де $g_{ADk}(x, y) = e^{j\Delta_k} q_{Ak}^* * q_{Dk}$ – «елементарна» кореляційна функція, сформована k -ю зоною поля o_D .

Враховуючи (6.42), така кореляційна функція може бути записана у вигляді

$$g_{ADk}(x, y) \approx e^{j\Delta_k} \beta L_k \bar{A}^2 \delta(x, y) \quad (6.44)$$

і «загальна» (результуюча) кореляційна функція в (6.37) описується виразом

$$g_{AD}(x, y) \approx \beta \bar{A}^2 \delta(x, y) \sum_k^K L_k e^{j\Delta_k}. \quad (6.45)$$

Природно, що внаслідок того, що Δ_k – випадкова величина, кінцеве зображення, яке можна розглядати як суму різнофазних елементарних зображень, дасть нам результуюче поле $u_{ABD} \rightarrow 0$, що за структурою подібне до інтермодуляційного шуму. Дійсно, відношення сигнал/шум в цьому випадку сумірне з величиною

$$Q = \frac{M+1}{M} \approx 1. \quad (6.46)$$

Інакше кажучи, при такому відновленні безопорної голограми зображення на фоні шумів відсутнє.

Перш ніж перейти до подальшого розгляду, зазначимо, що, як правило, основну «інформаційну» цінність при відновленні поля з голограми має її амплітудна модуляція. Принаймні можна сформулювати цілу низьку задач, в яких це справді має місце.

Застосуємо дещо незвичайну процедуру відновлення безопорної голограми. Будемо відновлювати безопорну голограму не всім полем $o_D(x, y)$, а тільки малою вибіркою вторинних джерел, кількість яких менша (в ідеалі набагато) ніж $L = \bar{L}_k$. Тоді кореляційна функція $g_{AD\bar{L}}$ набуде вигляду

$$g_{AD\bar{L}} = [q_{A\bar{L}}(x, y) + r_{A\bar{L}}(x, y)] * [q_{D\bar{L}}(x, y)e^{j\Delta_{\bar{L}}} + r_{D\bar{L}}(x, y)], \quad (6.47)$$

де $q_{A\bar{L}}(x, y)$ і $q_{D\bar{L}}(x, y)$ описуються співвідношеннями (6.41); $r_{A\bar{L}}(x, y)$ і $r_{D\bar{L}}(x, y)$ – частини вибірок, які абсолютно відрізняються одна від одної і їх кореляційна функція прямує до нуля.

Тоді

$$g_{AD\bar{L}} = \bar{L} \beta \bar{A}^2 e^{j\Delta_{\bar{L}}} \delta(x, y) + \\ + q_{A\bar{L}}(x, y) * r_{D\bar{L}}(x, y) + e^{j\Delta_{\bar{L}}} q_{D\bar{L}}(x, y) * r_{A\bar{L}}(x, y) + r_{A\bar{L}}(x, y) * r_{D\bar{L}}(x, y). \quad (6.48)$$

Всі доданки у цьому виразі, за винятком першого, прямують до нуля і визначають додатковий внесок у шумову компоненту у відновленому полі.

Таким чином, у випадку малої вибірки можна констатувати, що результуюча кореляційна функція

$$g_{AD\bar{L}} \sim e^{j\Delta_{\bar{L}}} \delta(x, y) \quad (6.49)$$

І, як наслідок, у вихідній площині формується поле, подібне до зображення початкового поля

$$u_{ABD\bar{L}} \rightarrow o_B e^{j\Delta_{\bar{L}}}. \quad (6.50)$$

Отже, у випадку відновлення безопорної голограми малою вибіркою вторинних джерел формується корисний сигнал, відповідний зображенню фантомної частини з

деяким випадковим зсувом фаз. Для шумової компоненти все залишається майже так, як і при традиційному відновленні, оскільки шумових сплесків значно більше, ніж корисних сплесків відновленого зображення.

Водночас інтенсивність поля, відновленого таким способом, через малу вибірку дуже маленька. Проте, якщо нас не цікавить фазова модуляція відновленого поля, то в подальшому можна застосувати процедуру накопичення результатів відновлення за інтенсивністю замінюючи відновлюючи вибірку, наприклад, послідовною експозицією елементарних зображень на фотоносій.

Можна показати, що величина вибірки залежить від дисперсії фази в початковому і читаючому полях. Чим більша дисперсія фази, тим менша вибірка. Для полів із дисперсією фази менше $\pi/2$ (амплітудний об'єкт) відновлюючим полем може бути поле, сформоване практично будь-яким статистичним амплітудним транспарантом. При цьому зображення відновлюється навіть при зміні довжини хвилі відновлюючого випромінювання. Дійсно, з (6.41) і (6.45) випливає, що у випадку суто амплітудної модуляції зображення фазовий множник $e^{j\Delta_k}$ зникає. Причому якість зображення визначається лише розмірами зони кореляції.

6.2.4.1. Відновлення безпорної голограми при заміні амплітудної модуляції читаючої частини вхідного поля

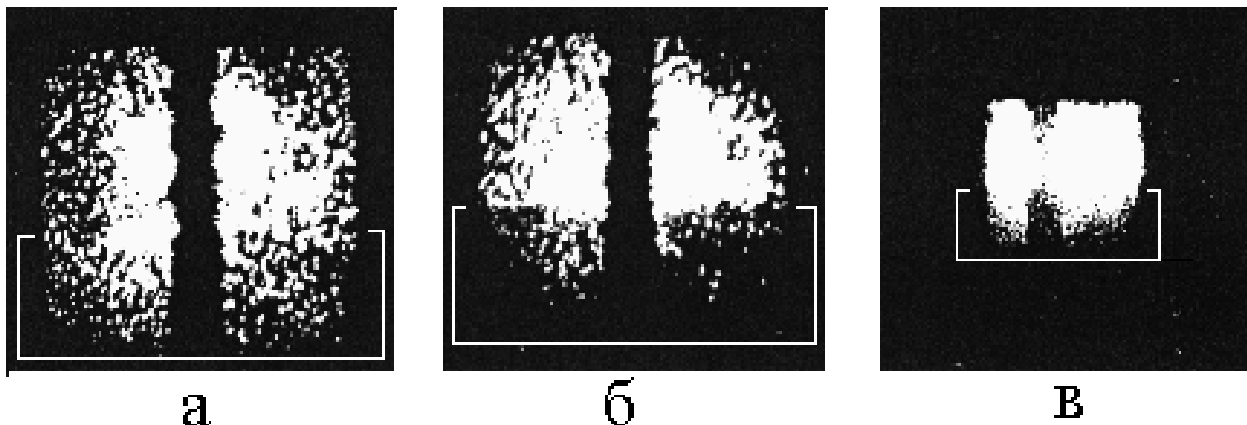


Рис. 6.10. Відновлення амплітудних об'єктів неасоціативним методом.

а – відновлення фантомного зображення традиційним асоціативним методом; б – відновлення фантомного зображення неасоціативним методом; в – відновлення фантомного зображення неасоціативним методом при зміні довжини хвилі відновлюючого опромінювання. Білою лінією на рисунках позначено зону фантомного зображення

На рис. 6.10 наведені результати відновлення зображень із безпорної голограми амплітудного об'єкта, який являв собою сукупність точкових пінхолів, наколотих в певному квадраті. По центру цього квадрата була залишена смуга, в області якої дірочок не було. Голографування відбувалося за допомогою червоного He – Ne лазера ($\lambda=0.63$ мкм). Зона відновленого фантомного зображення на рисунках помічена білою лінією.

Рисунок (а) відповідає традиційно відновленому фантомному зображенню. Рисунок (б) – зображення, відновлене за допомогою хвилі, яка пропущена через екран з абсолютно іншою сукупністю пінхолів.

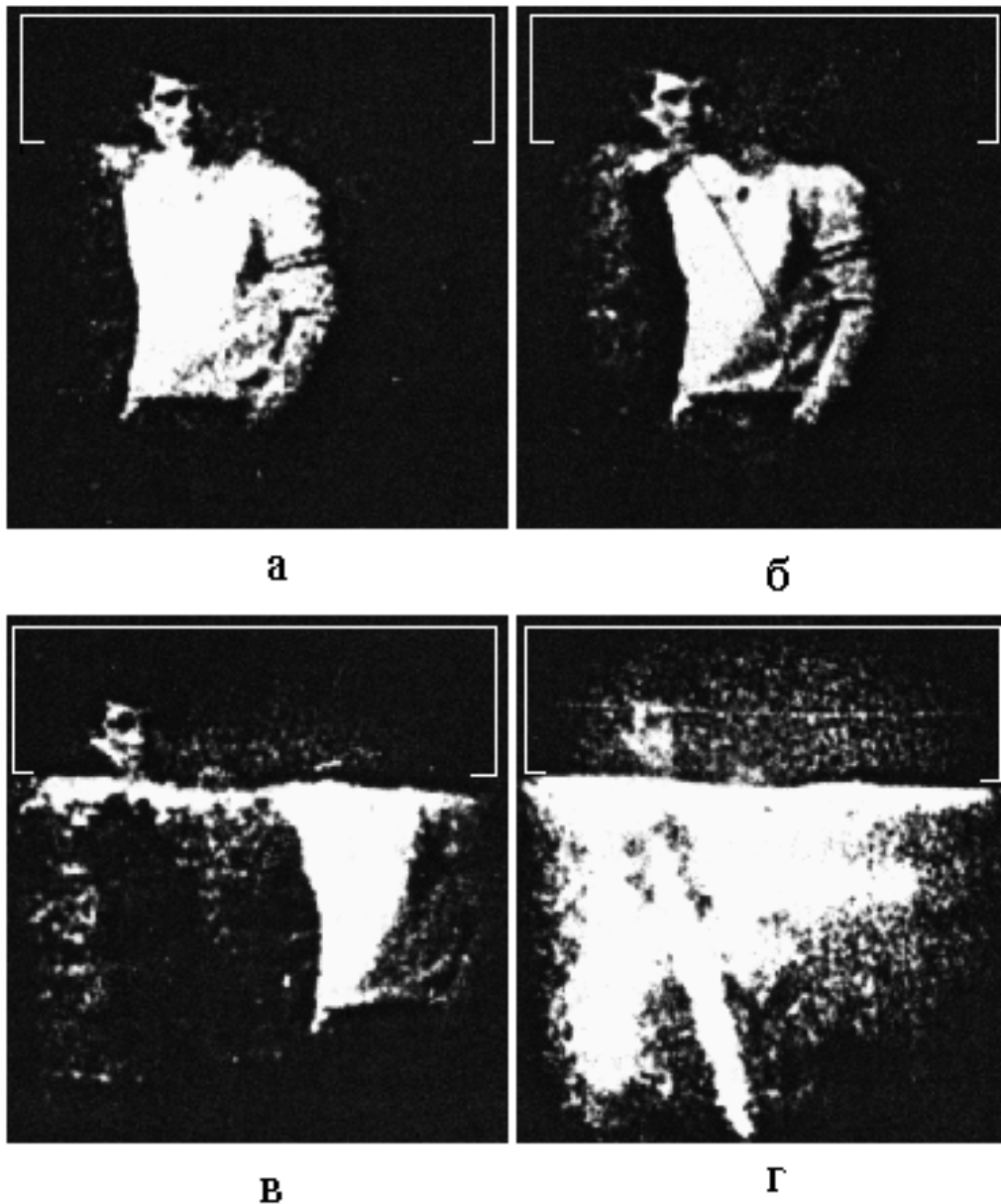


Рис. 6.11. Відновлення фантомного зображення із заміною (у порівнянні зі станом запису безопорної голограми) амплітудної модуляції читаючого поля:

а – відновлення голограми початковим полем; б, в – часткова заміна амплітудної модуляції; г – відновлення фантомного зображення при повній заміні амплітудної модуляції. Білою лінією на рисунках позначено зону фантомного зображення

Найбільш цікавий результат наведений на рисунку (в), коли відновлення фантомного зображення відбувалося при зміні довжини хвилі відновлюючого випромінювання. Відновлення відбувалося за допомогою випромінювання He – Cd лазера ($\lambda=0.33$ мкм). Як бачимо, навіть зміна довжини хвилі відновлюючого випромінювання (структура транспаранта з пінхолами залишалася незмінною) не впливає на якість відновлення фантомного зображення при голографуванні амплітудного об'єкта.

Наступний експеримент, який був проведений для підтвердження різної ролі амплітудної і фазової модуляції, полягав в такому. Амплітудний транспарант – ділянка фотоплівки із відповідним зображенням – поміщався в кювету з імерсійною рідиною, що певною мірою забезпечувало лише амплітудну модуляцію хвилі, при проходженні через нього лазерного випромінювання. При цьому кювета встановлювалася на юстувальний пристрій, який забезпечував при потребі її поперечне зміщення. Потім впритул до цього транспаранта розміщувався матовий розсіювач. В результаті лазерний пучок набував не тільки амплітудної, й відповідної фазової модуляції. Отримане поле голографувалося та відновлювалося за методом безопорної голограми. Результати відновлення наведені на рис. 6.11.

Спочатку фантомне зображення відновлювалося традиційним методом. Екранувалася частина поля, яка відповідає фантомному зображенню, а зчитування голограми відбувалося за допомогою частини початкового поля, яке формувало читаючу частину при запису (рис. а).

Потім кювета з фотоплівкою зсувалася у поперечному напрямку на певну відстань, що забезпечувало:

1. Зміну амплітудної модуляції.
2. При цьому фазова модуляція читаючої частини не змінювалася.

Результати відновлення для різної величини зсуву наведені на рисунках (б) і (в). Як бачимо, хоча якість фантомного і падає, проте воно все ж таки існує і може бути ідентифіковане. Нарешті рисунок (г) відповідає повній заміні амплітудної модуляції вхідного поля.

Отже, можемо констатувати, що принаймні для статистичного об'єкта при відновленні зображення з безопорної голограми основну роль відіграє саме фазова модуляція читаючого поля, а амплітудна модуляція може бути змінена практично будь-яким чином. Нагадаємо, що при записі безопорної голограми у «френелівському» розташуванні (голограма розташована на не дуже великій відстані від вхідної площини) зсув транспаранта на величину, сумірну із розмірами зони кореляції (у нашому випадку це 1 – 10 мкм), приводить до повного зникнення фантомного зображення. В нашому випадку зсуви амплітудної частини були незрівнянно більше такої величини, а певне зниження якості фантомного зображення можна пояснити тим, що:

1. Імерсія в кюветі не могла повністю нівелювати фазову модуляцію, яку вносять нерівності поверхні фотоплівки та певні, навіть незначні, зміни показника заломлення у точках зображення з різним почорнінням.
2. Зміни розташування кювети внаслідок оптичної недосконалості її стінок (нерівностей, клиноподібності і т.ін.) також приводить до зміни фазових співвідношень у вхідній площині.

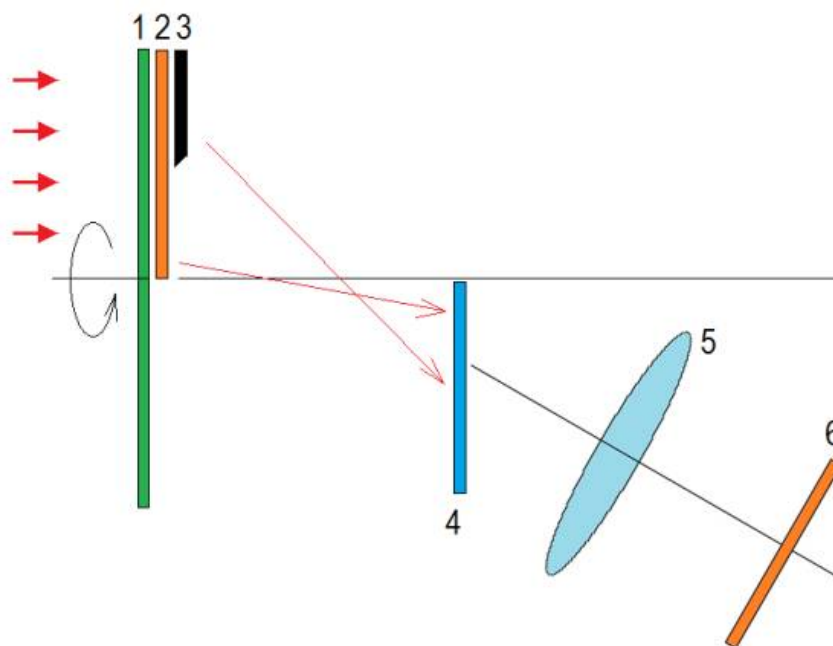
6.2.4.2. Експериментальна реалізація відновлення зображення «фазових» об'єктів неасоціативним методом

На початку цього параграфу констатуємо, що можна показати, що відношення сигнал/шум при неасоціативному відновленні не набагато нижче, ніж у випадку традиційного відновлення, і прямує до величини

$$Q = \frac{\pi k}{M} + 1, \quad (6.51)$$

а при достатньо малих вибірках воно складає величину близьку до $Q \rightarrow \pi + 1$.

Експериментальна перевірка працездатності неасоціативного алгоритму відновлення зображень, які сформовані об'єктами, що вносять значну фазову модуляцію, відбувалася в експериментальному розташуванні, наведеному на рис. 6.12.



6.12. Оптична схема для реалізації неасоціативного відновлення зображення:

1 – екран; 2 – транспарант; 3 – непрозорий екран; 4 – безпорна голограма; 5 – об'єктив; 6 – фотоносій

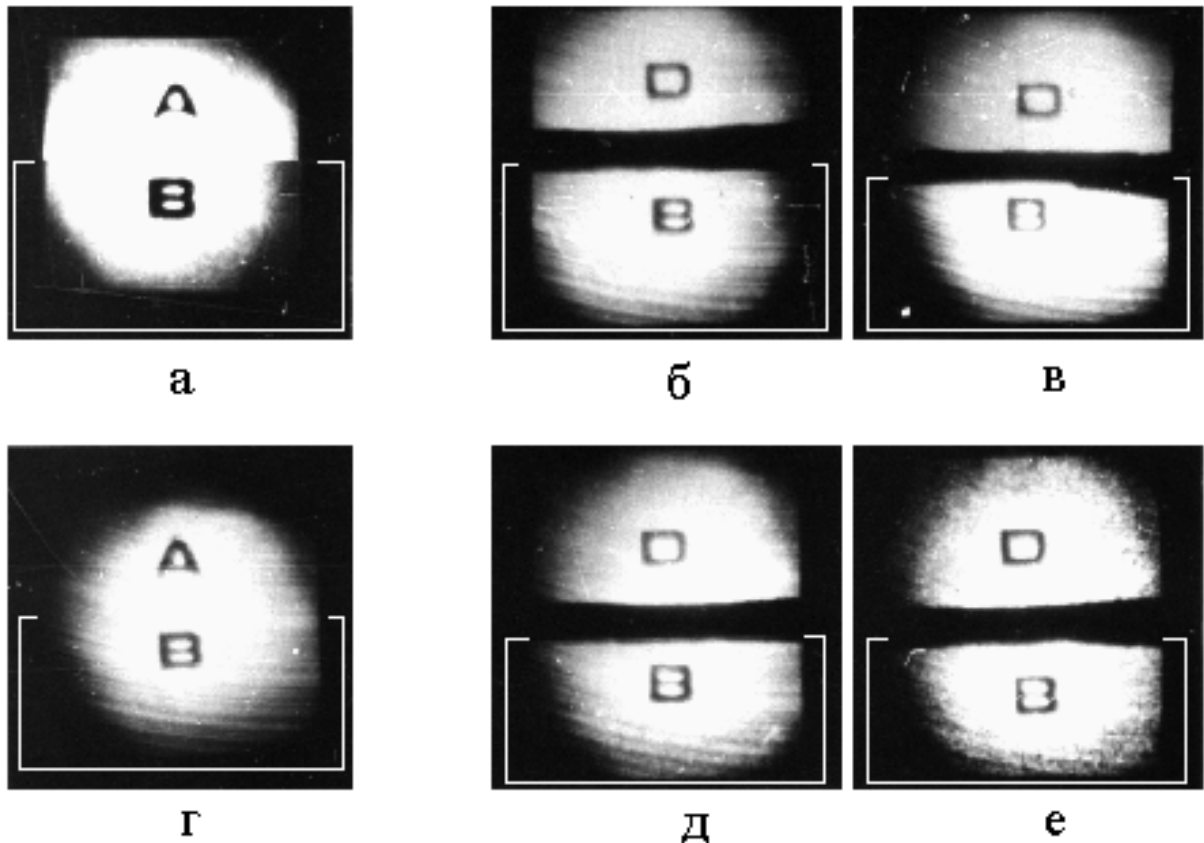
На стадії запису безпорної голограми 4 у вхідній площині розміщувалося матове скло 2 з двома нанесеними літерами (А) і (В). Безпорна голограма фіксувалася на певній відстані від осі системи таким чином, що навіть при наявності регулярної складової вона не могла потрапити до площини реєстрації голограми. Потім такий транспарант освітлювався плоскою хвилею. Частина поля, яка проходила через область транспаранта (А), відповідала читаючій частині, через область (В) – фантомній.

Безпорна голограма фіксувалася на певній відстані від осі системи таким способом, що навіть при наявності регулярної складової вона не могла потрапити до площини реєстрації голограми.

Результати відновлення безпорної голограми наведені на рис. 6.13.

На стадії відновлення частина транспаранта (В) закривалася за допомогою екрана 3 і спочатку відбувалося відновлення фантомного зображення за традиційним алгоритмом

(результат відновлення наведений на рисунку (а)). Результат відновлення фіксувався за допомогою об'єктива 5 і фотоносія 6. Потім впритул до транспаранта розташовувався екран із системою пінхолів, який обертався з досить великою швидкістю, певною мірою узгодженою із чутливістю фотошару. При цьому на фотоносії для контролю фіксувалося фантомне зображення, отримане в таких умовах. Результат відновлення наведений на рисунку (г).



6.13. Зображення відновлені з безпорної голограми неасоціативним методом: а, г – фантомне зображення об'єкта; а – традиційне відновлення; г – при наявності екрана з пінхолами, що обертається; б, в, д, е – зображення об'єкта (зображення матового скла, шліфованого абразивом з розміром зерна 28, 40, 100, 250 мкм відповідно), що відновлене неасоціативним методом. Білою лінією позначено зону фантомного зображення

Лише потім читаюча частина транспаранта замінювалася на інший зразок матового скла з літерою (D) і в площі фотоносія фіксувалося відновлене поле.

Відзначимо, що відновлення неасоціативним алгоритмом відбувалося за допомогою розсіювачів, шліфованих абразивами із зерном різного розміру.

Результати відновлення фантомного зображення неасоціативним методом наведені на рисунках (б),(в),(д),(е). Як і передбачалося, відношення сигнал/шум у фантомних зображеннях частини поля (В) мало відрізняється від аналогічних, отриманих традиційним методом.

6.3. Деякі застосування методів кореляційної оптики

6.3.1. Поняття про голографічну інтерферометрію [44,45].

Нехай маємо деяке поле, розсіяне об'єктом у момент часу t_1 :

$$U_1 = A_1(t_1)e^{j\Phi_1(t_1)}. \quad (6.52)$$

Запишемо голограму цього поля із плоскою хвилею p_1 :

$$H_1 \sim |U_1 + p_1|^2. \quad (6.53)$$

Нехай через деякий час під дією певного фізичного збурення (зміна температури, навантаження тощо) поле, розсіяне об'єктом, змінилося.

$$U_2 = A_2(t_2)e^{j\Phi_2(t_2)}. \quad (6.53)$$

На теж саме місце фотонісія, не змінюючи характеристик опорної хвилі запишемо ще одну голограму:

$$H_2 \sim |U_2 + p_1|^2. \quad (6.54)$$

Відновимо поля, записані на результуючій голограмі хвилею p_1 . У напрямку +1-го порядку дифракції незалежно відновляться поля U_1 і U_2 , які будуть інтерферувати між собою.

Нехай амплітудна частина поля U_2 не змінюється у порівнянні з полем U_1 , тобто $A_2 \rightarrow A_1$. Така ситуація достатньо часто реалізується на практиці. Наприклад, розсіюючий об'єкт під дією збурення незначно чином змінює свою локалізацію у просторі або істотно змінюється його форма. Можлива зміна окремих частин об'єкта. При цьому зміни які відбуваються в об'єкті мінімальні на рівні одного або декількох мікрометрів, тобто фаза розсіяної об'єктом хвилі змінюється також неістотно.

В результаті у напрямку +1-го порядку дифракції відновлюється поле:

$$\begin{aligned} U &= A_1 e^{j\Phi_1} [1 + e^{j\Delta(t_1, t_2)}] = \\ &= 2A_1 e^{j\Phi_1} e^{j\frac{\Delta(t_1, t_2)}{2}} \left[\frac{e^{j\frac{\Delta(t_1, t_2)}{2}} + e^{-j\frac{\Delta(t_1, t_2)}{2}}}{2} \right] = \\ &= 2A_1 e^{j\Phi_1} e^{j\frac{\Delta(t_1, t_2)}{2}} \cos\left[\frac{\Delta(t_1, t_2)}{2}\right]. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Відповідно інтенсивність поля має вигляд

$$I = A_1^2 \cos^2\left[\frac{\Delta(t_1, t_2)}{2}\right]. \quad (6.56)$$

Як результат відновлене зображення об'єкта промодульоване інтерференційними смугами, які виникають унаслідок мікрозмін форми об'єкта.

Результати такої операції наведені на рисунку 6.14

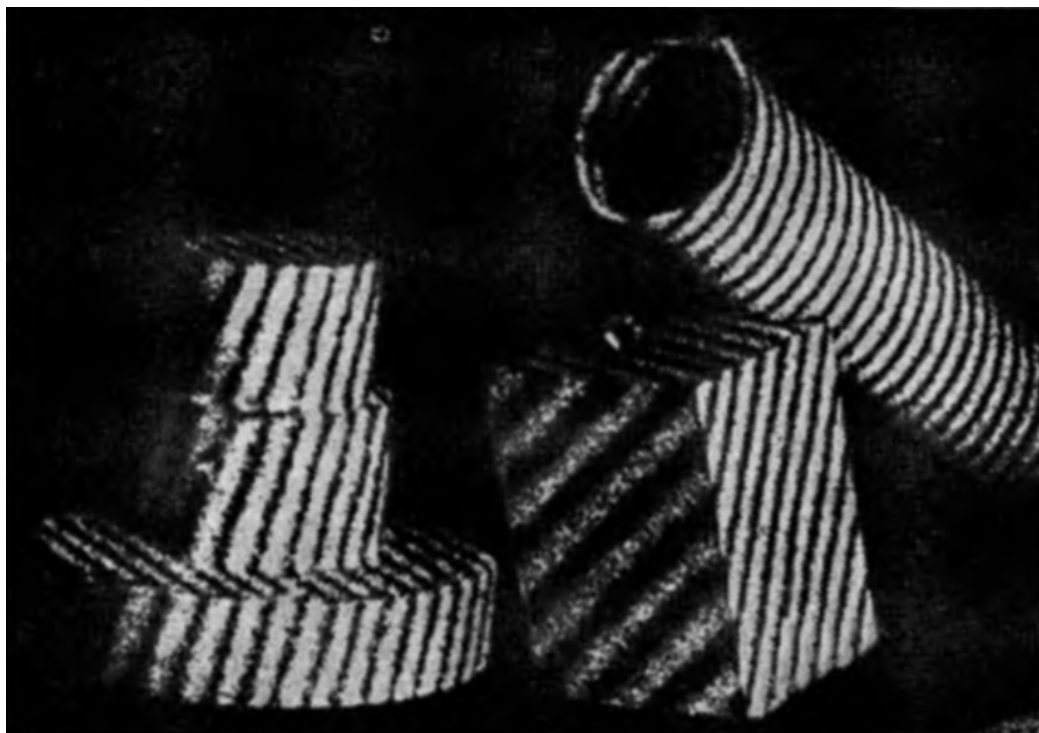


Рис. 6.14

Якщо при запису другої голограми трохи змінити кут опорної хвилі, то у відновленому зображенні відновиться система смуг, вигін яких відповідає зміні фази $\Delta(t_1, t_2)$ (див. рис. 6.15).



Рис. 6.15

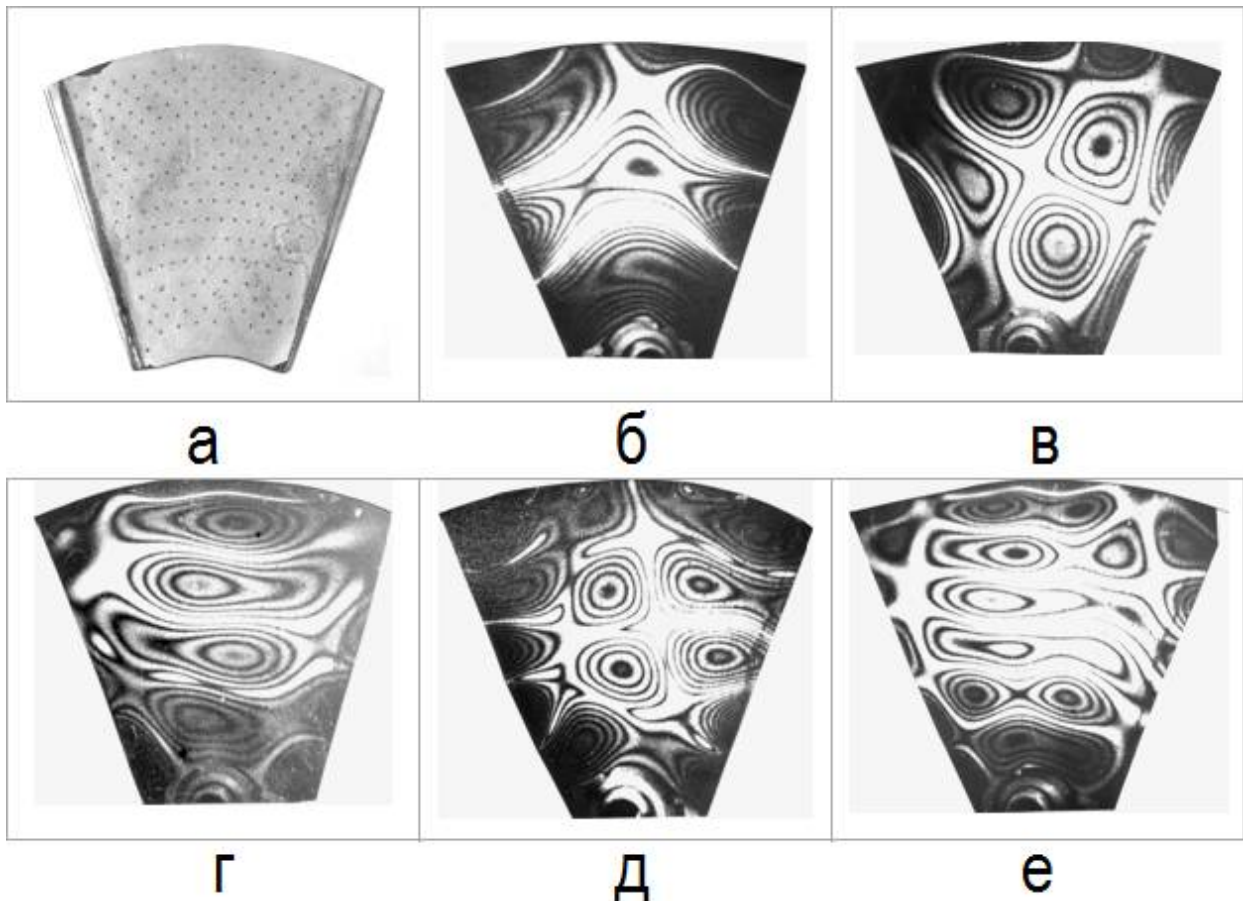


Рис. 6.16. Деталь з проникливих вафельних матеріалів:

а – загальний вигляд; б-е – деталь, яка вібрує під дією резонансних частот.
 а – $f = 0$ Гц; б – $f = 2270$ Гц; в – $f = 2940$ Гц; г – $f = 4377$ Гц; д – $f = 5300$ Гц;
 е – $f = 8273$ Гц

Зазначимо, що в принципі можна записати всього одну голограму. Тоді внаслідок інтерференції відновленого і об'єктного поля, можна в реальному часі відстежувати зміни, що відбуваються в об'єкті. Приклад такої обробки наведений на рис. 6.16.

6.3.2. Поняття про фільтрацію оптичних сигналів [8,14,43,48,49]

У більшості випадків процедура фільтрації оптичного поля (зображення) містить такі стадії:

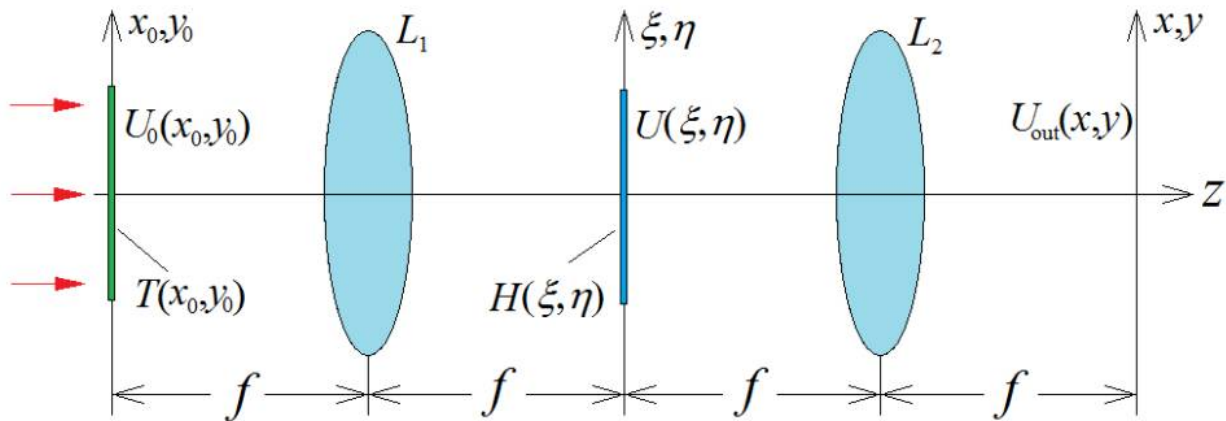
1. $U(x) \xrightarrow{\mathfrak{F}} \mathfrak{F}(\omega)$ – трансформація сигналу до частотного представлення.
2. $\tilde{\mathfrak{F}}(\omega) = H(\omega)\mathfrak{F}(\omega)$ – множення Фур'є-образу сигналу на фільтруючу функцію (безпосередньо фільтрація).
3. $\tilde{\mathfrak{F}}(\omega) \xrightarrow{\mathfrak{F}^{-1}} \tilde{U}(x)$ – обернене Фур'є-перетворення, трансформація фільтрованого образу в часове представлення (отримання фільтрованого сигналу).

Виходячи з того, що описана процедура містить інтегральне Фур'є-перетворення, то фільтрація оптичного сигналу здійснюється у схемі, наведеній на рис. 6.17, яка отримала назву узагальненої системи фільтрації.

Така схема містить вхідний транспарант (просторово-часовий модулятор світла (ПВМС)), який при просвітленні плоскою (або іншою регулярною) хвилею формує початковий сигнал, що піддається фільтрації.

Транспарант розташований у передній фокальній площині Фур'є-перетворюючого об'єктива L_1 . В задній фокальній (частотній) площині формується Фур'є-образ вхідного сигналу, який пропускається через фільтр H . Просторові частоти в цій площині пов'язані з Декартовими координатами такими простими співвідношеннями:

$$\omega = \frac{k}{f}\xi, \quad v = \frac{k}{f}\eta. \quad (6.57)$$



6.17. Узагальнена система фільтрації

T – транспарант (ПЧМС); L_1, L_2 – Фур'є-перетворючі об'єктиви; H – безпосередньо фільтруючий елемент

Після проходження випромінювання через фільтр H здійснюється друге Фур'є-перетворення, яке виконується замість оберненого перетворення. Враховуючи, що фактично пряме та обернене Фур'є-перетворення відрізняються лише знаком у показнику експоненти (див. співвідношення 2.1 та 2.4), цього цілком достатньо для виконання 3-го етапу фільтрації. Єдине, що треба пам'ятати, що внаслідок заміни знака в експоненті під інтегралом вихідний сигнал виявляється перевернутим відносно початкового (вихідні координати змінюють знак по відношенню до вхідних).

6.3.2.1. Досліди Аббе

Очевидно, що перші ідеї, які були покладені в основу сучасних уявлень про фільтрацію, були сформульовані німецьким науковцем Ернстом Аббе, основні праці і наукові результати якого стосувалися вдосконалення конструкції мікроскопів і були опубліковані ще в 1873 році [46]. На жаль, Аббе не опублікував більшість своїх досліджень, тому його роботи по теорії мікроскопа дійшли до нас в основному у викладанні його учнів. Так, наприклад, університетський курс «Теорія оптичних зображень в границях геометричної оптики», який читав Аббе, був викладений його учнем С. Чапским в його «Теорії оптичних інструментів по Аббе» [47]. Праця Аббе «Теорія дифракції та її застосування до мікроскопа» тривалий час залишалася неопублікованою і лише на початку XX сторіччя побачила світ у п'ятитомному зібранні творів Аббе.

З точки зору нашого курсу Аббе вдалося абсолютно по-новому, з позицій хвильової оптики, пояснити дію простої лінзи.

Схематично ідеї оптичної фільтрації, запропоновані Аббе можна пояснити на основі результатів таких простих дослідів, які можна трактувати як перші приклади смугової фільтрації оптичних сигналів.

Уявимо собі, що у вхідній площині узагальненої системи фільтрації (див. рис. 6.17) розташований транспарант із зображенням двовимірної ґратки (рис. 6.18а), який освітлюється нормованою до одиниці плоскою хвилею. Відзначимо, що зміна пропускання решітки має прямокутний характер, тобто на протязі світлої або темної ділянки транспаранта пропускання стає.

Тоді у фокальній площині об'єктива L_1 формується Фур'є-образ, який за структурою нагадує картину, зображену на рисунку (b).

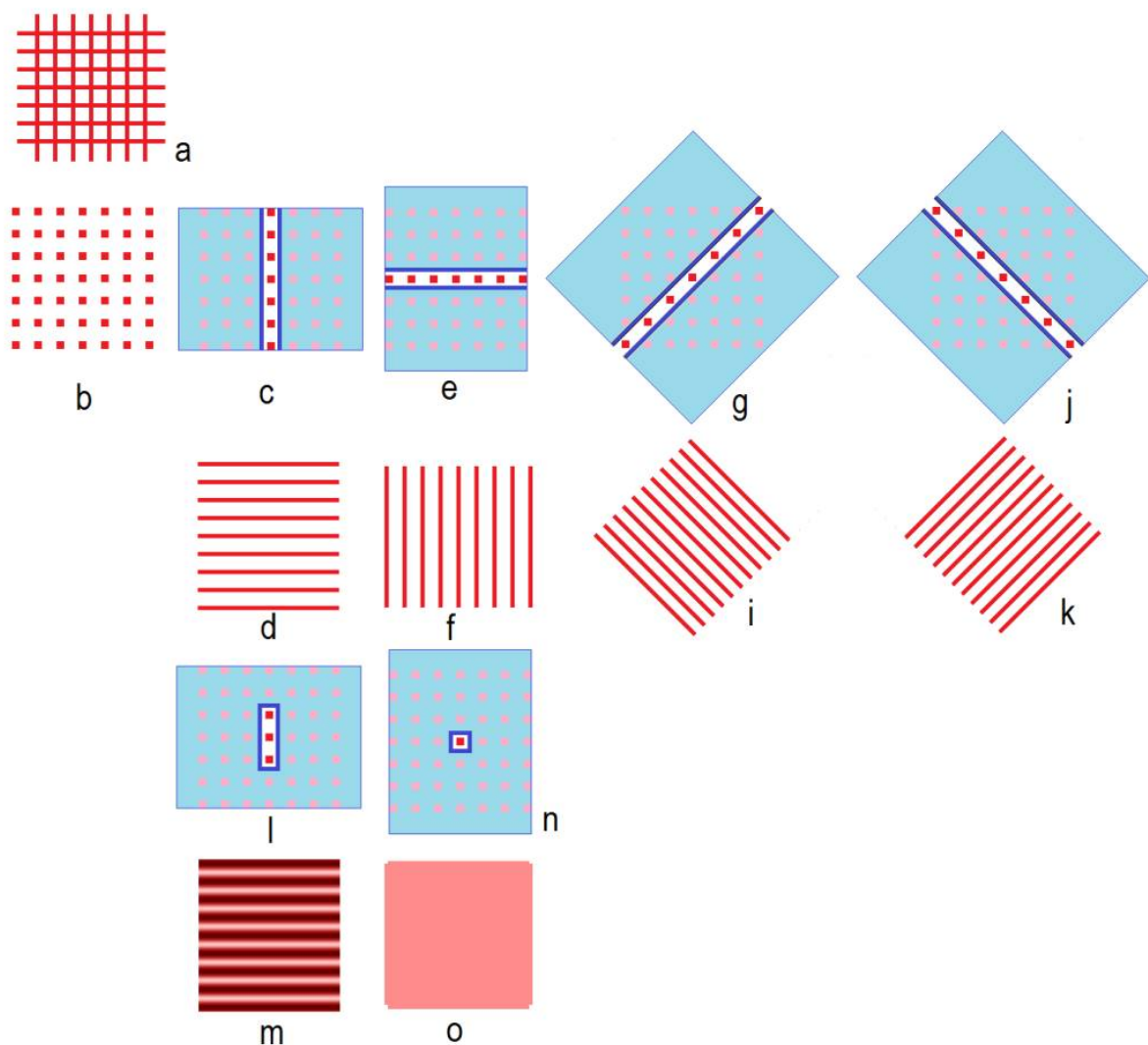


Рис. 6.17

Тепер у частотній площині ξ, η розташуємо вертикально орієнтований екран, який з усієї сукупності дифракційних плям буде пропускати лише вузьку смугу спектра, яка містить у поперечному напрямку всього один дифракційний максимум (див. рис. (c)). Такий екран можна інтерпретувати як одновимірний смуговий частотний фільтр.

В результаті такої фільтрації у вихідній площині системи будемо замість двовимірної ґратки спостерігати одновимірну ґратку із смугами орієнтованими горизонтально (рис (d)).

Якщо екран повернути на 90° , то орієнтація смуг у вихідній площині зміниться на вертикальну (рис. (f)). При цьому період решіток буде тим самим, що і в початковому зображенні.

Тепер розташуємо наш фільтр під кутом $\pm 45^\circ$ до вертикального напрямку (рисунки (g) і (j)). Тоді у вихідній площині зображення одновимірних решіток також повернуться на кут $\pm 45^\circ$. При цьому період решіток зменшиться, оскільки відстань між виділеними фільтром дифракційними максимумами в такій ситуації більше в $\sqrt{2}$ разів, ніж для випадків (c),(e).

Проте відзначимо, що у всіх розглянутих випадках пропускання вихідного зображення залишається практично бінарним (або світла, або темна смуга з практично постійною інтенсивністю).

Якщо ж застосувати фільтр, який виділяє всього три дифракційні плями (центральною та дві бокові рисунки (l)), то у вихідній площині буде спостерігатися зображення синусоїдальної ґратки (рис (m)).

І нарешті, якщо за допомогою екрана виділити всього один дифракційний максимум (рис (n)), то на виході системи буде спостерігатися рівномірне засвітлення (рис (o)).

Отже, досліди Аббе на простих прикладах показують, що операція фільтрації оптичного сигналу може змінити вхідний сигнал до вигляду, який практично «не пов'язаний» з початковим зображенням.

6.3.2.2. Інші приклади смугової фільтрації

Фільтрація адитивних завад

Нехай корисний оптичний сигнал $f(t)$ спостерігається на фоні адитивних завад $s_A(t)$. Тоді поле, яке подається на вхід узагальненої системи фільтрації, має вигляд:

$$x(t) = f(t) + s_A(t), \quad (6.58)$$

де $s_A(t)$ – адитивна завада.

В частотній площині системи ($\omega = \frac{k}{f} \xi, \vartheta = \frac{k}{f} \eta$) маємо поле:

$$\mathfrak{Z}_x(\omega) = \mathfrak{Z}(\omega) + S_A(\omega), \quad (6.59)$$

де $\mathfrak{Z}(\omega)$ та $S_A(\omega)$ – Фур'є-образи сигналу та завади відповідно.

При цьому необхідно відзначити, що, як правило, спектр корисного сигналу займає набагато вузьку смугу частот, ніж завада (див. рис. 6.18).

Одна з найбільш відомих завад, яка отримала назву «білий шум» взагалі характеризується тим, що має постійну середню величину шуму вздовж всієї осі частот. Відповідно енергія шумової компоненти $S_A(\omega)$, на відміну від корисного спектра, розтягується по смузі частот набагато більшій, ніж смуга корисного сигналу, і як наслідок у смузі, де зосереджений сигнал $\mathfrak{Z}(\omega)$, середня інтенсивність шуму на кілька порядків менша, ніж інтенсивність сигналу.

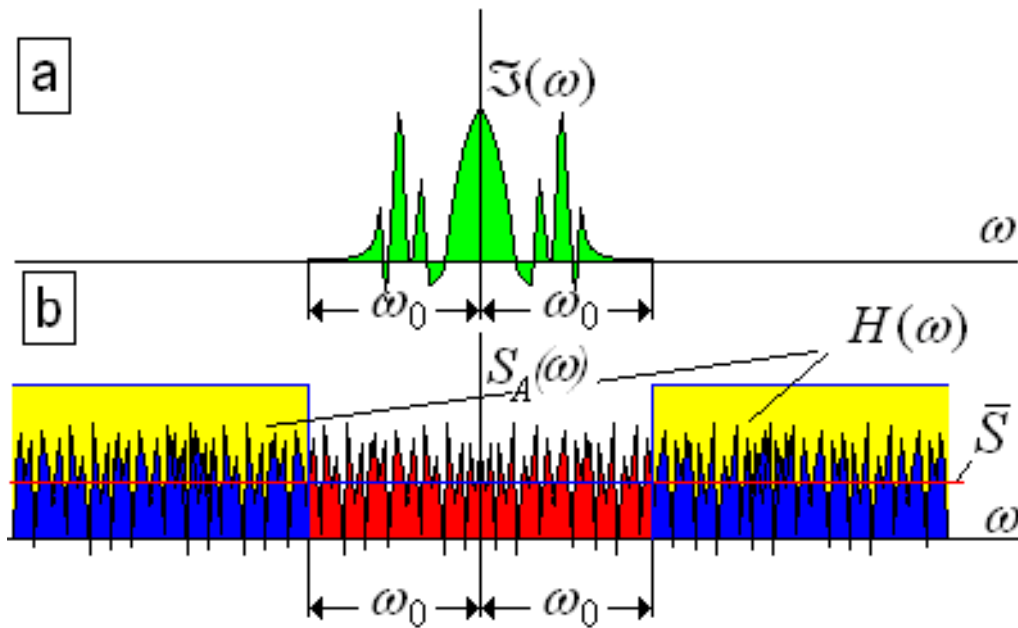


Рис. 6.18

Тоді якщо застосувати простий смуговий фільтр:

$$H(\omega) \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0, & \text{в р. інт.} \end{cases} \quad (6.60)$$

який буде пропускати повністю сигнал $S(\omega)$ і в свою чергу практично повністю відрізати шумову компоненту, то після оберненого Фур'є-перетворення за допомогою об'єктива L_2 у вихідній площині системи x, y отримаємо сигнал, який наближається до позбавленого від завад сигналу:

$$\tilde{x}(t) \rightarrow f(t). \quad (6.61)$$

Фільтрація мультиплікативних завад

Інший тип завад у корисному зображенні – це мультиплікативні завади, дію яких умовно можна описати співвідношенням

$$x(t) = s_M(t)f(t). \quad (6.62)$$

Приклад такої завади наведений на рисунку 6.19а, коли корисне зображення промодульоване системою смуг.

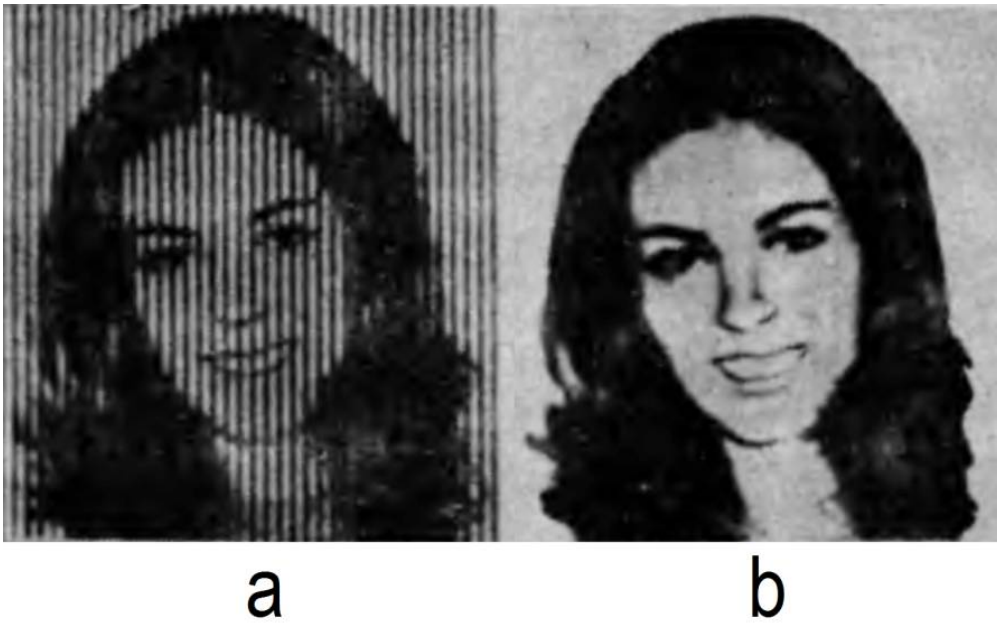


Рис. 6.19

Впливу такої завади неможливо позбутися простою смуговою фільтрацією, оскільки у частотній площині вхідне поле перетворюється на згортку:

$$\mathfrak{F}_x(\omega) = \mathfrak{F}(\omega) \otimes S_M(\omega). \quad (6.63)$$

Інакше кажучи, у частотній площині завдяки операції згортки (відповідного інтегрування) інформація про корисний сигнал та заваду «перемішується» та їх неможливо розділити.

Разом з тим і в такому випадку можна запропонувати відповідний алгоритм поліпшення вхідного сигналу, як одну з операцій якого знову можна застосувати смугову фільтрацію.

Суть підходу полягає в наступному. Перед застосуванням смугової фільтрації спотворене зображення логарифмується:

$$x_{\ln}(t) = \ln[x(t)] = \ln[f(t)] + \ln[s_M(t)]. \quad (6.64)$$

Як випливає з виразу (6.64) в перетвореному сигналі $x_{\ln}(t)$ для логарифмованого корисного сигналу $f_{\ln}(t) = \ln[f(t)]$ логарифмована мультиплікативна завада $s_{M\ln}(t) = \ln[s_M(t)]$ стає адитивною, отже, може бути відфільтрована за допомогою смугової фільтрації.

Результат такої фільтрації наведений на рисунку 6.19b.

6.3.2.3. Фільтрація за допомогою «експоненціального» фільтра

Інший приклад фільтрації, який також можна вважати певною мірою смуговою, – це фільтрація за допомогою так званого «експоненціального» фільтра, пропускання якого може бути описане співвідношенням

$$H(\omega, \vartheta) = 1 - e^{-\frac{\omega^2 - \vartheta^2}{\sigma^2}}. \quad (6.65)$$

Дія такого фільтра схематично ілюструється рисунками 6.20. і 6.21. На рисунку 6.20а наведено зображення, утворене проходженням паралельного пучка через квадратний отвір.

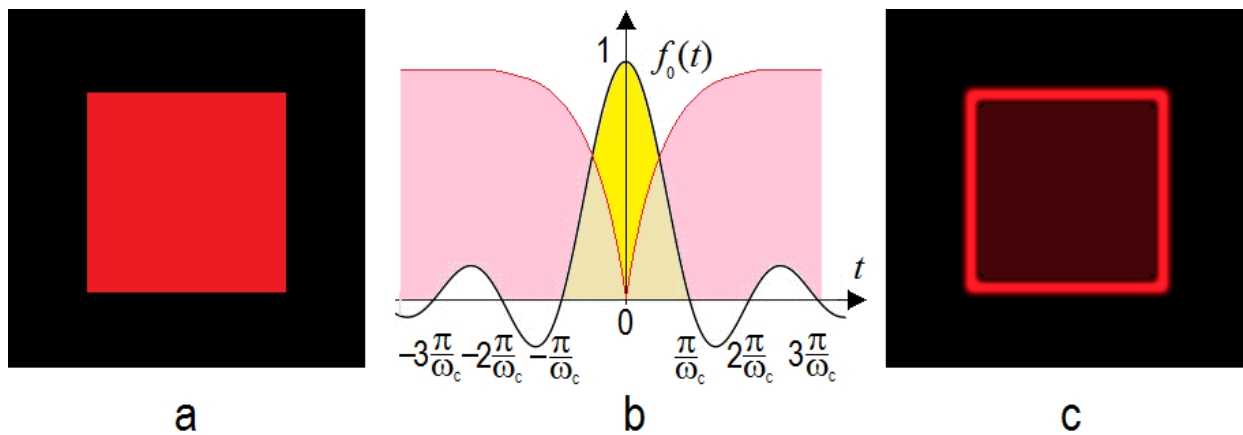


Рис. 6.20

Рисунок (b) ілюструє пропускання експоненціального фільтра. Він не пропускає випромінювання в нулі частот, а на деякій відстані від цієї точки має практично постійне пропускання, яке наближається до одиниці. На цьому ж рисунку жовтим кольором представлений розподіл інтенсивності, сформований квадратним отвором. Як бачимо фільтр екранує найбільш потужну частину Фур'є-образу початкового поля. Нарешті рисунок (c) ілюструє результат фільтрації вхідного зображення. Цей результат можна характеризувати як «оконтурювання» вхідного бінарного зображення.

Результат аналогічної фільтрації більш складного зображення, зображення тестової міри, наведений на рисунку 6.21.

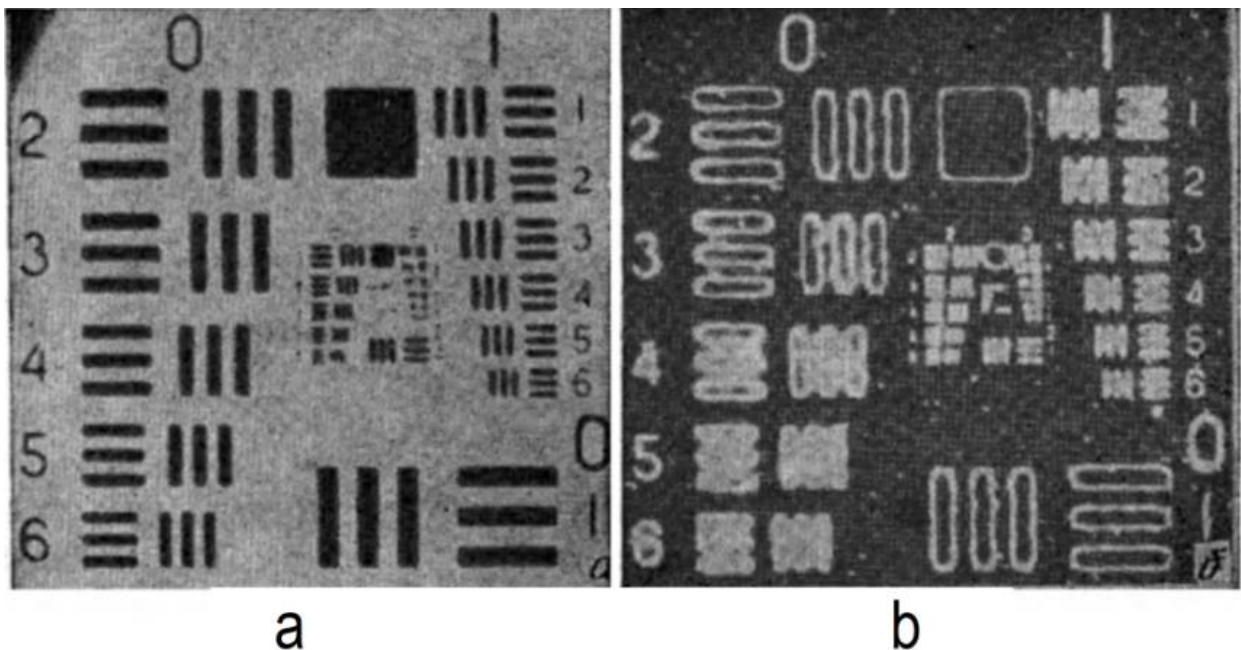


Рис. 6.21

а – початкове зображення; б – «оконтурене» відфільтроване зображення.

На закінчення цього параграфа відзначимо, що така процедура оконтурення дійсно ефективна лише для бінарних зображень.

6.3.2.4. Фільтрація постійної складової. Підвищення контрасту

Останнім прикладом застосування смугового фільтра наведемо ситуацію використання точкового фільтра, який екранує лише нульову просторову частоту. Такий фільтр використовується для корекції контрасту вхідного зображення.

Дійсно зображення з пониженим контрастом можна описати співвідношенням

$$x(t) = f(t) + a, \quad (6.66)$$

де a – деяка постійна складова.

Тоді, якщо у частотній площині застосувати фільтр який не пропускає випромінювання в нулі частот, то відфільтрований сигнал наближається до Фур'є-образу сигналу $f(t)$ і після оберненого Фур'є-перетворення. Вихідний сигнал наближається до сигналу $f(t)$ сигналу з абсолютним контрастом.

6.3.2.5. Реконструкція зображення, спотвореного внаслідок «змазування»

При деяких реєстраціях певного зображення можливі певні недоліки, наприклад, рух зображення під час експозиції. У такому випадку інтенсивність зафіксованого «змазаного» зображення описується виразом

$$\tilde{I}(x) = \int_0^{T_0} I[x - a(t)] dt, \quad (6.67)$$

де $a(t)$ – закономірність, за якою відбувається зсув зображення; T_0 – час експозиції.

Зафіксуємо таку інтенсивність на фотоносії. Нехай пропускання транспаранта пропорційне інтенсивності (6.67). Тоді такий транспарант, що освітлюється нормованою до одиниці хвилею, має вигляд:

$$\tilde{U} \sim I(x). \quad (6.68)$$

В частотній площині поле таке:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{Z}}(\omega) &= \int_0^{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} I[x - a(t)] e^{-j\omega x} dx dt = \\ &= \int_0^{T_0} e^{-j\omega a(t)} dt \int_{-\infty}^{\infty} I(x) e^{-j\omega x} dx \end{aligned} \quad (6.69)$$

Нехай закономірність, за якою відбувається зсув зображення, лінійна, тобто зсув відбувається із постійною швидкістю β . Тоді величина зсуву може бути визначена як

$$a(t) = \beta t. \quad (6.70)$$

Повна величина зсуву за час експозиції

$$\beta T_0 = l. \quad (6.71)$$

Перший інтеграл може бути розрахований так:

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} e^{-j\omega\beta t} dt &= \int_{-\infty}^{\infty} P_{T_0}(t - \frac{T_0}{2}) e^{-j\tilde{\omega}t} dt = \\ &= e^{-j\omega\beta \frac{T_0}{2}} \mathfrak{F}\{P_{T_0}\} \tilde{\omega} = \beta\omega = T_0 \frac{\sin(\omega l/2)}{\omega l/2}. \end{aligned} \quad (6.72)$$

Тоді, якщо на шляху хвилі у частотній площині розмістити «обернений» фільтр із пропусканням:

$$H(\omega) = [T_0 \frac{\sin(\frac{\omega l}{2})}{\frac{\omega l}{2}}]^{-1}. \quad (6.73)$$

Поле за фільтром має вигляд:

$$U_f(\omega) = \tilde{\mathfrak{F}}(\omega) H(\omega). \quad (6.74)$$

Відповідно поле у вихідній площині:

$$U_{out}(x) = \mathfrak{F}^{-1}\{U_f(\omega)\} = I(x). \quad (6.75)$$

Інакше кажучи, фільтрація за допомогою оберненого фільтра дає можливість відновити «незмазане» зображення.

Результати відновлення зображень за подібним алгоритмом наведені на рис. 6.22.

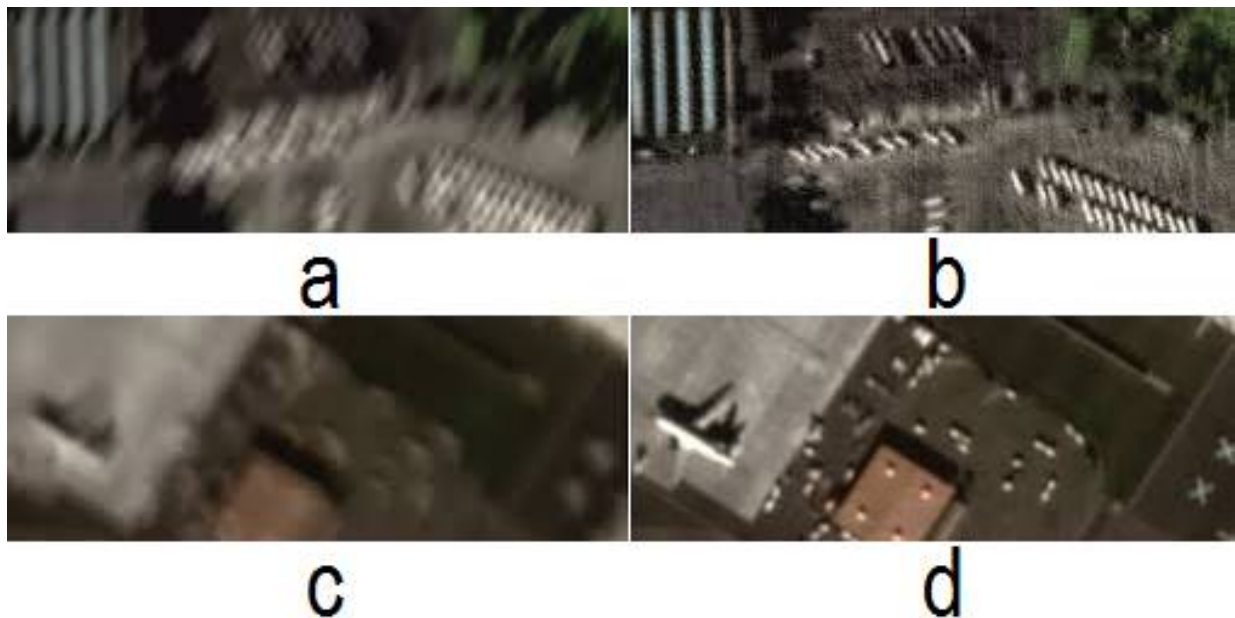


Рис. 6.22

Рисунки у лівому стовпчику ілюструють «змазане» зображення (рис (a) і (c)). Рисунки в правій частині (рис (b) і (d)) – відновлене зображення.

6.3.2.6. Фазово-контрастний мікроскоп

Відомо, що зображення прозорих об'єктів під мікроскопом спричиняє певні труднощі в їх ідентифікації. Зазвичай для їх візуалізації використовують різного типу розчини, які так чи інакше забарвлюють зображення таких об'єктів.

Разом з тим існують інші способи візуалізації таких об'єктів, які базуються на тому факті, що, як правило, такі об'єкти вносять іншу фазову модуляцію, ніж оточуюче їх середовище.

Нехай маємо об'єкт, який не вносить амплітудної модуляції, проте модулює випромінювання за фазою:

$$U = e^{j\Phi}. \quad (6.76)$$



Рис. 6.23

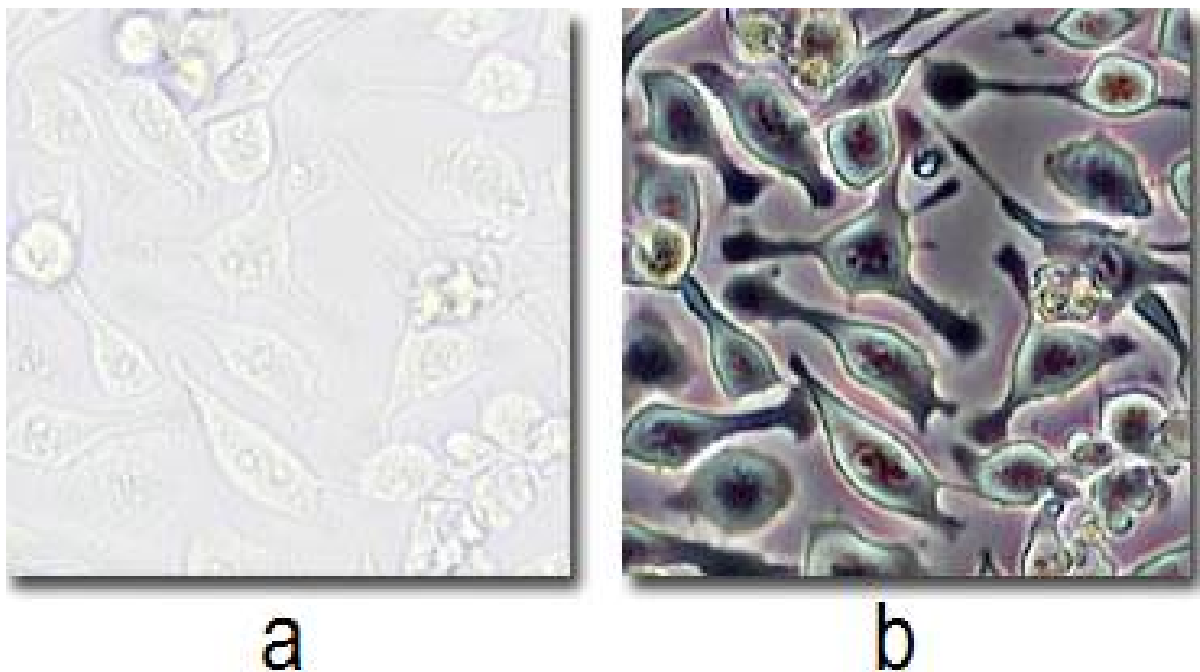


Рис. 6.24

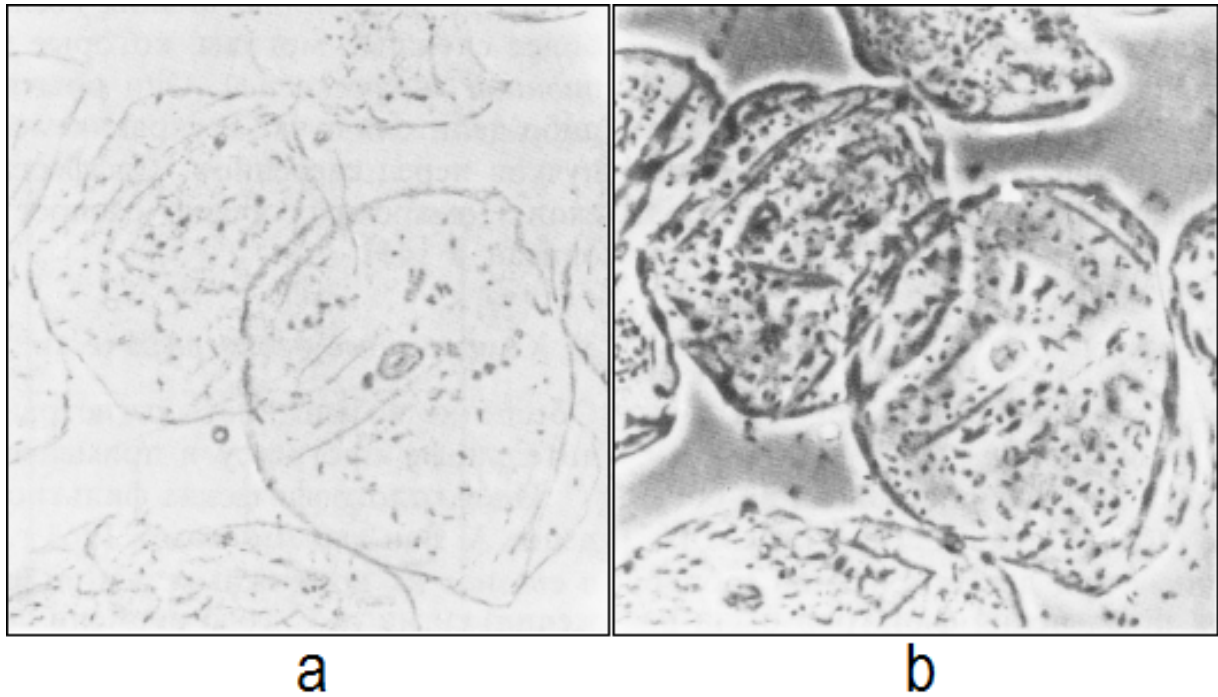


Рис. 6.25

При цьому величина фазової модуляції незначна. Така вимога виконується практично завжди, оскільки біологічні об'єкти, які спостерігаються за допомогою мікроскопу на 90% складаються з води. Тоді

$$U = e^{j\Phi} \approx 1 + j\Phi, \quad -\frac{1}{2}\Phi^2 \rightarrow 0. \quad (6.77)$$

Відповідно у частотній площині маємо

$$\mathfrak{I}\{U\} = \mathfrak{I}(\omega) \approx \delta(\omega) + j\mathfrak{I}\{\Phi\}. \quad (6.78)$$

Застосуємо в нулі частот точковий фільтр, тонку фазову пластинку, яка вносить зміну фази $\pi/2$ для нуля частот:

$$H(\omega) = j\delta(\omega) = \delta(\omega)e^{j\frac{\pi}{2}}. \quad (6.79)$$

Тоді за таким фільтром маємо поле

$$\tilde{\mathfrak{I}}(\omega) = \mathfrak{I}\{U\}H(\omega) \approx j\delta(\omega) + j\mathfrak{I}\{\Phi\}. \quad (6.80)$$

Поле у вихідній площині описується виразом

$$\tilde{U} \approx j\{1 + \Phi\} = e^{j\frac{\pi}{2}}\{1 + \Phi\}. \quad (6.81)$$

Відповідно інтенсивність

$$I \approx [1 + \Phi]^2 \approx 1 + 2\Phi. \quad (6.82)$$

Інакше кажучи, фазова інформація, властива об'єкту дослідження, перетворюється на амплітудну.

За реалізацію подібної ідеї Фріц Церніке у 1953 році отримав Нобелівську премію. Офіційно Нобелівська премія була присуджена «За обґрунтування фазово-контрастного методу, особливо за винахід фазово-контрастного мікроскопа».

На рисунках 6.23 – 6.25 наведені різні приклади зображень прозорих об'єктів (рисунки зліва) та тих самих об'єктів, отриманих у фазово-контрастному мікроскопі (рисунки справа).

6.3.2.7. Диференціювання сигналу

Як було показано в параграфі 2.3.6, похідна від певної функції (комплексної амплітуди) може бути записана у вигляді співвідношення (2.21):

$$\frac{dU(x)}{dx} = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} (j\omega) \mathfrak{F}(\omega) \exp(jx\omega) d\omega.$$

Перед тим як перейти до аналізу алгоритму, який дозволяє отримати таку похідну оптичними методами, з'ясуємо, який фізичний зміст міститься в похідній від комплексної амплітуди, на прикладі бінарного зображення. В математичному сенсі таке бінарне зображення може бути промодельоване прямокутним імпульсом (рис. 6.26а).

З простих міркувань похідна від такої функції має вигляд, поданий на рисунку (b). Інтенсивність поля, представленого похідною від $U(x)$ показана на рисунку (c).

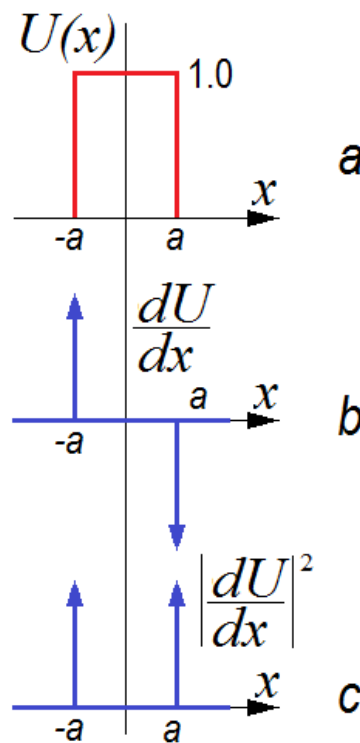


Рис. 6.26

Отже, операція диференціювання зображення здійснює оконтурювання початкового зображення.

Насправді на практиці такі бінарні зображення реалізуються достатньо рідко. Як правило, зміна інтенсивності у бінарному зображенні відбувається з певним «запізненням», як схематично надано на рисунку (див. рис. 6.27a)

Тоді похідна комплексної амплітуди формується не δ -функціями, як на рисунках 6.26 (a) і (b), а відносно вузькими імпульсами типу наведених на рисунку 6.27b. Тим не менш чим швидше змінюється інтенсивність, тим більша величина похідної реалізується.

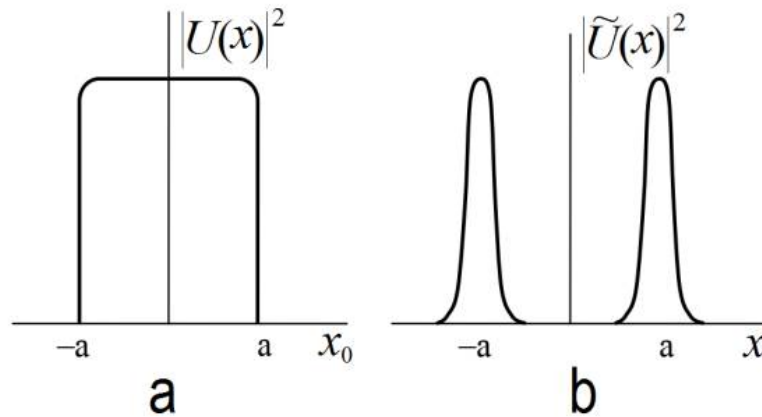


Рис. 6.27

Відповідно операцію диференціювання зображення можна трактувати як певну операцію, коли з усієї інформації про бінарне зображення, або ділянки напівтонового зображення, в межах якої інтенсивність змінюється мало, залишається лише інформація про «контури» таких областей, що приводить до зменшення надлишковості у зображеннях, які обробляються.

Звернемося знову до співвідношення (2.21), і відзначимо, що уявна одиниця j , яка в підінтегральному виразі стоїть перед ω , може бути винесена за знак інтегралу і представлена як постійний фазовий множник $e^{j\frac{\pi}{2}}$:

$$\frac{dU(x)}{dx} = \frac{1}{2\pi} e^{j\frac{\pi}{2}} \iint_{-\infty}^{\infty} \omega \mathfrak{I}(\omega) \exp(jx\omega) d\omega. \quad (6.83)$$

Враховуючи той факт що по суті постійні амплітудні та фазові множники не впливають на кінцевий результат трансформації вхідного зображення. Це співвідношення задає алгоритм отримання похідної від комплексної амплітуди методом оптичної фільтрації.

Дійсно, якщо на першому отримати Фур'є-образ від $U(x)$, а потім профільтрувати його за допомогою фільтра $H(\omega) = \omega$, то в результаті оберненого Фур'є-перетворення отримаємо (з точністю до множника $\frac{1}{2\pi} e^{j\frac{\pi}{2}}$) похідну від комплексної амплітуди.

Приклад такої обробки наведений на рисунку 6.28.

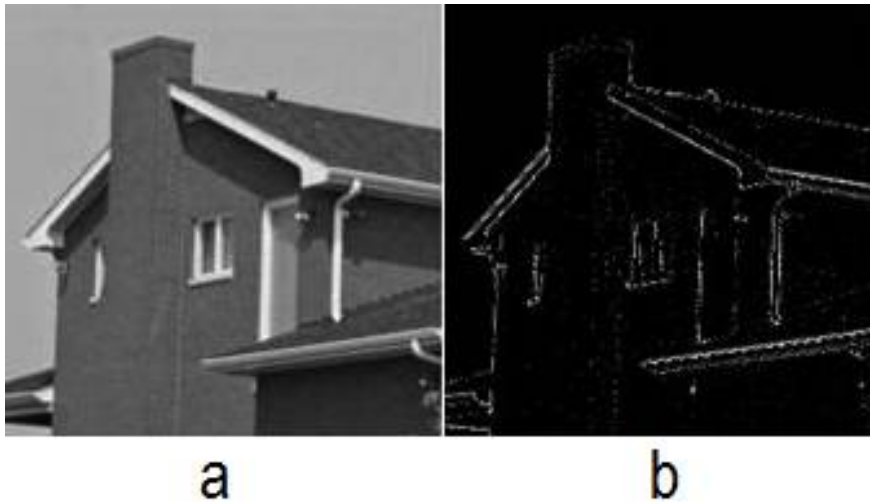


Рис. 6.28. Диференціювання зображення
а – початкове зображення; б – відфільтроване зображення

Результат, наведений на рисунку, можна вважати «тестовим» результатом, оскільки вхідне зображення складається з ділянок з практично постійною інтенсивністю. При цьому перехід від області з одною інтенсивністю до ділянки з іншою інтенсивністю досить різкий. Тому похідна в точках границі між областями має значний характер. В результаті відфільтроване зображення практично формує контур будинку.

6.3.3. Принципи оптимальної фільтрації [49]

Проблема оптимальної фільтрації, насамперед, виникає в задачах, подібних до задач розпізнавання образів.

Нехай $u(x, y)$ – аналізоване поле (аналізоване зображення), $s(x, y)$ – функція, яка описує об'єкт, що розпізнається; $n(x, y)$ – адитивний шум, який будемо вважати випадковою величиною, яка характеризується як Гауссовий процес (функція розподілу Гауссова).

За аналогією з оптимальним розпізнаванням сигналів у радіотехніці пристрій розпізнавання оптичних образів повинно мати передаточну функцію:

$$H(\omega, \vartheta) = \frac{CS^*(\omega, \vartheta)}{|N(\omega, \vartheta)|^2}, \quad (6.84)$$

де $S^*(\omega, \vartheta)$ – спряжений Фур'є-образ функції $s(x, y)$; $|N(\omega, \vartheta)|^2$ – спектр потужності функції $n(x, y)$; C – деякий постійний нормувальний множник.

З теорії зв'язку відомо, що такий фільтр забезпечує мінімум помилок при розпізнаванні у порівнянні з іншими фільтрами, у тому числі нелінійними.

При білому шумі, для якого $|N(\omega, \vartheta)|^2 = N_0 = \text{const}$, будемо називати такий фільтр узгодженим із сигналом $s(x, y)$.

6.3.3.1. Голографічне розпізнавання образів

Легко побачити, що фільтр у кореляторі Ван-дер-Люгта (див. параграф 6.2.3.2) належить до такої категорії, оскільки забезпечує формування кореляційної функції полів $u(x, y)$ та $s(x, y)$.

На рисунках 6.29. та 6.30 наведені приклади такого розпізнавання.

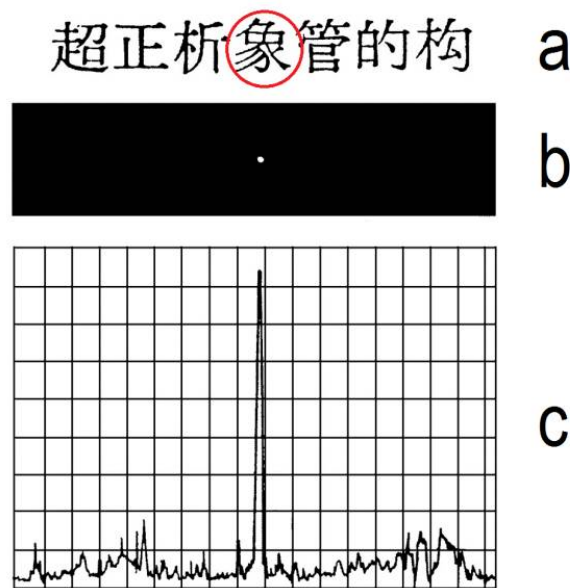


Рис. 6.29

а – текст (ієрогліфи), який подається для розпізнавання. Голограма фільтр була виготовлена для ієрогліфа, обведеного червоним кружечком; б – зображення кореляційного піку при розпізнаванні ієрогліфа; с – осцилограма кореляційного піку

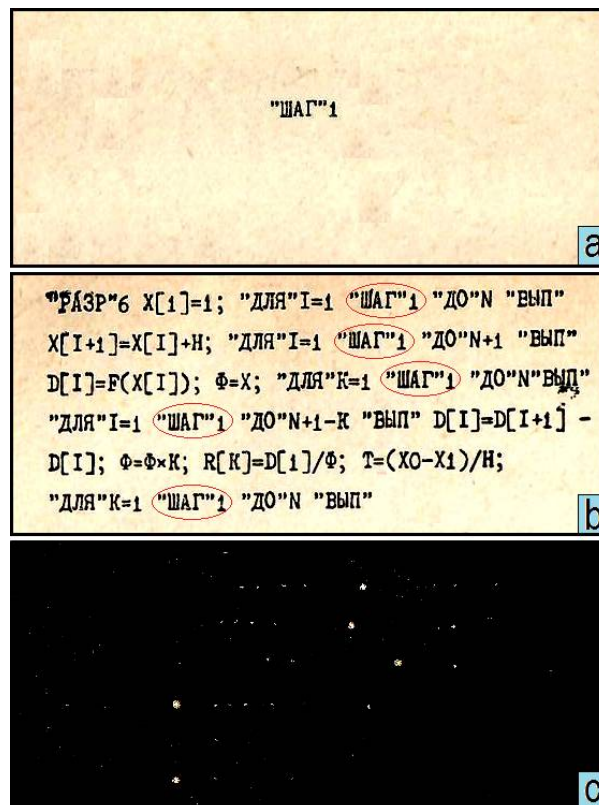


Рис. 6.30

а – еталонний сигнал (еталонне зображення); в – сторінка яка аналізується; с – кореляційне поле

На рисунку 6.29 наведений певний текст, який подається в корелятор Ван-дер-Люгта для розпізнавання певного ієрогліфа. Попередньо на стадії запису для такого ієрогліфа був записаний узгоджений фільтр. На рисунках (b) і (c) чітко проглядається кореляційний пік, який формується при освітленні голограми фільтра полем, яке використовувалося при записі. Решта образів, які подаються на вхід корелятора, формують інтермодуляційний шум, який за інтенсивністю на кілька порядків менше від величини кореляційного піку.

Рисунок 6.30 демонструє розпізнавання за допомогою корелятора кодового слова «Шаг» 1 (рисунок (a)) на сторінці тексту (рисунок (b)), де це слово виділене червоним. Поле з яскравими кореляційними піками з відповідними позиціями, які ідентифікують позиції кодового слова, наведені на рисунку (c).

При цьому відзначимо, що, крім основних кореляційних піків, спостерігаються досить яскраві пічки в інших місцях вихідної площини корелятора. Появу таких «артефактів» можна пояснити тим, що слова тексту, який подається на розпізнавання, мають подібні (схожі) елементи із кодовим словом. Водночас інтенсивність цих пічків значно менша, ніж інтенсивність основних кореляційних піків.

6.3.3.2. Фактори, які обмежують ефективність голографічних систем розпізнавання. Масштаб, ракурс, поворот зображення [14,48,50,51].

Основним недоліком систем голографічного розпізнавання образів є висока чутливість таких методів до зміни параметрів вхідних зображень (при абсолютному зберіганні їх структури), таких як:

- зміна масштабу зображення;
- зміна орієнтації сигналу;
- зміна ракурсу та ін.

Така зміна параметрів приводить до зменшення інтенсивності кореляційного піку, його розширення. При цьому треба відзначити, що величина падіння інтенсивності залежить не тільки від абсолютної величини зміни характеристики, а й від структури зображень, що розпізнаються.

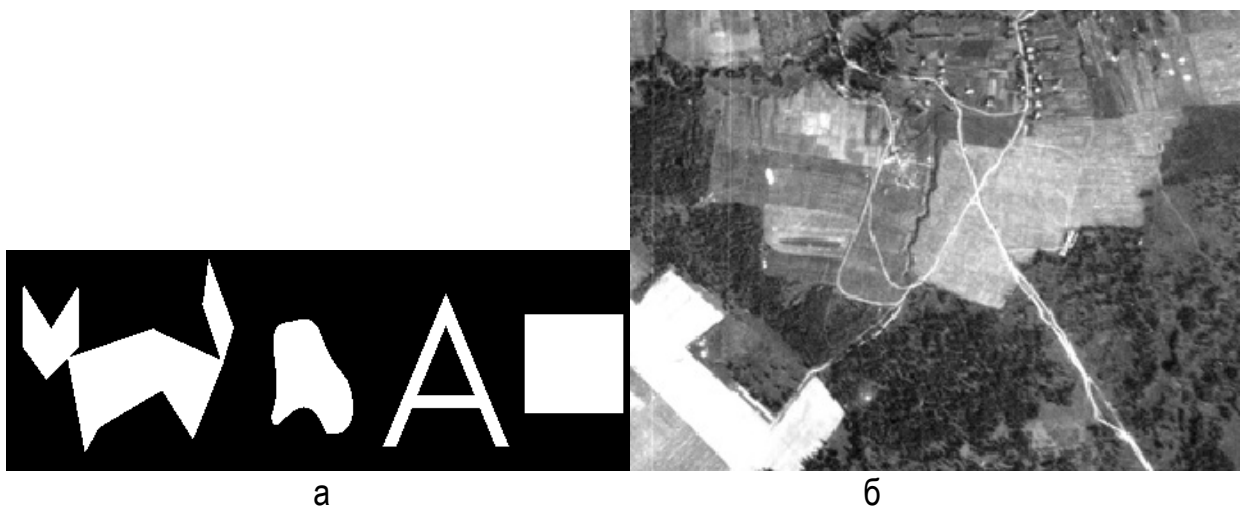


Рис. 6.31. Тестові вхідні зображення:

а – бінарне зображення; б – напівтонове статистичне зображення

Можна виділити два граничних випадки (тестових структур) вхідних зображень. Перший тип – це бінарні зображення, подібні до наведених на рисунку 6.31а. Другий тип – це напівтонові статистичні зображення, типовим представником яких є аерофотознімок (рис. 6.31б).

Бінарна модуляція

Як впливає з теоретичних оцінок та результатів експериментальних досліджень, у випадку, коли вхідне зображення формується пропусканням хвилі через бінарний транспарант (наприклад, екран із відповідними отворами), зміна масштабу зображення на 15% приводить до падіння інтенсивності кореляційного піка на 30%.

Зміна орієнтації бінарного транспаранта на 15° приводить до подібного падіння інтенсивності кореляційного піка, тобто його величина зменшується на 30%.

Статистичний амплітудний транспарант

У випадку транспаранта зі складною структурою ситуація виглядає більш драматичною. Так, у випадку статистичного амплітудного транспаранта (типу аерофотознімок) зміна масштабу на 5% приводить до падіння інтенсивності кореляційного піка більше ніж на 75%.

До такого ж самого падіння приводить зміна орієнтації такого сигналу лише $3^\circ \div 5^\circ$.

Вплив зміни ракурсу вхідного зображення на величину кореляційного піку ілюструється рисунком 6.32.

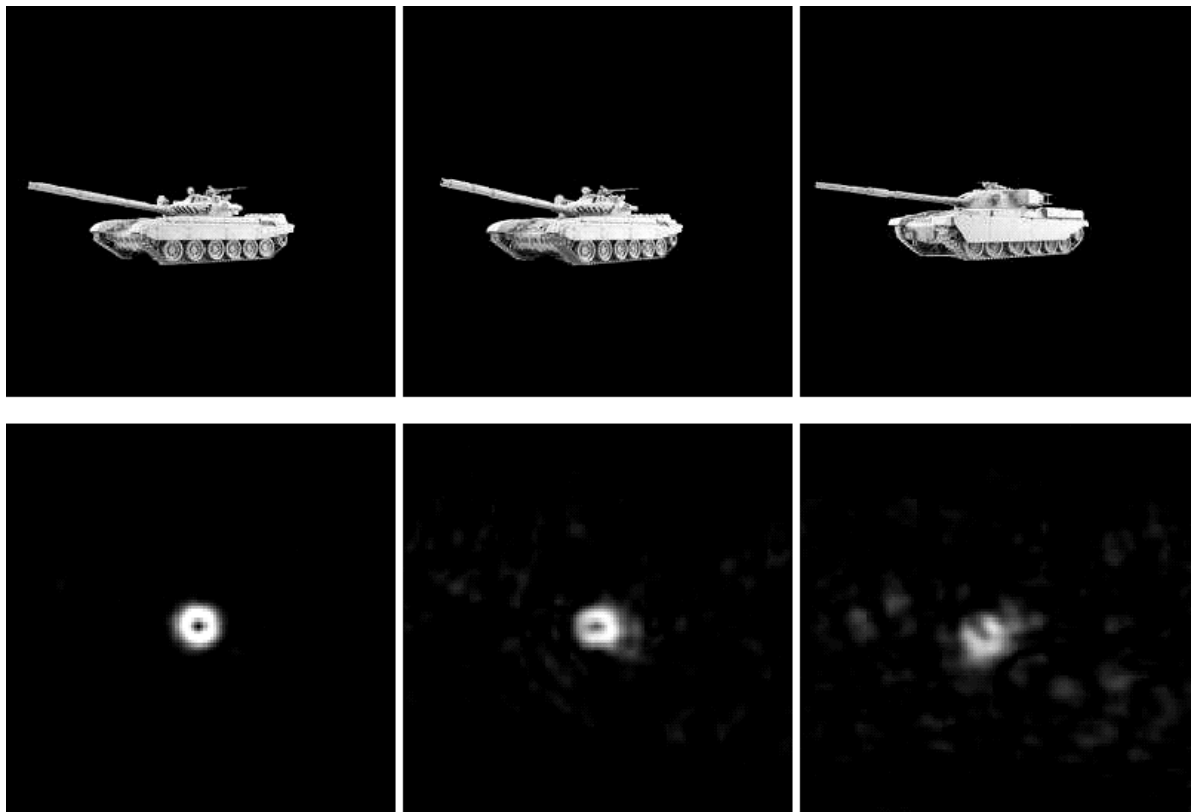


Рис. 6.32

6.3.4. Методи боротьби із факторами, які впливають на ефективність голографічних систем розпізнавання

6.3.4.1. Багатократний запис голограми фільтра

Одним зі способів боротьби з факторами, які впливають на ефективність голографічних систем розпізнавання, є метод багатократного запису голограм фільтрів для різних параметрів зображень, наприклад для зображень з кроком масштабу 2-3%. При цьому елементарні фільтри записуються на одне місце фотоносія.

Відповідно на стадії розпізнавання зображення, яке аналізується, само «вибирає» потрібний фільтр і формує кореляційний відгук відповідної величини.

Головним нюансом такого методу є те, що при багатократному записі дифракційна ефективність кожного наступного фільтра падає, тому час експозиції змінюється від фільтра до фільтра.

Отже, до недоліків такого методу можна віднести:

- низьку дифракційну ефективність парціального фільтра;
- кожен наступний фільтр записується з меншою ефективністю, ніж попередній.

6.3.4.2. Застосування оптичних систем спеціального типу

Для запобігання дії спотворюючих факторів можна використати різного типу спеціальні елементи, як от обертаюча призма, систем зі змінним фокусом, які змінюють орієнтацію (масштаб або ракурс) вхідного зображення. Досить часто головним недоліком таких систем є втрата такої характеристики системи, як обробка інформації в реальному часі. Це пов'язано з тим, що швидкодія подібних пристроїв обмежується механічними параметрами системи (наприклад частотою обертання призми і т ін.).

Інакше кажучи, нівелюється така перевага оптичних систем обробки інформації, як швидкість обробки, що обмежується лише швидкістю розповсюдження світла через пристрій.

6.3.4.3. Системи з оберненим зв'язком [52]

Певним розв'язком такої проблеми є так звані системи з оберненим зв'язком. Розглянемо систему, яка наведена на рисунку 6.33 і складається з двох систем: основної (об'єктиви L_1, L_2 та світлоподілювачі BS) і гілки оберненого зв'язку. Завдяки другому світлоподілювачу частина спрямовується в гілку оберненого зв'язку.

Вхідне поле системи формується при проходженні транспаранта T (наприклад, ПЧМС). При цьому нижня гілка системи, яка містить два об'єктиви L_3, L_4 і дзеркала, перекривається. В площині на виході системи за допомогою об'єктива L_5 формується Фур'є-образ вхідного сигналу і записується голограма-фільтр H .

На стадії розпізнавання гілка оберненого зв'язку відкривається і після проходження вхідного світлоподілювача BS хвиля знову надходить в основну частину системи. Характеристики оптичних елементів гілки оберненого зв'язку підібрані так чином (наприклад, фокусні відстані об'єктивів L_3, L_4 та відповідні відстані), що оптичні шляхи у верхній і нижній частинах систем узгоджені, тобто зображення, яке створюється об'єктивами L_3, L_4 формується (як і в основній частині системи) в площині P_2 і відповідно в області фільтра H формується Фур'є-образ зображення, яке утворилося при проходженні гілки оберненого зв'язку.

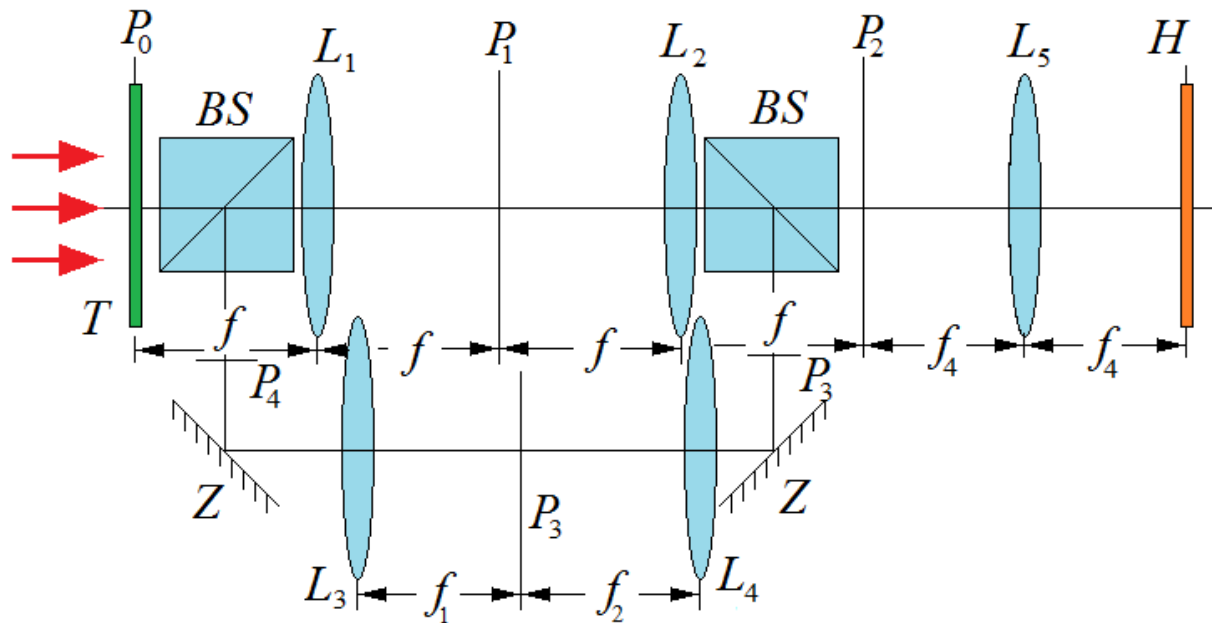


Рис. 6.33

Оскільки така операція здійснюється багатократно, то в площині P_2 і в площині фільтра утворюється сукупність зображень та Фур'є-образів. Коефіцієнт відбивання на розділюючому шарі елементів BS підбирається так (як можна більше), що лише мала частина випромінювання залишається в основній частині системи. Тоді інтенсивності зображень створені у результаті різних проходів випромінювання через гілку оберненого зв'язку різняться мало.

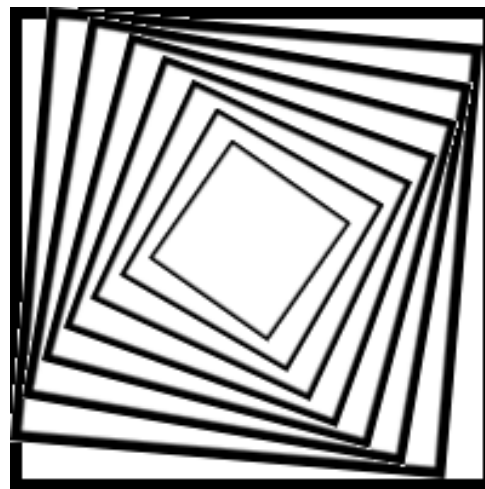


Рис. 6.34

Разом з тим фокусні відстані об'єктів L_3 і L_4 (або «розворот» дзеркал Z) відрізняються на невелику величину.

Тоді масштаби (орієнтація) кожного наступного зображення також відрізняються від попереднього на невелику величину (наприклад, так, як подано на рис. 6.34). Природно, що в цій сукупності зображень обов'язково є зображення, яке максимально наближається до еталонного, яке використовувалося при записі фільтра, і як наслідок таке зображення сформує потужний кореляційний пік.

Проте подібні системи мають один принциповий суттєвий недолік, а саме оптичні елементи системи повинні бути надзвичайно високої якості. Дійсно, уявімо собі, що всі оптичні елементи системи (основної гілки і гілки оберненого зв'язку) вносять інтегральне спотворення хвильового фронту у долях довжини хвилі всього 0.1λ . Це характеризує систему як систему з дуже високою якістю оптичних елементів.

Проте, при повторному проходженні випромінювання через систему аберація зростає удвічі і спотворення хвильового фронту також збільшується вдвічі (0.2λ). Якщо розглянути 20 проходів випромінювання, то ця величина складає вже 2λ , що спричиняє значне спотворення зображення. Інакше кажучи, хвильова похибка пропорційна кількості проходів випромінювання через систему і може досягати значної величини.

Окрім цього, реально в системі з оберненим зв'язком може досягатися інваріантність до зміни лише одного параметра зображення, наприклад масштабу. Для реалізації інваріантності до додаткового параметра (наприклад, його орієнтації) треба послідовно з першою системою використовувати ще одну аналогічну систему, в якій така інваріантність буде досягатися. Природно, що така операція приведе до додаткових погіршень якості перетворених зображень.

6.3.4.4. Просторово-залежні методи обробки інформації [14,50,51,53-58]

Як було показано в параграфі 3.1.1, оптичні системи зі сферичною оптикою володіють просторовою інваріантністю. Це повною мірою стосується систем, в яких виконується Фур'є-перетворення.

Останнім часом достатньо широке розповсюдження отримали методи просторово-залежної обробки інформації, коли вихідний сигнал, його структура та характеристики залежать від розташування зображення у вхідній площині системи.

В таких системах широко використовується асферична оптика, синтезовані голограми тощо. Незважаючи на те, що в просторово-залежних системах втрачається така важлива властивість, як просторово-інваріантність, дуже часто набуваються інші позитивні якості, наприклад, інваріантність до зміни параметрів вхідних сигналів, таких як масштаб зображення, його орієнтація.

Очевидно, що вперше такий тип обробки інформації був запропонований Девідом Касесентом при реалізації масштабно-інваріантної системи розпізнавання образів на основі Меллін-перетворення (див. параграф 2.6).

В цій роботі перехід від Декартових координат до логарифмічних виконувався за допомогою телевізійної техніки.

Вхідне зображення фіксувалося за допомогою телевізійної камери, розгортка зображення, в якій виконувалася стандартним способом, тобто керуюча напруга змінювалася лінійно (див. рис. 6.35 (а) та (б)). На приймальному кінці зображення формувалося за допомогою розгортки для якої керуюча напруга змінювалася за логарифмічним законом (рис. 6.35 (с)). Відповідно вихідне зображення перетворювалося з Декартових у логарифмічні координати. На наступному етапі перетворене зображення оброблялося у традиційній системі зі сферичною оптикою.

Аналогічна операція може бути здійснена для побудови системи розпізнавання інваріантної до орієнтації вхідного сигналу [55], коли відбувається перехід від Декартових координат до полярних (див. параграф 2.6).

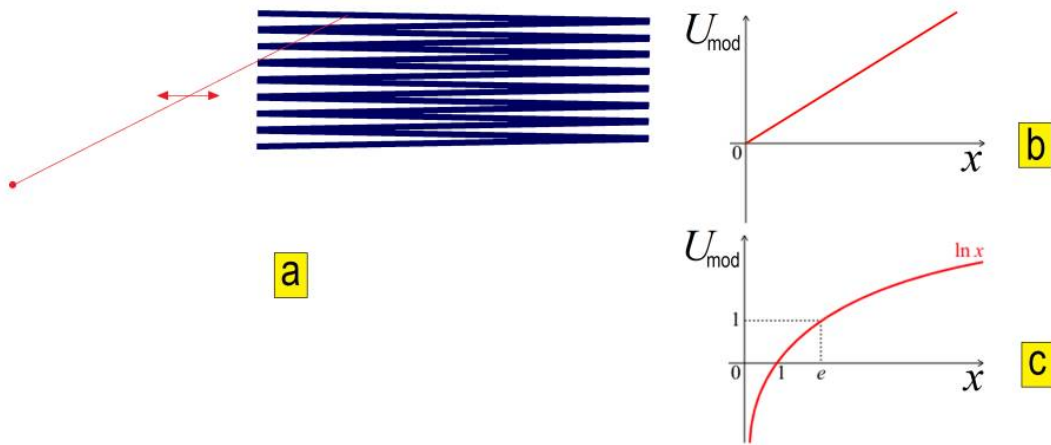


Рис. 6.35

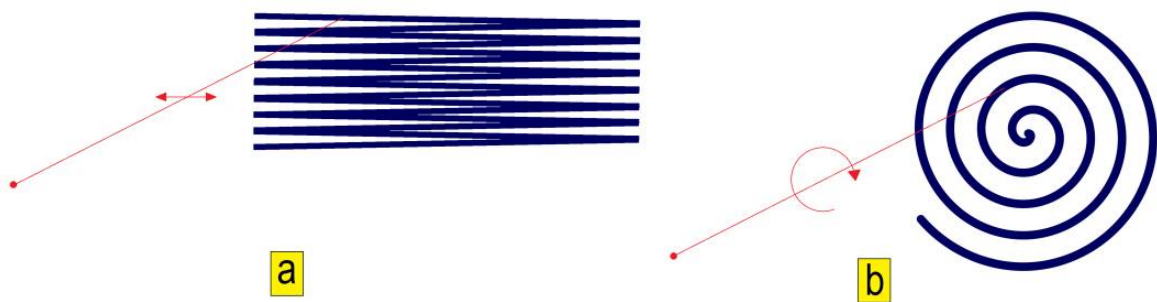


Рис. 6.36

В такому випадку на приймальному кінці реалізується кругова розгортка (див. рис. 6.36).

6.3.4.5. Реалізація Меллін-перетворення за допомогою комп'ютерно-синтезованих голограм [56,57]

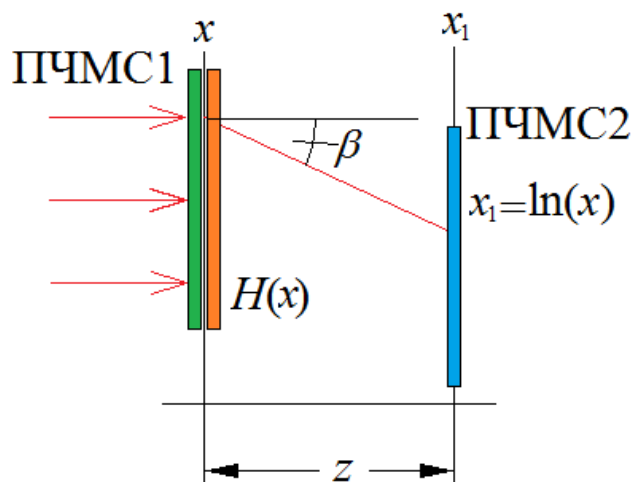


Рис. 6.37

Для простоти будемо розглядати одновимірний випадок. Механізм формування полів у двовимірній ситуації нічим не відрізняється. Нехай певний транспарант (наприклад, ПЧМС1, див. рис. 6.37) освітлюється нормалізованою до одиниці плоскою хвилею, яка розповсюджується вздовж z .

Тоді поле за транспарантом пропорційне його пропусканню. Безпосередньо за транспарантом розташований певний тонкий елемент $H(x)$, який вносить чисто фазову модуляцію.

При цьому характер модуляції (наприклад, період решітки зі змінною частотою) такий, що промінь, який пройшов через точку x транспаранта, відхиляється на кут β , що визначається співвідношенням

$$\tan\beta = \frac{x - \ln x}{z}. \quad (6.85)$$

Нехай фазовий елемент виконаний у вигляді решітки зі змінним параметром. Тоді кут дифракції β при освітленні елемента нормально падаючою хвилею пов'язаний із періодом ґратки виразом

$$T(x)\sin\beta = m\lambda. \quad (6.86)$$

де m – період дифракції.

В першому порядку дифракції ($m = 1$) з (6.85) та (6.86) маємо, що період решітки може бути визначений зі співвідношення

$$T(x) = \frac{\lambda\sqrt{z^2 + (x - \ln x)^2}}{x - \ln x}, \quad (6.87)$$

або якщо виконується параксіальне наближення ($\tan\beta \approx \sin\beta \approx \beta$), то

$$T(x) \approx \frac{\lambda z}{x - \ln x}, \quad (6.88)$$

Фактично вирази (6.87) та (6.88) визначають алгоритм виготовлення комп'ютерно синтезованої голограми у вигляді решітки зі змінним періодом.

Якщо після ПЧМС1 поле, промодульоване зображенням, задовольняє критерію наближення хвильових фронтів, то після проходження фазового елемента у площині на відстані z сформується зображення у логарифмічних координатах.

Враховуючи, що ми розглядали одновимірний випадок, то для отримання двовимірного зображення необхідно використовувати дві решітки типу (6.87), (6.88), які розташовані впритул одна за одною і штрихи яких взаємно перпендикулярні.

Такі решітки (синтезовані голограми) були виконанні на спеціальному обладнанні у вигляді решіток на скляній підкладці, покритій алюмінієм. Штрихи решітки нарізалися алмазним різцем за відповідною програмою. На другому етапі з решіток були зроблені прозорі «репліки», де основою слугували знову скляні плоскопаралельні пластинки, а «робочим» шаром, на якому формувалися штрихи ґратки, слугувала епоксидна смола.

На рисунку 6.38 наведені результати одновимірної реалізації такої операції для двох прямокутних отворів, які за однією стороною відрізняються у 1.5 рази.

Рисунок (а) відповідає початковим зображенням, отриманим при проходженні паралельного пучка через відповідні отвори. Природно, що Фур'є-спектри полів, які сформовані такими отворами в горизонтальному напрямку, також в 1.5 рази різняться за масштабом. Після цього, згідно зі схемою рис. 6.37, формувалися перетворенні зображення, які фіксувалися фотографічно (формувалися екрани з отворами, які мають розміри згідно із розмірами у перетворених координатах).

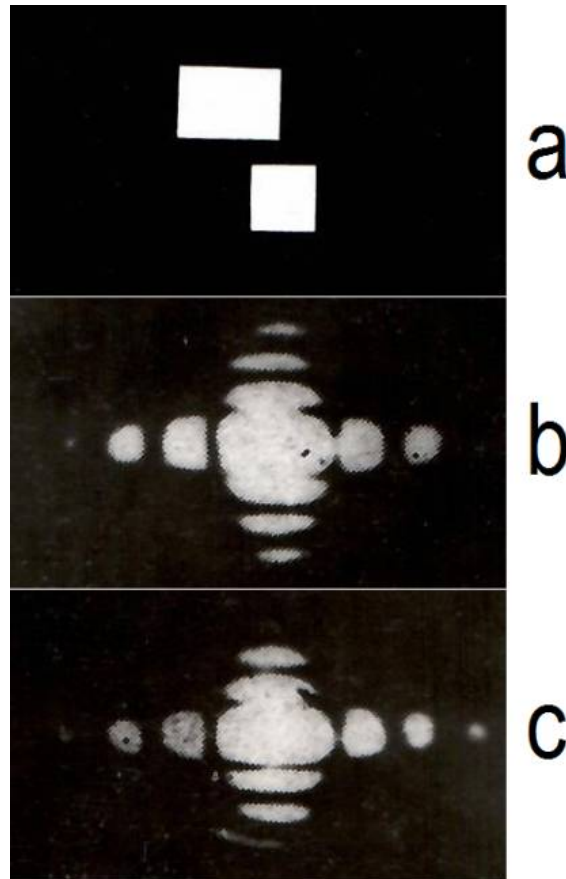


Рис. 6.38. Результати одновимірного перетворення (переводу з Декартових у логарифмічні координати) зображень за допомогою синтезованої голограми: а – початкові зображення; b,c – Фур'є-спектри перетворених зображень

На рисунках (b) та (c) наведені Фур'є-спектри перетворених зображень. Як бачимо, спектри таких зображень практично ідентичні за структурою і розмірами дифракційних плям.

Для двовимірних об'єктів проведена також експериментальна перевірка. Як тест-об'єкти використовувалися поля, сформовані при проходженні паралельного пучка через трикутні отвори, які різнилися за масштабом в 1.5 рази. Перетворенні зображення поміщалися у корелятор Ван-дер-Люгта, де для одного з них формувалася голограма фільтр. Потім для розпізнавання подавалося інше перетворене зображення та фіксувався кореляційний відгук. У традиційній ситуації масштабованих зображень, якщо голограма фільтр була б виконана для одного з початкових зображень (скажімо, для меншого трикутника), то величина кореляційного піку для іншого зображення при стрибку масштабу в 50% фактично нульова.

Результати експерименту подані на рис. 6.39.

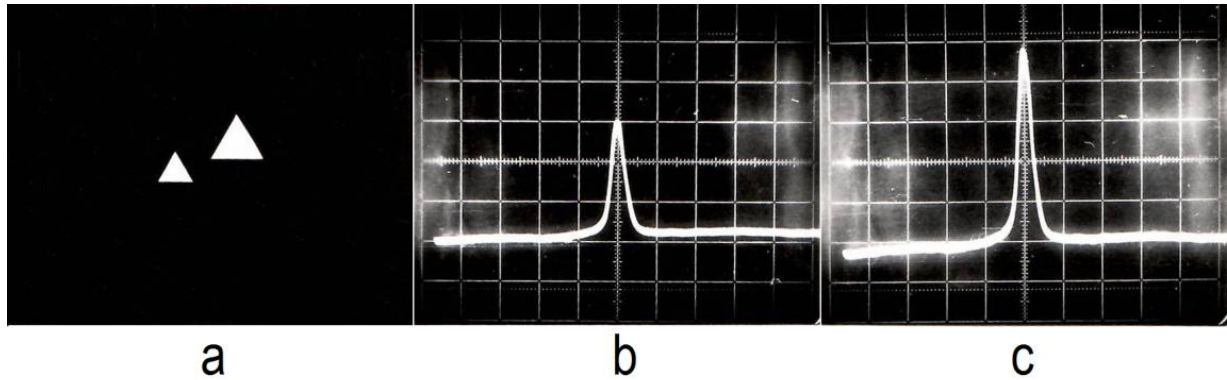


Рис. 6.39. Результати координатних перетворень двовірних зображень за допомогою синтезованих голограм:

а – початкові зображення; б,с – осцилограми «кореляційних піків» перетворених зображень, сформованих у кореляторі Ван-дер-Люгта.

Як бачимо з рисунків (б) та (с), кореляційні пічки відрізняються за величиною приблизно в 1.5 рази, хоча повинні бути сумірними. Таку різницю можна пояснити тим, що оптимальні параметри експонування перетворених зображень (формування екранів у перетворених координатах) були досягнуті лише частково. Проте величина кореляційних піків цілком піддається зіставленню.

Таким чином, попередня просторово-залежна обробка початкових зображень реально відкриває перспективи побудови голографічних систем розпізнавання інваріантних до зміни, у якому разі, таких параметрів як масштаб та орієнтація тестованих полів.

Водночас, як у першому випадку (використання телевізійної техніки), так і у випадку перетворення зображень за допомогою синтезованих голограм передбачається стадія «перезапису» перетворених зображень. Така додаткова операція приводить до суттєвого збільшення часу обробки вхідних сигналів. Тобто втрачаються переваги оптичних систем обробки інформації, які працюють у реальному часі, зі швидкістю, що обмежується лише швидкістю розповсюдження електромагнітних хвиль. Тому в наступному параграфі розглянемо можливість виконання просторово-залежної обробки вхідних сигналів в реальному часі, тобто без проміжної стадії перезапису перетворених зображень.

6.3.4.6. Реалізація масштабно-інваріантного перетворення вхідних сигналів в реальному часі [58]

Як показано в параграфі 3.1.2, якщо система складається зі елементів «сферичної» оптики, то вона просторово-інваріантна. Тобто складну систему можна розкласти на елементарні підсистеми і загальна передаточна функція буде добутком таких елементарних передаточних функцій (вираз (3.9)):

$$H(x, y, \varepsilon, \mu) = H_1 \dots H_{N-1} H_N. \quad (3.8)$$

Відповідно розрахувати вихідне поле нескладно, оскільки, як правило, такі функції відомі для кожного каскаду.

Як бачимо з параграфа 3.4.2, такий алгоритм принципово неможливий для просторово-залежної системи (ПЗС), системи, вихідний сигнал якої залежить від локалізації початкового сигналу у вхідній площині.

Разом з тим, якщо елементи ПЗС вносять суто фазову плавну модуляцію, вихідне поле $U(x_b, y_b)$ може бути отримане у вигляді виразу (3.69), тобто

$$U(x_b, y_b) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\alpha, \beta) \hat{L} \{e^{jk(\alpha x_0 + \beta y_0)}\} d\alpha d\beta, \quad (6.89)$$

де $G(\alpha, \beta)$ – кутовий спектр вхідного поля $U(x_0, y_0)$:

$$U(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\alpha, \beta) e^{jk(\alpha x_0 + \beta y_0)} d\alpha d\beta, \quad (6.70)$$

а оператор $\hat{L}$ може бути отриманий на основі застосування наближення хвильових фронтів, оскільки хоча би у першому каскаді елементарна хвиля $e^{jk(\alpha x_0 + \beta y_0)}$ допускає застосування такого наближення.

Для простоти будемо розглядати одновимірний випадок (див. рис. 6.40).

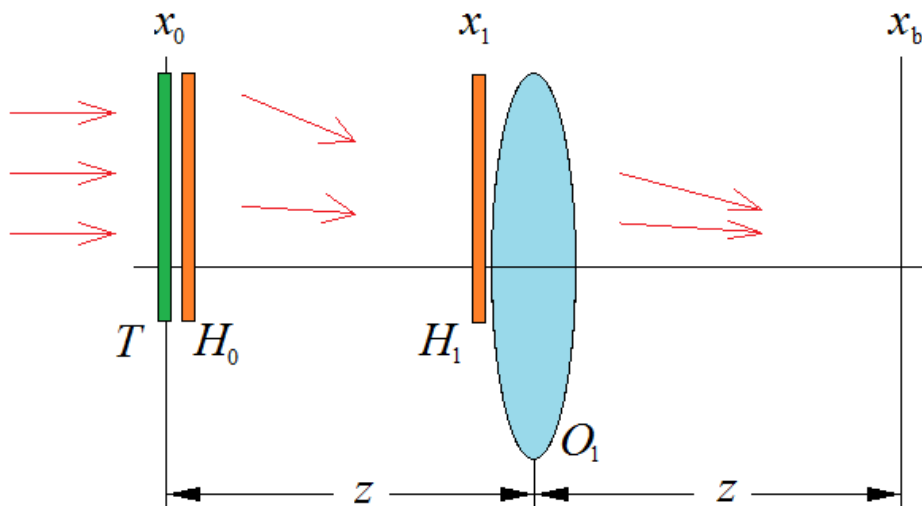


Рис. 6.40

Нехай у вхідній площині розташований транспарант T із пропусканням $A_0(x_0)$. Безпосередньо за транспарантом розташований перший фазовий елемент із пропусканням:

$$H_0(x_0) = e^{jk\varphi_0(x_0)}, \quad (6.71)$$

де $k\varphi_0(x_0)$ – затримка по фазі, яку вносить такий елемент.

На відстані z розташований другий фазовий елемент

$$H_1(x_1) = e^{jk\varphi_1(x_1)} \quad (6.72)$$

та Фур'є-перетворюючий об'єкт O_1 .

Досить просто показати, що якщо вихідне поле формується у вигляді

$$U_b(x_b) = e^{j\frac{k}{z}(x_b + \frac{x_b^2}{2} - x_b \ln x_b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_0(\alpha)}{\sqrt{\alpha z}} e^{j\frac{k}{z}(x_b \ln \alpha z)} d\alpha, \quad (6.73)$$

де $G_0(\alpha)$ – кутовий спектр пропускання вхідного транспаранта, то таке поле інваріантне відносно зміни масштабу вхідного сигналу.

Дійсно, кутовий спектр масштабованого з коефіцієнтом γ сигналу має вигляд

$$G_\gamma(\alpha) = \frac{1}{|\gamma|} G\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right). \quad (6.74)$$

Роблячи заміну $\frac{\alpha}{\gamma} = t$, знаходимо, що вихідне поле

$$U_b(x_b) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{|\gamma|}} e^{j\frac{k}{z}(x_b \ln \gamma)} \right\} e^{j\frac{k}{z}(x_b + \frac{x_b^2}{2} - x_b \ln x_b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_0(t)}{\sqrt{t z}} e^{j\frac{k}{z}(x_b \ln t z)} dt \quad (6.75)$$

відрізняється від (6.73) лише на лінійний фазовий множник $e^{j\frac{k}{z}(x_b \ln \gamma)}$ із постійним коефіцієнтом $\frac{1}{\sqrt{|\gamma|}}$.

Вихідне поле (6.7.3) формується в площині x_b лише у випадку, коли у площині x_1 воно має вигляд:

$$U_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_0(\alpha)}{\sqrt{e^{-x_1}}} e^{-jk\varphi_1(x_1)} e^{jk\alpha \exp(x_1)} d\alpha. \quad (6.76)$$

З іншого боку згідно із наближенням хвильових фронтів,

$$U_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_0(\alpha)}{\sqrt{z \frac{d^2 \varphi_0}{dx_0^2} + 1}} \exp \left\{ jk \left[\varphi_0(x_0) + \alpha x_0 + \frac{z}{2} \left(\frac{d\varphi_0}{dx_0} + \alpha \right)^2 \right] \right\} d\alpha_{x_0=x_0(x_1)}, \quad (6.77)$$

де $x_0 = x_0(x_1)$ – розв'язок рівняння $x_0 - x_1 + \alpha z + z \frac{d\varphi_0}{dx_0} = 0$.

З (6.74) і (6.75) випливає

$$\begin{aligned} \varphi_1 \left(x_0 + \alpha z + z \frac{d\varphi_0}{dx_0} \right) = \\ = \alpha \exp \left(x_0 + \alpha z + z \frac{d\varphi_0}{dx_0} \right) - \varphi_0(x_0) - \alpha x_0 - \frac{z}{2} \left(\frac{d\varphi_0}{dx_0} + \alpha \right)^2. \end{aligned} \quad (6.78)$$

Розкладаючи експоненту в (6.78) за степенями α і обмежуючись членами лише із першим ступенем (вважаємо, що α мале), отримуємо таку систему:

$$\begin{cases} \varphi_1(\varepsilon) = -\frac{z}{2} \left[\frac{d\varphi_0(x_0)}{dx_0} \right]^2 - \varphi_0(x_0) \\ \frac{d\varphi_1(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{e^{\varepsilon - \varepsilon}}{z} \end{cases}, \quad (6.79)$$

де $\varepsilon = x_0 + z \frac{d\varphi_0(x_0)}{dx_0}$.

Відповідно із другого рівняння (6.79), маємо явний вигляд для $\varphi_1(x_1)$

$$\varphi_1(x_1) = \frac{1}{z} (e^{x_1} - \frac{x_1^2}{2}). \quad (6.80)$$

Якщо другий фазовий елемент виконувати у вигляді синтезованої голограми, то розрахунок періоду другої голограми досить просто провести, якщо на рисунку 6.37 спрямувати хід променів у зворотному напрямку. Іншою мовою, якщо добиватися ситуації, коли відбувається заміна координати x у зображенні не на $\ln x$, а на $\exp x$.

Продовжимо наш розгляд. Використовуючи (6.79) та (6.80), можна записати

$$\varphi_0(x_0) - \frac{1}{2z} x_0^2 - x_0 \frac{d\varphi_0(x_0)}{dx_0} + \frac{1}{z} e^{x_0+z \frac{d\varphi_0(x_0)}{dx_0}} = 0. \quad (6.81)$$

Звідки маємо

$$\varphi_0(x_0) = \frac{1}{z} (x_0 \ln x_0 - \frac{x_0^2}{2} - x_0). \quad (6.82)$$

Відзначимо, що якщо уважно проаналізувати оптичну схему, то просторова координата в площині x_b відповідає частоті спектра $\omega = \frac{kx_b}{z}$. Як наслідок, кінцеві співвідношення для поля, яке ми отримали у передбаченні малих α , в цьому відповідає співвідношенню (6.73).

Для всіх значень α поле на виході системи має вигляд:

$$U_b(x_b) = e^{j \frac{k}{z} (x_b + \frac{x_b^2}{2} - x_b \ln x_b)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_0(\alpha)}{\sqrt{\alpha z}} e^{j \frac{k}{z} \{x_b \ln \alpha z + x_b \ln [\frac{1 - \exp(-\alpha z)}{\alpha z}]\}} d\alpha, \quad (6.83)$$

що, природно, не забезпечує масштабну інваріантність для всіх частот вхідного сигналу.

Введемо суто формально до інтегралу (6.83) у показник експоненти під інтегралом фазову добавку типу:

$$j \frac{k}{z} \varphi(\alpha) = -j \frac{k}{z} \theta \ln \left[\frac{1 - \exp(-\alpha z)}{\alpha z} \right], \quad (6.84)$$

де θ – деяка константа.

Тоді для $x_b = \theta$ цей інтеграл також буде дорівнювати інтегралу (6.73).

Така добавка може бути введена за рахунок використання додаткових каскадів у вигляді узагальненої системи фільтрації (об'єктиви O_2 та O_3), попередньо розташованою перед «трансформуючею» системою (див. рис. 6.41).

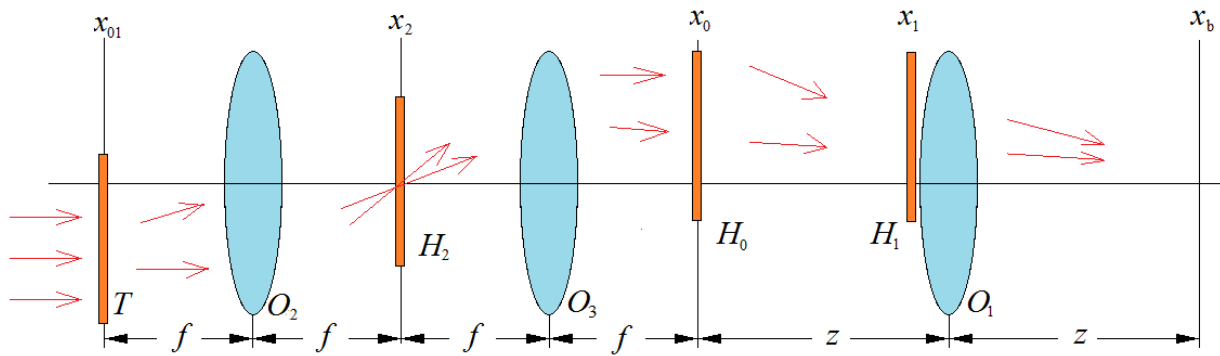


Рис. 6.41

В частотній площині системи фільтрації розташуємо додатковий частотний фільтр із пропусканням:

$$H(x_2) = \exp\left\{-j\frac{k}{z}\theta \ln\left[\frac{1-\exp(-x_2)}{x_2}\right]\right\} \quad (6.85)$$

Після оберненого Фур'є-перетворення поле на вході трансформуючої системи має вигляд:

$$\tilde{U}(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\alpha) e^{jk(\alpha x_0)} e^{-j\frac{k}{z}\theta \ln\left[\frac{1-\exp(-\alpha z)}{\alpha z}\right]} d\alpha d\beta, \quad (6.86)$$

Таким чином, масштабно-інваріантне перетворення може бути реалізоване не тільки для малих α , а й для іншої просторової частоти, яка визначається умовою $x_b = \theta$ і всіх α .

Експериментальна перевірка розробленого алгоритму була пов'язана зі значними складнощами, які впливають з наявністю у системі 3-х синтезованих голограм. Відповідно, внаслідок малої дифракційної ефективності голограм, вихідний сигнал системи має незначну величину та дуже зашумлений «паразитними» дифракційними порядками. Тому в площині x_2 виділялися лише «актуальні» дифракційні порядки, які за локалізацією визначаються згідно зі співвідношенням $x_b = \theta$ з виразу 6.86.

На рисунку 6.42 наведені результати тестування одновимірної версії розробленого алгоритму.

Стовпчик a,d,g рисунку відповідає спектра різномасштабних тестових сигналів, які отримані при освітленні прямокутних отворів типу однакової товщини, але різної ширини. Отже, розміри отворів у вертикальному напрямку були однакові, а в горизонтальному напрямку відрізнялися. Максимальна різниця в масштабах 50%. Відповідно у вертикальному напрямку дифракційні порядки розташовані однаково, а в горизонтальному локалізовані згідно із масштабом отворів.

Стовпчик b,e,h рисунку відповідає «актуальним» дифракційним порядкам, які виділені у частотній площині за допомогою смугових екранів, які пропускали дифракційні порядки спектрів тестових зображень, для яких була розрахована перша синтезована голограма H_2 , що розташована у площині x_2 .

Стовпчик c,f,i ілюструє локалізацію перетворених дифракційних порядків. З рисунка видно, що вони локалізовані однаково.

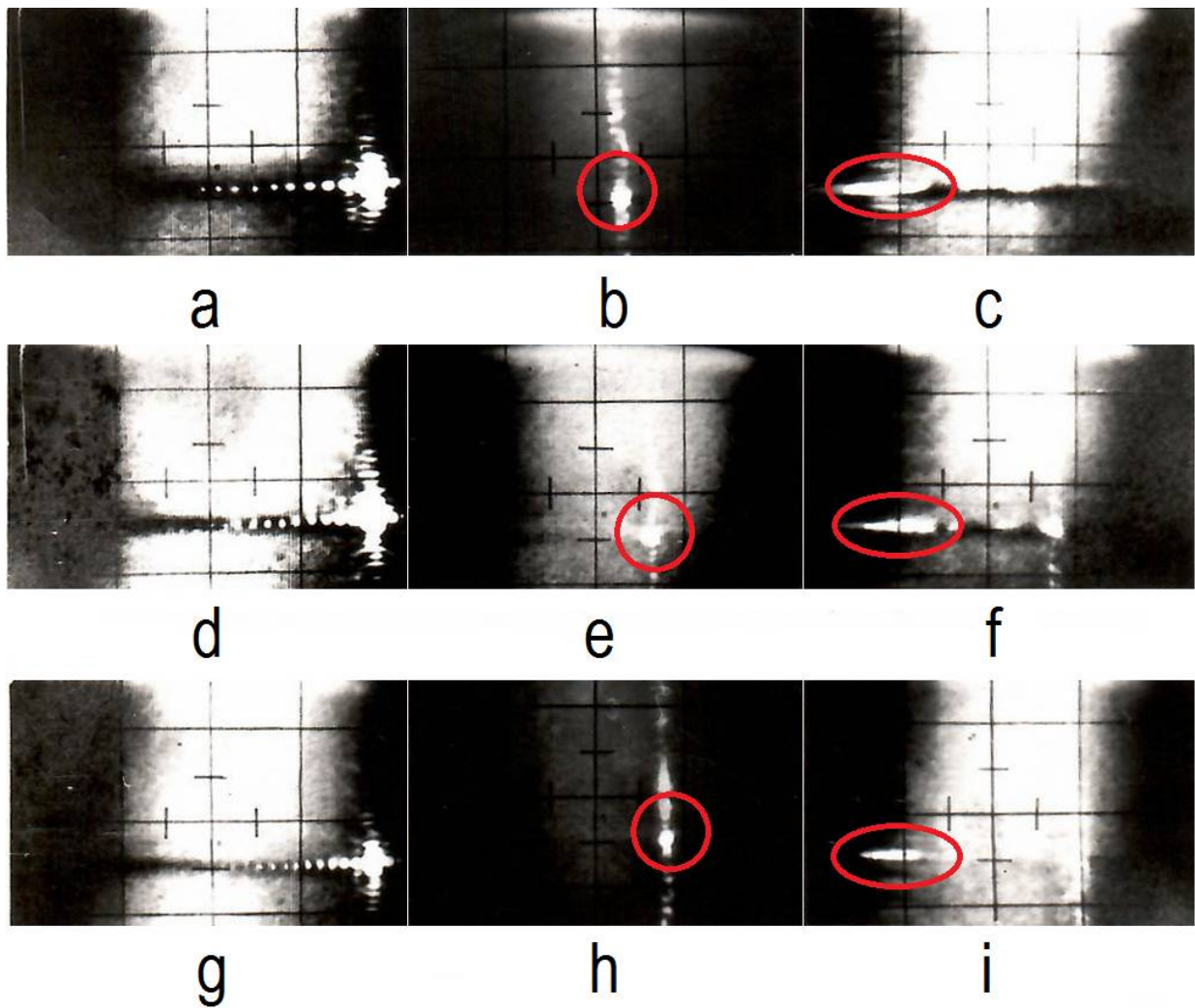


Рис. 6.42

Стовпчик a,d,g – спектри різномасштабних тестових прямокутних отворів типу отворів, наданих на рис. 6.38; стовпчик b,e,h – «актуальні» дифракційні порядки, виділені у частотній площині за допомогою відповідно локалізованих смугових екранів; стовпчик c,f,i – перетворені дифракційні порядки. Дифракційні порядки початкового зображення та їх перетворені версії виділені червоним контуром

Відзначимо, що нульові дифракційні порядки, які відповідають малим α , мають однакові розміри.

6.3.5. Ідентифікація зображень за допомогою аналізу Фур'є-спектрів [48]

В принципі ідентифікацію зображень, селекцію аналізованих сигналів можна здійснювати, безпосередньо аналізуючи спектри вхідних зображень. Зокрема, такі дослідження проводилися для ідентифікації діамантової водорості, якої існує багато різновидів (див. рис. 6.43). Типи таких водоростей відрізняються як за формою, так і за масштабом. При цьому концентрація водоростей певного типу свідчить про ті чи інші біологічні характеристики водоймища, в якому вони перебувають.

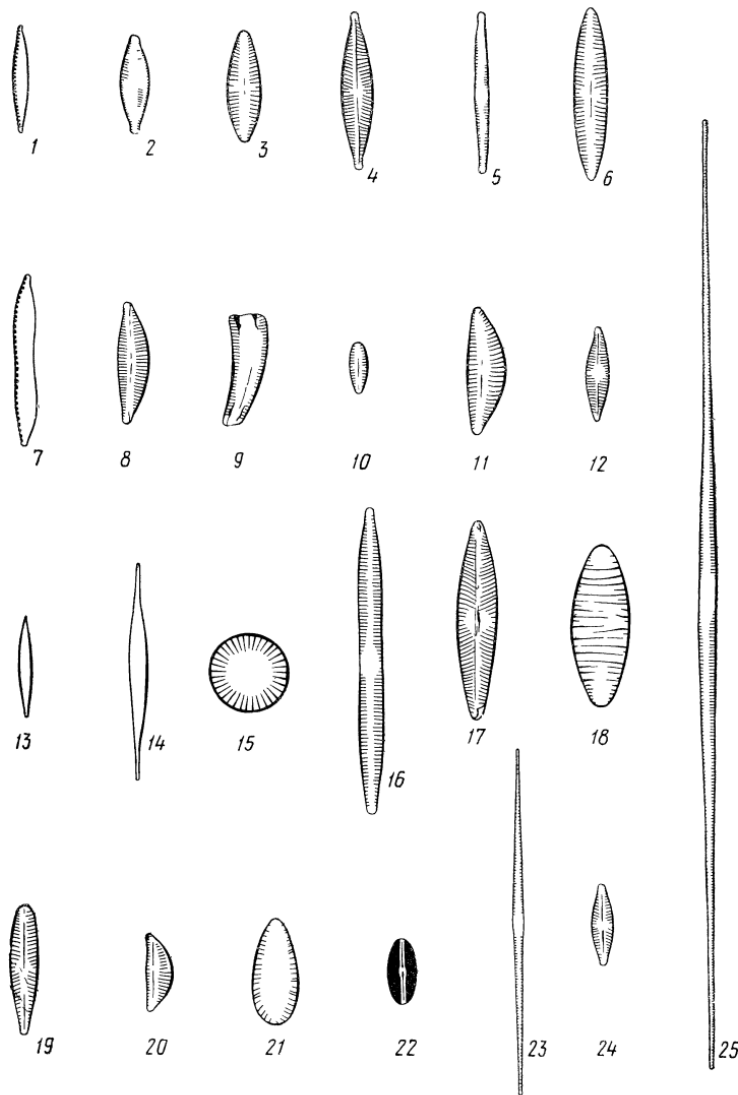


Рис. 6.43. Різновиди діамантової водорості. Зображення отримані у фазово-контрастному мікроскопі

Суть таких алгоритмів полягає в тому, що кожний спектр зображення, яке можна віднести до певного класу, має відповідні специфічні ознаки (інтенсивність спектра для певних частот).

Відзначимо, що такі алгоритми, як правило, використовують у випадках, коли час обробки зображень не має вирішального значення. Відповідно обробка спектрів дозволяє застосування алгоритмів, не критичних до зміни масштабу та орієнтації сигналів.

Природно, що спектри конкретних зображень мають специфічні ознаки, тому, як правило, перед кінцевою обробкою їх згладжують. Операція згладжування спектра може бути здійснена за такою процедурою. Спектр «узагальненого» зображення отримується шляхом накопичення елементарних спектрів, отриманих через деяке вікно, яке сканується вздовж площини об'єкта у вхідній площині системи (див. рис. 6.43):

$$I(\omega, \vartheta) = \int_S \left| \int_S U(x, y) V_a(x - t, y - \tau) e^{-j(\omega x + \vartheta y)} dx dy \right|^2 dt d\tau, \quad (6.87)$$

де $V_a(x, y)$ – вікно, наприклад, $V_a(x, y) = \begin{cases} P_a(x)P_a(y), & |x| \leq a, \quad |y| \leq a \\ 0, & \text{in other points} \end{cases}$

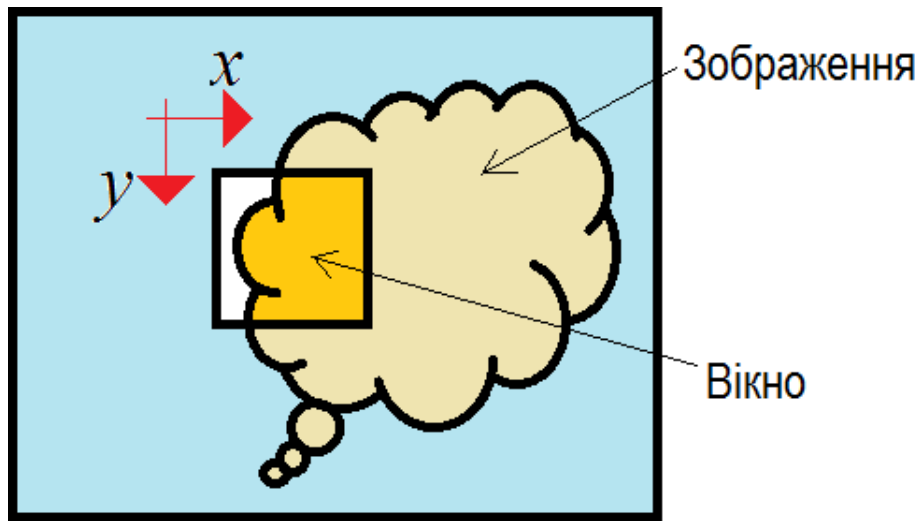


Рис. 6.43

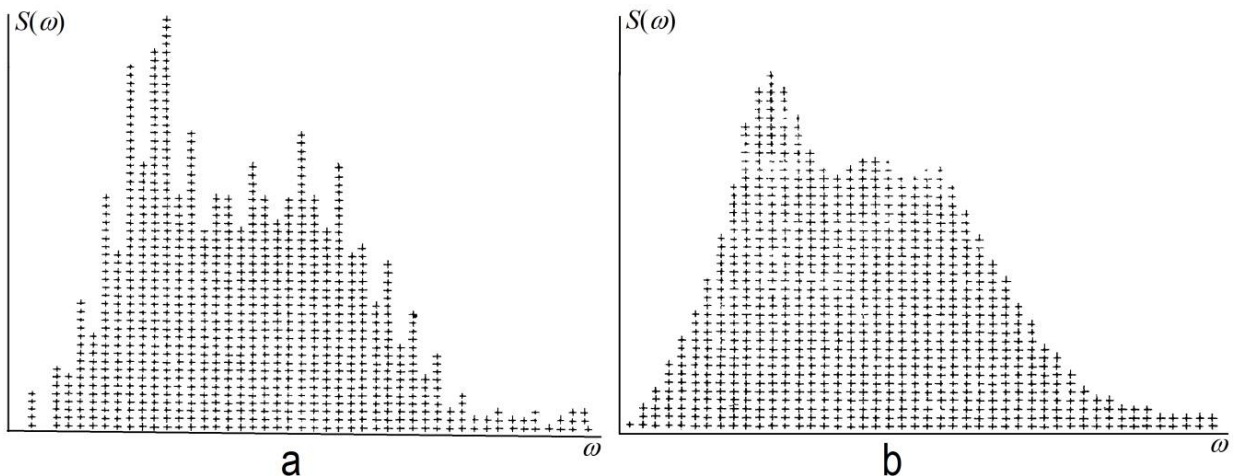


Рис. 6.44

а – відліки інтенсивності спектра конкретного зображення; б – «згладжений» спектр

В результаті випадкові ознаки, властиві конкретним зображенням, зникають і залишаються лише «типові», характерні (при приведенні до одного масштабу і орієнтації) для всього класу об'єктів, до якого можна віднести вхідний сигнал (див. рис. 6.44).

6.3.6. Кореляційна фільтрація за допомогою безпорної голограми [59,60]

У попередніх параграфах ми розглянули деякі приклади, в яких як фільтр, фазовий елемент використовувалися ті чи інші голограми. Очевидно, що у такій іпостасі може бути застосований найбільш узагальнений тип голограми – її безпорна версія. Розглянемо один з випадків, коли безпорна голограми має безперечні переваги перед традиційним голографічним фільтром.

Нехай маємо деяке вхідне поле U_0 , яке підкоряється всім умовам, що необхідні для успішного запису та відновлення безпорної голограми. Наприклад, маємо певний

динамічний амплітудний транспарант, який додатково до амплітудної створює точкову фазову модуляцію, подібну до розсіювача типу матове скло.

Будемо застосовувати схему узагальненої фільтрації (рис. 6.17). У Фур'є-площині маємо поле $\mathfrak{I}_0$, в якому створюється такий розподіл інтенсивності:

$$I(\omega) = |\mathfrak{I}_0|^2 = \mathfrak{I}_0^* \mathfrak{I}_0. \quad (6.88)$$

Запишемо лінійну амплітудну негативну безопорну голограму. У першому наближенні її пропускання може описати співвідношенням:

$$H(\omega) = A - \gamma I(\omega), \quad (6.89)$$

де $A, \gamma > 0$ – параметри фотопроцесу.

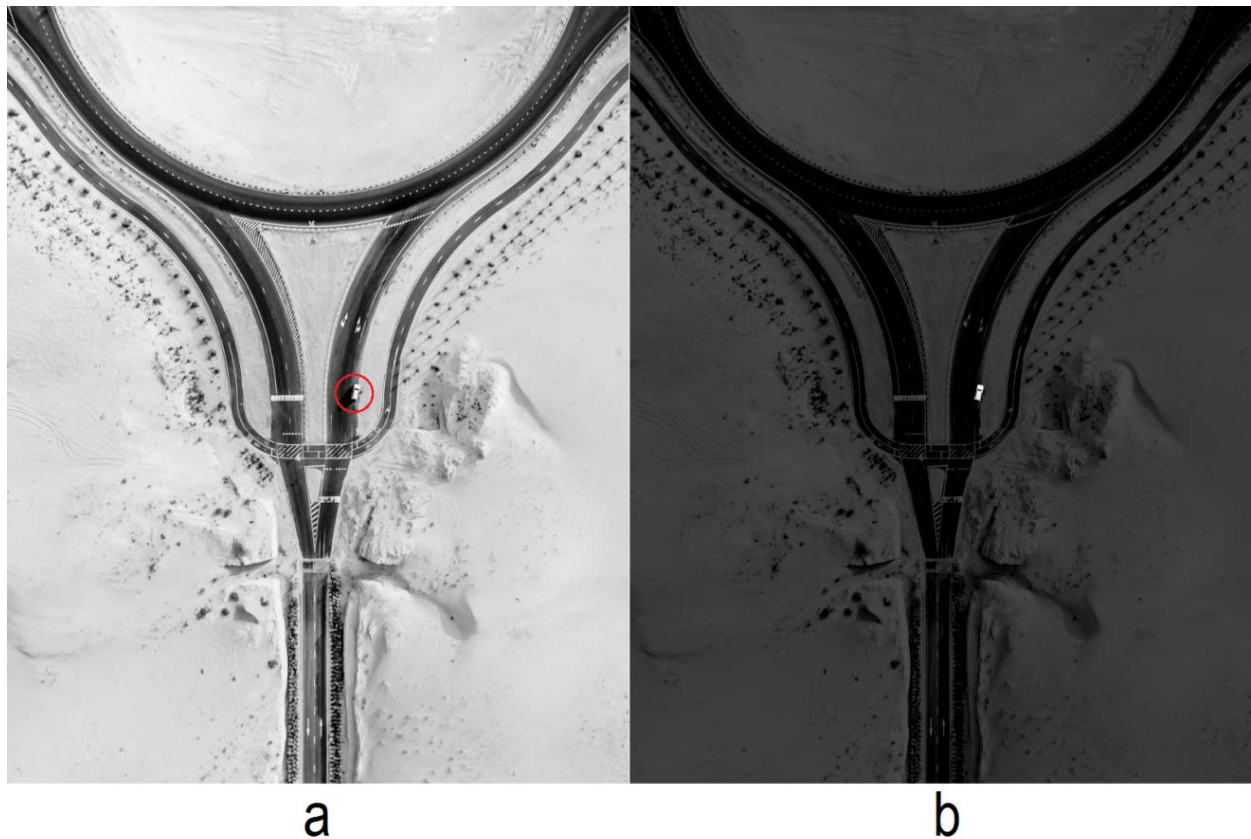


Рис. 6.45

a – початкове зображення. Червоним виділений автомобіль, який припаркований на узбіччі; b – результат фільтрації на узагальненому голографічному фільтрі (лінійній негативній безопорній голограмі) за відсутності автомобіля

Відновимо голограму полем

$$U_1 = U_0 - u, \quad (6.90)$$

де u – змінена (наприклад, відсутня) частина поля.

Тоді в площині голограми маємо:

$$\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}_0 - \mathfrak{I}. \quad (6.91)$$

де $\mathfrak{I}$ Фур'є-образ від u

Відповідно після голограми сформується дифрагована хвиля:

$$\tilde{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}_1 H(\omega) = A\mathfrak{I}_0 - A\mathfrak{I} - \gamma(\mathfrak{I}_0 \mathfrak{I}_0^*)\mathfrak{I}_0 + \gamma(\mathfrak{I} \mathfrak{I}_0^*)\mathfrak{I}_0. \quad (6.92)$$

У вихідній площині системи фільтрації маємо поле:

$$U_{out} = AU_0 - \gamma(\varphi_{00} \otimes U_0) - Au + \gamma(\varphi_{cross} \otimes U_0). \quad (6.93)$$

За нашими умовами для поля U_0 виконуються такі співвідношення:

$$\varphi_{00} = \delta(x), \quad \varphi_{cross} \rightarrow 0. \quad (6.94)$$

Тоді вихідне поле може бути записане як

$$U_{out} = (A - \gamma)U_0 - Au. \quad (6.95)$$

Звідси випливає, що регулюючи параметри фотопроцесу A і γ , можна практично погасити частину поля, яка була спільна при запису та зчитуванні. Як наслідок змінена частина поля буде виділена за інтенсивністю.

Приклад такої фільтрації наведений на рис. 6.45.

На рис. (а) наведено початкове зображення – аерофотознімок ділянки автотраси, де в певні точці припаркований автомобіль. Для зручності цей автомобіль виділений червоним кружечком. Для цієї «амплітудної» модуляції була записана безопорна голограма. Потім автомобіль поїхав. Знову в цьому ж розташуванні було записане відповідне зображення. Фактично модуляція поля U_0 залишилися без змін, за винятком «точкової» ділянки де автомобіль у порівнянні з рисунком (а) відсутній.

Рисунок (b) – результат фільтрації на узагальненому голографічному фільтрі (лінійній негативній безопорній голограмі), коли як відновлює поле використовувалося записане зображення з відсутнім автомобілем.

Бачимо, що в результаті фільтрації зображення відсутнього автомобіля різко виділяється з оточуючого поля за інтенсивністю.

6.3.7. Нейронні і нейроподібні мережі на основі голографічних фільтрів [62-64]

В заключних параграфах посібника розглянемо можливість використання голографічних фільтрів як елементів так званих нейронних або нейроподібних мереж.

6.3.7.1. Структура нейронних мереж

Спочатку дуже коротко розглянемо узагальнену структуру нейронних мереж та сформулюємо певні вимоги до їх роботи.

На найбільш загальному рівні можна стверджувати, що основне призначення нейронної (або нейроподібної) мережі (НМ) так чи інакше пов'язані з задачею розпізнавання образів. При цьому принцип розпізнавання – асоціативний, а кінцеве

рішення про належність певного образу до того чи іншого класу, відповідь на питання „ТАК” або „НІ” приймається на ймовірнісній основі. Виходячи з цього, в найбільш загальному сенсі алгоритм роботи НМ зводиться до порівняння образу, що аналізується з образом, який зберігається в НМ за асоціативними ознаками. Отже, певною мірою, НМ може бути інтерпретована як асоціативно-запам'ятовуючий пристрій (АЗП). При подаванні на вхід такого АЗП певного образу (або його частини) відбувається його порівняння з образом, що зберігається в мережі та на її виході формується образ (або сигнал, що відповідає образу), найбільш близький до вхідного сигналу. Природно, що такі дії НМ можливі лише в одному випадку: коли в НМ попередньо «записується» певна кількість еталонних образів, які відповідають тому класу, до якого належить вхідний образ. Процес запису образів в НМ має назву навчання мережі. Природно, чим більше образів цього класу записано до мережі, тим більша ймовірність правильного розпізнавання вхідного образу.

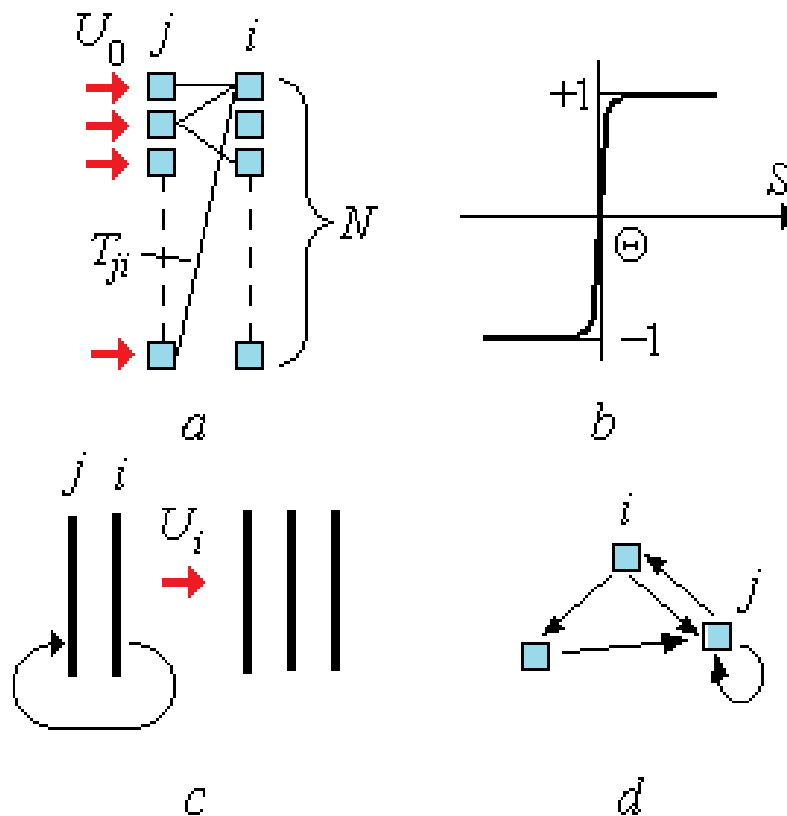


Рис. 6.46. До структури нейронної мережі

a – два шари НМ з N елементами в кожному шарі; U_0 – вхідний сигнал; T_{ij} – зв'язок між елементами першого та другого шару НМ; b – схема функціонування елементу НМ; c – структура шарів НМ; d – можлива конфігурація шарів НМ

На рисунку 6.46а зображена деяка структура (мережа), яка складається з шарів j та i , які в свою чергу складаються з N елементів. Зауважимо що в загальному випадку кількість елементів в кожному шарі може бути різною. Нехай на таку мережу надходить сигнал

$$U_0 = \sum_j^N U_j \quad (6.96)$$

де U_j – елементарний сигнал, що надходить на j -й елемент 1-го шару.

Таку мережу будемо називати нейронною (або нейроподібною), якщо мережа має такі властивості:

1. В залежності від величини вхідного сигналу S вихідний сигнал (реакція) елемента (нейрона) може набувати значення лише $+1$ або -1 (див. рис. 6.46b). В принципі вихідні сигнали (стани) можуть бути й іншими або з ними асоційовані інші рівні вхідного сигналу, наприклад 0 та 1. У будь-якому випадку елемент спрацьовує як пороговий, тобто при досягненні вхідного сигналу певного значення Θ вихідний сигнал елемента стрибком змінює своє значення.

2. Вхідний сигнал на i -му елементі 2-го шару визначається співвідношенням

$$U_{0i} = \sum_{j=1}^N T_{ji} U_j(t), \quad (6.97)$$

де T_{ji} визначає зв'язок між нейронами j та i першого та другого шарів НМ.

Тоді вихідний сигнал з i -го нейрона можна представити як

$$\begin{cases} U_i(t+1) = NL\{U_{0i}(t)\} = +1, & U_{0i} = \sum_{j=1}^N T_{ji} U_j(t) > \Theta \\ U_i(t+1) = NL\{U_{0i}(t)\} = -1, & U_{0i} = \sum_{j=1}^N T_{ji} U_j(t) \leq \Theta \end{cases} \quad (6.98)$$

де $U_i(t+1)$ – умовне позначення стану елемента після впливу на нього вхідного сигналу, яке вказує, що існує певний час релаксації нейрона; NL – нелінійний оператор, який забезпечує стрибкоподібну зміну вихідного сигналу; Θ – порогове значення вхідного сигналу, яке, зазвичай однакове для всіх нейронів.

Виходячи з виразу (6.98) та рисунка 6.46а, технічну модель нейрона можна уявити як певний пристрій, який містить:

- суматор, який об'єднує сигнали, що надходять з попереднього шару;
- нелінійний оператор;
- розподільувач, який через міжз'єднання передає результат обробки або на наступний шар, або на вихід системи.

Зауважимо, що в принципі можливий варіант, коли вихідний сигнал з виходу i -го шару знову ж подається на вхід j -го, тобто утворюється ланка позитивного або негативного оберненого зв'язку (рис. 6.46с). При цьому шари мережі виділяються досить умовно. Насправді, таке розбиття НМ на шари не завжди можливе, оскільки зв'язки між нейронами можуть мати випадковий характер і відповідно «архітектура» НМ має вигляд, подібний до зображеної на рис. 6.46d.

6.3.7.2. Алгоритм роботи нейронної мережі. Алгоритм Хопфілда

Зауважимо, що перед процесом навчання всі зв'язки мають нульове значення, тобто $T_{ji}=0$. Отже, перед функціонуванням НМ треба задати конкретні значення цих зв'язків. Іншими словами, треба виконати операцію навчання мережі. Суть цієї операції полягає в тому, що на вхід мережі подається M (M -кратне навчання) сигналів $U^{(m)}$. При цьому значення довільного зв'язку T_{ji} встановлюються згідно з рівнянням:

$$T_{ji} = \sum_{m=1}^M U_i^{(m)} U_j^{(m)} \quad (6.99)$$

При цьому

$$\begin{cases} U_i^{(m)} U_j^{(m')} = +1 & U_i^{(m)} = U_j^{(m')} \\ U_i^{(m)} U_j^{(m')} = -1 & U_i^{(m)} \neq U_j^{(m')} \end{cases} \quad (6.100)$$

Покажемо, що при поданні на вхід НМ сигналу можливі дві ситуації:

1. НМ «скочується» до одного з образів, що зберігаються в її пам'яті, тобто на виході мережі генерується цей образ.

2. НМ виходить в режим автоколивальності, тобто на виході формується змінний у часі періодичний сигнал. Мережа «не може» визначитися, який образ їй пред'явлено.

Подано на вхід мережі сигнал $\hat{U}^{m_0}(t)$. Тоді на виході i -го шару НМ формується сигнал

$$\dot{U}_i^{m_0}(t+1) = NL\{\sum_{j=1}^N T_{ji} \hat{U}_j^{m_0}(t)\} \quad (6.101)$$

Згідно з рівнянням (6.99) маємо:

$$\dot{U}_i^{m_0}(t+1) = NL\{\sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^M U_i^{(m)} U_j^{(m)} \hat{U}_j^{m_0}(t)\}. \quad (6.102)$$

Нехай образ $\hat{U}^{m_0}$ найбільш близький до образу U^m , що зберігається в пам'яті мережі. Тоді

$$\dot{U}_i^{m_0}(t+1) = NL\{\sum_{j=1}^N U_i^{m_0} U_j^{m_0} \hat{U}_j^{m_0} + \sum_{j=1}^N \sum_{m \neq m_0}^M U_i^{(m)} U_j^{(m)} \hat{U}_j^{m_0}\} \quad (6.103)$$

Нехай N_{m_0} – кількість бітів, що збігаються в образах $\hat{U}^{m_0}$ і U^m . Тоді (6.103) за виконання умов (6.100) трансформується до вигляду:

$$\dot{U}_i^{m_0}(t+1) = NL\{N_{m_0} U_i^{m_0} - (N - N_{m_0}) U_i^{m_0} + \sum_{j=1}^N \sum_{m \neq m_0}^M [U_j^{(m)} \hat{U}_j^{m_0}] U_i^{(m)}\} \quad (6.104)$$

Або

$$\dot{U}_i^{m_0}(t+1) = NL\{(2N_{m_0} - N) U_i^{m_0} + \sum_{j=1}^N \sum_{m \neq m_0}^M [U_j^{(m)} \hat{U}_j^{m_0}] U_i^{(m)}\}. \quad (6.105)$$

Другий доданок в фігурних дужках прямує до нуля, оскільки образи $\hat{U}^{m_0}$ та U^m різні. Відповідно кількості – та + одиниць, що утворюються при множенні $U_j^{(m)}$ та $\hat{U}_j^{m_0}$, за статистикою приблизно рівні. Результат внеску цього доданка у вихідний сигнал незначний і формує так званий шум мережі.

Кінцеве значення виразу (6.105) залежить від співвідношення $2N_{m_0}$ та N , а також дії („настройки“) нелінійного оператора NL , величини порогового значення Θ , яке визначає перехід вихідних нейронів в стан – або +1. Враховуючи це, можна стверджувати, що при повторному поданні сигналу $\dot{U}_i^{m_0}$ на вхід мережі вона або „скотиться“ до образу U^{m_0} , який буде формуватися на виході НМ, або буде знаходитися у стані автоколивальності (не зможе

сформувати на виході жодного образу, що зберігається в пам'яті).

Друга ситуація, зазвичай відбувається, коли поріг Θ встановлюється невиправдано високим. Це призводить до того, що навіть при великій різниці $2N_{m_0}$ і N ($2N_{m_0} - N \rightarrow 0$) на виході нейрона формується -1 . При цьому низький поріг Θ також не оптимальний, оскільки, в цьому випадку, НМ буде скатуватися до хибного образу.

Ще раз зауважимо, що якість (імовірність вірного) розпізнавання образу напряду пов'язана з кількістю актів навчання мережі M , тобто суттєво залежить від кількості образів одного класу, які зберігаються в пам'яті НМ.

6.3.7.3. Перспективи розвитку оптичних нейронних мереж

Можна показати, що кількість образів, що можуть бути ефективно записані до пам'яті нейронної мережі, визначається співвідношенням

$$M \approx 0.15N. \quad (6.106)$$

Отже, кількість нейронів у шарі мережі N визначає її потужність та роздільну здатність.

Кількість вхідних нейронів НМ має назву коефіцієнта об'єднання K_u . Кількість вихідних нейронів називають коефіцієнтом розгалуження K_s . Відповідно максимальна кількість зв'язків $K_{T \max}$ між нейронами дорівнює $K_u K_s$. В реальному випадку кількість зв'язків K_T менша, ніж ця величина, оскільки в мережі реалізуються також так звані пусті зв'язки ($T_{ji}=0$).

Можна показати, що у більшості випадків для нормальної роботи мережі K_o і K_p повинні мати величину близьку до $10^3 \div 10^6$. Відповідно

$$10^3 \div 10^6 < K_T < 10^6 \div 10^{12}. \quad (6.107)$$

З літератури відомо, що кращі варіанти НМ, побудовані на електронній основі, мають $K_T \sim < 10^3$. Це зумовлене тим, що кожний нейрон є мікропроцесором певного типу. Відповідно кожний нейрон потребує програмної підтримки, основна з яких є комутація оброблених даних. При цьому при збільшенні кількості нейронів в мережі час обробки та енергетичні затрати зростають катастрофічно.

Враховуючи те, що результат обробки сигналу в НМ має імовірнісний характер, перспективним напрямком їх побудови є напрямок формування мережі як аналогового процесора, елементи якого працюють незалежно і автономно, а „комутація” вихідних сигналів здійснюється автоматично. В цьому сенсі оптичні реалізації НМ мають беззаперечні переваги перед іншими типами аналогових нейронних мереж. Ці переваги зумовлені такими міркуваннями:

1. Вхідний сигнал, що формується як певне зображення, може мати надзвичайно велику кількість елементів, яка обмежується лише роздільною здатністю оптичної системи. Саме ця кількість $n \times n$ визначає кількість нейронів в шарі (K_u, K_s) і може сягати величини $10^6 \div 10^8$ в тривимірному та $n \sim 10^3 \div 10^4$ в планарному варіантах.

2. Можна показати, що в оптичних мережах стандартна цифра, яка визначає кількість зв'язків, $KT \sim n^3$ (тривимірний варіант) та $KT \sim n^3$ (планарний варіант). Отже, кількість зв'язків, що може бути утворена в тривимірному варіанті, має величину

$10^9 \div 10^{12}$ та в планарному відповідно $10^{9/2} \div 10^6$.

3. Додамо, що швидкість обробки сигналів в оптичній мережі обмежується лише швидкістю розповсюдження світла через оптичну систему.

6.3.7.4. Реалізація оптичних нейронних мереж

Оптична нейронна мережа з процесорним ядром у вигляді безопорної голограми

Нехай в оптичну систему, зображену на рисунку 6.47а, подається поле U_0 , яке умовно розбите на поля U_1 та U_2 . Тоді у фокальній площині об'єктиву L_1 сформується поле

$$U(x_f) = \mathfrak{F}\{U_1 + U_2\} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2, \quad (6.108)$$

де $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ – Фур'є-образи полів U_1 та U_2 відповідно.

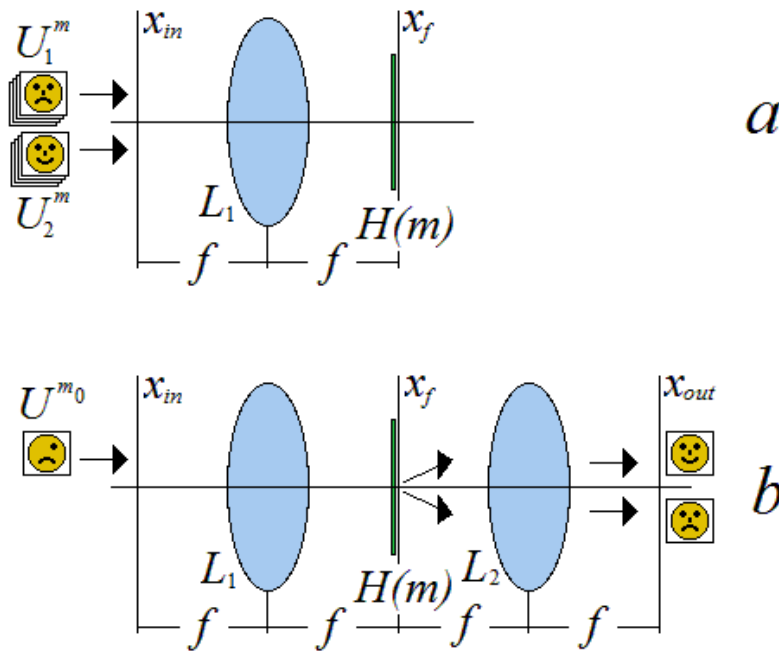


Рис. 6.47

Інтенсивність поля в площині x_f описується співвідношенням

$$I(x_f) = |U(x_f)|^2 = |\mathfrak{F}_1|^2 + |\mathfrak{F}_2|^2 + \mathfrak{F}_1^* \mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2^*. \quad (6.109)$$

Нехай в площині x_f розміщений фоточутливий матеріал (ФЧМ), зміна локальних параметрів якого (наприклад, почорніння) відбувається пропорційно до інтенсивності. Тоді можна вважати, що в цій площині записується транспарант $H(x_f)$ з пропусканням $\sim I(x_f)$. Аналогічно на одне місце ФЧМ може бути записане кілька розподілів інтенсивності, що відповідають різним вхідним полям. Отже, в кінцевому випадку пропускання транспаранту може бути описане виразом

$$H(x_f) = \sum_m^M I^{(m)} = \sum_m^M \{ |\mathfrak{F}_1^m|^2 + |\mathfrak{F}_2^m|^2 + \mathfrak{F}_1^{m*} \mathfrak{F}_2^m + \mathfrak{F}_1^m \mathfrak{F}_2^{m*} \}. \quad (6.110)$$

Такий процес запису транспаранта може бути названий процесом «навчання»

системи.

Зробимо ще декілька припущень:

1. Вхідні поля U_1^m та U_2^m володіють властивістю δ -скорельованості, тобто мають відносно дрібну структуру.

2. Поля U_k^i та U_l^j абсолютно різні, якщо $i \neq j$ і навіть $k=l$.

Тоді справедливе співвідношення

$$\begin{cases} \varphi_{kl} = U_k^i * U_l^j \rightarrow \delta(x_m), & \begin{cases} i = j \\ k = l \end{cases} \\ \varphi_{kl} = U_k^i * U_l^j \rightarrow 0, & i \neq j \end{cases} \quad (6.111)$$

Нехай на вхід системи подається поле U^{m_0} (див. Рис. 6.47b), близьке до будь-якого образу, наприклад, U_1^m , записаного в системі. Тоді кореляційна функція

$$\varphi = U_1^m * U^{m_0} = \alpha \delta(x_m), \quad (6.112)$$

де $\alpha < 1$, не дорівнює нулю.

Поле в площині x_ϕ описується виразом

$$U(x_f) = \mathfrak{I}^{m_0} H(x_f) = (\mathfrak{I}^{m_0} \mathfrak{I}_1^{m*}) \mathfrak{I}_1^m + (\mathfrak{I}^{m_0} \mathfrak{I}_1^{m*}) \mathfrak{I}_2^m + R^{m, m_0}, \quad (6.113)$$

де R^{m, m_0} об'єднує всі інші доданки.

Розташуємо після транспаранту $H(x_f)$ (див рис. 6.47b) ще один оптичний каскад з об'єктивом L_2 , розташований на фокусній відстані від транспаранту. Тоді (враховуючи, що як домовилися, в оптиці ми не розрізняємо пряме та обернене Фур'є-перетворення) в його задній фокальній площині поле є Фур'є-образом від поля $U(x_f)$:

$$U(x_{out}) = \mathfrak{I}\{(\mathfrak{I}^{m_0} \mathfrak{I}_1^{m*}) \mathfrak{I}_1^m\} + \mathfrak{I}\{(\mathfrak{I}^{m_0} \mathfrak{I}_1^{m*}) \mathfrak{I}_2^m\} + \mathfrak{I}\{R^{m, m_0}\}. \quad (6.114)$$

Кожний з доданків (6.114) є Фур'є-перетворенням від добутку трьох функцій і при застосуванні теорем про Фур'є-перетворення добутку двох функцій та теорем про згортку та кореляцію може бути обчислений за такою схемою:

$$\mathfrak{I}\{(\mathfrak{I}_k \mathfrak{I}_p^*) \mathfrak{I}_q\} = \mathfrak{I}\{(\mathfrak{I}_k \mathfrak{I}_p^*)\} \otimes U_q = (U_k * U_p) \otimes U_q. \quad (6.115)$$

Результат такої операції для третього доданка, згідно з (6.114), прямує до 0, оскільки при цьому отримуємо так звані кросс-кореляційні функції (кореляційні функції різних величин (друге рівняння співвідношення)). Цей доданок формує шум системи (аналогічно другому доданку в (6.105)).

1-й та 2-й доданки формують поле, яке описується виразом

$$U(x_m) = \alpha [\delta(x_m) \otimes U_1^m + \delta(x_m) \otimes U_2^m] + \text{шум}. \quad (6.116)$$

Звідси отримуємо

$$U(x_m) = \alpha [U_1^m + U_2^m] + \text{шум}, \quad (6.117)$$

ослаблене в α разів зображення полів U_1^m та U_2^m . За допомогою просторово-часових модуляторів, цифрового комп'ютера та додаткових світлоподільвачів $U(x_{out})$ можна знову подати на вхід системи. Це призведе до відповідного перерозподілу інтенсивності між полями U_1^m, U_2^m та шумовою компонентою. Шумова компонента зменшиться. Крім цього, на виході системи можна покласти нелінійний пристрій, який додатково буде проводити підсилення корисного сигналу та підгашувати шумову компоненту. Отже, дію такої системи можна розглядати як дію, аналогічну дії нейтронної мережі. Так само як НМ, система з безопорною голограмою працює як АЗП і скочується до певного образу, що записаний на безопорній голограмі.

Оптична нейронна мережа з процесорним ядром у вигляді узгодженого фільтра

В оптичну систему, зображену на рисунку 6.48, а подається поле U_0 , яке є сукупністю полів U^m . При цьому кожний наступний вхідний образ зсувається у вхідній площині на величину Δ_m :

$$\Delta_m = (m - 1)\Delta. \quad (6.118)$$

З (6.118) випливає, що перший вхідний образ центрований відносно осі системи.

Тоді поле U_0 має вигляд

$$U_0 = \sum_m^M U^m [x_m - (m - 1)\Delta]. \quad (6.119)$$

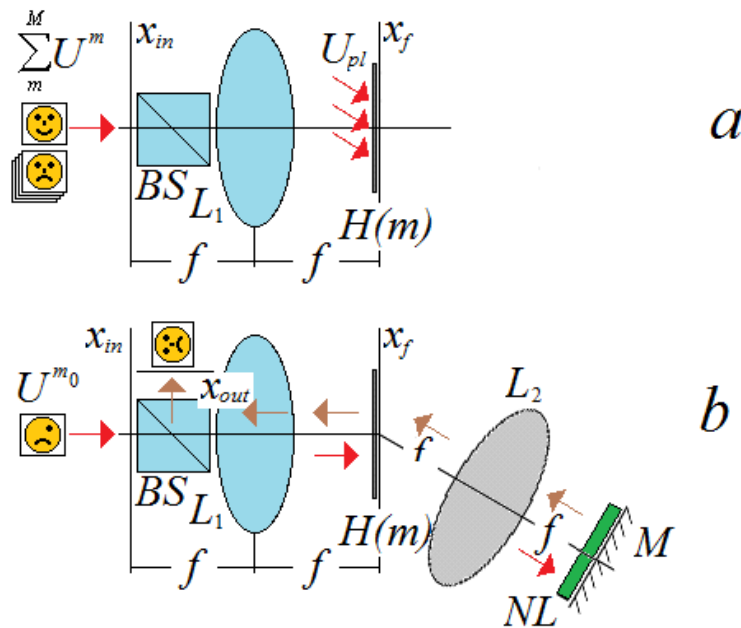


Рис. 6.48

Враховуючи теорему зсуву, поле в фокальній площині об'єктива L_1 опишеться виразом

$$U(x_f) = \sum_m^M \exp\{-j \frac{k}{2f} (m - 1)\Delta x_f\} \mathfrak{S}^m. \quad (6.120)$$

Нехай в площину x_f спрямовано паралельний пучок – плоску хвилю P під кутом α

до осі системи. Тоді розподіл інтенсивності в цій площині має вигляд:

$$\begin{aligned}
 I(x_f) &= |U(x_f) + P|^2 = |U(x_f)|^2 + |P|^2 + \\
 &+ \sum_m^M \exp \left\{ j \frac{k}{2f} (m-1) \Delta x_f \right\} \mathcal{F}^{m*} \exp(jkx_f \sin \alpha) + \\
 &+ \sum_m^M \exp \left\{ -j \frac{k}{2f} (m-1) \Delta x_f \right\} \mathcal{F}^m \exp(-jkx_f \sin \alpha)
 \end{aligned} \quad (6.121)$$

Після цього відбувається фіксація цього розподілу на фотоносій. Отже як і в попередньому випадку, проводиться своєрідна операція навчання, при якій сукупність образів заноситься до пам'яті системи.

Нехай на вхід системи подається поле U^{m_0} (див. рис. 6.48b), близьке до будь-якого образу наприклад, U_1^m , записаного в системі. При цьому:

1. Образ, що подається центрований відносно осі системи.
2. Виконуються вимоги до полів, сформульовані в попередньому випадку і як наслідок виконуються співвідношення (6.11).

Поле в площині x_f описується виразом

$$\begin{aligned}
 U(x_f) &= \mathfrak{I}^{m_0} H(x_f) = \\
 &= \mathfrak{I}^{m_0} \mathfrak{I}^{m*} \exp \left\{ j \frac{k}{2f} (m-1) \Delta x_f \right\} \exp(jkx_f \sin \alpha) + R^{m, m_0},
 \end{aligned} \quad (6.122)$$

де R^{m, m_0} об'єднує всі інші доданки.

Перший доданок в (6.122) може бути трансформований до вигляду

$$U_1 = \mathfrak{I}^{m_0} \mathfrak{I}^{m*} \exp(jk\delta_{m_0} x_f), \quad (6.123)$$

де $\delta_{m_0} = \frac{1}{2f} (m_0 - 1) \Delta + \sin \alpha$.

Добавимо після транспаранта $H(x_f)$ (див. рис. 6.48b) ще один оптичний каскад з об'єктивом L_2 , який розташований на фокусній відстані від транспаранта, але його оптична вісь за напрямком збігається з напрямком розповсюдження плоскої хвилі P . Тоді експонентний множник в (6.123) можна трактувати як дію пропускання транспаранта типу призма (клин), який встановлений безпосередньо за $H(x_f)$, і який просто розвертає відновлене поле на певний кут, що задається нахилом паралельного пучка P та зсувом образу U^{m_0} в початковому полі U_0 . В цьому випадку, в площині, перпендикулярній до оптичної осі каскаду, поле описується виразом

$$\begin{aligned}
 U(x_f) &= \mathfrak{I}^{m_0} H(x_f) = \\
 &= \mathfrak{I}^{m_0} \mathfrak{I}^{m*} \exp \left\{ j \frac{kx_f}{2f} (m-1) \Delta \right\} \exp(jkx_f \sin \alpha) + R^{m, m_0}.
 \end{aligned} \quad (6.124)$$

Після оберненого Фур'є-перетворення вихідне поле в площині Z має вигляд

$$U(Z) = \alpha \delta[Z - (m_0 - 1) \Delta] + \text{шум}. \quad (6.125)$$

Отже в цій площині формується кореляційний пік (яскрава пляма), зсунута відносно нульового положення на величину, що відповідає номеру еталонного образу.

В цій площині встановлюється дзеркало, яке розвертає пучок в зворотному напрямку, та нелінійний елемент NL . Перетворення поля, яке виконує цей елемент, якісно ілюструється рисунком 6.49.

Зауважимо, що вираз (6.125) виконується лише в певному наближенні. Отже, автокореляційна функція має ту чи іншу товщину (див. рис. 6.49а), за розмірами більшу, ніж діаметр плями розсіювання оптичного каскаду з лінзою L_2 . Дія нелінійного елемента, на який попадає поле $U(Z)$, зводиться до нелінійного підсилення інтенсивності $I(Z) = |U(Z)|^2$. Крива чутливості елемента NL подана на рисунку 6.49b.

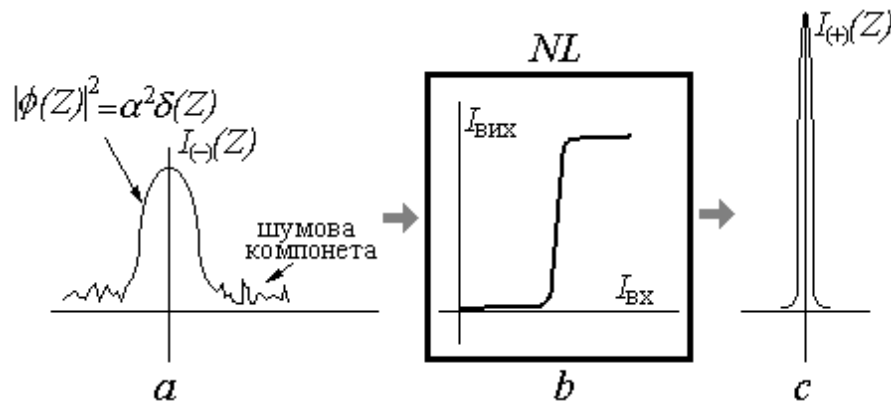


Рис. 6.49

Таким чином, після дії елемента відбуваються такі зміни сигналу:

1. Підсилюється максимум інтенсивності сигналу.
2. Звужується ширина автокореляційної плями (принаймні до розмірів плями розсіювання, рис. 6.49с).
3. Практично зникає шумова компонента.

В цьому випадку можна вважати, що в точці з координатою $x_{out} = (m_0 - 1)\Delta$ площини Z з'являється точкове джерело, випромінювання якого після проходження об'єктива L_2 формує паралельний пучок, який в площині x_f описується комплексною амплітудою:

$$U_{pl}(x_f) = P \exp \left\{ j \frac{k}{2f} (m_0 - 1) \Delta x_f \right\}. \quad (6.126)$$

Тоді відновлене з $H(x_f)$ поле має вигляд:

$$U_r(x_f) = \mathfrak{I}^{m_0} + \sum_{m \neq m_0}^M \exp \left\{ -j \frac{k}{2f} (m - m_0) \Delta x_f \right\} \mathcal{F}^m + R. \quad (6.127)$$

Відповідно таке поле після проходження світлоподілювача D сформує на осі системи образ U^{m_0} .

Недоліки і переваги обох систем

1. Друга система характеризується більш низьким рівнем шумів і зберігає лінійне за інтенсивністю відтворення асоціативного образу навіть при використанні нелінійного елемента.

2. Проте кількість образів, що зберігається в такій системі обмежена розмірами вхідної площини, тоді як в системі з безопорною голограмою таке обмеження відсутнє.

ЛІТЕРАТУРА

1. Born M., Wolf E. «*Principles of Optics*». Cambridge university Press, 952 p. (1999).
2. Crawford F. «*Waves*»: Berkeley Physics Course, Vol. 3. McGraw-Hill, 600 p. (1968)
3. Nye J.F. «*Natural focusing and fine structure of light*». Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia (1999).
4. Berry M. «Paraxial beams of spinning light», *Proc. SPIE*, **3487**, pp. 6-11, (1998).
5. Мохунь І.І., Вікторівська Ю.Ю. «*Вступ до лінійної сингулярної оптики*». Чернівці: Рута, 2012. – 189 с
6. Мохунь І.І., «*Введение в линейную сингулярную оптику*». Чернівці (2012).
7. Mokhun. I.I.. «*Introduction to linear singular optics*», Chapter 1 in the book *Optical correlation techniques and applications*, edited by O.V.Angelsky. SPIE press, Bellingham, Washington, USA, (2007).
8. Goodman J. «*Introduction to Fourier Optics*», 3rd Edition. Roberts and Company Publishers, 491 p. (2004).
9. Papoulis A. «*Probability and Statistics*», 1st Edition. Pearson, 512 p. (1989).
10. Литвиненко О.Н. «*Основы радиооптики*». Киев, Техника, 208 с. (1974)
11. Collier R., Burckhardt C., Lin L. «*Optical Holography*», 1st Edition. Academic Press, 605 p., (1971).
12. «*Handbook of Optical Holography*». Ed. by H. J. Caulfield (Editor). Academic Press, 654 с., (2012).
13. Perina J. «*Coherence of Light*». Springer Dordrecht, 350 с. (1985)
14. «*Optical Information Processing*» Ed. D.Casasent, Springer-Verlag, 308 с. (1981).
15. А.І. Мальцев, «*Основы линейной алгебры*». М., Главная редакция физ-мат. лит, 472 с. (1970).
16. Rayleigh, *Phil. Mag.* 8, 403 (1870).
17. Azzam R.M.A., Bashara N.M. «*Ellipsometry and Polarized Light*». North Holland; Reprint edition, 558 p. (1988).
18. Shurcliff W., Ballard S.. «*Polarized Light*». Commission on College Physics, 164 с. (1964).
19. Н. М. Жабборов, Т. У. Отабоев, Ш. Я. Хурсанов, «Нерівність Шварця та формула Шварця для А-аналітичних функцій», СМФН, том 64, випуск 4, 637–649, (2018).
20. Mokhun I.; Bodyanchuk I.; Galushko Ye; Turubarova-Leunova N., «Characteristics of a field formed by superposition of two plane waves with different frequencies and different polarization», *Proc. SPIE* **10612**, 1061208, 7 p. (2018)
21. Sagnac Georges, «L'ether lumineux demontre par l'effet du vent relatif d'ether dans un

interferometre en rotation uniforme», *Comptes Rendus*, 157, 708-710 (1913)

22. Heer, C.V., «Interference of electromagnetic and matter waves in a nonpermanent gravitational field», *Bull. Am. Phys. Soc.* **6**, 58, Jan. (1961).

23. Macek Warren M. and Davis D. T. M., Jr. «Rotation rate sensing with traveling-wave ring lasers», *Applied Physics Letters*, 2, 67–68 (1963)

24. Shen Y. R., «*The Principles of Nonlinear Optics*», J. W. Wiley Interscience, New York (1984).

25. Kessler D.A., Freund I. «Lissajous singularities». *Opt. Lett.*, **28**, 111–113, (2003).

26a. Wolf E., Mandel L., «Coherence Properties of Optical Fields», *Rev. Mod. Phys.* **37** (2), 231 (1965).

26b. Переклад – Е. Вольф, Л. Мандель, «Когерентні властивості оптичних полів»:

- розділи 1-3, *УФН*, **87**, (3) с. 491-520, (1965);
- розділ 4, *УФН*, **88**, (2) с. 347-366, (1966);
- розділи 5-7, *УФН*, **88**, (4), с. 619-673, (1966).

27. Mokhun I., Bodyanchuk I., Galushko K., Galushko Y., and Viktorovskaya Y. «Formation Mechanisms of the Averaged Poynting Vector of a Polychromatic Wave», *Opt. Mem. & Neural Networks (Information Optics)*, **30**, N4, (2021)

28. Van Heerden P.J. «A new optical method of storing and retrieving information». *Appl. Opt.*, **2**, № 4, P. 387-392, (1963).

29. Аристов В.В., Броуде В.Л., Ковальский Л.В., Полянский В.К., Тимофеев В.Б., Шехтман В.Ш. «О голографии без опорного пучка». *Доклады АН СССР*, **177**, №1, С. 65-67, (1967).

30. Мохунь И.И., Росляков С.Н., Яценко В.В. «Восстановление фазовой и амплитудной составляющих дифракционного поля, рассеянного мелкоструктурным объектом, из голограммы без опорного пучка», *Известия РАН, серия физическая*, **56**, №4, С. 205-211, (1992).

31. Мохунь И.И., Бесага Р.Н., Яценко В.В. «Восстановление оптических полей из безопорных голограмм», *Оптика и спектроскопия*, **76**, №4, С. 660-666, (1994).

32. Полянский П.В. «Ассоциативные свойства голограмм второго порядка», *Опт. журнал.*, **64**, №4, С.28-37, (1997).

33. Полянский П.В. «Ассоциативная память с использованием статистического фазообращающего зеркала на основе голограммы второго порядка» *Оптика и спектроскопия*, **84**, №2, С.346-351, (1998).

34. Burkovets D.N., Gogunets A., Mokhun I. I., Viktorovskaya J. Y. «Computer simulation of the referenceless holography algorithm for transmitted data encryption and decryption». *SPIE Proc.* **4607**, pp. 148-152, (2002).

35. Wu J.J., Zhen W.X., Zheng J.L., Liu W., Zhang Y., Liu S.. «Multiple-image encryption based on computational ghost imaging». *Opt. Commun.* **359**, pp. 38–43, (2016).
36. Peng X., Cui Z., Tan T.. «Information encryption with virtual-optics imaging system». *Opt. Commun.* **212**, pp 235-245, (2002).
37. Liu Changgeng, Yu Xiao, and Kim Myung K. «Fourier transform digital holographic adaptive optics imaging system». *Appl. Opt.* **51**, pp8449-8454, (2012).
38. Zhang Yong «The fast image encryption algorithm based on lifting scheme and chaos». *Information Sciences.* **520**, pp 177-194, (2020).
39. Derzhypolskii A.G., Davidenko N.A., Melenevskii D.A., Gnatovskii A.N., Ishchenko A.A., Mysyk D.D., Mysyk R.D. «Forming a latent associative image in photothermoplastic media in comparison with an image in a photorefractive crystal». *Journal of optical technology*, **72**, pp. 754-758, (2005).
40. Derzhypolsky A., Melenevsky D., Gnatovskiy A., Medved N. «Some peculiarities of the associative holographic image formation and quality: the comparative analysis». *Functional materials*, **12**, pp. 87-90, (2005).
41. Derzhypolsky A., Melenevsky D., Gnatovskiy O. «A Comparative Analysis of Associative Properties of Fourier versus Walsh Digital Holograms». *Acta Physica Polonica A*, **112**, pp. 1101-1106, (2007).
42. Goodman J. «*Statistical Optics*». Wiley-Interscience, 572 p. (2000).
43. Л.М. Сороко. «Основи голографії та когерентної оптики», М., Наука, 616 с., (1971).
44. West C. M. «Holographic Interferometry», John Wiley & Sons, New York, 480 (1979).
45. Островський Ю.І., Бутусов М.М., Островська Г.В. «Голографічна інтерферометрія», М.: Наука, 339 с., (1977).
46. Abbe E. «*Beitrage zur Theorie des Mikroskops und der mikroskopischen*» Wahrnehmung. - Arch. Mikrosk. und Anat., Jena, Bd. 9, (1873).
47. Capskii S. «*Theorie der optischen Instrumente nach Abbe*». Jena, (1893).
48. «Application of Optical Fourier Transforms» Ed. by Henry Stark, 1-st Edition, Academic Press, 564 с., (1882).
49. Василенко Г.І. "Голографічне впізнання образів". М., Рад. радіо, 328 с., (1977).
50. Casasent D. «Coherent Optical Pattern Recognition». *Proc. of the IEEE*, **67**, pp. 813-825, (1979).
51. Casasent D., Psaltis D. «New Optical Transforms for Pattern Recognition». *Proc. of the IEEE*, **65** с. 77-84, (1977).
52. Неживенко О.С., Спектор Б.І. "Оптичне нелінійне перетворення зображень". Автометрія, №8, с 98-103, (1975).
53. Casasent D., Psaltis D. «*Diformalion-invariant, space variant optical pattern recognition*» in Progress in Optics **XVI**, ad E Wolf New York (1978).

54. Casasent D., Psaltis D. «Scale invariant optical transform». *Opt. Eng.* **15**, pp. 258-261, (1976).
55. Casasent D., Psaltis D. «Polar camera for space variant optical pattern recognition». *Appl. Opt.* **17**, pp. 1559-1561, (1978).
56. Casasent D., Szczutkowski C. «Optical Mellin transforms using computer generated holograms». *Opt. Commun.* **19**, pp. 217-222, (1976).
57. Мохунь И.И., Мустафин К.С., Протасевич В.И. «Оптическая реализация масштабно-инвариантного перобразования», *Автоматрия*, №1, с. 121-124, (1979)
58. Mokhun I. «Optical implementation of scale-invariant transform». *SPIE Proc.* 3317. – pp. 205-210, (– 1997).
59. Besaha R.N., Mokhun I.I., Yatsenko V.V. «Referenceless holograms in coherent filtering and image processing systems» *SPIE Proc.* 2108. pp. 261-266, (1993).
60. Mokhun I.I., Besaha R.N., Yatsenko V.V. «Application of holograms without reference beam in optical data processing, chemistry and biology» in the book. «From Galileo's occialino"to opto-electronics». Ed. by P. Mazzoldy – World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. pp. 612-615, (1993).
61. Hopfield J.J.. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities, *Proceedings of National Academy of Sciences*, **79**, pp. 2554–2558, (1982).
62. Hopfield J.J.. «Neural with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons». *PNAS* May 1, 1984, **81**, pp. 3088-3092, (1984).
63. Соколов В.К., Шубніков Є.І. "Оптичні нейронні мережі на базі голографічних кореляторів". *Квант. елект.* 22, , с. 1067-1071, (1995)
64. Owechko Y. «Nonlinear holographic associative memories». *IEEE Journal of Quantum Electronics*, **25**, pp. 619 – 634, (1989).

Навчальне видання

МОХУНЬ Ігор Іванович

ВІКТОРОВСЬКА Юлія Юріївна

КОРЕЛЯЦІЙНА ОПТИКА.

Навчальний посібник

Літературний редактор О.В. Колодій

Технічний редактор _____

Комп'ютерна верстка _____

П і д п и с а н о д о д р у к у _ _ _ _ 2 0 2 4 . Ф о р м а т
 П а п і р о ф с е т н и й . Д р у к з а р я д н и й .
 О б 'є д . а р к . 1 0 , 4 . Т и р а ж _ _ _ . З а м .
 В и д а в н и ц т в о т а д р у к а р н я Ч е р н і в е ц ь к о г о
 у н і в е р с и т е т у І в а н о в и ч а
 5 8 0 0 2 , Ч е р н і в ц і , в у л . К о ц ю б и н с ь к о г о
 e-m a i l : g u t a @ c h n u . e d u . u a
 С в і д о ц т в о с у б ' є к т а в и д а в н и ч о ї с п р а в и Д К