

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

Г. С. Пасічник

**НЕЧІТКА ЛОГІКА:
ОСНОВИ ТА ЗАСТОСУВАННЯ**

Чернівці, 2024

ББК 22.183.4.1я73
УДК 519.852(075.8)

Рецензенти:

Черевко І.М., доктор фіз.-мат.наук, професор,
завідувач кафедри математичного моделювання
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича;

Мединський І.П., доктор фіз.-мат.наук, професор,
професор кафедри прикладної математики
національного університету “Львівська політехніка”

Пасічник Г.С.

Н 545 Нечітка логіка: основи та застосування. – Чернівці: Золоті
литаври, 2024. – 116 с.

Посібник містить методичні рекомендації до виконання завдань та
набори завдань лабораторних робіт з змістовного модуля “Нечіткі мно-
жини” курсу “Нечітка логіка в інтелектуальних системах”.

Для студентів напрямків підготовки “комп’ютерні науки”, “систем-
ний аналіз”

Затверджено до друку вченою радою
факультету математики та інформатики
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича
(протокол № 1 від 30 березня 2024 року)

© Пасічник Г.С., 2024

ПЕРЕДМОВА

Мова традиційної математики, що спирається на теорію множин і двозначну логіку, виявляється недостатньо гнучкою для моделювання реальних складних систем, оскільки в ній немає засобів описання понять, якими користується людина і які мають невизначений сенс. Необхідність успішного використання математичних методів для аналізу складних систем привела до створення засобів більш точного і повного урахування нечітких уявлень і суджень людей про реальний світ у математичних моделях. Цей напрямок у галузі прикладної математики пов'язаний з ім'ям видатного американського математика Лотфі Заде і отримав назву теорії нечітких множин.

Процес побудови моделей є творчим і чітких рекомендацій тут чекати не можна. Увесь розвиток науки полягає в побудові усе більш адекватних моделей і їх дослідженні. Нечітке моделювання є перспективним напрямком прикладних досліджень у сфері управління й прийняття рішень.

Перші реалізації нечітких моделей в промисловості відносяться до середини 1970-х років. Саме в цей період в Великій Британії Ебрахім Мамдані (Ebrahim Mamdani) використав нечітку логіку для управління парогенератором.

Розв'язання цієї задачі звичними методами було пов'язане з рядом труднощів обчислювального характеру. Запропонований Е. Мамдані алгоритм базується на нечіткому логічному висновку і дозволив уникнути дуже великого об'єму обчислень і був позитивно оцінений спеціалістами. В етот же період невелика підприємницька компанія з Данії застосувала принципи нечіткого моделювання для вдосконалення системи управління доменною піччю для обпалювання цементу.

На початку 1980-х гг. нечітка математика оьримала свую розвиток в ряді програмних засобів підтримки прийняття рішень і в експертних системах аналізу даних.

Бартоломеем Коско у 1994 році була доведена теорема про нечітку апроксимацію, згідно з якою довільна математична система може бути апроксимована системою, яка базується на нечіткій логіці. Іншими словами, з допомогою природних висловлювань-правил “якщо — то” з наступною їх формалізацією засобами теорії нечітких множин, можна як завгодно точно відобразити будь-який взаємозв'язок “вхід — вихід” без використання складного апарату диференціального та інтегрального числення, які традиційно використовуються в управлінні. Далі автор показує, що два тисячоліття тому людство зробило рокову помилку, за-

клавши у фундамент науки не поетику ранніх східних філософій, а величну двійкову логіку Арістотеля. З тих пір класична “чорно-біла” бінарна логіка, затиснена шорами закону “виключення третього” все більше віддаляється від реального кольорового світу, де немає нічого абсолютного, а все найцікавіше проходить в туманній області між “так” та “ні”.

Під нечіткою моделлю розуміється часто інформаційно-логічна модель системи, побудована на основі теорії нечітких множин і нечіткої логіки. Нечітке моделювання особливо корисне, коли в описі технічних систем і бізнес-процесів є невизначеність, яка ускладнює або навіть унеможлиблює застосування точних кількісних методів. В області управління технічними системами нечітке моделювання дозволяє отримувати адекватні результати порівняно з результатами, які ґрунтуються на використанні традиційних аналітичних моделей та алгоритмів управління. Діапазон застосування нечітких методів охоплює такі галузі, як проектування промислових роботів і побутових електроприладів, управління доменними печами і рухом поїздів метро, управління промисловою безпекою підприємств, автоматичне розпізнавання мови і зображень.

Нечітка логіка є апаратом розв’язання великого класу практичних задач. Вона знайшла застосування в теорії алгоритмів, теорії прийняття рішень, розпізнаванні образів і штучному інтелекті. Теорія нечітких множин — єдина теорія, яка математично оперує зі смисловим змістом слів людини (математична лінгвістика).

Наведений матеріал, приклади не є оригінальними, вони розглядалися різними науковцями і взяті з різних наукових публікацій.

У посібнику кожному пункту відповідає своя наскрізна нумерація формул і рисунків.

1 ЗАДАННЯ ТА ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЧІТКИХ МНОЖИН

Нехай X – універсальна множина, тобто множина, з елементів якої утворені інші множини, які розглядаються в певному класі задач. X – підмножина X , тобто $A \subset X$. Характеристична функція множини X

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

визначає належність елемента $x \in X$ до множини A . Особливістю характеристичної функції є бінарність її області значень. Нечіткі множини є природним узагальненням звичайних множин, коли відмовляються від бінарного характеру характеристичної функції і вважається, що вона набуває значень з $[0, 1]$. В теорії нечітких множин характеристичну функцію називають *функцією належності*, а її значення $\mu_A(x)$ – *ступенем належності елемента x до множини A* .

Нечіткою множиною A називається сукупність пар $\langle x; \mu_A(x) \rangle$, де $x \in X$, $\mu_A(x)$ – функція належності, яка ставить у відповідність кожному $x \in X$ деяке дійсне число з відрізка $[0, 1]$. При цьому $\mu_A(x) = 1$ означає, що x точно належить до нечіткої множини A , а $\mu_A(x) = 0$ означає, що x точно не належить до нечіткої множини A . Інші значення функції $\mu_A(x)$ з проміжка $(0, 1)$ означають, що елемент x належить до нечіткої множини A в певній мірі (ступені). Функція належності $\mu_A(x)$ елемента x до нечіткої множини A – це суб'єктивна міра того, наскільки елемент x відповідає поняттю, яке формалізується нечіткою множиною.

Нечіткої множини позначають великими латинськими літерами $A, B, C \dots$. Для задання нечіткої множини A потрібно;

- 1) задати універсальну множину X ;
- 2) задати функцію належності $\mu_A(x)$ кожного елемента $x \in X$ до нечіткої множини A .

ПРИКЛАД 1.1. Нехай $X = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{\langle a; 0 \rangle, \langle b; 0,1 \rangle, \langle c; 0,5 \rangle, \langle d; 0,9 \rangle, \langle e; 1 \rangle\}$.

Тут елемент a не належить до нечіткої множини A ; елемент b в малій мірі належить до нечіткої множини A ; ступінь належності елемента d до нечіткої множини A 0,9; елемент e належить до нечіткої множини A .

ПРИКЛАД 1.2. Нехай $X = \mathbb{R}$, $\mu_A(x) = (1 + |x - 10|^m)^{-1}$, $m \in \mathbb{N}$.

Тут нечітка множина A означає “множину чисел, близьких до 10”. Графік функції належності подано на рис. 1.1. Н при m рівному 1, 4 та 7.

```
In[12]:= Plot[{1/(1 + Abs[x - 10]), 1/(1 + (Abs[x - 10])^2), 1/(1 + (Abs[x - 10])^4)}, {x, 5, 15}]
```

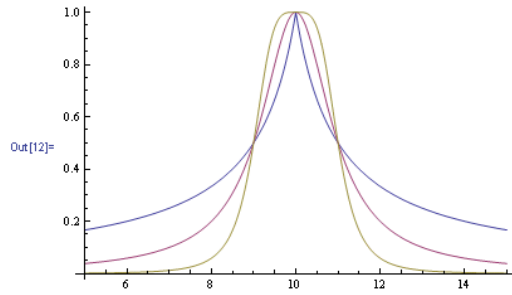


Рис. 1.1

ПРИКЛАД 1.3. Нехай $X = [0, 100]$. Нечітка множина A , яка описує поняття “молода людина” може мати функцію належності

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 25], \\ \frac{1}{1 + \left(\frac{x-25}{5}\right)^2}, & x \in (25, 100]. \end{cases}$$

Її графік подано на рис.1.2.

```
In[16]:= Plot[{1/(1 + ((x-25)/5)^2)}, {x, 0, 100}]
```

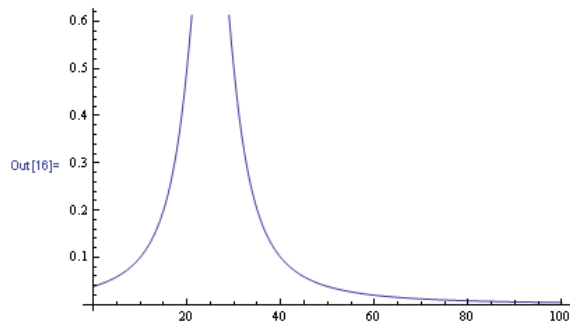


Рис. 1.2

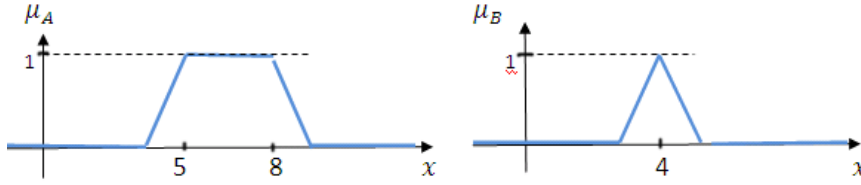


Рис. 2.1

На рис. 2.2 зображено функцію належності об'єднання та перетину нечітких множин A та B і доповнення множини A .

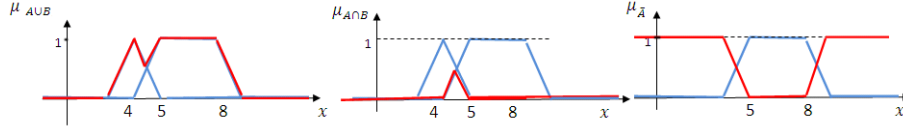


Рис. 2.2

Різницею нечітких множин A та B називається нечітка множина $A \setminus B$, функція належності якої має вигляд

$$\mu_{A \setminus B}(x) = \min\{\mu_A(x); 1 - \mu_B(x)\}.$$

Симетричною різницею нечітких множин A та B називається нечітка множина $A \triangle B$, функція належності якої має вигляд

$$\mu_{A \triangle B}(x) = \max\left\{\min\{\mu_A(x); 1 - \mu_B(x)\}; \min\{1 - \mu_A(x); \mu_B(x)\}\right\}.$$

Правильна властивість

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B).$$

Розглянемо властивості операцій об'єднання та перетину нечітких множин.

Нехай нечіткі множини A , B та C задані на універсальній множині X . Тоді правильні такі властивості:

1) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (комутативність об'єднання та перетину);

- 2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (асоціативність об'єднання та перетину);
- 3) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ (ідемпотентність об'єднання та перетину);
- 4) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,
 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (дистрибутивність операції об'єднання відносно перетину та перетину відносно об'єднання);
- 5) $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$ (поглинання однієї з нечітких множин при операціях об'єднання та перетину);
- 6) $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup X = X$, $A \cap X = A$ (універсальність верхньої і нижньої межі операцій об'єднання та перетину);
- 7) $\bar{\bar{A}} = A$ (подвійне доповнення нечіткої множини);
- 8) $A \cap \bar{B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $A \cup \bar{B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (закони де Моргана).
- В загальному випадку для нечітких множин

$$A \cup \bar{A} \neq X, \quad A \cap \bar{A} \neq \emptyset.$$

На рис. 2.3 зображено функцію належності об'єднання та перетину нечітких множин A та $\bar{A}$.

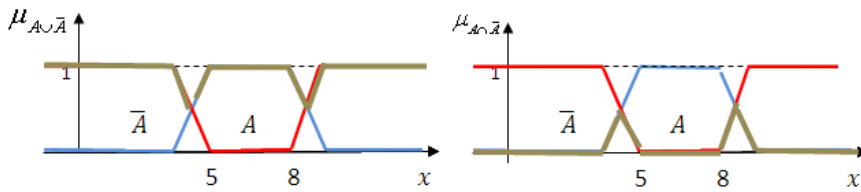


Рис. 2.3

Вищерозглянені операції отримали найбільше застосування при розв'язуванні практичних задач нечіткого моделювання, оскільки ці операції найбільш природні для інтуїтивного подання невизначеності, пов'язаної з використанням відповідних їм зв'язок “і”, “або”, “ні”, а також задовольняють властивості 1)–8), що максимально наближує структуру нечітких множин до булевої алгебри.

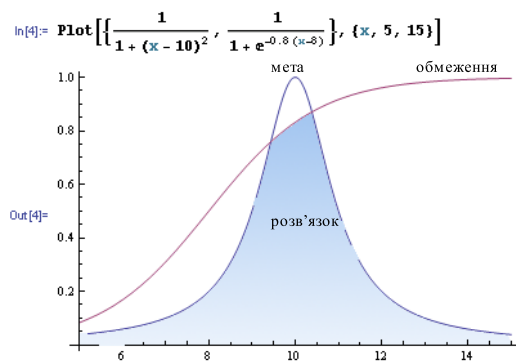


Рис. 3.1

При прийнятті рішень за схемою Беллмана–Заде не робиться ніякої різниці між метою і обмеженням. В традиційній теорії прийняття рішень подібні заміни неприпустимі. Однак і тут простежується деяка подібність між цілями та обмеженнями, яка стає явною при використанні, скажімо, методу множників Лагранжа, коли цільова функція та обмеження об'єднуються в одну функцію..

Якщо $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha \in [0, 1]$, – коефіцієнт відносної важливості мети, а $\beta \in (0, 1)$ – коефіцієнт відносної важливості обмеження, $\alpha + \beta = 1$, то розв'язок $D = A^\alpha \cap B^\beta$. Чим більший коефіцієнт відносної важливості, тим відповідні нечіткі множини мети чи обмеження стають більш розмитими і, як наслідок, їх роль в прийнятті рішення знижується. На рис 3.2 показано нечіткі рішення при різних коефіцієнтах відносної важливості.

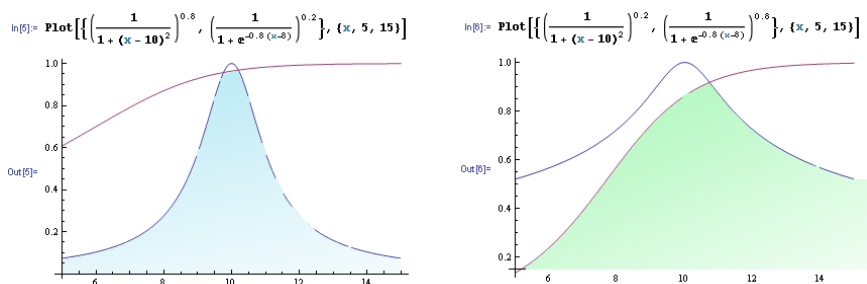


Рис. 3.2

Приклад 9.4. Оцінити за 100-бальною шкалою виступ спортсмена в лижному двоборстві, враховуючи його результати в лижній гонці на 15 км — 30 чв. і в стрибках з 90-метрового трампліну — 90 балів.

◀ Підсумкову оцінку розглядатимемо як вихідну лінгвістичну змінну “сума” з термами “низька” (D_1), “середня” (D_2), “хороша” (D_3), “висока” (D_4) і універсальну множину $[0;100]$ балів.

Вихідними змінними є лінгвістичні змінні:

- “гонка” (затрачений час t) з термами “повільно” (A_1), “середньо” (A_2), “швидко” (A_3) та універсальну множину $[24;36]$ (хв.);
- “стрибок” (сума балів s) з термами “слабко” (B_1), “добре” (B_2), “відмінно” (B_3) та універсальну множину $[30;120]$ (балів).

Графіки функцій приналежності цих лінгвістичних змінних згідно з експертними оцінками мають вигляд рис. 9.15 і рис. 9.16 відповідно.

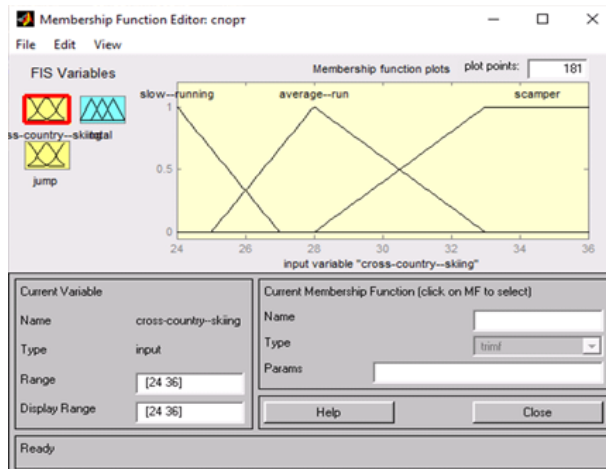


Рис. 9.15

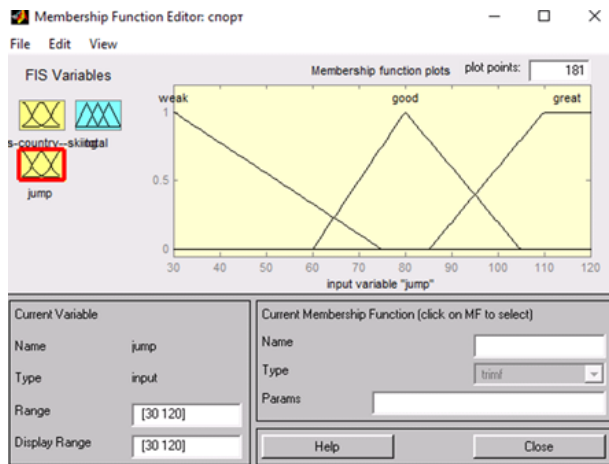


Рис. 9.16

Графік функцій приналежності лінгвістичної змінної “сума” згідно з експертними оцінками має наступний вигляд (рис 9.17).

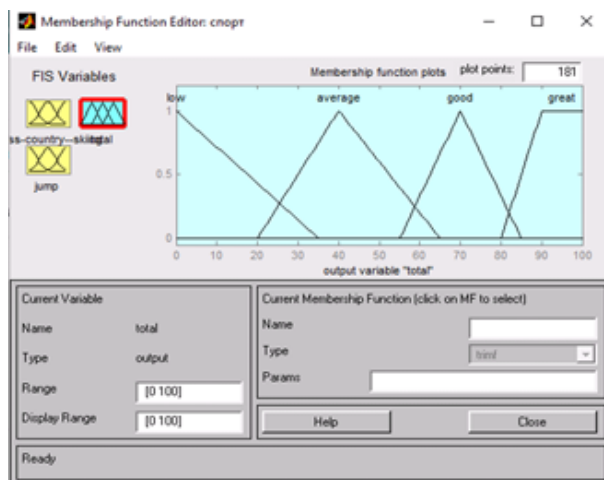


Рис. 9.17

Нечіткі правила (база знань), тобто відношення між лінгвістичними змінними, подано в таблиці.